Université Ouaga3S
Savoir. Savoir faire. Savoir être

2024 - 2025

FSTS

LMI3

Licence 3 - Semestre 5

Probabilité

Travaux Dirigés

1 Mesures

Exercice 1
On considère l'application μ de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $[0, +\infty]$ définie, pour tout $A \subset \mathbb{N}$, par $\mu(A) := \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2}$ $\left(\text{avec la convention } \frac{1}{0} = +\infty\right)$ si A est fini, $\mu(A) = +\infty$ si A est infini, et $\mu(\varnothing) = 0$. Montrer que

1. *μ est simplement-additive sur $\mathbb{N}$, i.e. pour toute suite finie $A_1, \ldots, A_n$ de parties de $\mathbb{N}$, deux à deux disjointes,*
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$
2. *μ n'est pas σ-additive sur $\mathbb{N}$.*

2 Fonctions mesurables et variables aléatoires Intégrale de Lebesgue et variables aléatoires

Exercice 2 *Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.*

1. *Déterminer la loi de la variable $Z = |X - 1|$.*
2. *Fixons $a \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $W_a = \max(X; a)$.*

3 Fonction de répartition et fonction caractéristique

Exercice 3 *Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité $f_X : \mathbb{R} \to [0; +\infty]$ définie par*
$$f_X(x) = \max(1 - |x|, 0).$$

1. *Notons φ_X la fonction caractéristique de X. Montrer que*

$$\varphi_X(u) = \begin{cases} 1 & si \quad u = 0 \\ \frac{2-2\cos(u)}{u^2} & si \quad u \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

2. *Fixons $p \in \mathbb{N}^*$: Montrer que la variable aléatoire X^p est intégrable et calculer son espérance en fonction de la dérivée p-ième de φ_X (dont on justifiera l'existence).*

4 Théorème de Fubini

Exercice 4 *Le but de cet exercice est de démontrer que l'intégrale de la densité gaussienne est égale à 1, c'est-à-dire, de manière équivalente, que*

$$I := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \lambda_1(dx) = \sqrt{2\pi}.$$

1. *Montrer que*

$$I^2 = 4 \int_{]0;+\infty[^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \lambda_2(dx, dy).$$

2. *Soit g la fonction définie par $g(r;\theta) = (r\cos\theta; r\sin\theta)$ définie sur $]0;+\infty[\times]0;\frac{\pi}{2}[$. Montrer que g est inversible et calculer le déterminant de sa matrice jacobienne.*

3. *Conclure à l'aide du changement de variable "$(x;y) = g(r;\theta)$"*

5 Indépendance de variables aléatoires

Exercice 5 *Soit $(X;Y)$ un vecteur aléatoire de loi absolument continue dont la densité f est donnée sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(4x^2 + 2xy + y^2\right)\right], \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. *Déterminer la loi de X et celle de Y.*

2. *Les variables aléatoires réelles X et Y sont-elles indépendantes ?.*

Exercice 6 *On lance 2 dés. Soit T la somme des points obtenus, X le reste de la division de T par 2 et Y le reste de la division de T par 5.*

1. *Donner la loi conjointe de (X,Y).*

2. *Donner les lois marginales de X et de Y.*

3. *Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes?.*

6 Variance, moments et espaces $\mathbf{L}^p$

Exercice 7 *Soit X une variable aléatoire absolument continue dont la densité $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est définie par*

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

1. *Fixons $p \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire $Y = \operatorname{arctan}(X)$ admet-elle un moment d'ordre p? Si oui, le calculer. Si elle est bien définie, calculer aussi sa variance.*

2. *Déterminer la loi de Y . Retrouver les résultats donnés à la question précédente en utilisant cette loi.*

7 Suites de variables aléatoires

Exercice 8 *Soit X_n une v.a.r. de loi binomiale négative de paramètres n et p_n définie, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par:*

$$\mathbb{P}_X(dx) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} p_n^n (1-p_n)^k \delta_k(dx).$$

On suppose que $\lim_{n\to\infty} n(1-p_n) = \lambda > 0$.
Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

8 Vecteurs gaussiens

Exercice 9 *Soient X, Y, Z trois variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.*

1. *Déterminer les lois respectives des variables aléatoires réelles $U := X+Y+Z$, $V := 2X-Y-Z$ et $W := Y-Z$.*

2. *Montrer que les variables aléatoires réelles $X-Y$, $Y-Z$ et $Z-X$ sont chacunes indépendantes de la v.a.r. U.*

3. *Le vecteur aléatoire de dimension 3, (U,V,W), est-il gaussien ? Préciser sa loi.*

4. *Le triplet de variables aléatoires réelles (U,V,W) est-il indépendant ?.*

$\mathscr{F}\mathscr{I}\mathscr{N}$