

EXERCICE I : ÉQUILIBRE D'UNE CHARGE PONCTUELLE

Une charge ponctuelle q de masse négligeable, est placée à mi-chemin entre deux charges ponctuelles positives q_1 et q_2 distantes de $2d$, de telle sorte que $q_1 = q_2 = Q$.

- 1) On suppose que q soit positive.
 - a) La charge q est-elle en équilibre ? si oui répondre aux questions suivantes :
 - b) L'équilibre est-il stable ou instable si q est astreinte à se déplacer suivant la ligne joignant les deux charges q_1 et q_2 .
 - c) L'équilibre est-il stable ou instable si q est astreinte à se déplacer dans le plan médiateur des deux charges q_1 et q_2 ?
- 2) On suppose maintenant que q soit une charge négative.
 - a) La charge q est-elle en équilibre ? si oui, répondre aux questions suivantes :
 - b) L'équilibre est-il stable ou instable si q est astreinte à se déplacer suivant la ligne joignant les deux charges q_1 et q_2 ?
 - c) L'équilibre est-il stable ou instable si q est astreinte à se déplacer dans le plan médiateur des deux charges q_1 et q_2 ?

EXERCICE II : PENDULE ÉLECTROSTATIQUE

Deux sphères conductrices (S_1) et (S_2) identiques de masse 10 g chacune portent respectivement les charges électriques q_1 et q_2 . Les deux sphères sont mises en contact puis séparées et de ce fait acquièrent respectivement les nouvelles charges q'_1 et q'_2 .

- 1) Déterminer les charges q'_1 et q'_2 des (S_1) et (S_2) respectivement après avoir été mises en contact dans les trois cas suivants :
 - a) $q_1 = +3 \times 10^{-8}\text{ C}$ et $q_2 = 0$;
 - b) $q_1 = +3 \times 10^{-8}\text{ C}$ et $q_2 = +8 \times 10^{-8}\text{ C}$;
 - c) $q_1 = +3 \times 10^{-8}\text{ C}$ et $q_2 = -8 \times 10^{-8}\text{ C}$.

Pour chaque cas, préciser le sens de transfert de la charge électrique.

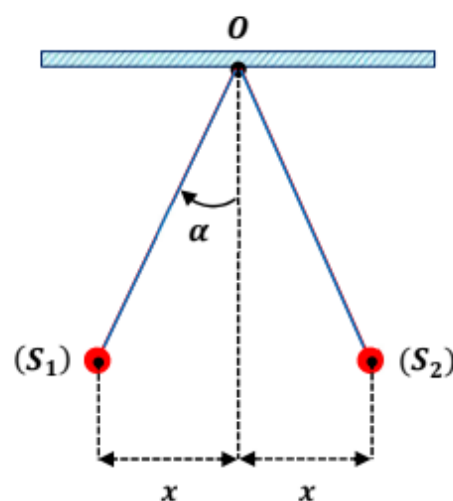


FIG. (1)

- 2) Les deux sphères conductrices sont suspendues au même point O par deux fils en nylon de masses négligeables et de longueur $l = 80 \text{ cm}$ comme le schématise la figure (1). On admet que l'angle α est suffisamment petit pour dire que $\sin \alpha \approx \tan \alpha$.
- Déterminer l'expression de la distance x qui séparent (S_1) et (S_2) à l'équilibre.
 - Calculer numériquement la valeur de x pour les trois cas précédents

On prend $g = 10 \text{ N/kg}$.

EXERCICE III : ÉTUDE D'UN SYSTÈME DE CHARGES PONCTUELLES

Quatre charges ponctuelles identiques q sont placées aux points A, B, C et D qui se situent sur les axes (Ox) et (Oy) à une distance a de l'origine du repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ comme le montre la figure (3). On suppose que le champ de gravitation $\vec{g}$ est uniforme.

- Trouver l'expression de la force électrostatique exercée sur une masse ponctuelle m de charge q placée au point M sur l'axe (Oz) de côté z .
- Montrer que l'intensité de cette force passe par un maximum lorsque $z = a\sqrt{2}/2$.
- Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, montrer que l'équilibre de la masse m n'est possible que si cette masse ne dépasse pas une valeur m_0 à déterminer.

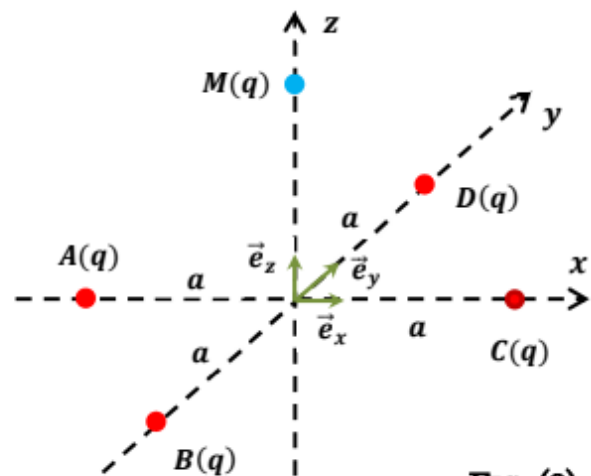


FIG. (2)

Dans la suite, on suppose que $m < m_0$.

