

Le Théorème de Burnside

Version Série Entière (Théorème de Pólya)

Développement Combinatoire

2 juin 2026

Résumé

Ce document présente le développement rigoureux du théorème de Burnside formulé sous forme de série entière, également connu sous le nom de **Théorème de dénombrement de Pólya**. Cette approche systématique unifie la théorie des groupes finis et les séries génératrices pour dénombrer des structures combinatoires (coloriages, graphes, molécules) à symétrie près.

1 Le Contexte et Cadre Combinatoire

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X de « sites » ou de positions (par exemple, les sommets d'un polygone, les faces d'un cube).

On considère un ensemble de couleurs C . À chaque couleur $c \in C$, on associe une variable formelle t_c (ou un poids). L'espace des configurations est l'ensemble des fonctions $Y = C^X = \{f : X \rightarrow C\}$, représentant tous les coloriages possibles de X .

Le groupe G agit naturellement sur Y par pré-composition :

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x) \quad \forall g \in G, f \in Y, x \in X$$

Le poids d'un coloriage f est défini par le produit des poids de ses composants :

$$W(f) = \prod_{x \in X} t_{f(x)}$$

L'objectif est de calculer la ****série génératrice des coloriages non équivalents**** (les orbites de l'action de G sur Y) classés selon leur poids.

2 L'Indicateur de Cycles (Cycle Index)

Pour exprimer le théorème sous forme de série, il est nécessaire d'introduire un polynôme qui capture la structure cyclique des éléments du groupe.

Pour chaque élément $g \in G$, la permutation induite sur X se décompose de manière unique en cycles disjoints. Soit $c_k(g)$ le nombre de cycles de longueur k dans cette décomposition. On a évidemment la relation $\sum_{k=1}^n k \cdot c_k(g) = |X| = n$.

On associe à g le monôme de variables auxiliaires $z_1, z_2, \dots, z_n$:

$$\prod_{k=1}^n z_k^{c_k(g)} = z_1^{c_1(g)} z_2^{c_2(g)} \dots z_n^{c_n(g)}$$

2.1 Définition

L'indicateur de cycles du groupe G opérant sur X , noté $Z_G(z_1, z_2, \dots, z_n)$, est défini par la moyenne de ces monômes sur tout le groupe :

$$Z_G(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{k=1}^n z_k^{c_k(g)}$$

3 Énoncé du Théorème (Version Série Entière)

Le théorème de dénombrement de Pólya substitue aux variables algébriques abstraites z_k des séries de puissances liées aux poids des couleurs.

Théorème (Pólya / Burnside en série entière) :

La série génératrice $F(t_1, t_2, \dots)$ des coloriage non équivalents sous l'action de G est obtenue en remplaçant chaque variable z_k de l'indicateur de cycles par la somme des puissances k -ièmes des poids des couleurs :

$$z_k \longleftarrow \sum_{c \in C} t_c^k = t_1^k + t_2^k + t_3^k + \dots$$

Formellement, la série s'écrit :

$$F(t_1, t_2, \dots) = Z_G \left(\sum_{c \in C} t_c, \sum_{c \in C} t_c^2, \sum_{c \in C} t_c^3, \dots, \sum_{c \in C} t_c^n \right)$$

En développant explicitement, on obtient :

$$F(t_1, t_2, \dots) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{k=1}^n \left(\sum_{c \in C} t_c^k \right)^{c_k(g)}$$

4 Cas Particulier Réduit (Une seule variable)

Si l'on restreint le problème à deux types de couleurs, par exemple des jetons de poids t (couleur noire) et de poids 1 (couleur blanche), la série entière se simplifie sous une forme polynomiale à une variable.

La substitution devient $z_k \longleftarrow 1 + t^k$. On obtient alors :

$$F(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (1+t)^{c_1(g)} (1+t^2)^{c_2(g)} \dots (1+t^n)^{c_n(g)}$$

Le coefficient devant chaque terme t^m dans le développement en série de $F(t)$ donne précisément le **nombre d'orbites de configurations contenant exactement m objets de couleur noire**.

Lien avec le Lemme de Burnside classique :

Si l'on pose $t = 1$ (toutes les couleurs ont un poids égal à 1), la formule se réduit à :

$$F(1) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} 2^{c_1(g) + c_2(g) + \dots + c_n(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

Où $|X^g|$ est le nombre de coloriage invariants sous g . On retrouve exactement la formule classique du Lemme de Burnside.