Université Ouaga3S
Savoir. Savoir faire. Savoir être

2024 - 2025
FSTS
LMI3
Licence 3 - Semestre 6

Probabilité

Travaux Dirigés - 2

⋆⋆⋆

Exercice 1 *Soit X une v.a.r. suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et soit $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Déterminer les lois suivies par les v.a.r. $Y = \max(n, X)$ et $Z = \min(n, X)$.*
2. *Soit T une v.a.r. indépendante de X suivant aussi la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Déterminer les lois suivies par $X + T$, $\max(X, T)$ et $\min(X, T)$.*

⋆⋆⋆

Exercice 2 *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{]-1,0[}(x)\,\mathbb{1}_{]0,1[}(y) + \mathbb{1}_{\mathcal{D}}$$

où $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x + y < 1.\right\}$.

1. *Vérifier que f est la densité d'un couple (X, Y); déterminer les lois marginales de X et de Y ainsi que la densité de la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ pour tout x tel que $f_X(x) \neq 0$.*
2. *Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes? Calculer $cov(X, Y)$.*
3. *Soient $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Déterminer la densité du couple (U, V).*

⋆⋆⋆

Exercice 3 *Matrices stochastiques.*

Une particule se déplace sur les S sommets d'un triangle (ABC) de la façon suivante, à l'issue de chaque seconde : lorsqu'elle est en A, elle y reste avec une probabilité de 0.25, elle va en B avec une probabilité de 0.5, et en C avec une probabilité de 0.25. Lorsqu'elle est en B, elle va en A avec une probabilité de 0.5, et va en C avec une probabilité de 0.5. Lorsqu'elle est en C, elle va toujours en B. On suppose qu'elle est en A à l'instant initial. Quelle est la probabilité qu'elle soit en B au bout de 60 secondes ? On note A_n l'événement : « la particule est en A à l'instant n », $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ (mêmes notations pour B et C), et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \{0; \ldots; 59\}$, $X_{n+1} = AX_n$.*

2. *A est appelée matrice stochastique. Quelle remarque peut-on faire sur ses coefficients ?.*

3. *Montrer que 1 est valeur propre de A, et en déduire son spectre.*

4. *Diagonaliser A et déterminer X_{60}.*

$\star\star\star$

Exercice 4 (Suite de v.a.r i.i.d. de Poisson) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une v.a. de Poisson de paramètre λ $(\lambda > 0)$.*

1. *Calculer la fonction caractéristique φ_X de X et déduire que $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $\mathbb{V}(X) = \lambda$.*

2. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes et de Poisson de paramètre λ.*

   (a) *Soit $n > 1$. Déduire de la question 1 la loi de la v.a. $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.*

   (b) *Utiliser le théorème central limite pour démontrer que*

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2} \text{ quand } n \to +\infty.$$

$\star\star\star$

Exercice 5 *Soit g la fonction définie par:*

$$g(x) = A\left(x^2 e^x \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(x) + x e^{-x^2} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\right)$$

1. *Déterminer A pour que g soit la densité d'une v.a.r. X.*

   Aide : On se souviendra avec profit que, pour tout $a \in \mathbb{R}_*^+$, la fonction Γ est définie par

   $$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} du.$$

   et

   $$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

2. *Montrer que X admet une espérance et une variance et calculer celles-ci.*

$\star\star\star$

Exercice 6 *Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et T indépendante de X telle que sa loi est donnée par :*

$$\mathbb{P}_T(dt) = \frac{1}{2}\delta_{-1}(dt) + \frac{1}{2}\delta_1(dt).$$

1. *Montrez que $Y = TX$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.*

2. *Montrez que le vecteur aléatoire (X, Y) n'est pas un vecteur gaussien.*