- Montrer qu'il y a deux positions d'équilibre et étudier la stabilité de chacune d'elles.

EXERCICE IV : ÉTUDE D'UN SYSTÈME DE CHARGES PONCTUELLES

On considère une gouttelette d'huile de masse m assimilée à une sphère homogène de rayon r et de masse volumique ρ . La gouttelette d'huile est pulvérisée dans un espace $(\mathcal{E})$ entre deux plaques conductrices où règne un champ $\vec{E} = E\vec{e}_z$. On se place dans le cas de très faibles vitesses, l'air de masse volumique ρ_{air} exerce sur la goutte animée d'une vitesse $\vec{v}$ une force de frottement qui s'exprime par :

$$\vec{f} = -6\eta\pi r\vec{v}, \text{ où } \eta \text{ est le coefficient de viscosité de l'air.}$$

Lorsque la gouttelette pénètre dans l'espace $(\mathcal{E})$, elle acquiert une charge positive q et son mouvement est ensuite observée au microscope.

Données :

$\rho = 885 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\rho_{air} = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
$\eta = 1,85 \cdot 10^{-3} \text{ (SI)}$	$E = 100/3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$	

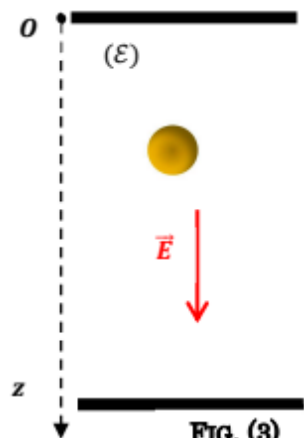


FIG. (3)

- 1) Faire l'inventaire des forces s'exerçant sur la gouttelette d'huile dans l'espace ($\mathcal{E}$).
- 2) Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v de la gouttelette.
- 3) Résoudre l'équation différentielle et montrer que la vitesse v atteint une valeur limite v_{lim} . Au bout de combien de temps la mesure de la vitesse serait correcte ?
- 4) En l'absence de champ électrostatique $\vec{E}$ que devient l'expression de la vitesse limite qu'on notera dans ce cas v_0 .
- 5) En l'absence de champ électrostatique, la gouttelette d'huile parcourt une distance de 1 mm en $8,9\text{ s}$. Calculer le rayon r .
- 6) Exprimer la vitesse v_{lim} en fonction de v_0 , puis en déduire l'expression de la charge q . Calculer la valeur de la charge électrique q sachant qu'en présence du champ électrostatique celle-ci parcourt une distance de 1 mm en $6,4\text{ s}$. conclure.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE I

1) a) Équilibre de la charge électrique $q > 0$ placée à mi-chemin entre q_1 et q_2

La charge q est de même signe que les deux charges q_1 et q_2 : lorsque q se trouve à mi-chemin, c'est-à-dire à la même distance d de q_1 et q_2 comme le montre la figure, il est évident qu'elle sera en équilibre car la résultante des forces agissant sur elle sera nulle. On écrit donc la relation :

$$\vec{F}_{q_1/q} + \vec{F}_{q_2/q} = \vec{0}$$

Fig. a) la charge q placée au milieu :
Position d'équilibre

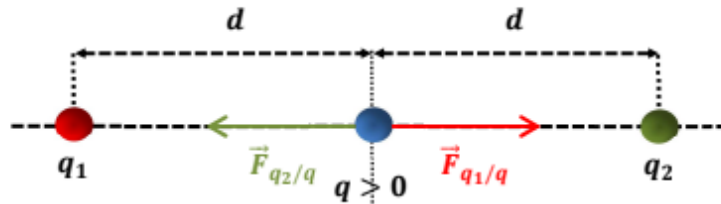
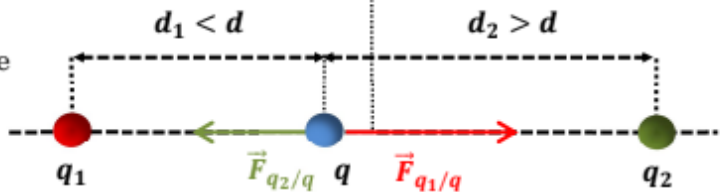


Fig. b) la charge q légèrement écartée vers la gauche :
Équilibre stable dans la direction $(q_1 q_2)$

