Fomesoutra.com
ça soutra!

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY
Union-Discipline-Travail

UFR MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

CSC : Conseils + Sujets + Corrections

LE VALIDEUR LMD 2020



UFR DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

- Topologie
- Mesure
- Intégration
- Théorie des groupes
- Théorie des nombres
- Analyse numérique matricielle et EDO
- Variables complexes
- Introduction RO
- Initiation base de données

L3
SEMESTRE 1

MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUES

Scanné avec CamScanner

AVANT- PROPOS

« Je ne puis apprendre à parler à qui ne s'efforce de parler. »

Confucius

Le **VALIDEUR LMD** est un recueil d'anciens sujets du système LMD, de propositions de corrections et des conseils absolument importants à savoir. Sa mise à votre disposition vous permettra de vous imprégner du type de sujets auxquels vous pourriez être confrontés. En effet, à l'université, Connaitre le cours est capitale ; connaitre les Travaux Dirigés est conseillé mais ne pas s'approprier les anciens sujets est dangereux.

- **La première partie** de ce document présente quelques témoignages d'anciens et les opportunités qu'offre la filière.
- **La seconde partie** contient les sujets avec propositions de corrections des années académiques (2014-2015/2015-2016/2016-2017/2017-2018/2018-2019) et les travaux dirigés (TD) avec corrections des années antérieures.

S'appuyant sur l'expérience personnelle des auteurs et sur de nombreux témoignages d'étudiants, cet ouvrage se veut résolument concret et Opérationnel.

Vous avez des questions au sujet du VALIDEUR LMD ? Un point de cours qui vous résiste ? Une erreur que vous avez croisée dans l'ouvrage ? Voulez-vous intégrer l'équipe ? Ou vous voulez juste nous laisser un petit mot gentil ? Et bien n'hésitez pas à nous contacter. Nous nous ferons un plaisir de vous répondre dans les meilleurs délais : tornaproveo@gmail.com

L'EQUIPE VALIDEUR LMD.

Scanné avec CamScanner

SOMMAIRE

Avant-propos ..... /1
Introduction ..... /5

Première partie

Témoignages des aînés ..... /7
Vue globale des possibilités après des études en mathématiques informatique ..... /10
Quelques précieux liens absolus pour mieux vous orienter ..... /11

Deuxième partie

Maquette de l'année académique ..... /13

Examens de TOPOLOGIE

Examen UNISAT session 1 2014-2015 ..... / 14
Examen UNISAT session 2 2014-2015
Examen session 1 2015-2016 ..... /16
Examen SPI session 1 2015-2016
Examen session 2 2015-2016
Examen session 1 2016-2017 ..... /19
Examen session 2 2016-2017
Examen session 1 2017-2018 ..... /21
Examen session 2 2017-2018
Examen session 1 2018-2019 ..... /24
Examen session 2 2018-2019

Examens de MESURE

Devoir de groupe 2015-2016 ..... /26
Examen session 1 2015-2016 ..... /27
Examen session 2 2015-2016
Examen session 1 2016-2017 ..... /29
Examen session 1 2017-2018 ..... /30
Examen session 2 2017-2018
Examen session 1 2018-2019 ..... /33
Examen session 2 2018-2019

Examens d'INTEGRATION

Devoir de groupe 2015-2016 ..... /37
Examen session 1 2015-2016 ..... /38
Examen session 2 2015-2016
Examen session 1 2016-2017 ..... /40
Examen session 2 2016-2017
Examen session 1 2017-2018 ..... /42
Examen session 2 2017-2018
Examen session 1 2018-2019 ..... /46
Examen session 2 2018-2019

Examens de THEORIE DES GROUPES

Examen session 1 2014-2015 ..... /48
Examen session 1 2015-2016 ..... /49
Examen session 2 2015-2016
Examen session 1 2016-2017 ..... /51
Examen session 2 2016-2017
Examen session 1 2017-2018 ..... /53
Examen session 2 2017-2018
Examen session 1 2018-2019 ..... /55
Examen session 2 2018-2019

Examens de THEORIE DES NOMBRES

Examen session 1 2015-2016 ..... /57
Examen session 2 2015-2016
Examen session 1 2016-2017 ..... /59
Examen session 2 2016-2017
Examen session 1 2017-2018 ..... /61

Scanné avec CamScanner

Examen session 2 2017-2018
Examen session 1 2018-2019 ..... /63
Examen session 2 2018-2019

Examens d'ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE

Examen session 1 2015-2016 ..... /66
Examen session 2 2015-2016
Examen session 1 2016-2017 ..... /68
Examen session 2 2016-2017
Examen session 1 2017-2018 ..... /71
Examen session 2 2017-2018
Examen session 1 2018-2019 ..... /73
Examen session 2 2018-2019

Examens de EDO 1

Examen session 1 2015-2016 ..... /75
Examen session 2 2015-2016
Examen session 1 2016-2017 ..... /79
Examen session 2 2016-2017
Examen session 1 2017-2018 ..... /80
Examen session 2 2017-2018
Examen session 1 2018-2019 ..... /81
Examen session 2 2018-2019

Examens de VARIABLES COMPLEXES

Examen session 1 2015-2016 ..... /83
Examen session 2 2015-2016
Examen session 1 2016-2017 ..... /85
Examen session 2 2016-2017
Examen session 1 2017-2018 ..... /89
Examen session 2 2017-2018
Examen session 1 2018-2019 ..... /92
Examen session 2 2018-2019

Examens d'INTRODUCTION RO

Examen session 1 2015-2016 ..... /94
Examen session 2 2015-2016
Examen session 1&2 2016 .2017 ..... /97
Examen session 1 2017-2018 ..... /99
Examen session 2 2017-2018
Examen session 1 2018-2019 ..... /103
Examen session 2 2018-2019

Examens d'INITIATION BASE DE DONNEES

Examen session 1 2015-2016 ..... /107
Examen session 2 2015-2016
Examen session 1 2016-2017 ..... /112
Examen session 2 2016-2017
Examen session 1 2017-2018 ..... /118
Examen session 2 2017-2018
Examen session 1 2018-2019 ..... /124

FICHES DE TD

Topologie 2017-2018 ..... /127
Mesure 2017-2018 ..... /130
Intégration 2015-2016 ..... /133
Théorie des groupes 2018-2019 ..... /136
Analyse Numérique Matricielle ..... /139
EDO 1 ..... /148
Variables complexes 2018-2019 ..... /152
Initiation base de données 2018-2019 ..... /154

PROPOSITIONS DE CORRECTIONS

Scanné avec CamScanner

TOPOLOGIE
Examen session 1 2015-2016 /156
Examen session 1 2016-2017 /167
Examen session 2 2016-2017 /168
Examen session 1 2017-2018 /171
Examen session 1 2018-2019 /173
MESURE
Examen session 1 2015-2016 /179
Examen session 1 2016-2017 /183
Examen session 1 2018-2019 /187
INTEGRATION
Devoir de groupe 2015-2016 /195
Examen session 1 2016-2017 /200
Examen session 1 2018-2019 /203
THEORIE DES GROUPES
Devoir 2016-2017 /207
Examen session 1 2016-2017 /210
Examen session 1 2017-2018 /215
THEORIE DES NOMBRES
Examen session 1 2015-2016 /218
ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE
Examen session 1 2015-2016 /220
Examen session 1 2016-2017 /223
Examen session 2 2016-2017 /226
Examen session 1 2017-2018 /230
Examen session 2 2017-2018 /236
Examen session 1 2018-2019 /238
EDO 1
Examen session 2 2016-2017 /244
Examen session 1 2018-2019 /247
VARIABLES COMPLEXES
Examen session 1 2015-2016 /249
Examen session 2 2015-2015 /262
Examen session 1 2016-2017 /269
Examen session 1 2018-2019 /273
INTRODUCTION RO
Examen session 1 2015-2016 /288
Examen session 1 2016-2017 /293
Examen ro2 session 1 2017-2018 /298
Examen session 1 2017-2018 /302
Examen session 1 2018-2019 /305
INITIATION BASE DE DONNEES
Devoir 2014 /313
Examen session 1 2016-2017 /317
Examen session 2 2016-2017 /321
Examen session 1 2017-2018 /324
CORRECTION DE TD
Topologie /327
Mesure /350
Intégration /362
Théorie des groupes /391
Théorie des nombres /407
Analyse numérique matricielle /430
EDO 1 /449
Variables complexes /457
Initiation base de données /471
Bibliographie /479

Scanné avec CamScanner

Introduction

L'équipe Valideur LMD vous souhaite la bienvenue en Licence 3 de mathématique. Toutes nos Féiicitations !

Rien de ci agréable de se voir admis en Licence 3. Pour ceux qui sont autorisés, ce n'est pas grave. Comme on le dit souvent mieux vaut avoir un peu que de ne rien avoir (mieux vaut être autorisé que de reprendre l'année).

Bref ; la venue en Licence 3 est une chose, une autre est de pouvoir y faire face à ce troisième niveau du premier cycle Universitaire. Nous pouvons vous dire qu'avec la Licence, beaucoup de portes s'ouvre à vous. Pour pouvoir avoir des informations sur le comportement à avoir, sur les opportunités, Nous allons plus ou moins répondre à quelques questions.

❖ Quel est le niveau de difficulté de la Licence 3 ?

Evidemment le niveau de difficulté augmente par rapport à celui de la Licence 1&2. Certains ont tendance à penser que plus tu avances plus c'est facile. Ce n'est pas vraiment le cas. Seulement il faut savoir que pour celui qui a acquis le niveau Licence 1&2 en toute honnêteté n'a pas à se préoccuper.

A vrai dire les cours deviennent de plus en plus volumineux.

❖ Comment surmonter ces difficultés ?

En premier lieux, il faut avoir confiance en soi. Ah oui !! Et recommander le reste à DIEU.

En deuxième lieux, apprendre ses cours au jour le jour puis ses travaux dirigés (vraiment important) et voir les anciennes compositions qui se trouvent dans ce document.

Lors des compositions, svp faite bien les exercices que vous choisissez. Même lorsque vous rencontrez un exercice que vous avez déjà traité, faite bien attention à la rédaction. En troisième lieux travailler quelques fois en groupe *très important*. Attention !! Apprendre ses cours avant le travail en groupe ; sinon c'est inutile.

L'équipe VALIDEUR LMD 2020 se dit heureux de contribuer efficacement à la formation des futurs cadre de la nation. En outre elle se compose de :

MEMBRE VALIDEUR LMD 2020 ⟶ **Yéo TORNA** MI/UFHB

MEMBRE VALIDEUR LMD 2020 ⟶ **Tobo GONSEU BIENVENU** MI/UFHB

MEMBRE VALIDEUR LMD 2020 ⟶ **Koukra Essigbé Charlie Christelle** MI/UFHB

MEMBRE VALIDEUR LMD 2020 ⟶ **Koudou Moko Christelle** MI/UFHB

MEMBRE VALIDEUR LMD 2020 ⟶ **Bamba Adama** MI/UFHB

MEMBRE VALIDEUR LMD 2020 ⟶ **Gbadié Tersia Marius Claver** MI/UFHB

MEMBRE VALIDEUR LMD 2020 ⟶ **Koffi Yetran Ange Eric** MI-Actuariat/UFHB

Scanné avec CamScanner

PREMIERE PARTIE

Scanné avec CamScanner

Bienvenu dans cette première partie novatrice du document valideur LMD. Dans cette partie, il s'agira pour nous de vous donner cette propulsion à **votre projet professionnel**. Omniprésentes dans l'industrie – aérospatiale, imagerie, cryptographie..., ou dans les services-banques, assurances..., les mathématiques apparaissent aussi dans de nombreux autres secteurs : sondages, gestion des risques, protection des données...Elles interviennent dans notre vie quotidienne – télécommunication, transports, médecine, météorologie, musique...et contribuent à la résolution de problématiques actuelles : énergie, santé ; environnement, climatologie, développement durable...Pour renchérir de cette diversité des mathématiques informatiques auprès des étudiants de l'Université Félix Houphouët Boigny ; voici ci-après des témoignages d'anciens ayant effectués des études à l'UFR Math Info de ladite Université.

Après un **Baccalauréat série D avec une mention en 2013**, j'ai été orienté à l'UFR Maths-Info afin de poursuivre mes études et après une première année de **tronc commun** en 2014 que j'ai validé avec succès je me suis orienté **en Licence 2 de mathématiques et applications** afin de toujours rester dans la ferveur des mathématiques car c'est l'orientation que j'ai voulu donner à ma vie. Après avoir valider la licence 2 en 2015 j'ai continué sur la même lancé en me dirigeant vers une **Licence 3 de mathématiques et applications** que j'ai obtenu avec brio en 2016. Et après ma L3 j'avais la possibilité de m'orienter soit en Master EDP Optimisation et analyse numérique, soit en Master maths fondamentale, soit en Probabilité ; étant passionné des maths appliquées je décidai de m'orienter en EDP-Optimisation et analyse numérique dans le but de décrocher **un doctorat en Analyse numérique**, une année que je ne termine pas suite à ma motivation d'aller terminer mes études en France. Cela ma conduire à postuler pour **Campus France** qui s'est soldé par un succès et aujourd'hui Alhamdoulilah je continue mes Etudes en **Licence 3 de Mathématiques Pures à l'Université Clermont Auvergne (France)**. Etant ici je m'aperçois d'autres opportunités plus facile à accéder après une Licence de Maths d'où ma motivation a changé mon objectif qui était d'avoir un doctorat en analyse numérique, aujourd'hui j'ai décidé de faire un Master de statistiques et analyses des données après ma licence afin de devenir un Data Scientist .**Mes conseils aux plus jeunes,** c'est d'abord leur dire de ranger leurs BACs avec les mentions dans leurs sacs car une autre histoire vient de commencer et la meilleur manière de vivre pleinement cette histoire est d'être endurant , patient, courageux, bosseur et avoir la foi en Dieu comme on aimait si bien le dire **« c'est nous qui bossons mais c'est DIEU qui fait valider »** ; soyez humble ,respectueux envers vos aînés quelques soit leurs âges car pour nous, aînés signifie qu'il a intégré l'université avant toi donc quel que soit ton intelligence tu lui dois respect et considération et vice versa. **Surtout ne trainez pas à l'université**, ne vous attardez pas sur les futilités, ne vous adonnez pas aux vices, visez bien votre objectif et donnez-vous les moyens de les atteindre car les années passent très vite étant à la fac.
Merci pour votre attention, c'était votre frère, votre aîné, votre conseiller
KONE YACOUBA alias Scologie First

Je suis **Alassane Daniogo**. Après mon baccalauréat au **Lycée scientifique de Yamoussoukro**, je me suis orienté en math info. Ainsi avec ma licence 2 mathématique, j'ai été admis au concours d'entrée à **l'école Supérieure de l'Aéronautique et de la Haute technologie de Casablanca**. Mes motivations ont été mon rêve de devenir un jour ingénieur dans les domaines de l'électricité, mon regard sur des devantiers qui arrivaient à gravir les échelons malgré toutes les difficultés, ma détermination et mon courage. Comme conseils à la nouvelle génération, ne pas oublier d'aucune nation ne pourrait avancer sans science. Cependant, il faut s'armer de courage, faire des efforts pour s'investir dans cette science très porteuse dans le monde d'aujourd'hui.

Je me rappelle encore ce jour : « Le jour où j'ai été orienté en Math-Info ».
Ce jour-là, un oncle m'a dit : « Math-Info ? Petit ! C'est pour devenir professeur de Maths ou-bien ? Bizarrement, c'est ce que plusieurs personnes pensent et disent dans l'ignorance.
Aujourd'hui, cet oncle s'étonnait de me voir embrasser la filière de DATA SCIENCE – BIG DATA (Filière dont il n'a aucune notion) : Voilà un exemple des bienfaits de la filière Mathématique

(Scanné avec CamScanner

et Informatique. Vous vous demanderiez certainement « Comment j'ai fait pour arriver à ce stade ? ».
Soyez-en rassurés, vous avez intégré une filière qui ne peut vous laisse pas au chômage après même que vous ayez validé la L2/L3 ; car cette filière ouvre plusieurs portes à bien plus de concours que vous ne pouvez imaginer.
Mais, Comment décrocher au moins la L2/L3 ?
C'est Le travail (La bosse, le Kosso, les 2kpi, encore la bosse) ; et non seulement le travail mais aussi le courage ; pas ça seulement, il y a aussi la confiance en soi et LA CONFIANCE EN DIEU.
Ne comptez pas sur votre série du BAC ni sur votre note en Maths à l'examen.
Ici, c'est le travail, le courage, la confiance en soi et la Confiance en Dieu.
Vous pouvez y arriver !!! J'ai obtenu la licence sans reprendre de classe, sans même avoir été autorisé. Vous aussi vous pouvez le faire !!!
Travaillez et travaillez en groupe ! Loin de vous les mauvais groupes et LOIN DE VOUS LA TRICHERIE (même en examen) !!!
Vous êtes des ZOULOUS ! Croyez en vous et croyez en DIEU.
RESTEZ DIGNE DANS LA DOULEUR !!! **Digré Brice KOUSSAN Data Scientist chez Orange CI**

Je suis **Traoré Yacouba**. Après un BAC C au lycée moderne klv de Meagui, j'opte pour mes études supérieures, la filière MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE. Ce choix résulte du fait que mon professeur de math de Tle C qui a été un très bon enseignant pour moi est passé par cette filière et est celui qui m'a vraiment encouragé à suivre cette formation. De plus j'aimais vraiment les maths. Avant de venir, plusieurs personnes ont essayé de me dissuader de venir faire la filière car pour eux, c'est une « mission impossible ».

