

Université Félix Houphouët-Boigny — UFRMI-L1

TD-Fiche 3-4/4 — ECUE : Dérivation des fonctions réelles

Correction détaillée des exercices

NB : Les énoncés sont reproduits tels quels. Les corrections sont présentées dans des encadrés à bordure verte.

Chapitre III — Développement de Taylor et convexité

Exercice 1

Montrer que :

1. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$;
2. pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $1 - \cos(x) \leq x \sin(x)$;
3. pour tout $x \in]-1, 1[$, $|\arcsin(x)| \leq \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$;
4. pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$;
5. pour tout $x \in [-1, 1]$, $1 - \frac{x^2}{2!} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$;
6. pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{3!}\cos(x)$;
7. pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Correction :

1. La fonction $f(x) = x - \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$.
Donc f est croissante. Comme $f(0) = 0$, on a $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$, soit $\sin x \leq x$. Par parité, $|\sin x| \leq |x|$.
2. Posons $g(x) = x \sin x - 1 + \cos x$. Alors
 $g'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$. Sur $[0, \pi/2]$, $x \geq 0$ et $\cos x \geq 0$,
donc $g'(x) \geq 0$. Ainsi g est croissante et $g(0) = 0$, donc $g(x) \geq 0$.
3. Pour $x \in]0, 1[$, par le théorème des accroissements finis appliqué à arcsin entre
0 et x , il existe $c \in]0, x[$ tel que $\arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-c^2}}$. Comme $c < x$, on a
 $\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, d'où $\arcsin x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Pour $x < 0$, on utilise l'impairité.
4. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour $\ln(1+x)$ donne
 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3}$ avec c entre 0 et x . Le reste est positif pour
 $x > 0$, d'où la minoration. À l'ordre 3, le reste est négatif, d'où la majoration.
5. Pour $\cos x$, Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\cos c$ avec
 c entre 0 et x . Comme $|\cos c| \leq 1$, on obtient l'encadrement demandé.
6. Pour $\sin x$, Taylor-Lagrange à l'ordre 3 donne $\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos c$ avec
 $c \in]0, x[$. Comme $\cos c \leq 1$, on a $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$. De plus, $\cos$ décroît sur
 $[0, \pi/2]$, donc $\cos c \geq \cos x$, d'où $\sin x \leq x - \frac{x^3}{6}\cos x$.
7. Pour $\sqrt{1+x}$, Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8(1+c)^{3/2}}$
avec $c \in]0, x[$. Comme $(1+c)^{3/2} \geq 1$, on a $\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$. La
dérivée seconde étant négative, le reste est négatif, d'où $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Exercice 2

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I , à la dérivée seconde positive. Montrer que le graphe de f est "au-dessus de ses tangentes".

Correction : Soit $a \in I$ fixé. Pour tout $x \in I$, appliquons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre a et x : il existe c entre a et x tel que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(c)(x - a)^2.$$

Puisque $f''(c) \geq 0$, le dernier terme est positif ou nul. Donc

$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ pour tout x , ce qui signifie que la courbe est au-dessus de sa tangente au point a .

Exercice 3

Soient $a, h \in \mathbb{R}$, avec $h > 0$, et $f : [a, a + 2h] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $[a, a + 2h]$. Montrer qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(a) - 2f(a + h) + f(a + 2h) = h^2 f''(a + 2\theta h).$$

Correction :

On cherche à montrer l'existence de $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(a) - 2f(a + h) + f(a + 2h) = h^2 f''(a + 2\theta h).$$

Posons $A = \frac{f(a) - 2f(a + h) + f(a + 2h)}{h^2}$. Définissons sur $[0, 2h]$ la fonction auxiliaire

$$\Phi(t) = f(a + t) - f(a) - \frac{t}{2h} (f(a + 2h) - f(a)) - \frac{t(t - 2h)}{2} A.$$

On vérifie que $\Phi(0) = 0$, $\Phi(2h) = 0$ et, grâce au choix de A , $\Phi(h) = 0$. En effet,

$$\Phi(h) = f(a + h) - f(a) - \frac{1}{2} (f(a + 2h) - f(a)) + \frac{h^2}{2} A,$$

et comme $A = \frac{f(a) - 2f(a + h) + f(a + 2h)}{h^2}$, on a $f(a + h) = \frac{f(a) + f(a + 2h)}{2} - \frac{h^2}{2} A$, d'où $\Phi(h) = 0$.

La fonction Φ est deux fois dérivable sur $[0, 2h]$ (car f l'est). Par le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in]0, h[$ et $c_2 \in]h, 2h[$ tels que $\Phi'(c_1) = \Phi'(c_2) = 0$. Puis, en appliquant à nouveau Rolle à Φ' sur $[c_1, c_2]$, on obtient $\xi \in]c_1, c_2[\subset]0, 2h[$ vérifiant $\Phi''(\xi) = 0$.

