

**Exercice 1 :**

www.ExoMaroc.com

On considère le champ vectoriel :  $\vec{A} = (3x^2 + 6y)\vec{e}_x - 14yz\vec{e}_y + 20xz^2\vec{e}_z$

Calculer la circulation de  $\vec{A}$  entre les points (0, 0, 0) et (1, 1, 1) le long des chemins suivants :

- le segment de droite joignant ces deux points,
- les segments de droite allant de (0,0,0) à (1,0,0) puis de (1,0,0) à (1,1,0) et enfin de (1, 1, 0) jusqu'à (1, 1, 1).

Ce champ vectoriel est-il un gradient ?

**Exercice 2 :**

Soit le champ vectoriel

$$\vec{V}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} \text{ avec } \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

Calculer la circulation de  $\vec{V}$  le long de :

- la spirale logarithmique d'équation polaire :

$$r = ae^{k\theta}, \text{ entre } \theta_1 \text{ et } \theta_2$$

- la cardioïde :

$$r = a(1 + \cos\theta), \text{ entre } 0 \text{ et } \pi$$

**Exercice 3**

On considère le champ vectoriel :

$$\vec{V} = (2x - y)\vec{e}_x + (2y - x)\vec{e}_y - 4z\vec{e}_z$$

Montrer que ce champ est un gradient, et déterminer la fonction scalaire  $\varphi$  dont il dérive par la relation  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$ .

**Exercice 4**

Un champ de vecteur  $\vec{E}$ , dans l'espace orthonormé  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ , est caractérisé par ses composantes :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ f(x, y) \end{pmatrix} \text{ où } f \text{ ne dépend que de } x \text{ et } y.$$

- Déterminer la fonction  $f$  pour que le champ  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel  $V$  tel que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

- Déterminer alors le potentiel de  $V$ .

3) Quelle est la circulation du champ  $\vec{E}$  entre les points A(0,0,0) et B(1,1,1) ?

### Exercice 5

1) On considère le champ vectoriel à symétrie sphérique :  $\vec{V} = \frac{\vec{e}_r}{r^2}$ . Montrer que ce champ dérive de la fonction scalaire  $f = -\frac{1}{r}$  par la relation  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f(r)$ .

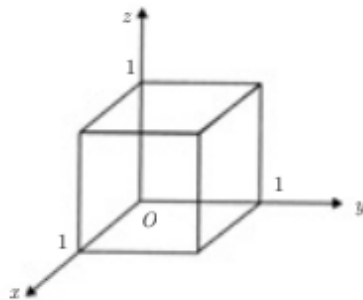
2) Calculer  $\text{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)$  et  $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)$ .

### Exercice 6:

Calculer le flux du champ de vecteurs :

$$\vec{V}(M) = 4xz\vec{e}_x - y^2\vec{e}_y + yz\vec{e}_z$$

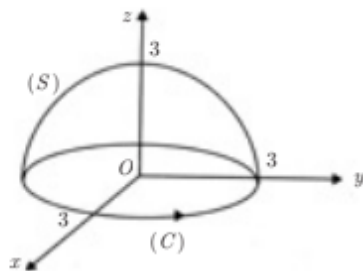
à travers la surface du cube limité par  $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ .



### Exercice 7

Vérifier le théorème de Stokes pour le champ de vecteurs

$\vec{V} = 2y\vec{e}_x + 3x\vec{e}_y - z^2\vec{e}_z$ , dans le cas où  $S$  est la surface de l'hémisphère supérieur d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , et (C) le contour sur lequel s'appuie cet hémisphère.



**Exercice 1 :**

On considère le champ vectoriel :  $\vec{A} = (3x^2 + 6y)\vec{e}_x - 14yz\vec{e}_y + 20xz^2\vec{e}_z$

Calculer la circulation de  $\vec{A}$  entre les points  $(0, 0, 0)$  et  $(1, 1, 1)$  le long des chemins suivants :

a) le segment de droite joignant ces deux points,

b) les segments de droite allant de  $(0,0,0)$  à  $(1,0,0)$  puis de  $(1,0,0)$  à  $(1,1,0)$  et enfin de  $(1, 1, 0)$  jusqu'à  $(1, 1, 1)$ .

Ce champ vectoriel est-il un gradient ?