Alors une fois en math info, le début n'a pas été du tout facile pour un nouveau de la ville comme moi et surtout le système de transport ; il fallait faire un arbitrage le retard et risque d'agression. Une solution a été de rester au campus avec des amis et dormir dans les amphis (mais là encore j'étais constamment à cours de liquidité). Quant aux cours, je remercie l'équipe "LE VALIDEUR" pour avoir mis à notre disposition un document (LE VALIDEUR LMD) nous permettant d'avoir une idée de ce qui nous attendais dans les compos et de nous avoir dispensé des cours gratuitement. Avec détermination et persévérance, je valide la première année, la deuxième année et la licence en Mathématique. En licence 2, je passe le concours ITS sous réserve que plus tard, sans trop de concentration, j'échoue. En licence, je passe cette fois-ci **le concours ISE sous réserve, STIC et central Casablanca et je réussi au concours ISE**. Et depuis octobre 2018 je suis la formation des Ingénieurs Statisticiens Economistes.
Pour la jeune génération, j'aimerais d'abord vous dire que si vous avez été orientés en MATH INFO c'est parce-que vous en avez les capacités. Il ne faut surtout pas vous sous-estimer. Ne vous laisser pas dominer par les problèmes ; faites face et avancez (parmi mes amis d'autre essuyaient le salon et faisaient d'autre corvées à la maison avant de venir, ils ont cependant validé les trois années sans reprendre et des concours). Empreignez-vous constamment de bons documents et entourez-vous d'amis qui aiment travailler sérieusement. Et pour finir un point sur lequel j'aimerais insister, c'est l'information : Informez-vous régulièrement si possible et ne passez pas vos temps à surfer sur les réseaux sociaux à ne rien faire de bon. Utilisez plutôt ces réseaux à bon escient notamment en prenant des informations auprès des ainées.

Je suis **Nomel Mathlon,** élève ingénieur à **l'Ecole Supérieur d'Industrie (ESI)** de **l'INPHB**. Après mon baccalauréat C au lycée de garçon de Bingerville en 2014, j'ai intégré l'UFHB en math info. Ainsi avec ma licence en mathématique, j'ai été admis à ***l'INPHB***. Après ma licence le rêve de devenir ***ingénieur télécom*** ma pousser à me lancer, à passer le concours de ***STIC de l'INPHB,*** chose qui n'a pas été facile mais après avoir lire le message du ***président DONAL TRUMP : Rappelez-vous ceci : rien qui ne vaut la peine d'être fait est facile. Suivre vos convictions veut dire que vous êtes prêts à faire face aux critiques de ceux qui manquent de courage pour faire ce qui est juste.***", je me suis lancé et ça finir par porter fruit. Mon conseil pour mes petits frères c'est d'être ***audacieux***, d'avoir de grands ***rêves*** et être toujours ***optimiste.***

Je suis **KOUAME N'Guessan Anan**, élève ingénieur statisticien économiste à **l'Ecole**

Scanné avec CamScanner

Nationale Supérieure de Statistiques et d'Economie Appliquée (ENSEA). Pour la petite histoire, c'était en 2014 lors de la classe de terminale C, au lycée classique d'Abidjan que j'ai entendu parler de cette prestigieuse école qu'est l'ENSEA, mais pour moi c'était le BAC avant tout. Après l'obtention de mon BAC C en 2014, mon objectif était d'entrer à l'INPHB, je ne voulais même pas fouler le sol de l'université vu tout ce qui s'y racontent (grève, FESCI). Malheureusement j'ai échoué au concours et me voici contraint d'aller à l'université. J'avais le choix entre trois filières : SFA, PHYSIQUE CHIMIE, MATH INFO. Des filières que je ne voulais pas faire car, disait-on que ce genre de filière était fait pour devenir professeur de lycée ou collège. Finalement j'opte pour math info. Arrivé en Math-Info, je découvre un nouveau monde, un nouvel esprit, les anciens nous racontèrent à quel point la filière est difficile. J'étais déboussoler jusqu'à me demander qu'est-ce que je suis venu faire ici. Les débuts n'étaient pas faciles mais je me suis battu d'arrache-pied pour m'adapter. C'est ainsi que j'obtiens ma licence en mathématique en 2018 sans reprendre une seule année. En master j'opte pour l'option EDP mais au bout de quelques mois de cours la motivation n'y était plus, avec toutes ces grèves, je ne voyais pas mon avenir dans cette filière. Je décide alors d'aller tenter ma chance dans les concours. C'est ainsi qu'en 2019 je suis admis aux concours d'ISE, ITS et IFORD. J'opte pour la formation ISE.
Mon conseil pour la jeune génération, c'est d'avoir un rêve, un but à atteindre. Il faut rêver grand et se donner les moyens d'y parvenir en travaillant rigoureusement car le travail paie toujours. Ne pas trop se fier aux "on dit" sur les filières. Croyez en vos capacités.

Scanné avec CamScanner

Pour une vue globale des possibilités après des études en mathématiques informatique

Etant en licence 1 math info	• Procédure CAMPUS France • Concours AD de l'ENSEA, TS de l'EAMAC • Des bourses pour les étudiants de L1	
Etant en licence 2 math info	• ITS sous réserve • Cycle ingénieur EAMAC sous réserve • ISFA, EURIA, ISUP...(BECEAS)	
Etant en licence 3 math info	• Concours ENS • ISE de l'ENSEA sous réserve • Cycle ingenieur Centrale Casablanca	
Une L3 math info validée	• Concours cycle ingénieur INPHB, ISE • Concours Master IFORD, IIA, Big Data, ESATIC, PSAV • Concours écoles de commerce HEC, ESSEC, ESCP...	

Qui peut le plus, peut le moins. Cela dit que si vous être de niveau sup vous avez la possibilité de postuler à tous les opportunités de niveaux inférieurs.

Scanné avec CamScanner

Quelques précieux liens absolus pour mieux vous orienter

Campus France Côte d'Ivoire :
https://www.ivoire.campusfrance.org (site d'informations de base)
Concours Centrale Casablanca :
http://www.centrale-casablanca.ma/fr/ (site info et concours cycle ingénieur)
Concours INPHB Yamoussoukro (Bourse du gouvernement après admission) :
http://www.inphb.ci/2/vues/accueil/ (site info)
http://www.inphb.ci/ConCours_Ing-INPHB-2020/ (site concours ingénieurs)
Concours ENSEA Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :
http://ensea.ed.ci/ (site info)
http://capesa.ensai.fr (site concours cycle AS/cycle ingénieur)
Concours HEC Paris (Bourse du gouvernement après admission) :
https://www.hec.edu/fr
https://www.hec.edu/fr/grande-ecole-masters/programme-grande-ecole/admissions
Concours ENS Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :
https://ens.laatech.com/ (site concours)
http://www.ensabidjan.ci/ (site info)
Concours IIA Yaoundé :
http://www.iiayaounde.com/
http://www.iiayaounde.com/linstitut/conditions-dadmission/
Concours X polytechnique de Paris (Bourse du gouvernement après admission) :
https://www.polytechnique.edu/ (site officiel)
https://www.polytechnique.edu/admission-cycle-ingenieur/fr/voie-universitaire-univ-filière-universitaire-internationale-fui (page admission)
Concours ESATIC Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :
https://www.esatic.ci/index1.php (site info)
https://www.esatic.ci/admission.php (page admission)
Concours ISFA Lyon (Actuariat) :
https://isfa.univ-lyon1.fr/
https://isfa.univ-lyon1.fr/formation/actuariat/admission-a-la-formation-d-actuaire-a-l-isfa-803812.kjsp
Bourse Japon 2020 (Bourse du gouvernement Japonais après admission) :
https://www.ci.emb-japan.go.jp/files/000475798.pdf (PDF d'information à télécharger)
https://www.ci.emb-japan.go.jp/itpr_ja/00_000401.html (site officiel de la bourse)
Bourse Russie 2020 (Bourse du gouvernement Russe après admission) :
https://cotedivoire.mid.ru/web/cote-d-ivoire-fr/conditions-a-remplir-pour-devenir-candidats-aux-bourses-du-gouvernement-russe
M2PSAV de l'UFR Math Info (Possibilité de Bourse du gouvernement après admission) :
http://m2psav.master.edu-math.org/ (site officiel)
http://m2psav.master.edu-math.org/?page_id=18 (page de candidature)
Concours IFORD Yaoundé (Bourse du gouvernement après admission) :
http://www.iford-cm.org/
http://www.iford-cm.org/index.php/etudes-formation/concours-entree/informations-utiles
Concours EAMAC de Niamey (Bourse d'organisme Aéronautique(ANAC,SODEXAME ...) après admission) :
http://www.anac.ci/anac/web/ (site de l'autorité nationale de l'aviation civile de Côte d'Ivoire)
http://www.anac.ci/anac/web/docs/BrochureANAC2017.pdf (PDF pour s'informer sur l'aviation en côte d'ivoire à télécharger)

Scanné avec CamScanner

DEUXIEME PARTIE

Scanné avec CamScanner

Etablissement : Université Felix HOUPHOUET BOIGNY
UFR : Mathématiques et Informatique
Domaine : Sciences et Technologies
Grade : Licence
Mention : Mathématiques
Parcours : Mathématiques et Applications
Niveau : L3

Semestre 5

Code UE	Intitulé des Unités d'Enseignement	Code EC	Eléments constitutifs	Masse Horaire Semestrielle des EC												CECT UE	Fonctionnalité
				CM	TD	TP	Mém.	Sortie T	HE	HE	TPE	TPE	- CTF	Coef			
UE Fondamentales																	
TOP2115	Topologie	TOP211S1	Topologie	24	16	0		0	40	40	60	60		100	4	4	Obligatoire
				60%	40%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		4		
UE de Spécialité																	
MET2115	Mesure et Intégration	MET211S1	Mesure	14	10	0		0	24	24	36	36		60	2,4	6	Obligatoire
MET2115	Mesure et Intégration	MET211S2	Intégration	22	14	0		0	36	36	54	54		90	3,6		
				60%	40%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		6		
ALG2115	Algèbre	ALG211S1	Théorie des Groupes et Anneaux	24	16	0		0	40	40	60	60		100	4	6	Obligatoire
ALG2115	Algèbre	ALG211S2	Arithmétique	12	8	0		0	20	20	30	30		50	2		
				60%	40%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		6		
ANN2115	Analyse Numérique	ANN211S1	Analyse Numérique Matricielle	12	14	4		0	30	30	45	45		75	3	5	Obligatoire
ANN2115	Analyse Numérique	ANN211S2	Analyse Numérique des EDO	8	10	2		0	20	20	30	30		50	2		
				40%	48%	12%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		5		
VCP2115	Variables Complexes	VCP211S	Variables Complexes	18	12	0		0	30	30	45	45		75	3	3	Obligatoire
				60%	40%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		3		
UE de Méthodologie																	
IBO2115	Introduction Recherche Opérationnelle	IBOP211S	Introduction Recherche Opérationnelle	12	14	4		0	30	30	45	45		75	3	3	Obligatoire
				40%	47%	13%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		3		
IBD2115	Initiation Bases De Données	IBD211S	Initiation Bases De Données	12	6	12		0	30	30	45	45		75	3	3	Obligatoire
				40%	20%	40%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		3		
UE de Culture Générale																	
Total Semestre									100	450				750	30		

Scanné avec CamScanner

UNISAT - Abidjan
Année universitaire : 2014 -2015

LICENCE 3 – Mention : Mathématiques
UE : Topologie
Examen de Juin 2015 - Durée : 03H00.

Exercice 1. *Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) des espaces métriques, $f : X_1 \to X_2$ une application continue et bijective.*

(i) *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de X_1, de limite x. Montrer que $K_1 = \{x : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est une partie compacte de X_1.*

(ii) *On suppose que (X_1, d_1) est compactet que pour toute partie compacte K_2 de X_2, $f^{-1}(K_2)$ est compact dans X_1. Montrer que f est un homéomorphisme.*

Exercice 2. (i) *Donner, en la justifiant, la définition de la norme d'une application linéaire continue.*

(ii) *Donner, en la justifiant, la définition de la norme de la convergence uniforme.*

(iii) *Soit E l'espace de Banach des applications complexes continues sur l'intervalle compact $[0, 1]$, muni de la norme de la convergence uniforme. Soit φ un élément de E. Montrer que l'application*

$$T : E \to \mathbb{R}, \quad f \to T(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)dt$$

est linéaire et uniformément continue sur E. Majorer la norme de T.

Exercice 3. *Démontrer que dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Exercice 4. *Soit a un réel positif et (E, d) l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $J = [0, a]$ à valeurs réelles, muni de la distance de la convergence uniforme notée d. Soit T la fonction $x \to Tx$ définie sur E par :*

$$T(x)(t) = 1 + \int_0^t x(s)ds \quad \forall t \in J.$$

(i) *Montrer que $\forall x \in E$, $T(x) \in E$ et que l'application T est lipschitzienne.*

(ii) *On suppose $0 < a < 1$. Montrer que T admet un point fixe unique u.*

(iiii) *Trouver, pour $0 < a < 1$, le point fixe u de T.*

Scanné avec CamScanner

UNISAT - Abidjan
Année universitaire : 2014 -2015

LICENCE 3 – Mention : Mathématiques
UE : Topologie
Examen d'octobre 2015 - Durée : 02H45.

Exercice 1. *Montrer qu'une partie A d'un espace topologique E est dense si et seulement tout ouvert O non vide de E rencontre A.*

Exercice 2. *A quelle condition une suite d'un espace topologique séparé E converge-t-elle vers un point isolé de E ?*

Exercice 3. *Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) des espaces métriques, $f : X_1 \to X_2$ une application continue et bijective.*

(i) *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de X_1, de limite x. Montrer que $K_1 = \{x : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est une partie compacte de X_1.*

(ii) *On suppose que (X_1, d_1) est compact et que, pour toute partie compacte K_2 de X_2, $f^{-1}(K_2)$ est compact dans X_1. Montrer que f est un homéomorphisme.*

Exercice 4. *Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles pour tous $u, v, x, y \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{cases} |f(u,v) - f(x,y)| \leq a|u-x| + b|v-y| \\ |g(u,v) - g(x,y)| \leq c|u-x| + d|v-y|. \end{cases}$$

On suppose que $0 < a + b < 1$ et $0 < c + d < 1$.
On considère le système :

$$(S)\begin{cases} x = f(x,y) \\ y = g(x,y). \end{cases}$$

1. *Montrer que (x, y) est solution du système (S) si et seulement (x, y) est point fixe d'une application T à définir.*
2. *Démontrer que le système (S) admet une solution unique.*

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet Boigny - Abidjan
UFR Mathématiques etInformatique
Année universitaire : 2015 -2016

LICENCE 3 – Mention : Mathématiques
UE : Topologie - EXAMEN du 21 Septembre 2016 - Durée 3H00
Documents et téléphones portables non autorisés .

Exercice 1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.*

(a) *Démontrer que E est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ pour un certain entier naturel n.*

(b) *Démontrer que sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes.*

(c) *En déduire que sur E toutes les normes sont équivalentes.*

(d) *Démontrer que toute application linéaire $g : E \to F$, où F est un espace vectoriel normé, est continue.*

Exercice 2. *1. Soient (X, d_1) et (Y, d_2) des espaces métriques, $f : X \to Y$ une application. Montrer que si f est continue alors, pour toute partie fermée F de Y, $f^{-1}(F)$ est une partie fermée de X.*

2. Soit C l'ensemble des suite de nombre réels qui sont convergentes muni de la distance d définie comme suit : pour $x = (x_n)$, $y = (y_n)$, $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$. Soit, pour toute suite $(x_n) \in C$, $L(x)$ sa limite.

(a) *Montrer que l'application $L : C \to \mathbb{R}$, $x \mapsto L(x)$ est continue.*

(b) *En déduire que la partie C_0 de C des suites qui convergent vers 0 est fermée.*

Exercice 3. *Soit $X = C([0, 1])$ l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[0, 1]$ muni de la distance de la convergence uniforme D.*

(i) *Donner, en la justifiant, la définition de D et Montrer que (X, D) est complet.*

(ii) *Montrer que l'application $F : X \to X$ telle que*

$$\forall f \in X,\ F(f)(x) = \frac{1}{5}\cos(f(x)) + \int_0^x f(t)dt \quad \forall x \in [0, 1]$$

est continue, lipschitzienne. On notera que les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont $1-$lipchitziennes. On admettra, dans la suite, que F n'est pas une contraction.

(iii) *Montrer que $F \circ F$ est une contraction dans X.*

(iv) *En déduire l'existence et l'unicité d'une application $g \in X$ telle que*

$$\forall x \in [0, 1],\ g(x) = \frac{1}{5}\cos(g(x)) + \int_0^x g(t)dt.$$

Scanné avec CamScanner

Établissement :
UFR MI
Filière : SPI

Année :
2015-2016

EXAMEN

Topologie

Première session

Durée : 02H00

Licence 3

EXERCICE 1 :

Soient (X,d) et (Y,d) deux espaces métriques. Soient f et g continues de X dans Y.

1. Montrer que $\{x \in X / f(x) = g(x)\}$ est fermée dans X.
2. Soit A une partie dense de X. Montrer que si f et g coïncident sur A alors $f = g$.

EXERCICE 2 :

1. Donner la définition d'un espace complet et d'une contraction.
2. Donner la définition d'un espace métrique compact.
3. Montrer qu'un espace métrique compact est complet.
4. Montrer que toute contraction est uniformément continue.
5. Soient (X,d) un espace métrique compact et f une contraction de X dans X. Montrer que f admet un point fixe unique.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet Boigny - Abidjan
UFR Mathématiques etInformatique
Année universitaire : 2015 -2016

LICENCE 3 – Mention : Mathématiques
UE : Topologie - EXAMEN du 14 mars 2017 - Durée 2H00
Documents et téléphones portables non autorisés .