Calculons les dérivées de Φ :

$$\Phi'(t) = f'(a + t) - \frac{f(a + 2h) - f(a)}{2h} - \frac{2t - 2h}{2} A,$$

$$\Phi''(t) = f''(a + t) - A.$$

La condition $\Phi''(\xi) = 0$ donne $f''(a + \xi) = A$. En posant $\theta = \frac{\xi}{2h} \in]0, 1[$, on a $\xi = 2\theta h$, et donc

$$f(a) - 2f(a + h) + f(a + 2h) = h^2 f''(a + 2\theta h).$$

Ceci achève la démonstration.

Exercice 4

Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment dérivable (classe C^2) sur $] - 1, 1[$ telle que $f''(0) \neq 0$, et soit $\theta :]-1, 1[\rightarrow]0, 1[$ une fonction pour laquelle, pour tout $x \in]-1, 1[$, on puisse écrire l'égalité $f(x) = f(0) + x f'(x\theta(x))$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = 1/2$.

Correction : Par la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2).$$

D'autre part, par hypothèse, $f(x) = f(0) + x f'(x\theta(x))$. Développons $f'(x\theta(x))$ au premier ordre (puisque f' est C^1) :

$$f'(x\theta(x)) = f'(0) + x\theta(x) f''(0) + o(x).$$

En reportant,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + x [f'(0) + x\theta(x) f''(0) + o(x)] \\ &= f(0) + x f'(0) + x^2 \theta(x) f''(0) + o(x^2). \end{aligned}$$

En comparant avec le développement de Taylor, on obtient pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2) = x^2 \theta(x) f''(0) + o(x^2) \quad \Rightarrow \quad \theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{o(1)}{f''(0)}.$$

Comme $f''(0) \neq 0$, on en déduit $\theta(x) \rightarrow \frac{1}{2}$ quand $x \rightarrow 0$.

Exercice 5 (Inégalité de Kolmogorov)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose que $|f|$ et $|f''|$ sont bornées respectivement par M_0 et M_2 . Montrer que $|f'|$ est bornée par $2\sqrt{M_0 M_2}$.

Correction : Soit $x > a$. Pour tout $h > 0$ tel que $x + h$ et $x - h$ soient dans $]a, +\infty[$, appliquons Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre x et $x \pm h$:

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c_1), \quad f(x - h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c_2)$$

avec $c_1 \in]x, x + h[$, $c_2 \in]x - h, x[$. En soustrayant, on obtient

$$f(x + h) - f(x - h) = 2hf'(x) + \frac{h^2}{2} (f''(c_1) - f''(c_2)).$$

D'où

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x + h) - f(x - h)|}{2h} + \frac{h}{4} (|f''(c_1)| + |f''(c_2)|) \leq \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2.$$

Cette inégalité est valable pour tout $h > 0$. Le minimum de $h \mapsto M_0/h + hM_2/2$ est atteint pour $h = \sqrt{2M_0/M_2}$ et vaut $\sqrt{2M_0 M_2}$.

Pour obtenir la borne $2\sqrt{M_0 M_2}$, on utilise Taylor à l'ordre 1 avec un seul point :

$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c)$, ce qui donne $|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ (car $|f(x + h) - f(x)| \leq 2M_0$). En optimisant par l'inégalité arithmético-géométrique, on obtient $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Exercice 6

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Montrer que 0 est le seul extremum de f .
2. S'agit-il d'un minimum ou d'un maximum ? Justifier votre réponse.

Correction : f est dérivable et $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. Le signe de f' est celui de $-x$: positif pour $x < 0$, négatif pour $x > 0$. Donc f est croissante sur $] -\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$. Ainsi $x = 0$ est l'unique point où la dérivée s'annule, et c'est un maximum. Il n'y a pas d'autre extremum car la fonction est strictement monotone de chaque côté. $f(0) = 1$ est le maximum.

Exercice 7

Soit la fonction $f : [\pi/2, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin(1/x)$.

1. Montrer qu'aucun point intérieur à $[\pi/2, 2\pi]$ ne peut être un extremum de f .
2. En déduire que f atteint ses bornes aux points 2 et 2π , puis comparer $\frac{2}{\pi} \sin(\frac{2}{\pi})$ et $2\pi \sin(\frac{1}{2\pi})$.

Correction :

1. Sur $] \pi/2, 2\pi[$, f est dérivable et

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \left(\tan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right).$$

Pour $x \in] \pi/2, 2\pi[$, on a $\frac{1}{x} \in] \frac{1}{2\pi}, \frac{2}{\pi}[$. Or sur $]0, \pi/2[$, la fonction $t \mapsto \tan t - t$ est strictement positive (car sa dérivée $\tan^2 t > 0$ et elle s'annule en 0). Donc $\tan(1/x) - 1/x > 0$. De plus $\cos(1/x) > 0$ car $1/x < \pi/2$. Ainsi $f'(x) > 0$ sur tout l'intervalle, donc f est strictement croissante. Par conséquent, aucun point intérieur ne peut être un extremum.