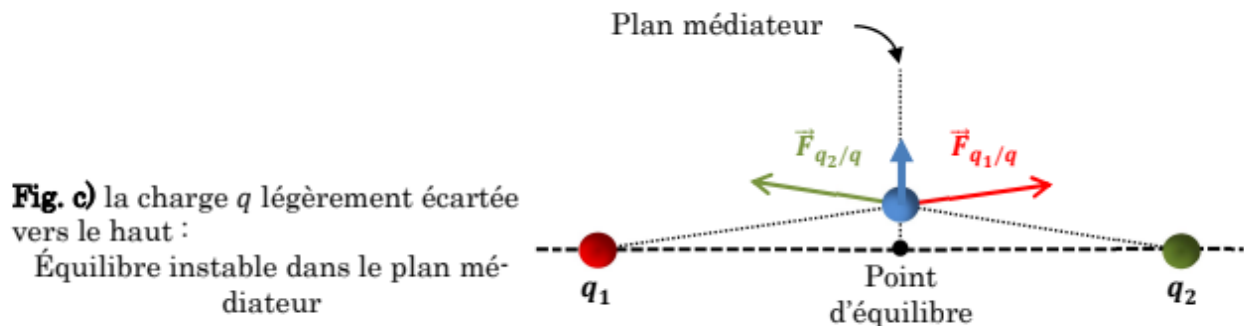


b) Stabilité de l'équilibre lorsque $q > 0$ est astreinte à se déplacer suivant la ligne joignant les deux charges q_1 et q_2

Si on écarte q légèrement du point d'équilibre suivant la ligne $(q_1 q_2)$, elle se trouve plus rapprochée (distance d_1) de l'une des deux charges et plus éloignée (distance d_2) de l'autre charge. Étant donné que la force coulombienne est inversement proportionnelle au carré de la distance, la charge se trouvant à la distance d_1 va exercer une force coulombienne sur q plus importante que celle exercée par la charge située à la distance d_2 comme il est schématisé par la figure ci-avant. En conséquence, on aura une résultante non nulle toujours dirigée et orientée vers le milieu du segment, c'est-à-dire vers la position d'équilibre. Il s'agit donc d'un **équilibre stable**.

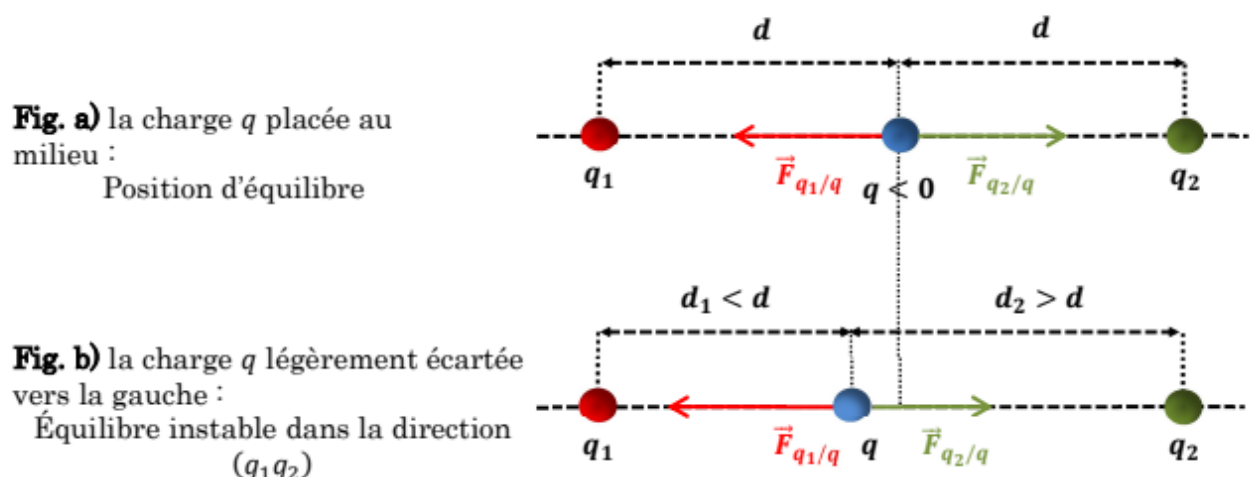
c) Stabilité de l'équilibre lorsque $q > 0$ est astreinte à se déplacer dans le plan médiateur des deux charges q_1 et q_2

En fait si on écarte la charge q légèrement vers le haut par exemple, les deux forces agissant sur la charge q donnent une résultante qui fuit le point d'équilibre comme le montre la figure ci-après. En en déduit que **l'équilibre est instable**.



2) a) Équilibre de la charge électrique $q < 0$ placée à mi-chemin entre q_1 et q_2

Si la charge q est désormais négative, les forces agissant sur elle de la part des deux charges q_1 et q_2 changent uniquement de sens par rapport à la situation de la question 1)a). C'est-à-dire que ces deux forces gardent les mêmes directions et la même intensité. En conséquence, on aura une position d'équilibre lorsque la charge $q < 0$ sera placée au milieu des deux charges q_1 et q_2 . Cette situation est illustrée par la figure ci-après.