Exercice 1. *1. Soient (X, d_1) et (Y, d_2) des espaces métriques, $f : X \to Y$ une application. Montrer que si f est continue alors, pour toute partie fermée F de Y, $f^{-1}(F)$ est une partie fermée de X.*

2. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de nombres réels qui sont convergentes muni de la distance d définie comme suit : pour $x = (x_n)$, $y = (y_n)$. $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$. Soit, pour toute suite $(x_n) \in \mathcal{C}$, $L(x)$ sa limite.

(a) Montrer que l'application $L : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$, $x \to L(x)$ est continue.

(b) En déduire que la partie $\mathcal{C}_0$ de $\mathcal{C}$ des suites qui convergent vers 0 est fermée.

Exercice 2. *Soit $E = (X, \mathcal{O})$ un espce topologique.*

1. *Quand dit-on que E est connexe ? Connexe par arcs ?*
2. *Supposons E connexe et soit f une application continue de E dans $\{0, 1\}$. Montrer que f est constante.*
3. *Qu'appelle t-on composantes connexes de E ? Si E est connexe, combien dispose t-il de composantes connexes ? justifier votre réponse.*
4. *Démontrer que si E est connexe par arcs, il est connexe ?*
5. *On suppose que E est connexe et compact. Soit g une application continue de E dans $\mathbb{R}$. Montrer que $g(E)$ est un intervalle fermé et borné.*

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet Boigny
UFR Mathématiques et Informatique
Année universitaire : 2016 -2017

LICENCE 3 – Mention : Mathématiques - UE : Topologie
Session du 0e septembre 2017 Durée : 03H00

Exercice 1. *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés et g une applications linéaire de E dans F.*

(a) *Montrer que g est continue si et seulement si elle est bornée sur la sphère unité de E.*

(b) *On suppose que E est de dimension finie. Montrer qu'il existe un réel M positif tel que, pour tout élément x dans la sphère unité de E, $\|g(x)\|_F \leq M$.*

Exercice 2. *Soit (X, d) un espace métrique compact et f une application continue de X dans X. On suppose que*

$$\forall x \in X : f^2(x) \neq x,$$

$f^2 = f \circ f$.

(a) *Montrer que l'application $g : X \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = d(x, f^2(x))$ est continue.*

(b) *L'application g admet-elle une borne inférieure ? une borne supérieure ? Dans l'affirmative, ces bornes sont-elles atteintes ?*

(c) *Montrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que*

$$\forall x \in X : d(x, f^2(x)) \geq k.$$

Exercice 3. *1. Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X qui converge vers $y \in X$. Démontrer que l'ensemble $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{y\}$ est compact.*

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue et propre, c'est-à-dire, telle que, pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}^n$, $f^{-1}(K)$ est compact.

(a) *Montrer que si f est propre, alors l'image par f de toute partie fermée de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.*

(b) *Etablir l'équivalence suivante : f est propre si et seulement si $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.*

Scanné avec CamScanner

UFHB - UFR Mathématiques et Informatique
Année universitaire : 2016 -2017

LICENCE 3 – Mention : Mathématiques et Applications
UE : TOPOLOGIE
Session du 14 Fevrier 2018 - Durée : 02H30.
Documents non autorisés.

Exercice 1. *Soient A un réel strictement positif et (E, D) l'espace des fonctions numériques continues définies sur l'intervalle compacte $[0. A]$ muni de la distance de la convergence uniforme D. Soit $T : E \to E$, $x \to T(x)$, l'applicaation définie par :*

$$T(x)(t) = 1 + \int_0^t x(s)ds. \tag{1}$$

(a) *Donner, en la justifiant, la définition de D.*

(b) *Montrer que l'on a bien $T(x) \in E$ pour tout $x \in E$.*

(c) *Montrer que l'application T es lipchitzienne.*

(d) *On suppose que $A < 1$. Montrer que T admet un point fixe unique.*

(d) *Montrter que ce point fixe de T, x, est l'unique solution du problème de Cauchy :*

$$u'(t) - u(t) = 0, \ t \in [0, A], \quad u(0) = 1.$$

Exercice 2. *1. Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X qui converge vers $y \in X$. Démontrer que l'ensemble $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{y\}$ est compact.*

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue et propre, c'est-à-dire, telle que, pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}^n$, $f^{-1}(K)$ est compact.

(a) *Montrer que si f est propre, alors l'image par f de toute partie fermée de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.*

(b) *Etablir l'équivalence suivante : f est propre si et seulement si $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.*

VALIDEUR LMD: Conseils - Examens & TD - Corrections

(scanné avec CamScanner

UFHB - UFR Mathématiques et Informatique
Année universitaire : 2017-2018

LICENCE 3 – Mention : Mathématiques et Applications
UE : TOPOLOGIE
Session du 15 septembre 2018 - Durée : 02H30.
Documents non autorisés.

Exercice 1. *Soit E, l'espace des suites réelles dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang. On munit E de la norme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = Max\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\}$.*

On considère l'application $L : E \to E$ définie par

$$L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\frac{x_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

1. *Montrer que l'application L est :*
   (a) *linéaire ;*
   (b) *bijective ;*
   (c) *continue.*
2. *L'application L est-elle un homéomorphisme ? (On étudiera la continuité de l'application réciproque L^{-1}).*

Exercice 2. (i) *Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques séparés et $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ une application continue. Montrer que, pour toute suite $(x_n)_n$ de X_1 convergente de limite $a \in X_1$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans X_2, et de limite égale à $f(a)$.*

(ii) *Existe-t-il une application continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ qui est telle que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ et, pour tout $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, $f(x) \in Q$?*

Exercice 3. *Soit (X, d) un espace métrique compact et f une application continue de X dans X. On suppose que*

$$\forall x \in X : f^2(x) \neq x,$$

où $f^2 = f \circ f$.

(a) *Montrer que sur $X \times X$, l'application distance d est : uniformément continue, bornée et atteint ses bornes.*

Scanné avec CamScanner

2

(b) *Montrer que l'application* $g : X \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = d(x, f^2(x))$ *est continue.*

(c) *L'application* g *admet-elle une borne inférieure ? une borne supérieure ? Dans l'affirmative, ces bornes sont-elles atteintes ?*

(d) *Montrer qu'il existe un réel* $k > 0$ *tel que*

$$\forall x \in X : d(x, f^2(x)) \geq k.$$

(e) *Montrer que* f *ne peut admettre de point fixe.*

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny
UFR Mathématiques et Informatique

Année 2017-2018

Licence 3 - Mathématiques
UE : Topologie
Deuxième Session - Mars 2019
Durée : 2 H 30. (Sans documents)

Exercice 1

Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application.

1) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue sur E

(ii) $\forall A \subset F,\ f^{-1}\left(\overset{\circ}{A}\right) \subset \overbrace{f^{-1}(A)}^{\circ}$

(iii) $\forall A \subset F,\ \overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}\left(\overline{A}\right)$.

2) Montrer que si (E,d) est compact, et si f est une bijection continue, alors f est un homéomorphisme.

Exercice 2

Soit (E,d) un espace métrique compact.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de (E,d) n'admettant qu'une seule valeur d'adhérence.
Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (E,d).

Exercice 3

Soit X l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\|_\infty$ de la convergence uniforme.

1) Rappeler pourquoi $(X, \|\|_\infty)$ est un espace métrique complet.

2) On pose, $\forall f \in X$

$$F(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{5}\cos(f(x)) \ , \forall x \in [0,1]$$

a) Montrer que F est une application continue de X dans X.

b) Montrer que F est une application Lipschitzienne non contractante.

c) Montrer que $F \circ F$ est une application contractante et en déduire l'existence et l'unicité d'une application $f \in X$ telle que

$$f(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{5}\cos(f(x)) \ , \forall x \in [0,1].$$

(Scanné avec CamScanner)

Université Félix Houphouet-Boigny
UFR Mathématiques et Informatique

Année 2018-2019

Licence 3 - Mathématiques
UE : Topologie
Première Session - Septembre 2019
Durée : 2 H 30 mn. (Sans documents)

Exercice 1

Soit E l'espace des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Soit D la distance de la convergence uniforme sur E.
Pour tous $f, g \in E$, on pose

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt.$$

1) Montrer que d est une distance sur E.

2) Montrer que (E, D) est complet.

3)

(i) Montrer que l'application identité de (E, D) dans (E, d) est continue.

(ii) Montrer que l'application identité de (E, d) dans (E, D) n'est pas continue.

(iii) Les distances D et d sont-elles topologiquement équivalentes sur E ?

Exercice 2

Soit A une partie partout dense d'un espace métrique (X, d).
Montrer que si toute suite de Cauchy de points de A converge dans X, alors X est complet.

Exercice 3

Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des applications classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $f \in E$, on pose

$$N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

1) Montrer que N est une norme sur E et que (E, N) est un espace de Banach réel.

2) Soit T l'opérateur défini sur E par $\forall f \in E, \forall x \in [0,1]$

$$T(f)(x) = 1 + \int_0^x f\left(t - t^2\right) dt.$$

a) Montrer que $T \circ T$ est une contraction.

b) Montrer que T admet un point fixe et ce point fixe est unique.

c) En déduire l'existence d'une unique application $f \in E$ telle que

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(x) = f\left(x - x^2\right), \forall x \in [0,1].$$

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny
UFR Mathématiques et Informatique

Année 2018-2019

Licence 3 - Mathématiques
UE : Topologie
Deuxième Session - Février 2020
Durée : 2 H 30 mn. (Sans documents)

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit d une distance sur E.

1) Montrer que si d est associée à une norme $|||$ sur E alors d vérifie les conditions suivantes :

a) $\forall x, y, t \in E,\ d(x+t, y+t) = d(x, y)$

b) $\forall \lambda \in \mathbb{k},\ \forall x, y \in E,\ d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x, y)$.

2) Réciproquement, montrer que si d vérifie les conditions a) et b) précédentes, alors il existe une norme $|||$ sur E telle que d soit la distance associée à cette norme.

On donnera explicitement l'expression de cette norme $|||$; on vérifiera que c'est bien une norme sur E et que la distance qui lui est associée est bien d.

3) Considérons sur E la distance discrète ρ définie par $\forall x, y \in E$

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ si } x = y \end{cases}$$

Existe-t-il une norme N sur E telle que la distance associée est ρ ?

Exercice 2

Soit $(E, |||)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que si toute boule fermée de $(E, |||)$ est compacte, alors $(E, |||)$ est un espace de Banach.

2) Montrer que E est connexe.

Exercice 3

Soit (X, d) un espace métrique compact, et soit f une isométrie de X sur X.

1) Démontrer que f est un homéomorphisme de X sur X.

Indication :

Si $f(X) \neq X$, prendre un point $x_1 \in X \backslash f(X)$ et considérer la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Prouver qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \neq q$, $d(x_p, x_q) \geq \alpha$.

2) En déduire qu'une isométrie f de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ qui admet un point fixe est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Scanné avec CamScanner

Université F.H.B. - Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2015 - 2016

Licence 3, Groupe 2: Devoir de Mesure

1er semestre, Durée :1H.15mn

Exercice 1: (10 points)

Soit d un nombre entier strictement positif. $\mathbb{R}^d$ est muni de la distance Euclidienne. $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des boules ouvertes de $\mathbb{R}^d$ dont le rayon ainsi que toutes les coordonnées du centre sont des nombres rationnels. Montrer que:

1°) Tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{S}$.

2°) La tribu Borélienne de $\mathbb{R}^d$ est engendrée par $\mathcal{S}$.

Exercice 2: (10 points)

Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré positif, Ω un ensemble non vide, et $f : \Omega \to X$ une application.

1°) Donner la définition de $f^{-1}(\mathcal{T})$ et montrer que c'est une tribu sur Ω.

2°) Est - il vrai que $f(f^{-1}(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$?

3°) On suppose que f est surjective. On pose

$$\nu(A) := \mu(f(A)), \forall A \in f^{-1}(\mathcal{T}).$$

Montrer que ν est une mesure positive sur $(\Omega, f^{-1}(\mathcal{T}))$.

Scanné avec CamScanner

Université F.H.B.-Corody
UFR Mathématiques-informatique

Année universitaire 2015-2016

Licence 3 : EXAMEN DE MESURE

(1heure 30 min)

I. On donne $X = \{1;2;3;4;5;6\}, A = \{1;3;5\}$ et $B = \{4;5;6\}$

1. Citer les éléments de l'algèbre $\mathcal{A}$ de parties de X engendré par $\mathcal{E} = \{A;B\}$
2. $\mathcal{A}$ est-elle une σ-algebre de parties de X ?
3. Définir sur $(X,\mathcal{A})$ une mesure de probabilité μ verifiant : $\mu(A) = \frac{1}{3}, \mu(B) = \frac{1}{4}$ et $\mu(A \cup B) = \frac{1}{2}$
   (On précisera l'image par μ de chaque élément de $\mathcal{A}$)

II. f est une application d'un ensemble Ω dans un autre X

1. Montrer que :
   (a) $\forall T \in \mathcal{P}(X) \quad f^{-1}(X \setminus T) = \Omega \setminus f^{-1}(T)$

   (b) $\forall A, B \in \mathcal{P}(X) \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

   (c) $\forall (A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}} \quad f^{-1}(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-1}(A_n)$
2. $\mathcal{S}$ est une σ-algèbre de parties de Ω et μ une mesure positive sur $(\Omega,\mathcal{S})$
   (a) Montrer que $f(\mathcal{S}) = \{T \subset X / \ f^{-1}(T) \in \mathcal{S}\}$ est une tribu de parties de X

   (b) On pose : $\forall T \in f(\mathcal{S}) \ \nu(T) = \mu(f^{-1}(T))$
   Montrer que ν est une mesure positve sur $(X, f(\mathcal{S}))$

III. X est un ensemble non vide. Pour tous sous ensemble E de X on pose :

$$\mu^*(E) = \begin{cases} 0 & si \quad E = \emptyset \\ 1 & si \quad E \neq \emptyset \end{cases}$$

1. montrer que μ^* est une mesure extérieur sur X
2. Soit A un sous-ensemble de X tel que : $A \neq \emptyset$ et $X \setminus A \neq \emptyset$.
   A est-il μ^*-mesurable ?

Scanné avec CamScanner

Mesure

(2ème Session 2015-2017)

Durée 2h30

Exercice 1 1) A et B sont deux sous-ensembles de Ω tels que

$$\emptyset \neq A \subsetneq B \subsetneq \Omega$$

Déterminer l'algèbre de parties de Ω engendrée par $\mathcal{E} = \{A, B\}$

2) $\mathcal{A}$ est une algèbre de parties de X, $\mathcal{B}$ une algèbre de parties de Y.

$\mathcal{R} = \{A \times B / A \in \mathcal{A} \text{ et } B \in \mathcal{B}\}$ est-il une algèbre de parties de $X \times Y$?

[Justifier la réponse]

3) Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit symétrique par rapport à zéro lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \in A \Leftrightarrow -x \in A$$

Montrer que $\mathcal{S} = \{A \subset \mathbb{R} / A \text{ symétrique par rapport à zéro}\}$ est une σ-algèbre de parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 2 1) $\mathcal{C}$ est une σ-algèbre de parties de X.

a) μ est une mesure positive finie sur $(X, \mathcal{C})$. Démontrer que pour tous éléments A, B et C de $\mathcal{C}$:

i) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

ii) $\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C)$

b) $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est une suite de mesures positives sur $(X, \mathcal{C})$ et $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels positifs. On pose

$$\forall A \in \mathcal{C} \quad \mu(A) = \sum_{n \geq 1} a_n \mu_n(A)$$

Montrer que μ est une mesure positive sur $(X, \mathcal{C})$

2) On considère les mesures positives suivantes sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$\mu_1 = \sum_{p \in \mathbb{N}} \delta_p \;,\; \mu_2 = \sum_{p \in \mathbb{N}} 2^p \delta_p \quad \text{et} \quad \mu_3 = \lambda$$

où δ_p est la mesure de Dirac au point p et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Calculer, pour chacune de ces mesures, la mesure de $A_n = [n, n+1 + \frac{1}{n^2}]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

Scanné avec CamScanner

Université F.H.B. - Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2016 - 2017

Licence 3: E.C.U.E. Mesure: Examen 1ère Session

Durée: 2 H

Exercice 1: (8 points)

Soit X un ensemble non vide.

1°) Montrer que, si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite de parties de X et $A = \cup_{n\geq 0} A_n$, alors $A\backslash(\cap_{n\geq 0} A_n) = \cup_{n\geq 0}(A\backslash A_n)$.

2°) Soit $\mathcal{R}$ un sous - ensemble non vide de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant:

(i) $\forall A, B \in \mathcal{R},\ A\backslash B \in \mathcal{R}$

(ii) $\forall (A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}},\ \cup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{R}$.

a) Montrer que: $\forall (A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}},\ \cap_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{R}$.

b) Montrer que $\mathcal{R}$ est une σ - algèbre de parties de X si et seulement si X est un élément de $\mathcal{R}$.

Exercice 2: (7 points)

Soient X un ensemble non vide, $\mathcal{T}$ une tribu de parties de X, et μ une mesure positive sur $(X, \mathcal{T})$.

1°) Montrer que: $\forall T, S \in \mathcal{T}$ on a: $\mu(T\cup S) + \mu(T\cap S) = \mu(T) + \mu(S)$.