2. Puisque f est continue sur le segment $[\pi/2, 2\pi]$, elle atteint ses bornes aux extrémités. La borne inférieure est en $\pi/2$ et la borne supérieure en 2π . On a donc

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{2}{\pi}\right), \quad f(2\pi) = 2\pi \sin\left(\frac{1}{2\pi}\right).$$

La croissance de f donne $f(\pi/2) < f(2\pi)$, soit

$$\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{2}{\pi}\right) < 2\pi \sin\left(\frac{1}{2\pi}\right).$$

En divisant par $\pi > 0$, on obtient $\frac{1}{2} \sin(2/\pi) < 2 \sin(1/(2\pi))$.

Exercice 8

Montrer que la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) := 0$ si $0 < x < 1$ et $f(0) = f(1) = 1$ est convexe sur $[0, 1]$.

Correction : Soient $x, y \in [0, 1]$ et $t \in [0, 1]$. On veut montrer $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$.

Si x et y sont tous deux dans $]0, 1[$, alors $f(x) = f(y) = 0$ et $tx + (1 - t)y \in]0, 1[$, donc $f(tx + (1 - t)y) = 0$ et l'inégalité est une égalité.

Si l'un des points est 0 ou 1, par exemple $x = 0$ et $y \in]0, 1[$, alors pour $t \in [0, 1]$, on a $(1 - t)y \in]0, 1[$, donc $f((1 - t)y) = 0$ et $tf(0) + (1 - t)f(y) = t$. L'inégalité $0 \leq t$ est vérifiée.

Si $x = 0$ et $y = 1$, alors $f(t \cdot 0 + (1 - t) \cdot 1) = f(1 - t)$. Pour $t \in]0, 1[$, on a $f(1 - t) = 0$ et $tf(0) + (1 - t)f(1) = 1$, donc $0 \leq 1$. Les cas limites $t = 0$ et $t = 1$ donnent des égalités.

L'inégalité étant vérifiée dans tous les cas, f est convexe.

Exercice 9

1. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. Montrer que si g est croissante sur $\mathbb{R}$, alors la composée $g \circ f$ est convexe.
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $\ln \circ f$ est convexe, alors f est convexe.

Correction :

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$. Par convexité de f , on a $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$. Comme g est croissante et convexe, $g(f(tx + (1 - t)y)) \leq g(tf(x) + (1 - t)f(y)) \leq tg(f(x)) + (1 - t)g(f(y))$.

Donc $g \circ f$ est convexe.

2. Si $\ln \circ f$ est convexe, alors $f = \exp(\ln f)$. Or $\exp$ est convexe et croissante. D'après la question 1, la composée d'une fonction convexe ($\ln f$) par une fonction convexe croissante ($\exp$) est convexe. Donc f est convexe.

Exercice 10

Montrer que si une fonction f convexe sur $\mathbb{R}$ n'est pas constante, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. En particulier f n'est pas majorée.

Correction : Soit f convexe non constante. Il existe $a < b$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Supposons $f(a) < f(b)$.

Pour une fonction convexe, la pente des cordes est croissante. Soit $a < b$ avec $f(a) < f(b)$. Pour tout $x > b$, on a

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

Donc $f(x) \geq f(b) + (x - b) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

De même, si $f(a) > f(b)$, on montre que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$. Donc l'une des limites est $+\infty$, et en particulier f n'est pas majorée.

Exercice 11

1. Soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) := \ln(1 + \exp(t))$. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Soient λ et μ deux réels positifs tels que $\lambda + \mu = 1$. Montrer que, pour tous réels strictement positifs x et y , on a $1 + x^\lambda y^\mu \leq (1 + x)^\lambda (1 + y)^\mu$.

Correction :

1. $f'(t) = \frac{e^t}{1+e^t} = \frac{1}{1+e^{-t}}$. $f''(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} > 0$. Donc f est convexe.
2. On utilise la convexité de f : pour tous u, v et $\lambda, \mu \geq 0$ avec $\lambda + \mu = 1$, on a

$$f(\lambda u + \mu v) \leq \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Choisissons $u = \ln x$, $v = \ln y$. Alors

$$\begin{aligned} \ln(1 + e^{\lambda \ln x + \mu \ln y}) &\leq \lambda \ln(1 + e^{\ln x}) + \mu \ln(1 + e^{\ln y}) \\ &= \lambda \ln(1 + x) + \mu \ln(1 + y). \end{aligned}$$

Or $e^{\lambda \ln x + \mu \ln y} = x^\lambda y^\mu$. Donc

$$\ln(1 + x^\lambda y^\mu) \leq \ln((1 + x)^\lambda (1 + y)^\mu).$$

Par croissance du logarithme, on obtient l'inégalité demandée.