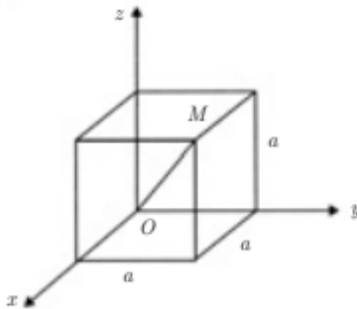
**Solution**

1.1  $\vec{A} = (3x^2 + 6y)\vec{e}_x - 14yz\vec{e}_y + 20xz^2\vec{e}_z$

a) Sur le segment de droite joignant  $(0, 0, 0)$  et  $(1, 1, 1)$ , on a :  $x = y = z$ . On peut donc écrire :

$$C = \int_{(C_1)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_0^1 (3x^2 + 6x)dx - \int_0^1 14x^2 dx + \int_0^1 20x^3 dx$$

$$C = \left[ x^3 + 3x^2 - \frac{14}{3}x^3 + 5x^4 \right]_0^1 = \frac{13}{3}$$



b) De  $(0,0,0)$  à  $(1,0,0)$  :  $y=0 \quad z=0 \quad dy=0 \quad dz=0$

$$C_1 = \int_0^1 3x^2 dx = 1$$

de  $(1,0,0)$  à  $(1,1,0)$  :  $x=1 \quad z=0 \quad dx=0 \quad dz=0$

$$C_2 = 0$$

de  $(1,1,0)$  à  $(1,1,1)$  :  $x=1 \quad y=1 \quad dx=0 \quad dy=0$

$$C_3 = \int_0^1 20z^2 dz = \frac{20}{3}$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = 1 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$$

Comme la circulation entre les deux points  $(0, 0, 0)$  à  $(1, 1, 1)$  dépend du chemin suivi,  $\vec{A}$  n'est pas un gradient.

**Exercice 2 :**

Soit le champ vectoriel

$$\vec{V}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} \text{ avec } \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

Calculer la circulation de  $\vec{V}$  le long de :

a) la spirale logarithmique d'équation polaire :

$$r = ae^{k\theta}, \text{ entre } \theta_1 \text{ et } \theta_2$$

b) la cardioïde :

$$r = a(1 + \cos\theta), \text{ entre } 0 \text{ et } \pi$$

**Solution**

$$\text{On a } \vec{V}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r$$

a) Le long de la spirale logarithmique  $r = ae^{k\theta}$ , on a :

$$dC = \vec{V} \cdot d\vec{M} = \vec{e}_r \cdot (dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta)$$

$$= dr = ake^{k\theta} d\theta$$

$$C = ak \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{k\theta} d\theta = [ae^{k\theta}]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$C = a(e^{k\theta_2} - e^{k\theta_1})$$

b) Le long de la cardioïde  $r = a(1 + \cos\theta)$ , on a :

$$dC = \vec{V} \cdot d\vec{M} = dr = -a \sin\theta d\theta$$

$$C = \int_0^\pi -a \sin\theta d\theta = [a \cos\theta]_0^\pi$$

$$C = -2a$$

**Exercice 3**

On considère le champ vectoriel :

$$\vec{V} = (2x - y)\vec{e}_x + (2y - x)\vec{e}_y - 4z\vec{e}_z$$

Montrer que ce champ est un gradient, et déterminer la fonction scalaire  $\varphi$  dont il dérive par la relation  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$ .

**Solution**

Pour montrer que  $\vec{V}$  est un gradient, il suffit de vérifier que les dérivées croisées de ses composantes sont égales deux à deux.

On a :

$$\vec{V} = (2x - y)\vec{e}_x + (2y - x)\vec{e}_y - 4z\vec{e}_z$$

$$V_x = 2x - y, \quad V_y = 2y - x, \quad V_z = -4z$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial V_x}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} = -1 \\ \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial V_z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial V_x}{\partial z} = 0 \end{array} \right\} \vec{V} \text{ est bien un champ de gradient.}$$

Détermination de la fonction  $\varphi$ .

On a :  $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$

Et aussi :  $d\varphi = \overrightarrow{\text{grad} \varphi} \cdot \overrightarrow{dM} = \vec{V} \cdot \overrightarrow{dM}$

On a donc :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x - y \quad \Rightarrow \quad \varphi = x^2 - yx + f(y, z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x + \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x \Rightarrow \quad f = y^2 + g(z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z} - 4z \quad \Rightarrow \quad g = -2z^2 + C$$

On en déduit finalement :

$$\varphi = x^2 - yx + y^2 - 2z^2 + C$$

#### Exercice 4

Un champ de vecteur  $\vec{E}$ , dans l'espace orthonormé  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ , est caractérisé par ses composantes :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ f(x, y) \end{pmatrix} \text{ où } f \text{ ne dépend que de } x \text{ et } y.$$

1) Déterminer la fonction  $f$  pour que le champ  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel  $V$  tel que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

2) Déterminer alors le potentiel de  $V$ .