2°) Donner une condition necessaire et suffisante sur μ pour que l'on ait

$$\forall T, S \in \mathcal{T},\ \mu(T\cup S) = \mu(T) + \mu(S) - \mu(T\cap S). \qquad (*)$$

3°) On suppose que μ vérifie (*). Montrer que: $\forall (T_1, T_2, T_3) \in \mathcal{T}^3$ on a:

$$\mu(T_1\cup T_2\cup T_3) = \mu(T_1)+\mu(T_2)+\mu(T_3)-\mu(T_1\cap T_2)-\mu(T_1\cap T_3)-\mu(T_2\cap T_3)+\mu(T_1\cap T_2\cap T_3).$$

Exercice 3: (5 points)

$\Omega = \{a, b, c\}$ et on pose: $\tau(\emptyset) = 0$, $\tau(\{a\}) = 1$, $\tau(\{b\}) = \tau(\{c\} = 2$,

$\tau(\{a, b\}) = \tau(\{a, c\}) = \tau(\{b, c\}) = 3$ et $\tau(\Omega) = 4$.

1°) Montrer que τ est une mesure extérieure sur Ω, et que τ n'est pas une mesure sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

2°) Quels sont les sous - ensembles de Ω qui sont τ - mesurables?

Scanné avec CamScanner

Université F.H.B. - Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2017 - 2018

Licence 3: E.C.U.E. Mesure
Examen de la première session
Durée: 1h30mn

Exercice 1:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \{n, n+1, n+2\}$.

$\mathcal{F}$ est la σ - algèbre de parties de $\mathbb{N}$ engendrée par

$$\mathcal{S} := \{S_n \ / \ n \in \{0,2,3,....\} = \mathbb{N}\backslash\{1\}\}.$$

1°) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on a $\{n\} \in \mathcal{F}$.

2°) En déduire que toute partie de $\mathbb{N}^{**} := \{2,,3,.....\} = \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ est un élément de $\mathcal{F}$, c'est à dire $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{**}) \subset \mathcal{F}$.

Exercice 2:

$\mathcal{A}$ est une σ - algèbre de parties d'un ensemble non vide Ω, et μ est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

1°) $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. On pose:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n := \cup_{k>n} A_k \text{ et } C := \cap_{n\geq 0} B_n.$$

Montrer que:

a)

$$\text{Si } \mu(\cup_{n\geq 0} A_n) < +\infty, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} [\sup_{k\geq n} \mu(A_k)] \leq \mu(C);$$

b)

$$\text{Si } \sum_{n\geq 0} \mu(A_n) < +\infty, \text{ alors } \mu(C) = 0.$$

2°) On suppose que $\mu(\Omega) < +\infty$. $(A_n)_{n\geq 0}$ et $(B_n)_{n\geq 0}$ sont deux suites d'éléments de $\mathcal{A}$ telles que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset A_n$.

Montrer que:

a)

$$(\cup_{n>0} A_n)\backslash(\cup_{n>0} B_n) \subset \cup_{n>0}(A_n \backslash B_n);$$

b)

$$\mu(\cup_{n\geq 0} A_n) - \mu(\cup_{n\geq 0} B_n) \leq \sum_{n\geq 0} [\mu(A_n) - \mu(B_n)].$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 3:

Soient $(X_1, \mathcal{A}_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurables, $X := X_1 \times X_2$, et $\pi_k : X \to X_k$ la projection canonique, pour $k = 1, 2$. Soit $\mathcal{A}$ la tribu sur X engendrée par

$$\mathcal{E} := \{A_1 \times A_2 \ / \ A_i \in \mathcal{A}_i, \forall i = 1, 2\}.$$

Montrer que $\mathcal{A}$ est engendrée par

$$\mathcal{F} := \{\pi_k^{-1}(E_k) \ / \ E_k \in \mathcal{A}_k \text{ et } k = 1, 2\}.$$

Pour rappel: $\pi_1(x, , y) = x$, et $\pi_2(x, , y) = y, \forall (x, y) \in X$.

Scanné avec CamScanner

Université F.H.B. - Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2017 - 2018

Licence 3: E.C.U.E. Mesure
Examen de la seconde session
Durée: 1h30mn

Exercice 1:

Rappeler la définition de:

1°) une σ - algèbre de parties d'un ensemble X

2°) une mesure positive μ et une mesure de probabilité P sur $(X, \mathcal{A})$, sachant que $\mathcal{A}$ est une σ - algèbre de parties de X.

Exercice 2:

P est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{P}(X))$, où $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties d'un ensemble X donné.

Montrer que:

1°) Pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble

$$A_n := \{a \in X \ / \ P(\{a\}) > \frac{1}{n}\}$$

possède au plus n éléments;

2°)

$$A := \{a \in X \ / \ P(\{a\}) > 0\}$$

est dénombrable.

Exercice 3:

μ désigne la mesure de Lebesgue sur R.

1°) Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert et non vide de R.

a) Exhiber une suite d'intervalles compacts $([c_n, d_n])_{n\geq 1}$ de R vérifiant:

- $\forall n \geq 1, [c_n, d_n] \subseteq [c_{n+1}, d_{n+1}]$
- $\cup_{n\geq 1}[c_n, d_n] =]a, b[$.

b) Montrer que

$$\mu(]a, b[) = \sup\{\mu(K) \ / \ K \text{ est un compact de R et } K \subseteq]a, b[\}.$$

2°) Soit $(]a_i, b_i[)_{i\geq 1}$ une suite disjointe d'intervalles ouverts et non vides de R, et $O := \cup_{i\geq 1}]a_i, b_i[$. On suppose que $\mu(O) < +\infty$.

Montrer que:

a) $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists k_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ tel que: $\forall k \geq k_\varepsilon, \mu(\cup_{1\leq i\leq k}]a_i, b_i[) > \mu(O) - \varepsilon$

b) $\mu(O) = \sup\{\mu(K) \ / \ K \text{ est un compact de R et } K \subseteq O\}$.

N.B.: On rappelle que toute réunion d'un nombre fini de compacts de R est un compact de R.

Scanné avec CamScanner

Université FHB
UFR Maths-Info

E.C.U.E: Mesures

Première Session: Septembre 2019
Durée: 2h00
Niveau: L3

Exercice 1 (3 points)
Donner la definition des notions suivantes

1. Une tribu de parties de X
2. Une mesure positive sur un espace mesurable $(X, \mathcal{T})$.
3. Une partie négligeable d'un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$
4. Une mesure complète.

Exercice 2 (5 points)
Soit X un ensemble non vide, $\mathcal{D}$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}(X)$ et $A \in \mathcal{P}(X)$.
On pose

$$\mathcal{D}_A = \{A \cap E : E \in \mathcal{D}\}$$

1. Montrer que, si $\mathcal{D}$ est une tribu sur X alors $\mathcal{D}_A$ est une tribu sur A.
2. On suppose que $\mathcal{D}$ est une tribu sur X et que $A \in \mathcal{D}$. Montrer que $\{M \subseteq A : M \in \mathcal{D}\}$ est une tribu sur A.
3. Soit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Montrer que $(\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}))_A = \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}_A)$.

Exercice 3(8 points)
Soit (E, T, m) un espace mesuré. On note $\mathcal{N}_m$ l'ensemble des parties négligeables. on pose

$$\bar{T} = \{A \cup N : A \in T, N \in \mathcal{N}_m\}$$

1. Montrer que $\bar{T}$ est une tribu sur E et que $T \cup \mathcal{N}_m \subset \bar{T}$.

Scanné avec CamScanner

2. Soit $A_1, A_2 \in T$ et $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_m$ tels que $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$. Montrer que $m(A_1) = m(A_2)$

3. Pour $B \in \bar{T}$, soit $A \in T, N \in \mathcal{N}_m$ tel que $B = A \cup N$. On pose $\bar{m}(B) = m(A)$.

   a Montrer que $\bar{m}$ est une mesure sur $\bar{T}$ et $\bar{m}|T = m$.

   b Montrer que $\bar{m}$ est la seule mesure sur $\bar{T}$ dont la restriction à T est égale à m.

4. Montrer que $\mathcal{N}_{\bar{m}} = \mathcal{N}_m \subset \bar{T}$

Exercice 4 (4 points)

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive telle que $\mu(X) = 1$. On considère

$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{M} : \mu(A) = 1 \text{ ou } \mu(A) = 0\}$

Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur X.

Scanné avec CamScanner

UFHB
UFR Maths-Info

E.C.U.E: Mesures

Deuxième Session
Durée: 2h00
Niveau: L3

Exercice 1 (3,75 points)
Questions de Cours
Chaque réponse correcte rapporte 0,75 point et chaque réponse incorrecte enlève 0,5 point. Répondre par Oui ou Non.

1. Une tribu contient t-elle nécessairement l'ensemble vide?
2. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments d'une algèbre $\mathcal{F}$. A-t-on nécessairement $\cup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{F}$?
3. La mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est t-elle σ finie?
4. Un ensemble négligeable est-t-il nécessairement un ensemble mesurable?
5. Une mesure extérieure est-elle une mesure positive?

Exercice 2 (3,25 points)
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive telle que $\mu(X) = 1$. On considère $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{M} : \mu(A) = 1 \text{ ou } \mu(A) = 0\}$
Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur X.

Exercice 3(7 points)
On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

1. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F}$ un ensemble de parties de Ω. quelles conditions $\mathcal{F}$ doit-elle satisfaire pour être une tribu?
2. On considère l'ensemble des entiers naturels N muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. A quelles conditions une application $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ est-elle une mesure?

Scanné avec CamScanner

3. On considère l'application $m : \mathcal{P}(N) \to [0, +\infty]$ définie pour tout $A \in \mathcal{P}(N)$ par:
   - $m(A) = 0$ si $A = \phi$
   - $m(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2}$ si A est un ensemble fini ne contenant pas 0
   - $m(A) = \infty$ si $0 \in A$ ou A est un ensemble infini

   On pose $A_n = \{n\}$.

a- Déterminer $m(A_n)$

b- Que vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n)$?

C- Déterminer $\cup_{n=1}^{+\infty} A_n$, puis $m(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n)$. m est-elle une mesure sur $(N, \mathcal{P}(N))$?

d Montrer que pour deux ensembles A et B disjoints de $\mathcal{P}(N)$ on a $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Exercice 4 (6 points) Soit Ω un ensemble et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

1. Donner la définition d'une mesure extérieure sur Ω

2. On définit $\tau : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ par:
   - $\tau(A) = 0$ si $A = \phi$
   - $\tau(A) = 1$ sinon

a- Montrer que τ est une mesure extérieure

b- Quels sont les ensembles τ-mesurables?

c- Vérifier le théorème de Carathéodory.

(Scanné avec CamScanner)

Université F.H.B. - Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2015 - 2016

Licence 3: Devoir d'Intégration

Durée: 1 H 30 mn
30/08/2016

Exercice 1: (Cours) (6 points)

1°) Enoncer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

2°) Démontrer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Exercice 2:

Soient $A_0 =]-\infty, 0[$, $A_n = [2(n-1), 2n[$, $\forall n \geq 1$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) := \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \in A_0 \\ \frac{1}{n^2} \text{ si } f(x) \in A_n, n \geq 1. \end{cases}$$

λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu Borélienne de $\mathbb{R}$.

1°) Montrer que

$$g = f\chi_{f^{-1}(A_0)} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\chi_{f^{-1}(A_n)},$$

où $\chi_{f^{-1}(A_0)}$ désigne la fonction indiatrice de $f^{-1}(A_0)$.

2°) Déduire de 1°) que g est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - mesurable.

3°) Montrer que l'intégrale de g sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure λ existe.

4°) Calculer $\int_{\mathbb{R}} g d\lambda$.

5°) La fonction g est - elle λ - intégrable?

(Scanné avec CamScanner

10.08.2020

Année universitaire 2015 - 2016

Université F.H.B. - Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Licence 3: Examen d'Intégration

Durée: 2H30mn

Exercice 1: (Cours)

1°) Enoncer le théorème de la convergence monotone.
2°) Démontrer le théorème de la convergence monotone.

Exercice 2:

λ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
Depuis les classes antérieures nous savons que: si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, alors

$$\int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a).$$ Nous admettons ce résultat.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection croissante de classe C^1. λ^f est la mesure image par f de λ, qui est définie par

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda^f(A) = \lambda(f^{-1}(A)).$$

1°) Montrer que

$$A \mapsto \int_A f'(t)d\lambda(t)$$

est une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

2°) Montrer que: pour $A = [a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$, on a

$$\lambda^{f^{-1}}(A) = \int_A f'(t)d\lambda(t).$$

3°) En utilisant 2°) et les prolongements de mesure, montrer que:

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda^{f^{-1}}(A) = \int_A f'(t)d\lambda(t).$$

4°) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une application $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - mesurable. Montrer que

$\int_{\mathbb{R}} hd\lambda^{f^{-1}} = \int_{\mathbb{R}} h(t)f'(t)d\lambda(t)$. (Indication: Commencer par le cas où h est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-étagée).

Scanné avec CamScanner

Année universitaire 2016 - 2017

Licence 3: Examen d'Intégration

2nde Session

Durée: 2H30mn

Exercice 1: (Cours)

1°) Enoncer le théorème d'Egorov.

2°) Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $\alpha \in \mathbb{R}$, et f, g deux appplications $\mathcal{A}$ - mesurables de X dans $\bar{\mathbb{R}}$.

On pose: $\forall x \in X$

$$h(x) = \begin{cases} f(x)+g(x) & \text{si } (f(x),g(x)) \notin \{(-\infty,\infty),(+\infty,-\infty)\} \\ \alpha & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que h est $\mathcal{A}$ - mesurable.

Exercice 2:

λ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{-1}(1+n^2x) & \text{si } 0 < x < n^{-1} \\ n^{-1}(2-nx) & \text{si } n^{-1} < x < 3n^{-1} \\ +\infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 3n^{-1}. \end{cases}$$

1°) En utilisant la définition de la mésurabilité, montrer que f_n est Borel - mesurable, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2°) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge λ - p.p. vers la fonction nulle.

3°) Pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné, déterminer les $p \in [1, +\infty]$ pour lesquels $f_n \in L^p$.

4°) Déterminer les $p \in [1, +\infty]$ pour lesquels $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite dans L^p.

5°) Etudier la convergence en λ - mesure de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Scanné avec CamScanner

Université F.H.B. - Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2016 - 2017

Licence 3: E.C.U.E. Intégration: Examen 1ère Session

Durée: 2 H 30 mn

Exercice 1: (Questions de Cours)

1°) Donner les définitions des différents types de convergence suivants:

a) La convergence μ - p.p.

b) La convergence uniforme

c) La convergence dans $L^p, 1 \leq p \leq +\infty$ (On rappellera la définition des espaces L^p)

d) La convergence en μ - mesure

e) La convergence μ - presque uniforme.

2°) Enoncer les implications vues au cours entre ces différents types de convergence.

3°) Montrer que la convergence dans $L^p, 1 \leq p < +\infty$, implique la convergence en μ - mesure.

Exercice 2:

Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \bar{\mathbb{R}}_+$ une application μ - integrable.

1°) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{B}$, la fontion indicatrice χ_A est $\mathcal{B}$ - mesurable.

2°) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que:

$$a) \ \{f > a\} \in \mathcal{B} \qquad \text{et} \qquad b) \ a\chi_{\{f>a\}} \leq f\chi_{\{f>a\}}.$$

3°) Montrer que:

$$a) \ \lim_{n\to+\infty} \int_{\{f\leq n\}} f d\mu = \int_X f d\mu \qquad \text{et} \qquad b) \ \lim_{n\to+\infty} n\mu(\{f > n\}) = 0.$$

4°) Montrer que

$$\lim_{a\to+\infty} a\mu(\{f > a\}) = 0.$$

5°) a) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f\chi_{\{f>\frac{1}{n}\}} d\mu = \int_X f d\mu.$$

b) Déduire de a) que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathcal{B} \text{ tel que } \mu(A) < +\infty \text{ et } \int_X f d\mu \leq \varepsilon + \int_A f d\mu.$$

6°) Montrer que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que: } \forall A \in \mathcal{B}, \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A f d\mu < \varepsilon.$$

(On pourra commencer ici par le cas où f est bornée.)

Scanné avec CamScanner

Université F.H.B. - Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2016 - 2017

Licence 3: E.C.U.E. Intégration: Examen 2nde Session

Durée: 2 H 30 mn

Exercice 1: (Questions de Cours) (6 points)

1°) Enoncer le lemme de Fatou.

2°) Démontrer le lemme de Fatou.

Exercice 2: (14 points)

Soient (X, B, μ) un espace mesuré positif, et $f, g, f_n : X \to \mathbb{R}$ des applications B - mesurables, $\forall n \in N$.

On suppose que $f_n \geq f \ \forall n \in \mathbb{N}$, et que f est μ - intégrable.

1°) On suppose que g est positive.

a) Montrer que $\int_X (f+g)d\mu$ existe et appartient à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

b) Montrer que

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

2°) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_X f_n d\mu$ existe et appartient à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

3°) Montrer que:

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu.$$

4°) On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_X f_n d\mu \leq C, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $\liminf_n f_n$ est μ - intégrable.

Scanné avec CamScanner

Université F.H.B. - Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2017 - 2018

Licence 3: E.C.U.E. Intégration: Examen 1ère Session

Durée: 2 H

Exercice 1:

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré positif, et $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ deux applications.

Montrer que

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

dans chacun des cas suivants:

1°) f et g sont $\mathcal{A}$ - étagées positives;

2°) f et g sont $\mathcal{A}$ - mesurables positives;

3°) f et g sont μ - intégrables.

Exercice 2:

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré positif fini, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}_-$ une application $\mathcal{A}$ - mesurable qui est finie μ - p.p..

