Université Ouaga3S
Savoir. Savoir faire. Savoir être

2024 - 2025
FSTS
LMI3
Semestre 5

Enseignants : Dr. KAFANDO / M. RAMDÉ

MODULE : MESURE & INTÉGRATION

Travaux dirigés - 3

⋆⋆⋆

Exercice 1 *Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et ν la somme $\lambda+\delta_0$ de la mesure λ avec la mesure de Dirac en 0 (restreinte à la tribu des ensembles mesurables).*

1. *La mesure λ est-elle absolument continue par rapport à ν?.*
2. *La mesure λ admet-elle une densité par rapport à ν?. Si oui, la préciser*

⋆⋆⋆

Exercice 2 *Soit μ la mesure produit de la mesure de Lebesgue par la mesure $\delta=\delta_1+2\delta_2$.*
Calculer l'intégrale par rapport à cette mesure de

1. *la fonction caractéristique du disque fermé de rayon 2 centrée en $(0,0)$;*
2. *La fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2+1}$.*

⋆⋆⋆

Exercice 3 *Calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_{B(0,1)}\left(x^2+y^2+z^2\right)d\lambda_3(x,y,z)$ étendue à la boule euclidienne ouverte centrée en l'origine et de rayon 1.*

⋆⋆⋆

Exercice 4 *Montrer en utilisant l'inégalité de Hölder que, pour $a>0$;*

$$\int_0^a x^{-\frac{1}{2}}e^{2x}dx\leq\frac{3}{2}a^{1/6}e^{2a}.$$