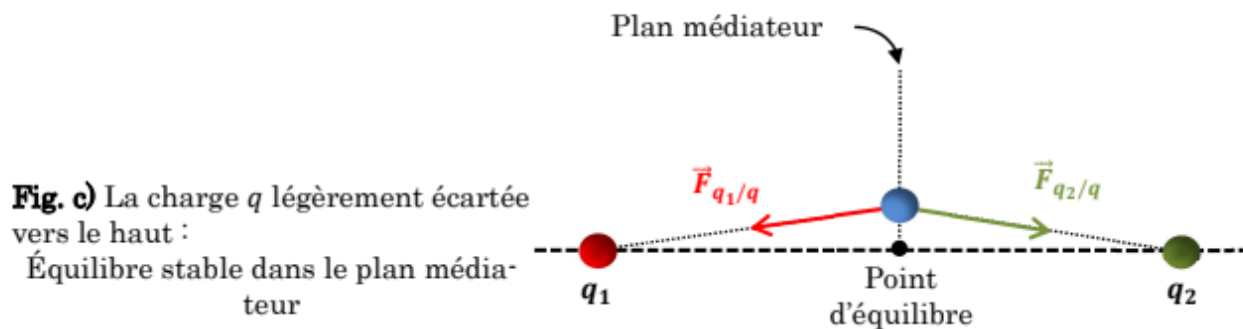


b) Stabilité de l'équilibre lorsque $q < 0$ est astreinte à se déplacer suivant la ligne joignant les deux charges q_1 et q_2

Si la charge q est astreinte à se déplacer sur la droite joignant les deux charges q_1 et q_2 , **l'équilibre sera instable** car une fois la charge q est écartée même légèrement de sa position d'équilibre, elle sera attirée par la charge à laquelle elle sera plus proche et la force exercée par cette charge à laquelle q est plus proche l'emporte sur la force exercée par l'autre charge de laquelle q est plus loin. Cette situation est schématisée par la figure ci-avant.

c) Stabilité de l'équilibre lorsque $q > 0$ est astreinte à se déplacer dans le plan médiateur des deux charges q_1 et q_2

Quand la charge q est astreinte à se déplacer sur le plan médiateur des deux charges q_1 et q_2 , l'équilibre sera stable car lorsque q est écartée légèrement par rapport au point d'équilibre, les deux forces exercées de la part des deux charges q_1 et q_2 font une résultante qui tend à rendre q à la position d'équilibre.



CORRIGÉ DE L'EXERCICE II

1) Calcul des charges q'_1 et q'_2 de (S_1) et (S_2) après avoir été mises en contact

Il faut savoir qu'au moment du contact entre les deux sphères conductrices et identiques, nous aurons un transfert de charge de la sphère riche en électrons vers la sphère pauvre en électrons jusqu'à ce que :

$$q'_1 = q'_2$$

En plus, la conservation de charge du système formé par les deux sphères conductrices veut que la somme de la charge initiale des deux sphères soit égale à la somme de la charge finale des deux sphères. On écrira donc l'équation :

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2$$

Et compte tenu du fait que $q'_1 = q'_2$, on aura :

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2 = 2q'_1 = 2q'_2$$

Il vient donc que :

$$q'_1 = q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

Notons que cette équation est valable quelles que soient les valeurs initiales des charges des deux sphères.

a) Dans le cas où $q_1 = +3 \times 10^{-8} \text{ C}$ et $q_2 = 0$

Dans ce premier cas, le transfert d'électrons aura lieu de la sphère (S_2) vers la sphère (S_1) . Et l'application numérique donne les résultats :

$$q'_1 = q'_2 = +1,5 \times 10^{-8} \text{ C}$$

b) Dans le cas où $q_1 = +3 \times 10^{-8} \text{ C}$ et $q_2 = +8 \times 10^{-8} \text{ C}$

Dans ce deuxième cas, le transfert d'électrons aura lieu de la sphère (S_1) vers la sphère (S_2) . Et l'application numérique donne les résultats :

$$q'_1 = q'_2 = +5,5 \times 10^{-8} \text{ C}$$

c) Dans le cas où $q_1 = +3 \times 10^{-8} \text{ C}$ et $q_2 = -8 \times 10^{-8} \text{ C}$

Dans le troisième cas, le transfert d'électrons aura lieu de la sphère (S_2) vers la sphère (S_1). Et l'application numérique donne les résultats :

$$q'_1 = q'_2 = -2,5 \times 10^{-8} \text{ C}$$

2) a) Détermination de l'expression de la distance $2x$ qui séparent (S_1) et (S_2) à l'équilibre.

Étudions l'équilibre mécanique de l'une des deux sphères la sphère (S_1) par exemple. On adopte la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ comme le montre la figure. Les forces exercées sur chaque sphère, comme le montre la figure ci-contre, sont les suivantes :

- Le poids de la sphère : $\vec{P}$;
- La tension du fil sur la sphère : $\vec{T}$;
- La force électrique exercée de la part de l'autre sphère sur la sphère étudiée : $\vec{F}$.