1°) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que:

$$\mu(\{x \in X \ / \ f_n(x) \geq a_n\}) < \frac{1}{2^n}.$$

2°) On pose

$$\begin{aligned} A &:= \cup_{n\in\mathbb{N}^*}\{x \in X \ / \ f_n(x) = +\infty\} \text{ et} \\ B &:= \cap_{n\in\mathbb{N}^*} \cup_{m\geq n} \{x \in X \ / \ f_m(x) \geq a_m\}. \end{aligned}$$

Montrer que:

$$a) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mu(\{x \in X \ / \ f_n(x) \geq a_n\}) < +\infty$$

$$\begin{aligned} b) \quad \mu(B) &= 0 \\ c) \quad \mu(A \cup B) &= 0. \end{aligned}$$

3°) On pose

$$f := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{a_n 2^n} f_n.$$

Scanné avec CamScanner

a) Montrer que f est une application de X dans $\bar{\mathbb{R}}$ qui est $\mathcal{A}$ - mesurable, positive, et finie μ - p.p..

b) On suppose que f_n est μ - intégrable, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'on peut choisir les a_n de sorte que f est μ - intégrable.

Exercice 3:

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré positif fini, $f, g, f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}_+$ des applications $\mathcal{A}$ - mesurables, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers f en μ - mesure, et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers g en μ - mesure.

Montrer que $f = g$ μ - p.p..

Scanné avec CamScanner

Université F.H.B. - Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2017 - 2018

Licence 3: E.C.U.E. Intégration: Examen 2nde Session

Durée: 2 H

Exercice 1:

$\mathbb{R}$ est muni de la mesure de Lebesgue λ.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application Lipschitzienne (donc dérivable presque partout) et croissante. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

1°) En utilisant le TCD, montrer que: $\forall c \in \mathbb{R}$ on a:

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_{[c,c+\frac{1}{n}]} [f(x) - f(c)] d\lambda(x) = 0.$$

En déduire que:

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_{[c,c+\frac{1}{n}]} f(x) d\lambda(x) = f(c), \forall c \in \mathbf{R}.$$

2°) Posons

$$g_n(x) := n[f(x + \frac{1}{n}) - f(x)], \forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*.$$

a) Montrer que g_n est Borel - mesurable et est positive, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge λ - presque partout vers la dérivée f' de f.

c) Déduire de b) que f' est Borel - mesurable et est positive.

3°) En utilisant le TCD, montrer que:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} g_n(x) d\lambda(x) = \int_{[a,b]} f'(x) d\lambda(x).$$

4°) En utilisant 1°), montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} g_n(x) d\lambda(x) = f(b) - f(a).$$

En déduire que

$$f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} f'(x) d\lambda(x).$$

Exercice 2:

Scanné avec CamScanner

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré positif et $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ des applications $\mathcal{A}$ - mesurables.

1°) Donner la définition de $\|f\|_\infty$.

2°) Montrer que: si $\|f\|_\infty < +\infty$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \, \|f\|_\infty$.

3°) On suppose $\|f\|_\infty < +\infty$.

Montrer que

$$\mu(\{x \in X \ / \ |f(x)| > \|f\|_\infty\}) = 0.$$

En déduire que

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \qquad \mu \text{ - p.p..}$$

4°) Montrer que: si il existe $C > 0$ tel que

$$|f(x)| \leq C \quad \mu \text{ - p.p.}$$

alors $\|f\|_\infty \leq C$.

5°) En utilisant 3°) et 4°), montrer que

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

Scanné avec CamScanner

Université F.H.B. - Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2018 - 2019

Licence 3: E.C.U.E. Intégration: Examen 1ère Session

Durée: 2 H

Exercice 1: (Cours) (6 points)

1°) Donner les définitions des différents types de convergence qui ont été vus au cours.
2°) Donner les implications vues au cours entre les différents types de convergence.
3°) Montrer que la convergene dans L^p implique la convergence en μ - mesure.

Exercice 2: (14 points)

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré positif, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n, f et $g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ des applications $\mathcal{A}$ - mesurables.

On suppose que f est μ - intégrable, g est positive et $f_n \geq f, \forall n \in \mathbb{N}$.

1°) a) En discutant selon le signe de $f(x)$, montrer que:

$$(f+g)^- \leq f^-.$$

b) Montrer que $\int_X (f+g)d\mu$ existe et appartient à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

c) Montrer que

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

2°) a) Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = (f_n - f) + f \quad \mu - \text{p.p.}.$$

b) En utilisant 1°) montrer que $\int_X f_n d\mu$ existe et appartient à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3°) a) Montrer que $\liminf f_n \geq f$.

b) Montrer que $\int_X \liminf f_n d\mu$ existe et appartient à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

c) Montrer que $\int_X \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu$.

Scanné avec CamScanner

Université F.H.B. - Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2018 - 2019

Licence 3: E.C.U.E. Intégration: Examen 2nde Session

Durée: 2 H

Exercice 1: (Cours)

1°) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré positif, et $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ deux applications. Montrer que $f + g$ est $\mathcal{A}$ - mesurable.

2°) Enoncer le théorème de Fubini.

Exercice 2:

Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \bar{\mathbb{R}}_+$ une application μ - intégrable.

1°) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{B}$, la fonction indicatrice χ_A est $\mathcal{B}$ - mesurable.

2°) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que:

$$a)\ \{f > a\} \in \mathcal{B} \qquad \text{et} \qquad b)\ a\chi_{\{f>a\}} \leq f\chi_{\{f>a\}}.$$

3°) Montrer que:

$$a)\ \lim_{n\to+\infty} \int_{\{f\leq n\}} f d\mu = \int_X f d\mu \qquad \text{et} \qquad b)\ \lim_{n\to+\infty} n\mu(\{f > n\}) = 0.$$

4°) Montrer que

$$\lim_{a\to+\infty} a\mu(\{f > a\}) = 0.$$

5°) a) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f\chi_{\{f>\frac{1}{n}\}} d\mu = \int_X f d\mu.$$

b) Déduire de a) que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathcal{B} \text{ tel que } \mu(A) < +\infty \text{ et } \int_X f d\mu \leq \varepsilon + \int_A f d\mu.$$

6°) Montrer que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que: } \forall A \in \mathcal{B},\ \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A f d\mu < \varepsilon.$$

(On pourra commencer ici par le cas où f est bornée.)

Scanné avec CamScanner

Université FHB,UFR-MI
Licence3 S M Année académique 2016 – 2017

Devoir de Théorie de groupes et d'anneaux : (1 Heure 30)

Exercice : 1 : (10-points) . Soient $A = \{a, b, c\}$ et le groupe $(\mathcal{P}(A), \Delta)$. où Δ est la loi différence symétrique.

1. Déterminer $\mathcal{P}(A)$.
2. Quels sont les cardinaux possibles des différents sous-groupes de $\mathcal{P}(A)$?.
3. Montrer que $\mathcal{H} = \{\varnothing, A\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{P}(A)$.
4. Déterminer le groupe quotient $\frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{H}}$, puis la table de sa loi quotient.

Exercice : 2 : (10-points) .

Soit l'anneau quotient $A = \frac{\mathbb{Z}}{23\mathbb{Z}}$.

1. Déterminer le groupe multiplicatif $\mathcal{U}(A)$ de A.
2. Trouver tous les sous-groupes du groupe multiplicatif.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2015-2016
UFRMI
L3 SM

EVALUATION DE FIN DE CYCLE
EPREUVE DE THEORIE DES GROUPES ET ANNEAUX
Date: 20-09-2016
Durée: 2 heures

exercice 1 (10pts)

1° Donner 4 exemples de groupes d'ordre 8 non isomorphes.

2° Soient G_1 et G_2 deux groupes cycliques d'ordres respectifs n_1 et n_2. Montrer que si le produit direct $G_1 \times G_2$ est cyclique, alors

$$PGCD(n_1, n_2) = 1.$$

3° En utlisaant les théorèmes de Sylow, montrer que tout groupe fini d'ordre p^2q, où p et q sont des nombres premiers distincts, possède au moins un sous groupe distingué non trivial (On pourra distinguer les cas $p > q$ et $p < q$).

Exercice 2 (10pts)

1. Rappeler la représentation du groupe des quaternions Q par un système de générateurs et relations.

2. Soit les permutations a et b de S_8 :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Décomposer a et b en produit de cyles de supports disjoints et donner leur ordre.

b) Soit G le sous groupe de S_8 engendré par a et b. Montrer que G est isomorphe à Q et écrire sa table de Cayley.

3. Montrer qu'un sous groupe distingué du groupe symétrique S_n qui contient une transposition est égal à S_n.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2015-2016
UFR de Mathématiques et Informatique
Filière Sciences Mathématiques

2ème Session d'évaluation
Epreuve de Théorie des groupes
Durée: 2 heures

Exercice 1

Soit G un groupe d'élément neutre e.

1° Montrer que si $\forall g \in G$, $g^2 = e$, alors G est abélien.

2° Montrer que si l'application $f : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^2 \end{array}$ est un automorphisme, alors G est abélien

Exercice 2

Soit $G = GL_n(\mathbb{R})$, le groupe des matrices carrées réelles d'ordre n inversibles et

$$H = \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ \det(A) = 1\}.$$

Montrer que H est un sous groupe normal de G et qu'on a $\frac{G}{H} \simeq \mathbb{R}^*$.

EXERCICE 3

Soit G un groupe d'ordre $n = pql$, p, q et l premiers avec $p < q < l$. Pour tout nombre premier r qui divise n, on note n_r le nombre de $r - Sylows$ de G.

On suppose G **simple**.

1° Calculer n_l et en déduire le nombre d'éléments de G d'ordre l.

2° Montrer que le nombre d'éléments de G d'ordre q est supérieur ou égal à $l(q-1)$.

3° Montrer que le nombre d'éléments de G d'ordre p est supérieur ou égal à $q(p-1)$.

4° a) En dénombrant le nombre d'éléments de G d'ordre p, q ou l, montrer qu'on aboutit à une absurdité.

b) Que peut-on en déduire?

Scanné avec CamScanner

Université FHB d'Abidjan.
UFR-Mathématiques et Informatique
Année académique 2016 – 2017
Niveau Licence 3

Examen de théorie de groupes et d'anneaux

(Première session, 3 heures)

Exercice : 1 : (5-points) . Soient $A = \{1, 2, 4\}$ et le groupe $(\mathcal{P}(A), \triangle)$, où $\triangle$ est la loi différence symétrique.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}(A)$.
2. Quels sont les cardinaux possibles des différents sous-groupes de $\mathcal{P}(A)$?.
3. Montrer que $\mathcal{H} = \{\varnothing, \{1, 2\}\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{P}(A)$.
4. Déterminer le groupe quotient $\frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{H}}$, puis la table de sa loi quotient.
5. Le groupe $\frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{H}}$ est il cyclique ?

Exercice 2 (Théorèmes de Sylow)(6-points).

Soient G un groupe d'ordre 33. Si p est un nombre premier qui divise $card(G)$, on note v_p le nombre de p-sous groupes de Sylow de G.

1. Montrer que $v_3 = 1$ et $v_{11} = 1$. En déduire qu'il y a dans G un seul sous-groupe H d'ordre 3 et un seul sous-groupe K d'ordre 11.
2. Montrer que
   - $H \cap K = \{e_G\}$
   - Tous les éléments de H commutent avec tous les éléments de K.
   - Montrer que $G = HK$
3. En déduire que G est abélien, puis montrer que G est cyclique.

Exercice 3 : (8-points) Soient A et B deux anneaux commutatifs unitaires

1. Montrer que $\mathcal{U}(A \times B) = \mathcal{U}(A) \times \mathcal{U}(B)$
2. Montrer que les idéaux du produit cartésien d'anneaux $A \times B$ sont de la forme $I \times J$ où I est un ideal de A et J idéal de B.
3. On considère l'anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.
   - Quels sont les idéaux maximaux de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?
   - Quels sont les idéaux premiers de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

(Scanné avec CamScanner

Université FHB d'Abidjan.
UFR-Mathématiques et Informatique
Année académique 2016 – 2017
Niveau Licence 3

Examen de théorie de groupes et d'anneaux
(Deuxième session, 2 heures 30)

Exercice : 1 : (4-points) .
Répondre par VRAI ou FAUX (sans justification).

1. Tout groupe à au moins deux éléments , a un sous-groupe distingué. .
2. Si un entier s divise le cardinal d'un groupe abélien fini G, alors G a un sous-groupe H qui est d'ordre s.
3. Tous les sous-groupes d'un groupe cyclique sont ordonnés. .
4. Pour qu'un sous-groupe H d'un groupe G soit distingué, il suffit qu'il soit invariant par tout automorphisme de G. .

Exercice : 2 : (8-points) . On considère l'anneau des entiers relatifs $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ et l'ensemble $\mathcal{I}d$ de tous ses idéaux.

1. Montrer que sur $\mathcal{I}d$, **l'addition des idéaux** définit une loi de composition interne.
   Donner toutes propriétés de cette addition.
2. Montrer que sur $\mathcal{I}d$, **l'intersection** définit une loi de composition interne.
   Donner toutes propriétés de cette intersection.

Exercice : 3 : (8-points) .

Soient $A = \{\frac{a}{s}\ ,\ a \in \mathbb{Z} \text{ et } s \notin 2\mathbb{Z}\}$ et $I = \{\frac{a}{s}\ ,\ a \in 2\mathbb{Z} \text{ et } s \notin 2\mathbb{Z}\}$

1. Montrer que A est **un sous-anneau** de $(\mathbb{Q}, +, .)$ le corps des nombres rationnels.
2. Montrer que I est **un idéal** de A
3. Montrer que dans $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, on a $\bar{s}\bar{a} = \bar{a}$ pour tout $s \notin 2\mathbb{Z}$.
4. En déduire que : la relation ϕ de A vers $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, qui à $\frac{a}{s}$ associe $\bar{a}$ **est une application.**
5. Montrer que ϕ est un **homomorphisme d'anneaux.**

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny de Cocody
Licence3 S M
Année académique 2017 – 2018

Examen de Théorie de groupes et d'anneaux : (2 Heures 30)

Exercice : 1 (Produit sémi direct). (9-points)

1. Soient G, F deux groupes, d'éléments neutres respectifs e_G et e_F, et $\varphi : G \longrightarrow F$ un morphisme de groupes.
   (a) Montrer que $Ker\varphi$, le noyau de φ, est un sous-groupe distingué de G.
   (b) Montrer que φ est injectif si et seulement si $Ker\varphi = \{e_G\}$
2. Soit un morphisme de groupes $t : F \longrightarrow Aut(G)$. Sur le produit cartésien $G \times F$ on considère la loi $\bullet_t$ définie comme suit :

$$(a, b) \bullet_t (a', b') = (a[t(b)(a')], bb')$$

   (a) Montrer que (e_G, e_F) est neutre pour $\bullet_t$.
   (b) Montrer que $\bullet_t$ est associative.
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\bullet_t$ soit commutative.

Exercice : 2 : (3-points)

Soit l'anneau quotient $A = \dfrac{\mathbb{Z}}{31\mathbb{Z}}$.

1. Déterminer le groupe multiplicatif $\mathcal{U}(A)$ de A.
2. Trouver tous les sous-groupes du groupe multiplicatif.

Exercice : 3 : (8-points)

On considère l'anneau A des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$. Soit

$$I = \{f \in A : f(0) = 0\}$$

1. Montrer que I est un idéal de A.
2. I est-il principal ?.
3. Montrer que I est un idéal premier.
4. Montrer que I est un idéal maximal.

Scanné avec CamScanner

UFHB, UFR- MI
Année académique 2017 – 2018
Niveau : L3

Examen de Théorie de groupes et d'anneaux :
(Deuxième session 2 Heures 30)

Exercice 1 : (4-points)

1. Montrer que **tout groupe** G d'élément neutre e, tel que
$$\forall x \in G,\ x^2 = e$$
est commutatif.
2. Montrer que **tout groupe fini** S de p^2 éléments, où p est un nombre premier, **est commutatif.**

Exercice 2 : (8-points)

Soit G un groupe d'ordre p^2q où p et q sont deux nombres premiers. On suppose que dans G il y a au moins deux p-sous-groupes de Sylow, et on en considère deux : S_1 et S_2.

On pose $K = S_1 \cap S_2$, $A = S_1 \cup S_2$ et
$$H = N_G(K) = \{g \in G : gKg^{-1} = K\}$$

1. K, A et H sont-ils des sous-groupes de G? Justifier.
2. Montrer que S_1 et S_2 sont commutatifs
3. Montrer que $A \subset H$, comparer $o(H)$ à p^2
4. Que dire du sous-groupe K dans G?

Exercice 3 :(9-points) . On considère l'ensemble
$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5}, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ est **un sous-anneau** du corps $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
2. Si $z = a + b\sqrt{5}$, on note $\widehat{z} = a - b\sqrt{5}$. Montrer que
$$\widehat{z_1 + z_2} = \widehat{z}_1 + \widehat{z}_2,\quad \widehat{z_1 \cdot z_2} = \widehat{z}_1 \cdot \widehat{z}_2, \text{ et } \quad z \cdot \widehat{z} \in \mathbb{Z}$$
3. Montrer que si z est inversible alors $\widehat{z}$ est inversible et $z\widehat{z} \in \{-1, 1\}$.
4. Donner six éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.
5. Montrer que 2, $1 - \sqrt{5}$, $1 + \sqrt{5}$ ne sont pas inversibles.
6. Montrer que 2, $1 - \sqrt{5}$, $1 + \sqrt{5}$ sont irréductibles, c'est à dire qu'ils ne peuvent être sous la forme produit uv, avec u et v non-inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.
7. Calculer $(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})$, en déduire que l'anneau $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ n'est pas factoriel.

Bonne chance !

Scanné avec CamScanner

Université FHB
UFR-MI
Licence 3 SM
Année académique 2018 - 2019

Examen de Theorie de groupes et d'anneaux : première session (2 Heures)

Exercice 1 : (7-points) . Soit $E = \{1,2,3,4,5\}$

1. Ecrire une loi de composition interne sur E qui est commutative, admet un élément neutre et telle que tout élément de E soit son propre symétrique.