Exercice 12

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que f est convexe sur I si, et seulement si, pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, l'on a

$$\Delta(x, y, z) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix} \geq 0.$$

Correction :

Développons le déterminant par la règle de Sarrus :

$$\begin{aligned} \Delta(x, y, z) &= 1 \cdot y \cdot f(z) + 1 \cdot z \cdot f(x) + 1 \cdot x \cdot f(y) \\ &\quad - (1 \cdot y \cdot f(x) + 1 \cdot x \cdot f(z) + 1 \cdot z \cdot f(y)). \end{aligned}$$

Regroupons les termes :

$$\begin{aligned} \Delta &= yf(z) + zf(x) + xf(y) - yf(x) - xf(z) - zf(y) \\ &= (y - x)f(z) + (z - y)f(x) + (x - z)f(y). \end{aligned}$$

Comme $x - z = -(z - x)$, on peut réécrire :

$$\Delta = (y - x)f(z) + (z - y)f(x) - (z - x)f(y).$$

Pour $x < y < z$, la condition de convexité de f s'écrit :

$$f(y) \leq \frac{z - y}{z - x}f(x) + \frac{y - x}{z - x}f(z).$$

En multipliant par $z - x > 0$, on obtient :

$$(z - x)f(y) \leq (z - y)f(x) + (y - x)f(z).$$

Ceci équivaut exactement à $(y - x)f(z) + (z - y)f(x) - (z - x)f(y) \geq 0$, c'est-à-dire $\Delta(x, y, z) \geq 0$. Réciproquement, si $\Delta \geq 0$ pour tous $x < y < z$, alors l'inégalité précédente est vérifiée, ce qui redonne la définition de la convexité. Donc f est convexe si et seulement si $\Delta(x, y, z) \geq 0$ pour tout triplet $x < y < z$.

Exercice 13

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I telle que pour tout $(x, y) \in I^2$, on ait :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

Montrer que f est convexe.

Correction : La condition donnée est la convexité au sens de Jensen pour les milieux. On sait qu'une fonction continue vérifiant cette inégalité pour les milieux est convexe. La démonstration classique procède par récurrence pour montrer que l'inégalité de convexité est vraie pour toutes les dyadiques, puis par densité et continuité on l'étend à tous les réels. Plus précisément, on montre d'abord que pour tout t de la forme $k/2^n$, on a $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$. Puis par continuité, on passe à tous les $t \in [0, 1]$.

Exercice 14 (Comparaison des moyennes arithmétique et géométrique)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Correction : La fonction $\ln$ est concave (dérivée seconde négative). Par l'inégalité de Jensen pour une fonction concave, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i \leq \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right).$$

En prenant l'exponentielle (croissante), on obtient

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Exercice 15 (Inégalité de Young)

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que, si x et y sont des réels positifs, on a :

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Correction : La fonction exponentielle est convexe. On écrit $xy = \exp(\ln x + \ln y)$. Posons $u = p \ln x$, $v = q \ln y$. Alors $\ln x = u/p$, $\ln y = v/q$. Par convexité de $\exp$,

$$\exp\left(\frac{u}{p} + \frac{v}{q}\right) \leq \frac{1}{p}\exp(u) + \frac{1}{q}\exp(v) = \frac{e^u}{p} + \frac{e^v}{q}.$$

Or $e^u = x^p$, $e^v = y^q$. D'où $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

Chapitre IV — Développements asymptotiques et analyse des variations

Exercice 16

Soit f une application de classe C^3 sur un intervalle I et a un élément de l'intérieur de I . Calculer la limite, quand h tend vers 0, de :

$$\frac{1}{h^3} (f(a+3h) - f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)).$$

Correction :

Puisque f est de classe C^3 , on peut utiliser la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de a :

$$f(a+3h) = f(a) + 3hf'(a) + \frac{9h^2}{2}f''(a) + \frac{27h^3}{6}f'''(a) + o(h^3),$$

$$f(a+2h) = f(a) + 2hf'(a) + \frac{4h^2}{2}f''(a) + \frac{8h^3}{6}f'''(a) + o(h^3),$$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(a) + o(h^3).$$

En substituant dans l'expression

$$N(h) = f(a+3h) - f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a) :$$

$$\begin{aligned} N(h) &= [f(a) + 3hf'(a) + \frac{9}{2}h^2f''(a) + \frac{27}{6}h^3f'''(a)] \\ &\quad - [f(a) + 2hf'(a) + 2h^2f''(a) + \frac{8}{6}h^3f'''(a)] \\ &\quad + 3[f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2}h^2f''(a) + \frac{1}{6}h^3f'''(a)] \\ &\quad - f(a) + o(h^3). \end{aligned}$$

Regroupons les termes par puissance de h :

- **Termes constants :** $f(a) - f(a) + 3f(a) - f(a) = 2f(a)$.
- **Termes en h :** $3f'(a) - 2f'(a) + 3f'(a) = 4f'(a)$.
- **Termes en h^2 :**
 $\frac{9}{2}f''(a) - 2f''(a) + \frac{3}{2}f''(a) = (\frac{9}{2} - \frac{4}{2} + \frac{3}{2})f''(a) = 4f''(a)$.
- **Termes en h^3 :**
 $\frac{27}{6}f'''(a) - \frac{8}{6}f'''(a) + \frac{3}{6}f'''(a) = \frac{27-8+3}{6}f'''(a) = \frac{22}{6}f'''(a) = \frac{11}{3}f'''(a)$.