L'équilibre de la sphère se traduit par la relation suivante :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$$

La projection de cette dernière équation sur les deux axes du repère (O', X, Y) nous permet d'écrire les deux équations :

$$0 + T \sin \alpha - F = 0$$

$$-mg + T \cos \alpha + 0 = 0$$

Par ailleurs, on a, d'après la loi de Coulomb :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1'^2}{(2x)^2}$$

Les deux équations obtenues de la projection deviennent comme suit :

$$T \sin \alpha - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1'^2}{(2x)^2} = 0 \quad (1)$$

$$-mg + T \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

Ce qui conduit à :

$$T \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1'^2}{(2x)^2} \quad (3)$$

$$T \cos \alpha = mg \quad (4)$$

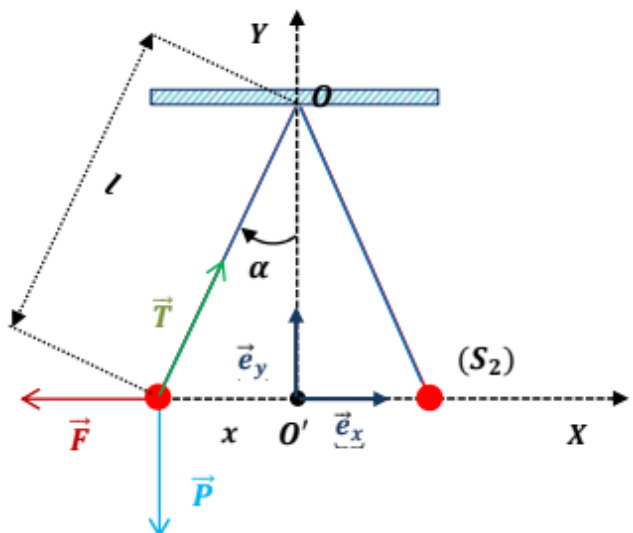
En divisant l'équation (3) sur (4), nous obtenons :

$$\tan \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1'^2}{mg(2x)^2}$$

Comme l'angle α est suffisamment petit pour considérer que $\tan \alpha \approx \sin \alpha$, cela nous permet d'écrire que :

$$\tan \alpha \approx \sin \alpha = \frac{x}{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1'^2}{mg(2x)^2}$$

C'est-à-dire que :



$$x^3 = \frac{l}{16\pi\epsilon_0} \frac{q_1'^2}{mg}$$

Ou encore :

$$x = \left(\frac{l}{16\pi\epsilon_0} \frac{q_1'^2}{mg} \right)^{1/3}$$

b) Calcul numérique de la valeur de x pour les trois cas précédents

Compte tenu des valeurs numériques obtenues pour la charge q_1' et des données de l'exercice, nous obtenues les résultats suivants pour les trois cas de la première question

Les cas étudiés	q_1' en C	x en cm
$q_1 = +3 \times 10^{-8} \text{ C}$ et $q_2 = 0$	$q_1' = +1,5 \times 10^{-8}$	$x = 1,59$
$q_1 = +3 \times 10^{-8} \text{ C}$ et $q_2 = +8 \times 10^{-8} \text{ C}$	$q_1' = +5,5 \times 10^{-8}$	$x = 3,79$
$q_1 = +3 \times 10^{-8} \text{ C}$ et $q_2 = -8 \times 10^{-8} \text{ C}$	$q_1' = -2,5 \times 10^{-8}$	$x = 2,24$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE III

1) Expression de la force électrostatique exercée sur une masse ponctuelle m de charge q placée au point M sur l'axe (Oz) de côte z

Les forces électrostatiques exercées sur la masse ponctuelle m de charge q placée au point M sur l'axe (Oz) de côte z par chaque charge q placées en A, B, C et D sont :

$$\vec{F}_A = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{AM}}{AM^3} \quad \vec{F}_B = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{BM}}{BM^3} \quad \vec{F}_C = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{CM}}{CM^3} \quad \vec{F}_D = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{DM}}{DM^3}$$

avec $AM = BM = CM = DM = \sqrt{a^2 + z^2}$

D'autre part, les coordonnées de A, B, C, D et M sont :

$$A \begin{cases} 0 \\ -a \\ 0 \end{cases} \quad B \begin{cases} -a \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad C \begin{cases} 0 \\ a \\ 0 \end{cases} \quad D \begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad M \begin{cases} 0 \\ 0 \\ z \end{cases}$$