3) Quelle est la circulation du champ  $\vec{E}$  entre les points  $A(0,0,0)$  et  $B(1,1,1)$  ?

**Solution**

Le champ  $\vec{E}$  est défini par :

$$\vec{E} = yz \vec{e}_x + zx \vec{e}_y + f(x, y) \vec{e}_z$$

1) Pour que  $\vec{E}$  soit un gradient, il faut que les dérivées croisées de ses composantes soient égales deux à deux, soit :

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \text{qui est vérifié identiquement} \quad x = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \quad \Rightarrow \quad f = xy + g(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \frac{dg}{dx} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dg}{dx} = 0 \Rightarrow g = C$$

La fonction  $f$  doit donc être de la forme

$$f = xy + C$$

2) Pour déterminer le potentiel  $V$ , on écrit que  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ . D'où :

$$E_x = yz = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad V = -xyz + u(y, z)$$

$$E_y = xz = -\frac{\partial V}{\partial y} = xz - \frac{\partial u}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad u = v(z)$$

$$E_z = xy + C = -\frac{\partial V}{\partial z} = xy - \frac{\partial u}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad v = -Cz + \text{cte}$$

On en déduit :

$$V = -xyz - Cz + \text{cte}$$

3) Circulation entre les points (0,0,0) et (1,1,1)

$$C = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_{AB} \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{M} = - \int_{V(A)}^{V(B)} dV$$

$$C = V(0,0,0) - V(1,1,1) = 1 + C$$

- 1) On considère le champ vectoriel à symétrie sphérique :  $\vec{V} = \frac{\vec{e}_r}{r^2}$ . Montrer que ce champ dérive de la fonction scalaire  $f = -\frac{1}{r}$  par la relation  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f(r)$ .
- 2) Calculer  $\text{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)$  et  $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)$ .

**Solution**

- 1) Soit  $\vec{V} = \frac{\vec{e}_r}{r^2}$  à symétrie sphérique :

$$\text{On a : } \frac{\vec{e}_r}{r^2} = \overrightarrow{\text{grad}} f(r) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r = \frac{df}{dr} \vec{u}_r$$

$$\frac{df}{dr} = \frac{1}{r^2} \Rightarrow f(r) = -\frac{1}{r} + \text{cte}$$

- 2) Calcul de  $\text{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)$ .

$$\text{On a : } r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$rdr = rdx + ydy + zdz$$

$$\vec{V} = \frac{\vec{e}_r}{r^2} = \begin{pmatrix} V_x = \frac{x}{r^3} \\ V_y = \frac{y}{r^3} \\ V_z = \frac{z}{r^3} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{r} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{1}{r^3} + x \left( -\frac{3}{r^4} \frac{x}{r} \right) = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$$

$$\text{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) = \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0$$

sauf pour  $r=0$  où  $\vec{V}$  n'est pas défini.

$$\text{Calcul de } \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) :$$

On peut faire un calcul direct, en utilisant la définition de l'opérateur  $\overrightarrow{\text{rot}}$ .

Il est plus simple de remarquer que,  $\frac{\vec{e}_r}{r^2}$  étant égal à  $\overrightarrow{\text{grad}f}$ , on peut appliquer la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}f}) = \vec{0}$$

Par conséquent, 
$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) = \vec{0}$$

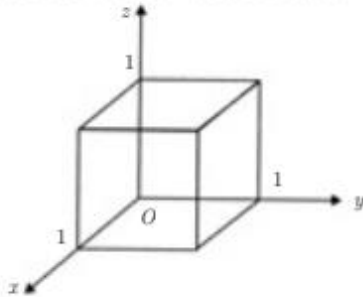
sauf pour  $r=0$  où  $\vec{V}$  n'est pas défini.

### Exercice 6:

Calculer le flux du champ de vecteurs :

$$\vec{V}(M) = 4xz\vec{e}_x - y^2\vec{e}_y + yz\vec{e}_z$$

à travers la surface du cube limité par  $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ .

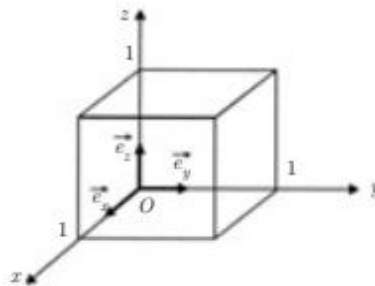


### Solution

$$\vec{V}(M) = 4xz\vec{e}_x - y^2\vec{e}_y + yz\vec{e}_z$$

a) Face  $x = 1$  :  $dS = dydz$   $\vec{n} = \vec{e}_x$

$$\phi_1 = \int_0^1 4z dz \int_0^1 dy = 2$$



b) Face  $x = 0$  :  $dS = dydz$   $\vec{n} = -\vec{e}_x$



$$\phi_2 = 0$$

$$c) \text{ Face } y = 1 : dS = dx dz \quad \vec{N} = \vec{e}_y$$

$$\phi_3 = -\int_0^1 dx \int_0^1 dz = -1$$

$$d) \text{ Face } y = 0 : dS = dx dz \quad \vec{N} = -\vec{e}_y \Rightarrow \phi_4 = 0$$

$$e) \text{ Face } z = 0 : dS = dx dy \quad \vec{N} = -\vec{e}_z \Rightarrow \phi_5 = 0$$

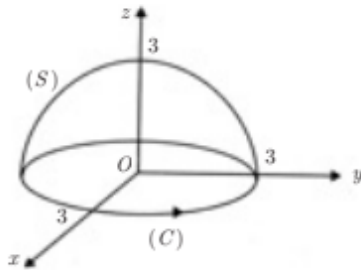
$$f) \text{ Face } z = 1 : dS = dx dy \quad \vec{N} = \vec{e}_z \Rightarrow \phi_6 = \int_0^1 y dy \int_0^1 dx = \frac{1}{2}$$

$$\phi_{total} = 2 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

### Exercice 7

Vérifier le théorème de Stokes pour le champ de vecteurs

$\vec{V} = 2y\vec{e}_x + 3x\vec{e}_y - z^2\vec{e}_z$ , dans le cas où  $S$  est la surface de l'hémisphère supérieur d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , et  $(C)$  le contour sur lequel s'appuie cet hémisphère.



### Solution

Théorème de Stokes :

$$C = \int_{(C)} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot V} \cdot d\vec{S}$$

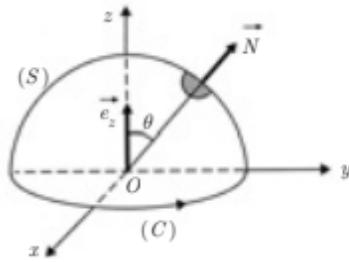
$$\vec{V} = 2y\vec{e}_x + 3x\vec{e}_y - z^2\vec{e}_z$$

a) Calcul du rotationnel : on a ici  $\overrightarrow{rot V} = \vec{e}_z$

$$d\vec{S} = dS \vec{N} \quad dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad \vec{N} = \vec{e}_r$$

$$C = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{N} dS = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$C = \pi R^2 = 9\pi$$



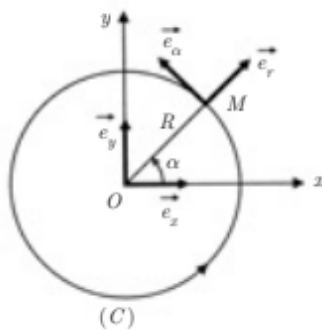
www.ExoMaroc.com

b) Calcul direct

On a :  $\vec{dl} = R d\alpha \vec{e}_\alpha$  où  $\vec{e}_\alpha$  est le vecteur unitaire porté par la tangente à (C).

$$\vec{e}_\alpha = -(\sin \alpha) \vec{e}_x + (\cos \alpha) \vec{e}_y$$

$$\vec{V} \cdot \vec{dl} = -2y(\sin \alpha) R d\alpha + 3x(\cos \alpha) R d\alpha$$



avec

$$x = R \cos \alpha \quad \text{et} \quad y = R \sin \alpha$$

On en déduit :

$$C = \int_C \vec{V} \cdot \vec{dl}$$

$$C = -2R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha + 3R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha$$

$$C = -2\pi R^2 + 3\pi R^2 = \pi R^2 = 9\pi$$