2. Montrer que E muni d'une telle loi ne peut pas être un groupe.

Exercice 2: (5-points)

Répondre par **Vrai** ou **Faux** sans justifier.

1. Tout sous-groupe abélien H d'un groupe G y est distingué.

2. Si tous les sous-groupes d'un groupe fini G sont cycliques, alors G est abélien.

3. Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe G tels que $H \subset K$.

Si H est distingué dans K et K est distingué dans G, alors H est distingué dans G.

4. Tout idéal maximal $\mathcal{M}$ d'un anneau commutatif unitaire est premier.

5. Le produit cartésien de deux anneaux intègres A et B est aussi intègre.

Exercice 3 : (8-points)
Soit A un anneau commutatif unitaire, I un idéal de A et $A[X]$ l'anneau des polynômes en X à coefficients dans A.

1. Rappeler les définitions d'un idéal premier et d'un idéal maximal.
2. On note $I[X]$ l'ensemble des polynômes en X à coefficients dans l'idéal I

Montrer que $I[X]$ est un idéal de $A[X]$.

3. On considère l'anneau quotient $\frac{A}{I}$ et l'anneau $\frac{A}{I}[X]$.

a. Montrer que $\theta : \quad A[X] \to \frac{A}{I}[X],\ a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \mapsto \bar{a_0} + \bar{a_1}X + ... + \bar{a_n}X^n$ **est un morphisme d'anneaux.**

b. Déterminer $\mathrm{Ker}\theta$.

c. Ecrire le premier théorème d'isomorphisme pour θ.

d. En déduire que si l'idéal I est premier, alors $I[X]$ est un idéal premier de $A[X]$.

Scanné avec CamScanner

Université FHB
UFR-MI
Licence 3 SM
Année académique 2018 - 2019

Examen de Theorie de groupes et d'anneaux : première session (2 Heures)

Exercice 1 : (7-points) . Soit $E = \{1,2,3,4,5\}$

1. Ecrire une loi de composition interne sur E qui est commutative, admet un élément neutre et telle que tout élément de E soit son propre symétrique.

2. Montrer que E muni d'une telle loi ne peut pas être un groupe.

Exercice 2: (5-points)

Répondre par **Vrai** ou **Faux** sans justifier.

1. Tout sous-groupe abélien H d'un groupe G y est distingué.

2. Si tous les sous-groupes d'un groupe fini G sont cyclique, alors G est abélien.

3. Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe G tels que $H \subset K$.

Si H est distingué dans K et K est distingué dans G, alors H est distingué dans G.

4. Tout idéal maximal M d'un anneau commutatif unitaire est premier.

5. Le produit cartésien de deux anneaux intègres A et B est aussi intègre.

Exercice 3 : (5-points)
Soit A un anneau commutatif unitaire, I un idéal de A et $A[X]$ l'anneau des polynômes en X à coefficients dans A.

1. Rappeler les définitions d'un idéal premier et d'un idéal maximal.

2. On note $I[X]$ l'ensemble des polynômes en X à coefficients dans l'idéal I

Montrer que $I[X]$ est un idéal de $A[X]$.

3. On considère l'anneau quotient $\frac{A}{I}$ et l'anneau $\frac{A}{I}[X]$.

a. Montrer que $\theta : A[X] \to \frac{A}{I}[X]$, $a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \mapsto \bar{a_0} + \bar{a_1}X + ... + \bar{a_n}X^n$ est un morphisme d'anneaux.

b. Déterminer $Ker\theta$.

c. Ecrire le premier théorème d'isomorphisme pour θ.

d. En déduire que si l'idéal I est premier, alors $I[X]$ est un idéal premier de $A[X]$.

Scanné avec CamScanner

Université FHB
UFR-MI
Licence 3 : S M
Année académique 2015 – 2016

Examen de de théorie des nombres, session 2016, 2-h30

Exercice 1 : (3-points)
Calculer les *pgcd* suivants :

1. $(4^{123} - 15) \wedge 35$
2. $(2^a - 1) \wedge (2^b + 1)$ où $a, b \in \mathbb{N}^*$

Exercice 2 : (6-points)
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

1. $35x + 125y = 5$
2. $123x - 54y = 6$
3. $\begin{cases} x \cdot y = 327 \\ x \vee y = 109 \end{cases}$

Exercice 3 : (4-points) Démontrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 4 : Cryptogaphie, méthode RSA (7-points)

Bob donne sa clef publique $\sigma \in \mathcal{S}(\Omega)$ à Alice. $\mathcal{S}(\Omega)$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble

$$\Omega = \{0, 1, \cdots, 9\} \cup \{A, B, \cdots, Z\}$$ et σ est le produit de cycles

$$\sigma = (1, N, S, T)(0, A, F)(7, N, M)(1, I, 2, K, 7)(3, B, H, Z)$$

1. Ecrire σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Alice envoie le message suivant à Bob :

HOMM0 01 Z0UR0UT0 EMM00 KAIN

Découvrez le message que Bob lira.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

UFR LMI	Examen de 2ème session	2015-2016
L3 MATHS	Théorie des nombres	Durée 2 H 30

Exercice 1

Soient $a, m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $a \geq 2$ et $m \leq n$. On note $d = (a^n - 1) \wedge (a^m - 1)$.

1. Montrer que $a^n \equiv a^r[a^m - 1]$ pour un certain entier positif $r < m$.
2. En déduire que $d = (a^r - 1) \wedge (a^m - 1)$, en suite que $d = a^{n \wedge m} - 1$.
3. A quelle condition $a^m - 1 | a^n - 1$?

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations

a) $39x - 12y = 3$

b) $16x + 44y = 22$

c) $35x + 63y = 14$.

Exercice 3

A) 1) a) Enoncez et démontrer le Petit Théorème de Fermat.

b) Enoncez et démontrer le Théorème d'Euler et justifier la méthode RSA en cryptographie.

B) Alice veut recevoir des messages chiffrés en utilisant le RSA

Elle choisit $p = 41$ et $q = 29$

1) Déterminer le module N et $\varphi(N)$.

Elle choisit $e = 13$ et calcule sa clé privée d.

2) Déterminer d la clé privée d'Alice (modulo $\varphi(N)$).

Bob veut envoyer le message S C I E N C E S à Alice.

3) En utilisant le code ASCII, quel est son message?

caractère	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
code	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77

caractère	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
code	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

4) Trouver le chiffré de son message après avoir regroupé en blocs de trois chiffres.

5) Comment Alice déchiffre-t-elle le message de Bob ? Déchiffrer le.

Exercice 4

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout entier k compris entre 1 et $p-1$, $\binom{p}{k}$ est divisible par p.
2. En déduire que pour tous entiers a et b, $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.
3. Montrer que pour tout entier n, $n^p \equiv n \pmod{p}$ (c'est le petit théorème de Fermat.)
4. Qu'obtient-on si p ne divise pas n ?

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

UFR LMI	Examen de 1ère session	2016-2017
L3 MATHS	Théorie des nombres	Durée 2 H

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes en justifiant les réponses

a) $42x - 16y = 4$

b) $64x + 22y = 6$

c) $36x - 63y = 18$.

Exercice 2

1. Soit $n \geq 1$. Montrer que $(n+1) \mid \binom{2n}{n}$.
2. Soit $p \geq 2$ premier. Montrer que $p \mid \binom{p}{i}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p-1\}$.
3. En déduire que pour tous entiers x et y, $(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}$.
4. En déduire le Petit Théorème de Fermat : si $n \geq 1$ et p est premier, $n^p \equiv n \ [p]$.
5. Qu'obtient-on de plus si $p \wedge n = 1$?

Exercice 3

A) Demontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

B) Enoncez et démontrer le Théorème d'Euler et justifier la méthode RSA en cryptographie.

C) a) Calculer modulo 122767 les nombres 41×31, 1271×17, 21607×125.

En déduire les inverses de 125 et de 41 modulo 122767.

b) Calculer modulo 122767 les nombres
410×65875, 9×65875 et 419×65575

c) Calculer $41 \times 2978 \bmod 122056$ et $42 \times 2977 \bmod 122056$.
En déduire l'inverse de 41 modulo 122056.

D) Alice veut recevoir des messages chiffrés en utilisant la méthode RSA.

Elle choisit $p = 419$ et $q = 293$.

1) Déterminer le module N et l'indicateur d'Euler de N noté $\varphi(N)$.

$\varphi(N)$ est-il divisible par 7, 11, 19, 73?

Alice choisit comme clé publique $e = 41$ et calcule sa clé privée d.

2) Déterminer d.

Bob veut envoyer le message T E N D A N C E S L O G à Alice.

3) En utilisant le code ASCII, quel est son message?

4) Trouver le chiffré de son message après avoir regroupé en blocs de quatre chiffres

5) Comment Alice déchiffre-t-elle le message de Bob ? Déchiffrer le.

Code ASCII:

caractère	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
code	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77

caractère	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
code	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

UFR LMI	Examen de 2ème session	2016-2017
L3 MATHS	Théorie des nombres	Durée 1 H 30

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbf{Z}^2$ les équations suivantes en justifiant les réponses

a) $144\,x - 24\,y = 6$
b) $124\,x + 66\,y = 2$
3) $242\,x + 33\,y = 11$

Exercice 2

A) Démontrer que

1) Tout entier naturel non nul admet une décomposition primaire.
2) L'ensemble des nombres premiers est infini.

B) Enoncez et démontrer le Petit Théorème de Fermat.

Exercice 3

I) Enoncez et démontrez le Théorème d'Euler et justifier la méthode RSA en cryptographie.

II) Alice veut recevoir des messages chiffrés en utilisant la méthode RSA,

Elle choisit $p = 73$ et $q = 83$

1) Déterminer le module N et l'indicateur d'Euler de N noté $\varphi(N)$.

Alice choisit comme clé publique $e = 25$ et calcule sa clé privée d.

2) Déterminer d.

Bob veut envoyer le message NEPERACAUCHY à Alice.

3) En utilisant le code ASCII, quel est son message?

Il regroupe le message en blocs de trois chiffres.

4) Trouver le résultat chiffré de son message qu'Alice doit avoir.

5) Comment Alice déchiffre-t-elle le message de Bob ? Déchiffrer le.

Code ASCII:

caractère	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
code	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77

caractère	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
code	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

UFR LMI	Examen de 1ère session	2017-2018
L3 MATHS	Théorie des nombres	Durée 2 H

Exercice 1

1. Résoudre le système $\begin{cases} xy = 495 \\ x \vee y = 165 \end{cases}$ avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$
où $x \vee y$ désigne le ppcm(x, y).

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que 12 divise $2(n+1)(n+2)(n+3)$.

3. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 2

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations

a) $195\,x + 125\,y = 5$

b) $42\,x + 12\,y = 4$

c) $48x + 124y = 8$.

Exercice 3

A) Enoncez et démontrer le Théorème d'Euler et justifier la méthode RSA en cryptographie.

B) Alice veut recevoir des messages chiffrés en utilisant le RSA

Elle choisit $p = 31$ et $q = 43$

1) Déterminer le module N et $\varphi(N)$.

2) Elle choisit $e = 17$ et calcule sa clé privée d. Déterminer d.

3) Bob veut envoyer le message S E C U R I S E Z à Alice.
En utilisant le code ASCII, quel est son message?

carctère	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
code	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77

carctère	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
code	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

4) Trouver le chiffré de son message après avoir regroupé en blocs de trois chiffres.

5) Comment Alice déchiffre-t-elle le message de Bob ? Déchiffrer le.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

UFR LMI	Examen de 2ème session	2017-2018
L3 MATHS	Théorie des nombres	Durée 2 H

Exercice 1

I) 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations

a) $39x + 25y = 3$

b) $24x + 62y = 2$.

2) Résoudre le système $\begin{cases} xy = 315 \\ ppcm(x,y) = 105 \end{cases}$ avec $(x,y) \in \mathbb{N}^2$.

II) Soit p un entier tel que $p > 1$ et soit q un nombre entier. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) les entiers p et q sont premiers entre eux ;

(ii) la classe de q modulo p est inversible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;

(iii) la classe de q modulo p est simplifiable dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(iv) la classe de q modulo p n'est pas diviseur de zéro dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 2

1. Enoncer et démontrer le Lemme d'Euclide.

2. Démontrer que $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel.

3. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $m(m^2 - 1)$ est un multiple de 6.

Exercice 3

A) Soient p et q deux nombres premiers assez grands et distincts. Soient $N = pq$ et φ la fonction indicatrice d'Euler.

1) Déterminer $\varphi(N)$ en justifiant la réponse.

2) Soit e un entier premier avec $\varphi(N)$ et $d \equiv e^{-1} \bmod \varphi(N)$.
Montrer que pour tout x premier avec N, $x^{ed} \equiv x \bmod N$.

B) Application: la méthode RSA en cryptographie.

Alice veut recevoir des messages chiffrés en utilisant le RSA

Elle choisit $p = 197$ et $q = 41$

1) Déterminer le module N et $\varphi(N)$.

2) Elle choisit comme clé publique $e = 13$ et calcule sa clé privée d. Déterminer d .

3) Bob veut envoyer le message APPELS à Alice.
En utilisant le code ASCII, quel est son message?

caractère	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
code	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77

caractère	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
code	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

4) Trouver le chiffré de son message après avoir regroupé en blocs de trois chiffres.

5) Comment Alice déchiffre-t-elle le message de Bob ? Déchiffrer le.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

UFR LMI	Examen de 1ère session	2018-2019
L3 MATHS	Théorie des nombres	Durée 2 H

Exercice 1

I) Combien 23^5 admet-il de diviseurs ?

Trouver le reste de la division par 23 du nombre 100^{1000}.

II) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations

a) $56x + 14y = 6$

b) $27x + 51y = 3$.

III) Soit n un entier tel que $n > 1$ et soit m un nombre entier. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) les entiers m et n sont premiers entre eux ;

(ii) la classe de m modulo n est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;

(iii) la classe de m modulo n n'est pas diviseur de zéro dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 2

1. Démontrer que $\sqrt{6}$ est un nombre irrationnel.

2. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par } 12.$$

b) Peut-on dire que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par } 24? \text{ Justifier.}$$

3. Enoncer et démontrer le Théorème d'Euler.

Exercice 3

A) Soient p et q deux nombres premiers assez grands et distincts. Soient $N = pq$ et φ la fonction indicatrice d'Euler.

1) Déterminer $\varphi(N)$ en justifiant la réponse.

2) Soit e un entier premier avec $\varphi(N)$ et $d \equiv e^{-1} \bmod \varphi(N)$.
Montrer que pour tout x premier avec N, $x^{ed} \equiv x \bmod N$.

B) Application: la méthode RSA en cryptographie.

Alice veut recevoir des messages chiffrés en utilisant le RSA

Elle choisit $p = 73$ et $q = 67$

1) Déterminer le module N et $\varphi(N)$.

2) Elle choisit comme clé publique $e = 31$ et calcule sa clé privée d. Déterminer d.

3) Bob veut envoyer le message ALERTALGO à Alice.
En utilisant le code ASCII, quel est son message?

caractère	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
code	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77

Scanné avec CamScanner

caractère	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
code	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

4) Trouver le chiffré de son message après avoir reorganisé en blocs de trois chiffres.

5) Comment Alice déchiffre-t-elle le message de Bob ? Déchiffrer le.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

UFR LMI	Examen de 2ème session	2018-2019
L3 MATHS	Théorie des nombres	Durée 2 H

Exercice 1

I) Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer que

1. $(2^a - 1$ premier $) \Rightarrow (a$ premier $)$.
2. Démontrer que si a et b sont des entiers premiers entre eux il en est de même de $a + b$ et ab.

II) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ tel que $n = m^2$.
En déduire que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Que peut-on dire de $\sqrt{6}$?

Exercice 2

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations
   a) $190\,x + 350\,y = 40$
   b) $243\,x + 21\,y = 20$

2) Résoudre le système $\begin{cases} xy = 315 \\ x \vee y = 105 \end{cases}$ avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

3) Calculer le pgcd suivant : $(6^{123} - 15) \wedge 35$.

4) Enoncer et démontrer le Lemme d'Euclide.

Scanné avec CamScanner

L3 - Mathématiques
Analyse Numérique Matricielle
Examen première session. Durée : 2 heures

Les exercices sont indépendants. Rédiger avec soin et rigueur.

Exercice 1

On considère le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

1) Calculer la solution exacte X de ce système par la méthode de Gauss.
2) Effectuer 3 itérations de la méthode de Jacobi, en initialisant avec $x^{(0)} = (1, 1, 1)^t$.
3) Effectuer 3 itérations de la méthode de Gauss-seidel, en initialisant avec $x^{(0)} = (1, 1, 1)^t$.

Exercice 2

Résoudre le système $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

1) Par la méthode de Gauss sans stratégie du pivot.
2) Par la méthode de Gauss avec stratégie du pivot partiel.

Scanné avec CamScanner

UFHB
2015-2016

2ème Session
1H30

UFR MI
Licence 3

EXAMEN ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE

Exercice 1

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne notée $\|.\|_2$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme induite (notée aussi $\|.\|_2$) et le conditionnement associé est noté $cond_2(A)$. Soit A une matrice inversible de $\mathbb{R}^n$.

(1) Montrer que si A est normale alors

$$cond_2(A) = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|}$$

où les nombres $\lambda_i(A)$ désigne les valeurs propres de A.

(2) Montrer que $cond_2(A) = 1$ si et seulement si $A = \alpha Q$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et Q est une matrice orthogonale.