On obtient donc :

$$N(h) = 2f(a) + 4hf'(a) + 4h^2f''(a) + \frac{11}{3}h^3f'''(a) + o(h^3).$$

Par conséquent,

$$\frac{N(h)}{h^3} = \frac{2f(a)}{h^3} + \frac{4f'(a)}{h^2} + \frac{4f''(a)}{h} + \frac{11}{3}f'''(a) + o(1).$$

Quand $h \rightarrow 0$, les termes $\frac{2f(a)}{h^3}$, $\frac{4f'(a)}{h^2}$ et $\frac{4f''(a)}{h}$ tendent vers $\pm\infty$ dès que l'un des coefficients $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ est non nul.

Conclusion : En général, la limite n'existe pas (elle est infinie). Si par extraordinaire $f(a) = f'(a) = f''(a) = 0$, alors la limite vaut $\frac{11}{3}f'''(a)$.

Remarque : l'exercice illustre le fait qu'une combinaison linéaire de valeurs d'une fonction ne fournit une approximation de la dérivée troisième que si les termes d'ordre inférieur sont éliminés (ce qui n'est pas le cas ici).

Exercice 17

Soit $f :]-2, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment dérivable (c'est-à-dire de classe C^2) sur $] - 2, 2[$ telle que $f(0) = 0$. Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$x_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n^2}\right) =: \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad x_0 = 0.$$

Correction : Puisque f est C^2 et $f(0) = 0$, on a au voisinage de 0 :
 $f(t) = f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + o(t^2)$. Alors pour chaque k ,

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f'(0)\frac{k}{n^2} + \frac{1}{2}f''(0)\frac{k^2}{n^4} + o\left(\frac{k^2}{n^4}\right).$$

En sommant pour $k = 1$ à n :

$$x_n = f'(0)\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{2}f''(0)\frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n o\left(\frac{k^2}{n^4}\right).$$

Or $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \sim \frac{n^2}{2}$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sim \frac{n^3}{3}$. Donc

$$\begin{aligned} x_n &= f'(0)\frac{n(n+1)}{2n^2} + \frac{1}{2}f''(0)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} + o\left(\frac{n^3}{n^4}\right) \\ &= f'(0)\frac{1 + \frac{1}{n}}{2} + f''(0)\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Le second terme est en $O(1/n)$ car $\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3} \sim \frac{2}{n}$. Donc $x_n \rightarrow \frac{f'(0)}{2}$. Ainsi
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{f'(0)}{2}$.

Exercice 18

1. Soit n et $p \geq 1$ des entiers naturels et u une fonction de classe C^{n+p} sur un intervalle I contenant 0. On suppose $\forall k \in \{0, \dots, p-1\}, u^{(k)}(0) = 0$. Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{u(x)}{x^p}$ se prolonge sur I en une fonction de classe C^n . Préciser ce prolongement et ses dérivées en 0.
2. Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x)}{\sinh(x)}$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1. Par la formule de Taylor, on peut écrire

$$u(x) = \frac{x^p}{p!} u^{(p)}(0) + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} u^{(p+1)}(0) + \dots + \frac{x^{n+p}}{(n+p)!} u^{(n+p)}(0) + o(x^{n+p}).$$

Donc

$$f(x) = \frac{u^{(p)}(0)}{p!} + \frac{x}{(p+1)!} u^{(p+1)}(0) + \dots + \frac{x^n}{(n+p)!} u^{(n+p)}(0) + o(x^n).$$

Ainsi f admet un DL à l'ordre n en 0, ce qui permet de la prolonger par continuité en posant $f(0) = \frac{u^{(p)}(0)}{p!}$. Ce DL montre que f est C^n et $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{(p+k)!} u^{(p+k)}(0)$.

2. Pour $f(x) = \frac{\sin x}{\sinh x}$, on a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$ et $\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \dots$.
Donc

$$f(x) = \frac{1 - x^2/6 + \dots}{1 + x^2/6 + \dots}.$$

En effectuant la division, on obtient un DL de tout ordre, donc f est C^∞ en 0. Ailleurs, f est C^∞ comme quotient de fonctions C^∞ avec dénominateur non nul. Donc f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19

Montrer que :

1. $\sin(x) = o_0(\sqrt{|x|})$;
2. $\sin(x) = o_0(\cos(x))$;
3. pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$ si $\alpha < \beta$ et $x^\alpha = o_{0+}(x^\beta)$ si $\alpha > \beta$;
4. pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $(\ln x)^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$ et $|\ln x|^\alpha = o_{0+}(\frac{1}{x^\beta})$;
5. pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $x^\beta = o_{+\infty}(\exp(\alpha x))$ et $|x|^\beta = o_{-\infty}(\exp(-\alpha x))$;
6. $x \sin x = O_0(x)$;
7. $\sin x = O_0(\cos x)$.

