Université Ouaga3S
Savoir. Savoir faire. Savoir être

**2024 - 2025**
**FSTS**
**LMI3**
**Semestre 5**

**Enseignants : Dr. KAFANDO / M. RAMDÉ**

**MODULE : MESURE & INTÉGRATION**

# Travaux dirigés - 2

⋆⋆⋆

**Exercice 1** *Déterminer, lorsqu'elle existe, la limite des chacunes des expressions suivantes :*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{]0,n[}(\ln x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n d\lambda(x)$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{[0,1]}\frac{1+nx}{(1+x)^n}d\lambda(x)$,
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+}e^{-n\sin^2 x}f(x)\,d\lambda(x)$ *où $f$ est une fonction intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.*

⋆⋆⋆

**Exercice 2** *Pour tout $x \geq 0$, on pose* $f(x)=\displaystyle\int_{[0,1]}\frac{\exp\left(-x\left(1+t^2\right)\right)}{1+t^2}d\lambda(t)$.

1. *Montrer que $f$ est bien définie; calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.*
2. *Montrer que $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, calculer $f'$ en fonction d'une intégrale et donner un équivalent de $f'$ au voisinage de l'infini (on rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$).*

⋆⋆⋆

**Exercice 3** *Soient $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés dont les mesures sont $\sigma-finies$.*

1. *Montrer que les projections $p_i$ de $(\Omega_1\times\Omega_2, \mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2)$ sur $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ définies par :*

$$p_i(\omega_1, \omega_2)=\omega_i\,,$$

*pour $i\in\{1;2\}$ sont mesurables. Pour $i\in\{1;2\}$, soient maintenant $f_i, g_i$ ds applications mesurables de $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et soient $f$ et $g$ les applications de $\Omega_1\times\Omega_2$ vers $\mathbb{R}$ définies par $f(\omega_1,\omega_2)=f_1(\omega_1)\,f_2(\omega_1)$ et $g(\omega_1,\omega_2)=g_1(\omega_1)\,g_2(\omega_1)$ pour tout $(\omega_1,\omega_2)\in\Omega_1\times\Omega_2$.*

2. *Montrer que $f$ et $g$ sont mesurables dans* $(\Omega_1 \times \Omega_2,\ \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ *vers* $(\mathbb{R},\ \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

3. *Montrer que, si* $f_i = g_i\ \ \mu_i - pp$ *pour* $i \in \{1;\ 2\}$, *alors* $f = g\ \ \mu_1 \otimes \mu_2 - pp$.

⋆⋆⋆

**Exercice 4 (Cet exercice est extrait du D. A. R de mesure et intégration 2021)**

1. *Soit* $(X, \mathscr{B}, \mu)$ *un espace de mesure.*

   *On rappelle qu'une partie* $N$ *de* $X$ *est* $\mu$*-negligeable s'il existe au moins un* $B \in \mathscr{B}$ *tel que* $N \subset B$ *et* $\mu(B) = 0$. *Notons* $\mathscr{N}_\mu$ *l'ensemble des* $\mu$*-négligeables*

   (a) *Vérifier que* $\varnothing \in \mathscr{N}_\mu$.

   (b) *Montrer que* $\mathscr{N}_\mu$ *est* ***héréditaire****, c'est-à-dire*

   $$B,\ B' \in \mathscr{P}(X),\ B' \subset B,\ B \in \mathscr{N}_{\boldsymbol{\mu}} \Rightarrow\ B' \in \mathscr{N}_{\boldsymbol{\mu}}$$

   (c) *Montrer que* $\mathscr{N}_\mu$ *est stable pour la réunion dénombrable.*

2. *On pose* $\mathscr{B}_\mu = \{B \cup N : B \in \mathscr{B}, N \in \mathscr{N}_\mu\}$.

   (a) *Montrer que* $B\mathscr{B}_\mu$ *est une* $\sigma$*-algèbre contenant* $\mathscr{B}$.

   (b) *Si* $B \in \mathscr{B}, N \in \mathscr{N}_\mu$, *on pose* $\hat{\mu}(B \cup N) = \mu(B)$.
   *Montrer que* $\hat{\mu}$ *est une application* ***bien définie*** *sur* $\mathscr{B}_\mu$, *en ce sens que, si un élément* $C$ *de* $\mathscr{B}_\mu$ *s'écrit de deux manières* $C = B \cup N$ *et* $C = B' \cup N'$, *alors on a* $\mu(B) = \mu(B')$.
   [On posera alors $\hat{\mu}(C) = \mu(B) = \mu(B')$]

   (c) *Montrer que* $\hat{\mu}$ *est une mesure sur l'espace mesurable* $(X, \mathscr{B}_\mu)$.

   (d) *Montrer que* $\hat{\mu}$ *est une mesure complète i.e* $\mathscr{N}_{\hat{\mu}} \subset \mathscr{N}_\mu$

   (e) *Vérifier que* $\hat{\mu}$ *prolonge* $\mu$.