Exercice 2

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et définie positive. On cherche à résoudre le système linéaire $Ax = b$ avec $b \in \mathbb{R}^n$ par la méthode itérative

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \text{ avec } A = M - N$$

et $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur initial arbitraire. On prend comme matrice $M = \frac{1}{\alpha} I$ avec I la matrice identité d'ordre n et $\alpha \neq 0$ un nombre réel.

1- Ecrire le processus itératif sous la forme

$$x^{(k+1)} = C(\alpha)x^{(k)} + c, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Donner l'expression de la matrice $C(\alpha)$ et rappeler la condition nécessaire et suffisante pour que le processus converge, quel que soit le vecteur $x^{(0)}$

2- On note $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n$ les valeurs propres de A.

a) Ecrire les valeurs propres $\mu_i, i = 1, 2, \ldots, n$ de $C(\alpha)$ en fonction des valeurs propres λ_i de A.

b) Déterminer le nombre $a > 0$ tel que la méthode itérative précédente converge, si et seulement si $\alpha \in]0, a[$

3- *Application* : Soit A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calculer les valeurs propres de A et expliciter pour cet exemple le nombre a de la question 2-b)

b) A quelle valeur de α correspond la méthode de Jacobi pour cet exemple ?

Scanné avec CamScanner

UFRMI/UFHB Année 2016-2017

L3 : Mathématiques
Analyse Numérique Matricielle.
Examen première session. Durée : 2 heures 30

Exercice 1

Soit A la matrice carrée définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 4 \end{pmatrix}$$

1) En écrivant A sous la forme $A = 4(I - N)$, N est à déterminer, montrer que A est inversible et que $\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{2}$. En déduire un majorant de$Cond(A)$.

2) Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $2 \leq |\lambda| \leq 6$.

Exercice 2

On considère le système linéaire $Ax = b$, avec A une matrice symétrie de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^3$ donné par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1) Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire $Ax = b$.

2) Vérifier que la matrice A est à diagonale strictement dominante. Etudier la convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel.

3) Déterminer les valeurs propres de A et en déduire qu'elle est définie positive.

4) Que peut-on dire sur la convergence de la méthode itérative de la relaxation avec $\omega \in]0, 2[$ pour la résolution de $Ax = b$.

Exercice 3

Soient A, $A+\delta A \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices inversibles et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul. Soit x la solution du système linéaire $Ax = b$ et $x + \delta x$ celle du système $(A + \delta A)y = b$. On définit par $\|.\|$ la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle définie sur $\mathbb{R}^n$.

1- a) Montrer que :

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq cond(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \quad \text{et} \quad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\frac{1}{1 - \|A^{-1}\delta A\|}$$

Scanné avec CamScanner

b) *Application* : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 10^3 \\ 10^3 & 10^6 + 10^3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. donner l'estimation $\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|}$ pour la norme $\|.\|_\infty$ lorsque $\delta A = \begin{pmatrix} 10^3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2- Soit $\tilde{A}$ une approximation de A^{-1}. On pose $X = I - A\tilde{A}$ et on suppose que $\|X\| < 1$. Montrer que

$$\|A^{-1} - \tilde{A}\| \leq \frac{\|\tilde{A}X\|}{1 - \|X\|}.$$

Scanné avec CamScanner

UFHB
2016-2017

UFR MI
Licence 3

EXAMEN ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE
SESSION 2

Exercice 1

Soit A une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{R}$ telle que $det(A) \neq 0$

1) Quelle relation existe-t-il en général entre $cond(A^2)$ et $(condA)^2$?
2) On suppose que A symétrique. Montrer que $cond(A^2) = (cond_2 A)^2$.
3) On suppose que $cond(A^2) = (cond_2 A)2$. Peut-on conclure que A est symétrique? (justifier la reponse.)

Exercice 2

On suppose l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien, noté $(.,.)$, et de la norme associée $\|v\|_2 = (v,v)^{1/2}$. Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant

$$\exists c > 0,\ \forall v \in \mathbb{R}^n,\ \langle Av, v\rangle \geq c\|v\|_2^2$$

1- Montrer que $\ker A = 0$. En déduire que, pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, le système linéaire $Ax = b$ admet une unique solution.

2- On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ et on construit la suite $\left(x^{(n)}\right)_{n\in N}$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$x^0 \in \mathbb{R}^n \text{ donné et } x^{(n+1)} = x^{(n)} - \alpha\left(Ax^{(n/0} - b\right),\ \forall n \in N$$

On note $r^{(n)} = Ax^{(n)} - b$ le résidu à l'étape n.

(a) Montrer que $r^{(n)} = (I_n - \alpha A)\, r^{(n-1)}$,
puis que $r^{(n)} = (I_n - \alpha A)^n\, r^{(0)}$, $\forall n \in N$

(b) Soit $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|z\|_2 < 1$. Montrer que

$$\|(I_n - \alpha A)z\|_2^2 \leq \alpha^2\|A\|_2^2 - 2\alpha z + 1$$

(c) En déduire que $\|I_n - \alpha A\|_2 \leq 1$ pour α appartenant à un intervalle bien choisi.

3- Déduire de la question précédente une condition nécessaire sur α pour que la suite $\left(x^{(n)}\right)_{n\in N}$ converge vers la solution de $Ax = b$.

Scanné avec CamScanner

UFHB/UFRMI Année 2017-2018

L3 : Mathématiques
Analyse Numérique Matricielle.
Examen Session 1. Durée : 2h heures

Les exercices sont indépendants. Rediger avec soin et rigueur.

Exercice 1

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Ecrire A sous la forme LU.
2) Utiliser la question 1) pour calculer le déterminant de A.
3) Utiliser la question 1) pour calculer l'inverse de A.

Exercice 2

Soit le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1) Approcher la solution avec la méthode de Jacobi avec 3 itérations à partir de $x^{(0)} = (2,2,2)^T$.

2) Approcher la solution avec la méthode de Gauss-seidel avec 3 itérations à partir de $x^{(0)} = (2,2,2)^T$.

Exercice 3

1) Soit A une matrice inversible réelle, symétrique admettant une factorisation $A = LU$, où L est une matrice triangulaire inférieure, dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1, et U est une matrice triangulaire supérieure.

Montrer que A admet une factorisation $A = BC^t$, où B est une matrice triangulaire inférieure et C est une matrice dont chaque colonne est soit égale à la colonne correspondante de B, soit égale à la colonne correspondante de B changée de signe. On pourra poser $D = diag(\sqrt{u_{ii}})$, $B = LD$, et $C = (D^{-1}U)^t$.

2) Effectuer cette décomposition pour la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

UFHB/UFRMI **Année 2017-2018**

L3 : Mathématiques et applications
Analyse Numérique Matricielle.
Examen deuxième Session . Durée : 2h heures 30

Les exercices sont indépendants. Rediger avec soin et rigueur.

Exercice 1

Résoudre par la méthode de Gauss le système suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On considère le système linéaire $Ax = b$ avec

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Décomposer A sous la forme LU et en déduire que le système admet une solution unique x^*.

2) Ecrire l'itération de Gauss-Seidel pour ce système, c'est à dire, le système linéaire donnant $X_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}, t_{n+1}, u_{n+1})$ en fonction de $X_n = (x_n, y_n, z_n, t_n, u_n)$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $e_n = X_n - x^*$. Montrer qu'il existe $a \in [0, 1[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \|e_{n+1}\|_\infty \leq a\|e_n\|_\infty$$

En déduire la convergence de la suite.

4) a) Déterminer la matrice de Gauss-Seidel $\mathcal{L}_1$ assoicée à A.

b) Calculer $\|\mathcal{L}_1\|_\infty$. En déduire que la suite (X_n) converge vers x^*.

Scanné avec CamScanner

UFHB UFR MI
2018-2019 Licence 3

EXAMEN ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE
SESSION 1

Exercice 1

Soit A une matrice de format $m \times n$ sur $\mathbb{R}$ et le nombre

$$\|A\|_{sc} = \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{(Norme de Schur)}$$

1) Vérifier que $\|\cdot\|_{sc}$ est une norme et que $\|A\|_{sc}^2 = tr(A^tA)$
2) Si A et B sont deux matrices de format respectifs $m \times n$ et $n \times p$ alors
$$\|AB\|_{sc} \leq \|A\|_{sc}\|B\|_{sc}$$
3) Montrer que $\|A\|_{sc}$ est invariante par transformation orthogonale
4) Montrer que si A est ne matrice de format n, on a :
$$\|A\|_2 \leq \|A\|_{sc} \leq \sqrt{n}\|A\|_2$$
5) $\|\cdot\|_{sc}$ est elle une norme matricielle induite ?
6) Soient u et v deux vecteurs, $u \in \mathbb{R}^m$ et $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si $A = uv^t$ alors :
$$\|A\|_2 = \|A\|_{sc} = \|u\|_2\|v\|_2$$

Exercice 2

Soit A une matrice $n \times n$ inversible avec $a_{ii} \neq 0$ et $\in \mathbb{R}^n$. On veut résoudre le système $Ax = b$. On note D la matrice diagonale constituée de la diagonale de A. Soit $\alpha \neq 0$, on étudie la méthode itérative

$$x_{k+1} = (I - \alpha D^{-1}A)x_k + \alpha D^{-1}b$$

(1) Montrer que si x_k converge vers x alors x est solution du système.

(2) Exprimer les coefficients de la matrice $D^{-1}A$ en fonction des coefficients de la matrice A.

(3) On suppose A est à diagonale strictement dominante et $0 < \alpha \leq 1$. Montrer que la méthode est bien définie et
$$\|I - \alpha D^{-1}A\|_\infty < 1$$
. En déduire la convergence de la méthode.

Scanné avec CamScanner

UFHB 2018-2019
UFRMI 2II

EXAMEN ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE

Deuxième session

EXERCICE 1

Soit $\|.\|$ une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$. Pour $b \in \mathbb{R}$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ donnés, on veut résoudre $Ax = b$

(1) Soit x' solution de $Ax' = b + \Delta b$
On pose $\Delta x = x' - x$. Montrer qu'il existe $C(A) > 0$ tel que :

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq C(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

(2) Soit x'' solution de

$$(A + \Delta A)x'' = b$$

On pose $\Delta x = x'' - x$. Montrer que

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq C(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

et

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{C(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}{1 - C(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \text{ si } \|A^{-1}\|\|\Delta A\| < 1$$

(3) Soit le schéma itératif :

$$r_k = b - Ax_k, \quad A\Delta x_k = r_k, \quad x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$$

Montrer que cet algorithme est convergent.

EXERCICE 2

On suppose l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien, noté $(.,.)$, et de la norme associée $\|v\|_2 = (v, v)^{1/2}$. Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant

$$\exists c > 0, \ \forall v \in \mathbb{R}^n, \ (Av, v) \geq c\|v\|_2^2$$

1- Montrer que $\ker A = 0$. En déduire que, pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, le système linéaire $Ax = b$ admet une unique solution.

2- On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ et on construit la suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$x^0 \in \mathbb{R}^n \text{ donné et } x^{(n+1)} = x^{(n)} - \alpha\left(Ax^{(n)} - b\right), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

On note $r^{(n)} = Ax^{(n)} - b$ le résidu à l'étape n.

(a) Montrer que $r^{(n)} = (I_n - \alpha A)r^{(n-1)}$,
puis que $r^{(n)} = (I_n - \alpha A)^n r^{(0)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_2 < 1$. Montrer que

$$\|(I_n - \alpha A)x\|_2^2 \leq \alpha^2\|A\|_2^2 - 2c\alpha + 1$$

(c) En déduire que $\|I_n - \alpha A\|_2 \leq 1$ pour α appartenant à un intervalle bien choisi.

3- Déduire de la question précédente une condition nécessaire sur α pour que la suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution de $Ax = b$.

Scanné avec CamScanner

UFRMI/UFHB Année 2015-2016

L3 : Mathématiques

Analyse Numérique des Equations différentielles ordinaires.

Examen première session. Durée : 1h30 heures

Les exercices sont indépendants. Rediger avec soin et rigueur.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= f(x,y),\ x \in [0,b] \\ Y(0) &= 1 \end{cases} \qquad (1)$$

où b est un nombre réel > 0 et $f : [0,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x,y) = y$.

1) Montrer que (1) admet une solution unique qu'on notera Y. Donner l'expression de $Y(x)$ pour tout $x \in [0,b]$.

Pour résoudre numériquement (1), on propose le schéma suivant

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f(x_n + h, y_n + h f(x_n, y_n)),\ n \geq 0 \\ y_0 &= 1 \end{cases} \qquad (2)$$

où $h = b/N$ et $x_n = n\,h$, $n = 0, \ldots, N$, ($N \in \mathbb{N}^*$ fixé). y_n désigne une approximation de $Y(x_n)$.

2) Montrer que le schéma (2) est stable et consistant avec l'équation différentielle (1).

3) En déduire que le schéma (2) est convergent.

4) Montrer que le schéma (2) est d'ordre (au moins) 2.

5) Donner l'expression de y_{n+1} en fonction de y_n, n et h. En déduire l'expression de y_n en fonction de h et de n.

Exercice 2

Pour approcher la solution d'un système différentiel avec condition initiale, on utilise une méthode numérique associée à la fonction Φ suivante :

$$\begin{aligned} \Phi(x,y,h) &= \tfrac{1}{6}[k_1 + 4k_2 + k_3] \\ k_1 &= f(x,y) \\ k_2 &= f(x + \tfrac{h}{2}, y + \tfrac{h}{2} k_1) \\ k_3 &= f(x + h, y + h(-k_1 + 2k_2)) \end{aligned}$$

Montrer que cette méthode est au moins d'ordre 3.

Scanné avec CamScanner

UFRMI/UFHB Année 2015-2016

L3 : Mathématiques

Analyse Numérique des Equations différentielles ordinaires.

Examen deuxième session. Durée : 1h30 heures

Les exercices sont indépendants. Rediger avec soin et rigueur.

Exercice 1

1) Un schéma d'Euler implicite.

Montrer que le schéma suivant est convergent et d'ordre un

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n - hf(x_{n+1}, y_{n+1}),\ n \geq 0 \\ y_0 &= y_0 \end{cases} \quad (1)$$

2) Un schéma d'Euler Modifié.

Montrer que le schéma suivant est convergent et d'ordre 2 :

$$\begin{cases} y_{n+1/2} &= y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n),\ n \geq 0 \\ y_{n+1} &= y_n + hf(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}),\ x_{n+1/2} = x_n + h/2 \\ y_0 &= y_0 \end{cases} \quad (2)$$

3) Application.

Soit l'équation différentiele (k>0)

$$y' + ky^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

a) Résoudre cette équation différentielle. Quelle est sa limite en $x \to \infty$?

b) Ecrire le schéma d'Euleur explicite et étudier le comportement de la solution lorsque n tend vers l'infini.

c) On considère le schéma

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + k\left(\frac{y_{n+1} + y_n}{2}\right)^2 = 0$$

Calculer la solution y_{n+1} en fonction de y_n, k, et h et en déduire une condition sur h pour que le comportement de la solution numérique soit correct lorsque $n \to \infty$.

Montrer que le schéma est consistant d'ordre deux.

Scanné avec CamScanner

Exercice 2

Soit le problème :

$$\begin{cases} x'' = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x(0) = 4,\ x'(0) = 0 \\ y'' = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y(0) = 0,\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

a) Ecrire la méthode d'Euler pour résoudre numériquement ce problème.

b) Ecrire la méthode de Runge-Kutta (Classique) pour résoudre numériquement ce problème

Scanné avec CamScanner

UFRMI/UFHB Année 2016-2017

L3 : Mathématiques

Analyse Numérique des Equations Différentielles Ordinaires.

Examen première session. Durée : 2 heures

Les exercices sont indépendants. Rediger avec soin et rigueur.

Exercice 1

On considère la méthode de Runge Kutta ayant pour tableau de Butcher :

0	0		
C_2	c_2	0	
C_3	0	c_3	0
	0	0	1

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n; h)$$

Déterminer les conditions sur c_2 et c_3 pour que cette méthode soit d'ordre le plus élévé possible.

Exercice 2

Vérifer que la méthode de Heun, de schéma :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))\right)$$

et la méthode d'Euleur modifié de schéma

$$y_{n+1} = y_n + h\left(f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n))\right)$$

sont des méthodes de Runge -Kutta à deux niveaux et donner les tableaux (de Butcher) correspondants.

Exercice 3 Déterminer l'ordre de la méthode de Runge-Kutta donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h)$$

avec

$$\begin{cases} \Phi(x, y, h) = \frac{1}{6}(V_1 + 4V_2 + V_3) \\ V_1 = f(x, y) \\ V_2 = f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}V_1) \\ V_3 = f(x + h, y + h(-V_1 + 2V_2)) \end{cases} \quad (1)$$

(scanné avec CamScanner

UFRMI/UFHB Année 2016-2017

L3 : Mathématiques

Analyse Numérique des Equations Différentielles Ordinaires.

Examen deuxième session. Durée : 2 heures

Les exercices sont indépendants. Rediger avec soin et rigueur.

Exercice 1

La loi de Newton affirme que la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence entre la température du corps et la température externe, autrement dit qu'il existe une constante $K < 0$ telle que la température du corps suit l'équation différentielle

$$\begin{cases} T'(t) &= K(T(t) - T_{ext}), \\ T(0) &= T_0 \end{cases} \quad (1)$$

1) Soit Δt le pas temporel. Ecrire le schéma d'Euler implicite pour approcher la solution de cette équation différentielle.

2) Soit $T_{ext} = 0\ ^\circ C$. En déduire une forme du type

$$T_{n+1} = g(\Delta t, n, T_0)$$

avec $g(\Delta t, n, T_0)$ à préciser. Que peut-on en déduire sur la convergence de la méthode ?