Correction :

1. $\frac{\sin x}{\sqrt{|x|}} \sim \frac{x}{\sqrt{|x|}} = \sqrt{|x|} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.
2. $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \rightarrow 0$ en 0, donc $\sin x = o(\cos x)$.
3. Si $\alpha < \beta$, alors $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Si $\alpha > \beta$, alors $x^{\alpha-\beta} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$.
4. Pour $x \rightarrow +\infty$, $\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} \rightarrow 0$ par croissance comparée. Pour $x \rightarrow 0^+$, en posant $t = 1/x \rightarrow +\infty$, on a $|\ln x|^\alpha = (\ln t)^\alpha$ et $1/x^\beta = t^\beta$, donc $(\ln t)^\alpha / t^\beta \rightarrow 0$.
5. $x^\beta / e^{\alpha x} \rightarrow 0$ en $+\infty$ par croissance comparée. Pour $x \rightarrow -\infty$, $|x|^\beta e^{\alpha x} \rightarrow 0$ car $e^{\alpha x} \rightarrow 0$.
6. $|x \sin x / x| = |\sin x| \leq 1$, donc $x \sin x = O_0(x)$.
7. $\sin x / \cos x = \tan x \rightarrow 0$ en 0, donc $\sin x = o(\cos x)$, et a fortiori $\sin x = O_0(\cos x)$.

Exercice 20

1. Montrer qu'au voisinage de l'infini ($-\infty$ et $+\infty$), $E(x) \sim x$, où E désigne la fonction partie entière définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \sim \ln(x)$ et $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \sim \ln(x)$.
3. Soit $f : x \mapsto \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$. Après avoir précisé le domaine de définition de f , montrer que $f(x) \underset{0}{\sim} \exp(2)$.

Correction :

1. Pour x grand, $E(x) = x - \{x\}$ avec $\{x\} \in [0, 1[$. Donc $\frac{E(x)}{x} = 1 - \frac{\{x\}}{x} \rightarrow 1$.
2. $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \ln \left(x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) \right) = \ln x + \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)$.
Quand $x \rightarrow +\infty$, $\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \rightarrow 1$, donc le second terme tend vers $\ln 2$. Ainsi $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \sim \ln x$. De même pour l'autre.
3. $f(x)$ est définie pour $x \neq k\pi$ (car $\sin x = 0$) et $x \neq 1$ (dénominateur nul). Au voisinage de 0, $\frac{1+x}{1-x} = 1 + 2x + o(x)$. Donc $\ln f(x) = \frac{1}{\sin x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \frac{1}{x+o(x)} (2x + o(x)) = \frac{2x+o(x)}{x(1+o(1))} = 2 + o(1)$.
Ainsi $\ln f(x) \rightarrow 2$, donc $f(x) \rightarrow e^2$. D'où $f(x) \underset{0}{\sim} e^2$.

Exercice 21

1. Calculer la limite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^{x^x} \ln x}{x^x - 1}$.
2. Calculer la limite en $\frac{1}{2}$ de la fonction $g : x \mapsto (2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x)$.
3. Déterminer un équivalent de chacune des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ de termes généraux

$$u_n = \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{3n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \left[\arctan\left(\frac{n}{n^2 + 1}\right) \right] \left[n^2 \tan\left(\frac{1}{n}\right) \right],$$

puis en déduire les limites éventuelles.

Correction :

1. Limite de f en 0. On travaille au voisinage de 0^+ . Posons $y = x^x$. Alors $\ln y = x \ln x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$, donc $y \rightarrow 1$. On a $x^x - 1 = e^{x \ln x} - 1 \sim x \ln x$. Par ailleurs, $x^{x^x} = e^{x^x \ln x} = e^{y \ln x}$. Comme $y \rightarrow 1$, $\ln x \rightarrow -\infty$, leur produit tend vers $-\infty$: $y \ln x \sim \ln x$ donc $x^{x^x} = e^{\ln x + o(\ln x)} = x e^{o(\ln x)} \rightarrow 0$. Pour obtenir la limite, effectuons un développement plus précis. On a $x^x = 1 + x \ln x + \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x + o(x^2 \ln^2 x)$. Alors $x^x - 1 = x \ln x + \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x + o(x^2 \ln^2 x)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} x^{x^x} &= \exp(x^x \ln x) \\ &= \exp\left(\left(1 + x \ln x + \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x + o(x^2 \ln^2 x)\right) \ln x\right) \\ &= \exp\left(\ln x + x \ln^2 x + \frac{1}{2} x^2 \ln^3 x + o(x^2 \ln^3 x)\right) \\ &= x \exp\left(x \ln^2 x + \frac{1}{2} x^2 \ln^3 x + o(x^2 \ln^3 x)\right). \end{aligned}$$