En conséquence, les vecteurs apparaissant dans les forces sont :

$$\begin{aligned} \vec{AM} & \begin{cases} x_M - x_A \\ y_M - y_A \\ z_M - z_A \end{cases} \Rightarrow \vec{AM} \begin{cases} 0 \\ a \\ z \end{cases} & ; & \quad \vec{BM} \begin{cases} x_M - x_B \\ y_M - y_B \\ z_M - z_B \end{cases} \Rightarrow \vec{BM} \begin{cases} a \\ 0 \\ z \end{cases} \\ \vec{CM} & \begin{cases} x_M - x_C \\ y_M - y_C \\ z_M - z_C \end{cases} \Rightarrow \vec{CM} \begin{cases} 0 \\ -a \\ z \end{cases} & ; & \quad \vec{DM} \begin{cases} x_M - x_D \\ y_M - y_D \\ z_M - z_D \end{cases} \Rightarrow \vec{DM} \begin{cases} -a \\ 0 \\ z \end{cases} \end{aligned}$$

On remplace pour avoir :

$$\vec{F}_A = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{(\sqrt{a^2 + z^2})^3} \quad ; \quad \vec{F}_B = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a\vec{e}_x + z\vec{e}_z}{(\sqrt{a^2 + z^2})^3}$$

$$\vec{F}_C = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{-a\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{(\sqrt{a^2 + z^2})^3} \quad ; \quad \vec{F}_D = \frac{-a\vec{e}_x + z\vec{e}_z}{(\sqrt{a^2 + z^2})^3}$$

La force électrostatique exercée sur la masse ponctuelle m de charge q placée au point M sur l'axe (Oz) de côté z sera alors en vertu du principe de superposition :

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D$$

donc
$$\vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{a^2 + z^2})^3} (a\vec{e}_y + z\vec{e}_z + a\vec{e}_x + z\vec{e}_z - a\vec{e}_y + z\vec{e}_z - a\vec{e}_x + z\vec{e}_z)$$

d'où
$$\vec{F} = \frac{4q^2 z}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{a^2 + z^2})^3} \vec{e}_z$$

enfin
$$\vec{F} = \frac{q^2 z}{\pi\epsilon_0(\sqrt{a^2 + z^2})^3} \vec{e}_z$$

2) Montrons que l'intensité de cette force passe par un maximum lorsque $z = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

L'intensité de cette force passe par un maximum lorsque : $dF/dz = 0$. Ainsi, on écrira que :

$$\frac{dF}{dz} = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{(\sqrt{a^2 + z^2})^3 - z \frac{3}{2} 2z \sqrt{a^2 + z^2}}{(a^2 + z^2)^3}$$

$$\frac{dF}{dz} = \frac{q^2 \sqrt{a^2 + z^2}}{\pi\epsilon_0} \frac{(a^2 + z^2) - 3z^2}{(a^2 + z^2)^3}$$

$$\frac{dF}{dz} = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{a^2 - 2z^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

D'où
$$\frac{dF}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{a^2 - 2z^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

$$a^2 - 2z^2 = 0$$

$$z^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$z = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Et la force électrostatique sera dans ce cas :

$$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2} a\right) = \frac{q^2 \frac{\sqrt{2}}{2} a}{\pi\epsilon_0 \left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a\right)^2}\right)^3}$$

ou
$$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2} a\right) = \frac{q^2 \frac{\sqrt{2}}{2} a}{\pi \epsilon_0 \left(\frac{3}{2} a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

enfin
$$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2} a\right) = \frac{2 q^2}{\pi \epsilon_0 \sqrt{27} a^2}$$

3) Étude de la possibilité de l'équilibre de la masse m

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, montrons que l'équilibre de la masse m n'est possible que si cette masse ne dépasse pas une valeur m_0 qu'on détermine.

La masse m est soumise à :

Le poids de la masse m donné par :
$$\vec{P} = -m g \vec{e}_z$$

La force électrostatique donnée par :
$$\vec{F} = \frac{q^2 z}{\pi \epsilon_0 (\sqrt{a^2 + z^2})^3} \vec{e}_z$$

La condition d'équilibre de la masse m portant la charge q se traduit par l'équation :

$$F(z) = mg \quad \Rightarrow \quad \frac{q^2 z}{\pi \epsilon_0 (\sqrt{a^2 + z^2})^3} = mg$$

$$m = \frac{q^2 z}{\pi \epsilon_0 g (\sqrt{a^2 + z^2})^3}$$

Puisque la valeur maximale de la force électrostatique est :

$$F_{max} = F\left(\frac{\sqrt{2}}{2} a\right) = \frac{2 q^2}{\pi \epsilon_0 \sqrt{27} a^2}$$