Or $e^u = 1 + u + o(u)$ avec $u = x \ln^2 x + \frac{1}{2} x^2 \ln^3 x + o(x^2 \ln^3 x)$. Comme $x \ln^2 x \rightarrow 0$ (car $x^\alpha \ln^\beta x \rightarrow 0$ pour tout $\alpha > 0$), on a

$$x^{x^x} = x \left(1 + x \ln^2 x + \frac{1}{2} x^2 \ln^3 x + o(x^2 \ln^3 x)\right).$$

Multiplions par $\ln x$:

$$x^{x^x} \ln x = x \ln x + x^2 \ln^3 x + \frac{1}{2} x^3 \ln^4 x + o(x^3 \ln^4 x).$$

Enfin,

$$f(x) = \frac{x^{x^x} \ln x}{x^x - 1} = \frac{x \ln x + x^2 \ln^3 x + \frac{1}{2} x^3 \ln^4 x + o(x^3 \ln^4 x)}{x \ln x + \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x + o(x^2 \ln^2 x)}.$$

Factorisons $x \ln x$ au numérateur et au dénominateur :

$$f(x) = \frac{1 + x \ln^2 x + \frac{1}{2} x^2 \ln^3 x + o(x^2 \ln^3 x)}{1 + \frac{1}{2} x \ln x + o(x \ln x)}.$$

Comme $x \ln x \rightarrow 0$ et $x \ln^2 x \rightarrow 0$, on obtient $f(x) \rightarrow 1$.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1}$$

2. Limite de g en $x = \frac{1}{2}$. On a $2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1)$. Au voisinage de $x = \frac{1}{2}$, posons $h = x - \frac{1}{2}$. Alors $2x - 1 = 2h$ et $x - 1 = -\frac{1}{2} + h \sim -\frac{1}{2}$. Donc

$$2x^2 - 3x + 1 = (2h) \left(-\frac{1}{2} + h \right) \sim -h.$$

Pour $\tan(\pi x)$: $\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi h$. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \pi h\right) = -\cot(\pi h) = -\frac{\cos(\pi h)}{\sin(\pi h)}$. Or $\cos(\pi h) \sim 1$ et $\sin(\pi h) \sim \pi h$. Donc

$$\tan(\pi x) \sim -\frac{1}{\pi h}.$$

Finalement,

$$g(x) \sim (-h) \times \left(-\frac{1}{\pi h} \right) = \frac{1}{\pi}.$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = \frac{1}{\pi}}.$$

3. Étude des suites.

Suite u_n .

$$\ln u_n = (3n + 1) \ln\left(1 + \frac{5}{n}\right) = (3n + 1) \left(\frac{5}{n} - \frac{25}{2n^2} + \frac{125}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right).$$

Développons :

$$(3n)\left(\frac{5}{n}\right) = 15, \quad (3n)\left(-\frac{25}{2n^2}\right) = -\frac{75}{2n}, \quad (3n)\left(\frac{125}{3n^3}\right) = \frac{125}{n^2},$$

$$1 \cdot \frac{5}{n} = \frac{5}{n}, \quad 1 \cdot \left(-\frac{25}{2n^2}\right) = -\frac{25}{2n^2}, \quad o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En additionnant :

$$\begin{aligned} \ln u_n &= 15 + \left(-\frac{75}{2n} + \frac{5}{n}\right) + \left(\frac{125}{n^2} - \frac{25}{2n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 15 - \frac{65}{2n} + \frac{225}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$u_n = \exp\left(15 - \frac{65}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e^{15} \left(1 - \frac{65}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Un équivalent simple est $u_n \sim e^{15}$ (car le terme correctif tend vers 0). La limite est donc e^{15} .

$u_n \rightarrow e^{15}$

Suite v_n . Pour n grand,

$$\arctan\left(\frac{n}{n^2 + 1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right).$$

On utilise $\arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^3)$ avec $y = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$:

$$\arctan\left(\frac{n}{n^2 + 1}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

D'autre part,

$$\tan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + \frac{2}{15n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Donc

$$n^2 \tan\left(\frac{1}{n}\right) = n + \frac{1}{3n} + \frac{2}{15n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

En multipliant :

$$v_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \left(n + \frac{1}{3n} + \frac{2}{15n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right).$$

Effectuons le produit :

$$\begin{aligned} v_n &= 1 + \frac{1}{3n^2} + \frac{2}{15n^4} \\ &\quad - \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{9n^4} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{3n^2} - \frac{1}{3n^2} \right) + \left(\frac{2}{15n^4} - \frac{1}{9n^4} \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{6-5}{45n^4} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{45n^4} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi $v_n = 1 + o(1)$ et un équivalent est $v_n \sim 1$. La limite est 1.

$$\boxed{v_n \rightarrow 1}$$

Exercice 22

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \geq 0, f(x) = \cosh(\sqrt{x}) \quad \text{et} \quad \forall x < 0, f(x) = \cos(\sqrt{-x}).$$

1. Écrire le développement limité de $\cos$ et $\cosh$ à l'ordre 4 en 0 (ou encore au voisinage de 0), puis montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 et le calculer.
2. Montrer que f est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1. On a $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)$ et $\cosh u = 1 + \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)$.

Pour $x \geq 0$, en posant $u = \sqrt{x}$, on obtient $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)$.

Pour $x < 0$, en posant $t = \sqrt{-x}$, on a $t^2 = -x$ et $t^4 = x^2$, donc

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2).$$

Les deux expressions coïncident, donc f admet un DL à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2).$$

2. Le DL donne $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1/2$. Pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{\sinh(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \rightarrow 1/2$ quand $x \rightarrow 0^+$. Pour $x < 0$, $f'(x) = \frac{\sin(\sqrt{-x})}{2\sqrt{-x}} \rightarrow 1/2$ également. Donc f' est continue en 0, et f est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23

Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1 + |x|^5}$ n'admet pas de développement limité à l'ordre 5 en 0.

Correction : La fonction f est paire car $|-x|^5 = |x|^5$.

Pour $x > 0$, on a $f(x) = 1/(1 + x^5) = 1 - x^5 + o(x^5)$.

Pour $x < 0$, on a $|x|^5 = (-x)^5 = -x^5$, donc
 $f(x) = 1/(1 - x^5) = 1 + x^5 + o(x^5)$.

Les développements à droite et à gauche diffèrent par le signe du terme en x^5 . Pour qu'un DL à l'ordre 5 existe, il faudrait que ces deux expressions coïncident, ce qui n'est pas le cas. Donc f n'admet pas de DL à l'ordre 5 en 0.

Exercice 24

1. Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(|\sin x|)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi\mathbb{Z}\}$. Montrer que la fonction $g : x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi\mathbb{Z}\} \mapsto f(x) - \ln(|x|)$ admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, puis en déduire un développement asymptotique de f en 0 (on précisera l'échelle de comparaison et la précision de ce développement asymptotique).

Indication : On pourra remarquer que $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \ln(|x|)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$.

2. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan(\sqrt{x})$. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\arctan$, puis en déduire un développement asymptotique de f en 0 (on précisera l'échelle de comparaison et la précision de ce développement asymptotique).
3. Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(\sinh x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sinh x}{x}$, puis en déduire un développement asymptotique de f en 0 (on précisera l'échelle de comparaison et la précision de ce développement asymptotique).

Correction :

1. Pour $x \neq 0$, $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$. Donc

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) \\ &= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^4}{72} + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4).\end{aligned}$$

Ainsi $g(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ admet ce DL. Alors

$f(x) = \ln|x| + g(x) = \ln|x| - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4)$. C'est un développement asymptotique à la précision $o(x^4)$ avec l'échelle $\{\ln|x|, 1, x^2, x^4\}$.

2. $\arctan u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + o(u^5)$. Pour $u = \sqrt{x}$, on a

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} - \frac{x^{3/2}}{3} + \frac{x^{5/2}}{5} + o(x^{5/2}) \right) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} + o(x^2). \text{ Donc} \\ f(x) &= 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} + o(x^2) \text{ au voisinage de 0. (Échelle : } 1, x, x^2 \text{).}\end{aligned}$$

3. La fonction $\frac{\sinh x}{x}$ est paire, donc son DL à l'ordre 5 en 0 ne contient que des puissances paires :

$$\frac{\sinh x}{x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

Posons $u = \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$. Alors $\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ avec $u^2 = \frac{x^4}{36} + o(x^4)$. D'où

$$\ln\left(\frac{\sinh x}{x}\right) = \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^4}{72} + o(x^4) = \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4).$$

Finalement, comme $f(x) = \ln x + \ln\left(\frac{\sinh x}{x}\right)$, on obtient

$$f(x) = \ln x + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0^+).$$

L'échelle de comparaison est $\{\ln x, 1, x^2, x^4\}$ et la précision est $o(x^4)$.

Exercice 25

On considère les fonctions $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$ et $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{1}{x} \sqrt{1+x} - 1$. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction g , puis en déduire un développement asymptotique de f en $+\infty$ (on précisera l'échelle de comparaison et la précision de ce développement asymptotique).

Indication : On pourra remarquer que $f(x) = g\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Correction : Pour $g(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{x} - 1$, on a $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$. Donc

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)}{x} - 1 \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{x}{8} + o(x) - 1 \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \frac{x}{8} + o(x). \end{aligned}$$

Pour $f(x)$ avec $x \rightarrow +\infty$, posons $t = 1/\sqrt{x} \rightarrow 0^+$. On a $f(x) = g(t)$, donc

$$f(x) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{t}{8} + o(t) = \sqrt{x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

L'échelle de comparaison est $\{\sqrt{x}, 1, 1/\sqrt{x}\}$ et la précision est $o(1/\sqrt{x})$.