donc $F \leq F_{max} \quad \Rightarrow \quad mg \leq F_{max}$

Ou encore
$$mg \leq \frac{2 q^2}{\pi \epsilon_0 \sqrt{27} a^2}$$

C'est-à-dire,
$$m \leq m_0 = \frac{2 q^2}{\pi \epsilon_0 g \sqrt{27} a^2}$$

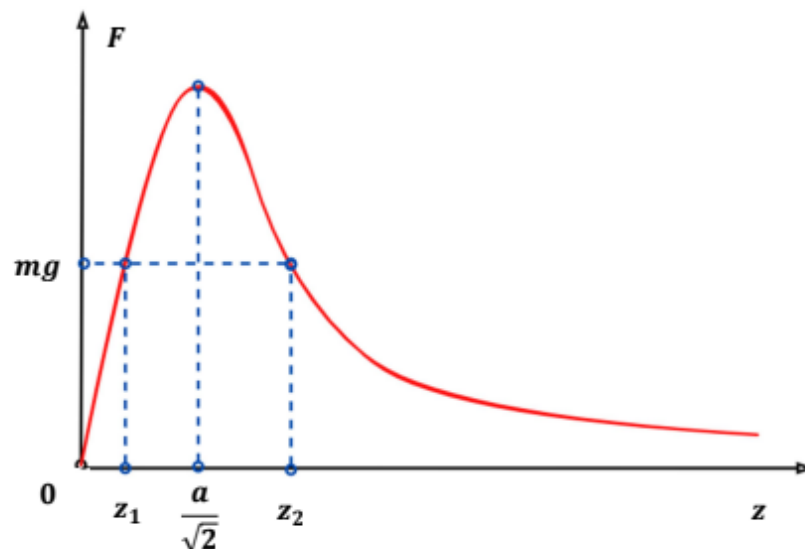
4) Montrons l'existence de deux positions d'équilibre et étudions la stabilité de chacune d'elles.

La courbe de variation de l'intensité de la force électrostatique F en fonction de z présente l'allure montrée sur la figure de la page suivante.

D'après la courbe, il existe deux positions d'équilibre correspondant aux côtes z_1 et z_2 telles que :

$$z_1 < \frac{\sqrt{2}}{2} a < z_2$$

- Pour $z = z_1$, si l'on écarte la masse m vers le haut, z augmente, alors la valeur de la force électrostatique augmente (car $F(z)$ est croissante en $z = z_1$). Comme le poids reste inchangé, la masse m , entraînée par la force électrostatique, s'élève et s'écarte davantage de sa position d'équilibre. Si l'on écarte maintenant la masse m vers le bas, z diminue, alors la valeur de la force électrostatique diminue (car $F(z)$ est croissante en $z = z_1$), la masse m , entraînée par son poids, descend donc et s'écarte davantage de sa position d'équilibre. **Cet équilibre est donc instable.**



- Pour $z = z_2$, si l'on écarte la masse m vers le haut, z augmente, alors la valeur de la force électrostatique diminue (car $F(z)$ est décroissante en $z = z_2$). Comme le poids reste inchangé, la masse m , entraînée par son poids, descend et revient vers sa position d'équilibre. Si l'on écarte maintenant la masse m vers le bas, z diminue, alors la valeur de la force électrostatique augmente (car $F(z)$ est décroissante en $z = z_2$), la masse m , entraînée par la force électrostatique, monte donc et revient vers sa position d'équilibre. **Cet équilibre est donc stable.**

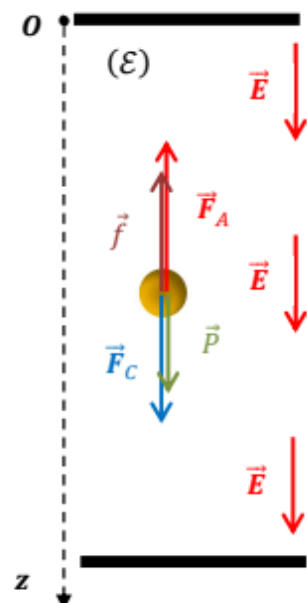
CORRIGÉ DE L'EXERCICE IV

1) Bilan des forces s'exerçant sur la gouttelette d'huile dans l'espace ($\mathcal{E}$).

Les forces agissant sur la gouttelette d'huile une fois qu'elle a pénétré dans l'espace ($\mathcal{E}$) sont citées ci-dessous :

- Le poids de la gouttelette : $\vec{P} = m\vec{g} = +mg\vec{e}_z$;
- La force électrique : $\vec{F}_C = q\vec{E} = qE\vec{e}_z$;
- La poussée d'Archimède : $\vec{F}_A = -\rho_{air}V_{goutte}g\vec{e}_z$;
- La force de frottement de la gouttelette avec l'air : $\vec{f} = -6\eta\pi r\vec{v}$.

Les quatre forces précédentes sont schématisées sur la figure ci-contre.



2) Équation différentielle que doit vérifier la vitesse v de la gouttelette.

Pour établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse de la gouttelette dans l'espace ($\mathcal{E}$), on applique sur la gouttelette le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

On injecte les forces agissant sur la gouttelette pour avoir :

$$\vec{P} + \vec{F}_C + \vec{F}_A + \vec{f} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

En remplaçant chaque force par son expression, nous aurons :

$$+mg\vec{e}_z + qE\vec{e}_z - \rho_{air}V_{goutte}g\vec{e}_z - 6\eta\pi r\vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Projetons cette équation sur l'axe (Oz) pour obtenir l'équation scalaire suivante :

$$mg + qE - \rho_{air}V_{goutte}g = m \frac{dv}{dt} + 6\eta\pi r v$$

En réarrangeant les membres de l'équation, on aura :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6\eta\pi r v}{m} = g + \frac{qE}{m} - \frac{\rho_{air}V_{goutte}g}{m}$$

Et c'est l'équation différentielle demandée.

3) Résolution de l'équation différentielle

Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1 dont la solution est la somme d'une solution générale et une solution particulière.

○ La solution générale :

On l'obtient en résolvant l'équation différentielle sans second membre et elle s'exprime par :

$$v(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{Tel que} \quad \tau = \frac{m}{6\eta\pi r}$$

Avec A une constante d'intégration qui se détermine par les conditions initiales et τ est une constante qui a la dimension d'un temps.

○ La solution particulière :

Elle s'obtient en tenant compte du second membre de l'équation différentielle et s'exprime comme :

$$v_p(t) = \frac{\tau}{m} [qE + (m - \rho_{air}V_{goutte})g]$$

Ainsi, la solution globale de l'équation différentielle précédente sera égale à la somme de la solution générale et de la solution particulière. On écrit donc :

$$v(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{6\eta\pi r} [qE + (m - \rho_{air}V_{goutte})g]$$

Remarquons que la solution générale dépend du temps alors la solution particulière est indépendante du temps.

○ Montrons que la vitesse v atteint une vitesse limite v_{lim} .

Lorsque le temps tend vers l'infini, on remarque que le terme en exponentiel tend vers zéro. Il ne reste donc que la solution particulière indépendante du temps. Ainsi la vitesse tend vers une valeur limite v_{lim} qui s'exprime par :

$$v_{lim} = \frac{1}{6\eta\pi r} [qE + (m - \rho_{air}V_{goutte})g]$$

- **Le temps qu'il faut attendre pour une mesure correcte de la vitesse**

Dans l'expression de $v(t)$ apparaissent deux termes :

- Le premier terme : celui décrit **un régime transitoire** qui disparaît rapidement dans le temps ;
- Le deuxième terme : constant dans le temps, c'est **le régime permanent** où la gouttelette sera animée d'un mouvement rectiligne uniforme.

Pour mesurer correctement la vitesse limite, il faut alors se placer dans le régime permanent, pour cela, il faut que le terme transitoire disparaisse dans le temps. En d'autres mots, il faut que :

$$t \gg \tau$$

On peut par exemple se placer dans le cas 10τ .

4) Expression de v_0 la vitesse limite En l'absence de champ électrostatique $\vec{E}$

Lorsque le champ électrique appliqué entre les plaques du condensateur serait nul, l'expression de la vitesse limite devient la suivante :

$$v_0 = \frac{(m - \rho_{air}V_{goutte})g}{6\eta\pi r}$$

Puisque la gouttelette est d'une forme sphérique, cela veut dire que :

$$V_{goutte} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

D'autre part, la masse de la gouttelette s'exprime par :

$$m = \rho \times V_{goutte} = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

L'expression de v_0 sera alors sous la forme :

$$v_0 = \frac{2g(\rho - \rho_{air})r^2}{9\eta}$$

- 5) Calcul du rayon r sachant qu'en l'absence de champ électrostatique, la gouttelette d'huile parcourt une distance de 1 mm en 8,9 s.

De l'expression de la vitesse limite particulière v_0 découle l'expression suivante pour le rayon de la gouttelette d'huile :

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2g(\rho - \rho_{air})}}$$

L'application numérique, compte tenu des données du problème, conduit au résultat :

$$r \simeq 1,04 \mu m$$

6) Expression la vitesse v_{lim} en fonction de v_0

On a déjà établi que :

$$v_{lim} = \frac{1}{6\eta\pi r} [qE + (m - \rho_{air}V_{goutte})g]$$

Ce qui veut dire que :

$$v_{lim} = \frac{qE}{6\eta\pi r} + v_0$$

- **Déduction de l'expression de la charge q**

D'après ce qui précède, on voit facilement que :

$$q = \frac{6\eta\pi r}{E} (v_{lim} - v_0)$$

- **Calcul la valeur de la charge électrique q sachant qu'en présence du champ électrostatique celle-ci parcourt une distance de 1 mm en 6,4 s**

L'utilisation des données fournies dans l'exercice, nous conduit à obtenir les résultats suivant :

$$v_{lim} \simeq 1,56 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

et

$$q \simeq 3000e$$

- **Conclusion**

Lors de cette expérience dite de Millikan, ce dernier a pu démontrer que la charge électrique portée par la gouttelette d'huile est toujours un multiple de la charge élémentaire e . On dit que la charge électrique est quantifiée.