3) *Problème.* Un homicide a été commis. On veut établir l'heure du crime sachant que

- pour un corps humain on peut approcher $K \approx -0.007438118376$ (l'échelle du temps est en minutes et la température en Celsius),
- le corps de la victime a été trouvé sur les lieux du crime à 2h20 du matin,
- à l'heure du décès la température du corps était $37\ ^\circ C$,
- à l'heure de la découverte la température du corps est de $20\ ^\circ C$,
- la température externe est $T_{ext} = 0\ ^\circ C$.

Approcher l'heure de l'homicide en utilisant le schéma d'Euler implicite avec $\Delta t = 10$ minutes.

4) Pour cette équation différentielle, il est possible de calculer analytiquement ses solutions. Comparer alors la solution exacte avec la solution approchée trouvée dans la question précédente.

Exercice 2 Déterminer l'ordre de la méthode de Runge-Kutta donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h)$$

avec

$$\begin{cases} \Phi(x, y, h) &= \frac{1}{6}(V_1 + 4V_2 + V_3) \\ V_1 &= f(x, y) \\ V_2 &= f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}V_1) \\ V_3 &= f(x + h, y + h(-V_1 + 2V_2)) \end{cases} \quad (2)$$

Scanné avec CamScanner

10.08.2020

Année 2017-2018

UFRMI/UFHB

L3 : Mathématiques

Analyse Numérique des Equations Différentielles Ordinaires.

Examen deuxième session. Durée : 2 heures

Les exercices sont indépendants. Rediger avec soin et rigueur.

Exercice 1

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)),\ t \in [t_0, t_0 + T] \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

1- Donner le schéma d'Euleur explicite à pas constant correspondant à ce problème.

2- Jusqu'à quel ordre ce schéma est-il convergent ?

3- Applications : Pour les deux problèmes suivants :

$$A)\ \begin{cases} x'(t) &= t\sin(x(t)),\ t \in [0, T] \\ x(0) &= \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad B)\ \begin{cases} x'(t) &= t^2 + x(t) + 1,\ t \in [1, 1 + T] \\ x(1) &= 1 \end{cases}$$

a) Ecrire le schéma d'Euler explicite en prenant un pas de temps constant.

b) Ecrire les deux premières itérations en prenant comme pas $h = 0,1$.

c) Est-ce que ce schéma converge vers chacune des solutions de ces problèmes ?

Exercice 2

Vérifier que la méthode de Heun, de schéma :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))\right)$$

et la méthode d'Euleur modifié de schéma

$$y_{n+1} = y_n + h\left(f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n))\right)$$

sont des méthodes de Runge -Kutta à deux niveaux et donner les tableaux (de Butcher) correspondants.

Scanné avec CamScanner

UFRMI/UFHB Année 2018-2019

L3 : Mathématiques
Analyse Numérique des Equations Différentielles Ordinaires.
Examen première session. Durée : 2 heures

Les exercices sont indépendants. Rediger avec soin et rigueur.

Exercice 1

L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle :

$$y'(t) = \frac{1}{1+t^2}y(t). \qquad (1)$$

Sachant qu'à l'instant $t = 0$ la concentration est $y(0) = 5$, déterminer la concentration $t = 2$ à l'aide de la méthode de Euler explicite vec un pas $h = 0,5$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $y'(t) = \lambda y(t)$ avec $y(0) = 1$.

1) Montrer la stabilité, la consistance et calculer l'ordre de la méthode d'Euler implicite pour cette équation.

2) Même question en considérant le schéma de Cranck-Nicholson.

3) Dans le cas $\lambda < 0$, déterminer à quelle condition ces deux méthodes, la méthode d'Euler modifiée et la méthode Heun sont A-stables (c'est à dire $\lim_n y_n = 0$ quand n tend vers $+\infty$).

Rappel :

Méthode d'Euler modifiée (ou méthode du point milieu)

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n))$$

Méthode de Heun

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)))$$

Exercice 3

On considère l'équation différentielle de Van der Pol

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_2 \\ y_2'(t) &= (1 - y_1^2)y_2 - y_1 \\ y_2(0) = 1/2 & y_2(0) = 1/2; \quad t \in [0, 25] \end{cases}$$

1) Appliquer le θ-schéma sur ce problème avec pas de discrétisation h.

2) En déduire l'algorithme correspondant pour la méthode d'Euler explicite, la méthode Euler implicite et le schéma de Cranck-Nicholson.

Scanné avec CamScanner

UFRMI/UFHB Année 2018-2019

L3 : Mathématiques
Analyse Numérique des Equations Différentielles Ordinaires.
Examen deuxième session. Durée : 2 heures

Les exercices sont indépendants. Rediger avec soin et rigueur.

Exercice 1

Utiliser la méthode d'Euler pour calculer les 4 premières valeurs approchées de la solution $y(t)$ de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y(t)-t}{y(t)+t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - \frac{2t}{y(t)}, \quad t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1) Trouver la valeur approchée de y aux points $t_1 = 0,5$ et $t_2 = 1$ par la méthode d'Euler avec un pas $h = 0,5$.

2) Calculer la valeur approchée de y au point $t = 1$ en utilisant pour le même pas h

a) la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

b) la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

3) Quelle est la solution exacte du problème?

4) Comparer les valeurs approchées calculées en 1) et 2) avec la valeur exacte correspondante. Conclure

Exercice 3

On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} t^2y'(t) - ty(t) = 1, \qquad t \in [1,2] \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

1) Calculer les deux premières valeurs approchées de la solution en utilisant la méthode d'Euler en prenant $h = 0,2$.

2) Calculer les deux premières valeurs approchées de la solution en utilisant la méthode de Crank-Nicholson en prenant $h = 0,2$.

3) Calculer la solution exacte

4) Estimer l'erreur en $t = 1,4$ dans chacune des deux méthodes.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouét Boigny
UFR Mathématiques et Informatique
Année: 2015-2016

U.E.: Variable Complexe
Durée: 2h30

Exercice 1 f est une fonction entière vérifiant:
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+iy) = e^x f(iy)$ et $f(0) = 1$
Posons, pour tout réel y, $Re f(iy) = c(y)$ et $Im f(iy) = s(y)$

1. En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, montrer que:
   $\forall y \in \mathbb{R}, c'(y) = -s(y)$ et $s'(y) = c(y)$
2. Montrer que $y \mapsto g(y) = (c(y) - cosy)^2 + (s(y) - sin(y))^2$ vérifie:
   $\forall y \in \mathbb{R}, g'(y) = 0$.
   En déduire que: $\forall y \in \mathbb{R}, g(y) = 0, c(y) = cosy$ et $s(y) = siny$

Exercice 2 Evaluer $\int_\gamma \bar{z} dz$ dans les cas suivants;

1. $\gamma : t \mapsto t^2 + it$ definie sur $[a,b]$ tels que $\gamma(a) = 0$ et $\gamma(b) = 4 + 2i$
2. γ^* est la ligne brisée formée des segments de droite joignant 0 à $2i$ et $2i$ à $4 + 2i$.

Exercice 3

1. Soit $r \in [1, +\infty]$
   γ_r est le lacet de support

   $$\gamma_r^* = [-r, r] \cup \{z \in \mathbb{C} / |z| = r; Imz > 0\}$$

   parcouru une fois dans le sens direct. Montrer que;
   (a) $\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \frac{\pi}{e}$
   (b)
   b1. $\int_{[-r,r]} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \int_{-r}^{r} \frac{cost}{1+t^2} dt$
   b2. $\forall z \in \mathbb{C}, [|z| = r; Imz \geq 0] \Rightarrow |1 + z^2| \geq r^2 - 1$ et $|e^{iz}| \leq 1$.
   b3. Si δ_r est le chemin de support $\delta_r^* = \{z \in \mathbb{C} / |z| = r; Imz > 0\}$ parcouru une fois dans le sens direct alors $|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz| \leq \pi \frac{r}{r^2-1}$
2. Justifer la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cost}{1+t^2} dt$ et montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cost}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{e}$

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny
UFR Maths-Info
Année: 2015-2016

U.E.: Variable Complexe
Licence 3
Deuxieme Session
Durée: 2h

Exercise 1

1. Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ tel que: $\forall z \in \Omega, \overline{z} \in \Omega$.
   f est une application de Ω dans $\mathbb{C}$. Montrer que $z \mapsto g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ est holomorphe sur Ω si et seulement si f l'est.

2. f est une fonction entière vérifiant: $\forall z \in \mathbb{C}, Ref(z)Imf(z) = 1$. Montrer que f est constante.

Exercice 2

1. On note $\mathcal{C}$ le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct. f est une fonction holomorphe dans un ouvert U contenant le disque fermé $\overline{D(O,1)} = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq 1\}$.
   (a)- Exprimer en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$, $I = \int_{\mathcal{C}}(2 + z + \frac{1}{z})\frac{f(z)}{z}dz$
   (b)- En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(e^{it})\cos^2(\frac{t}{2})dt$.

2. Déterminer la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z-3)}$ où
   $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z-1| = 1\}$ parcouru une fois dans le sens direct.

Exercice 3 En intégrant la fonction $z \mapsto e^{iz^2}$ sur la frontiere du secteur $\Sigma = \{z \in \mathbb{C}/0 \leq |z| \leq R; 0 \leq Arg z \leq \frac{\pi}{4}\}$ parcouru une fois dans le sens direct, montrer que

$$\int_0^{+\infty} cos(x^2)dx = \int_0^{+\infty} sin(x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

On admettra que: $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} e^{iz^2}dz = 0$ où γ_R est la fonction définie de $[0, \frac{\pi}{4}]$ dans $\mathbb{C}$ par: $\theta \mapsto Re^{i\theta}$.

(Scanné avec CamScanner)

Université FHB
UFR Maths-Info

U.E: Variables Complexes

Première Session: Novembre 2017
Durée: 2h30
Niveau: L3

Exercice 1

1. On pose $P(x,y) = 2x - x^2 + 3xy^2$

   Trouver, si possible, une fonction $Q : (x,y) \mapsto Q(x,y)$ telle que la fonction $f : x + iy \mapsto P(x,y) + iQ(x,y)$ soit entière.

Exercice 2

1. A l'aide de la formule intégrale de Cauchy, calculer $\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz$ où γ est le cercle unité (de centre 0 et de rayon 1) parcouru une fois dans le sens direct.

2. En déduire (en utilisant la définition d'une intégrale curviligne) la valeur de chacune des intégrales suivantes $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta$ et $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta$

Exercice 3

1. Calculer $\int_\gamma \frac{z^2+2z+4}{z^2} dz$ dans les cas suivants:

   a.
   $$\gamma : \begin{array}{rl} [0,2\pi] & \to \mathbb{C} \\ t & \mapsto 2 + e^{it} \end{array}$$

   b.
   $$\gamma : \begin{array}{rl} [0,2\pi] & \to \mathbb{C} \\ t & \mapsto 2e^{it} \end{array}$$

Scanné avec CamScanner

2. Pour tout réel $r > 0$, notons

$$\gamma_r : \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & re^{it} \end{array} \quad \text{et} \quad I_r = \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz .$$

a Montrer que

i) $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \left| \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}-1}{z} dz \right| \leq \pi \sup_{|z|=r} |e^{iz}-1|$

ii) $\lim_{r \to 0} I_r = i\pi$

b. i) Montrer que : $\lim_{r \to +\infty} \int_0^\pi e^{-r \sin t} dt = 0$

[Indication: $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2t}{\pi} \leq \sin t \leq t$]

ii) En déduire que $\lim_{r \to +\infty} I_r = 0$

c. Considérons deux réels a et A tels que: $0 < a < A < +\infty$ et les chemins

$$\sigma_{a,A} : \begin{array}{ccc} [-A;-a] & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & x \end{array}, \quad \delta_{a,A} : \begin{array}{ccc} [a;A] & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

et $\gamma_{a,A} = \sigma_{a,A} - \gamma_a - \delta_{a,A} + \gamma_A$. Montrer que $\int_{\gamma_{a,A}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$.

d. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

Scanné avec CamScanner

Université FHB
UFR Maths-Info

U.E: Variables Complexes

Session 2: Janvier 2018
Durée: 2h30
Niveau: L3

Exercice 1 En utlisant la définition, montrer que

1. $z \mapsto z^3$ est entière (dérivable en tout point de $\mathbb{C}$).
2. $z \mapsto \overline{z}^2$ est dérivable uniquement au point 0 de $\mathbb{C}$.
3. $z \mapsto \overline{z}$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$

Exercice 2

1. Rappeler les équations de Cauchy-Riemann.
2. Soit G un sous-ensemble ouvert et connexe de $\mathbb{C}$. $f : G \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur G. Montrer que f est constante sur G dans chacun des cas suivants:
   a) $\forall z \in G, f(z) \in \mathbb{R}$
   b) $z \mapsto \overline{f(z)}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$
3. On suppose que: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, u(x,y) = chy.sinx$
   Trouver $(x,y) \mapsto v(x,y)$ une fonction réelle telle que
   $x+iy \mapsto f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ soit holomorphe dans son domaine de définition.

Exercice 3 Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres complexes suivants: $exp(sin(i))$, $exp(Log(3+4i))$.

Exercice 4

1. Pour tout réel $r > 0, \gamma_r(t) = re^{it}$ pour $0 \leq t \leq 2\pi$. Calculer

Scanné avec CamScanner

a) $\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z^2-2z-8}$ pour $r = 1, r = 2$ et $r = 5$

b) $\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2(z-1)}$

2. Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$

Scanné avec CamScanner

Université FHB
UFR Maths-Info

U.E: Variables Complexes

Première Session: Janvier 2019
Durée: 2h00
Niveau: L3

Exercice 1 On considère un sous-ensemble non vide et ouvert U de $\mathbb{C}$, une application $f : U \to \mathbb{C}$ et la fonction complexe g définie sur U par $g(z) = zf(z)$. On note $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + iy \in U\}$ et on définit sur Ω les fonctions P, Q, R et S par:
$P(x,y) = Ref(x+iy)$, $Q(x,y) = Imf(x+iy)$, $R(x,y) = Reg(x+iy)$, $S(x,y) = Img(x+iy)$, $F(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$ et $G(x,y) = R(x,y) + iS(x,y)$.
On suppose que P et Q admettent des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2 sur Ω [i.e P et $Q \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$].

1. Enoncer les équations de Cauchy-Riemann pour f

2. Montrer que pour tout élement (x,y) de Ω

$$\Delta G(x,y) = 2\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + 2i\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) + (x+iy)\Delta F(x,y)$$

3. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) f est holomorphe sur U

(ii) F et G sont harmoniques sur Ω.

Exercice 2 Pour tout $r \geq 0$, γ_r désigne le chemin défini sur $[0, 2\pi]$ par $\gamma_r = re^{it}$.

1. ~~A l'aide de la formule intégrale de Cauchy~~ Enoncer le théorème concernant la formule intégrale de Cauchy.

2.

a) A l'aide de la formule intégrale de Cauchy, calculer $\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z} dz$.

Scanné avec CamScanner

b) Déduire de la question a) et de la définition d'une intégrale curviligne la valeur des intégrales $\int_0^{2\pi} e^{cos\theta} cos(sin\theta) d\theta$ et $\int_0^{2\pi} e^{cos\theta} sin(sin\theta) d\theta$

3. Calculer les intégrales $\int_{\gamma_3} \frac{e^z cosz}{(z-\pi)^2} dz$ et $\int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^3+z} dz$

Scanné avec CamScanner

Université FHB
UFR Maths-Info

U.E: Variables Complexes

Deuxième Session: Mars 2019
Durée: 2h00
Niveau: L3

Exercice 1

1. Montrer directement, puis à l'aide des équations de Cauchy-Riemann, que les fonctions suivantes sont entières
   a) $z \mapsto f(z) = z^4$
   b) $z \mapsto g(z) = z^5$
2. On pose $D = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$
   et $\forall z = x + iy \in D$; $log(z) = \frac{1}{2}ln(x^2 + y^2) + iArctg(\frac{y}{x})$
   a) Montrer que log est holomorphe sur D
   b) Montrer que $z \mapsto log(-i\frac{z-1}{z+1})$ est holomorphe sur $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$
3. Trouver toutes les fonctions entières f telles que $Ref(x + iy) = x^2 - y^2 - x - y$.

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes, où γ désigne le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct.

a) $\int_\gamma \frac{\cos z}{z} dz$
b) $\int_\gamma \frac{\sin z}{z} dz$
c) $\int_\gamma \frac{\cos z}{z^3} dz$
d) $\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z^3 - a^3} dz$ pour $0 \neq | z | \neq 1$ (On discutera suivant les valeurs de $| a |$)

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny 2018-2019
UFRMI-L3 2 heures

Examen de Variables Complexes

Exercice 1 (4 points). Soit

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{z} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$$

Démontrer que :

1. f est continue en 0,
2. les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaitent en 0,
3. f n'est pas dérivable (au sens complexe) en 0.

Exercice 2 (6 points). 1. Soit f une fonction analytique dans le disque $|z| < R$, $R > 0$ donnée, telle que

$$|f'(z)| \leq M, \text{ pour tout } |z| < R.$$

Si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est le développement en série entière de f, démontrer que l'on a

$$|a_n| \leq \frac{M}{nR^{n-1}}$$

2. Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Démontrer que l'on a

$$\int_0^1 f'(tz)dt = \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z} & \text{pour} \quad 0 < |z| < R \\ f'(0) & \text{pour} \quad z = 0 \end{cases}$$

Exercice 3 (4 points). Soit

$$f(z) = \frac{z(e^z - 1)}{e^{2z} - 1} + \frac{1}{z^2 + 1}.$$

1. Déterminer les points singuliers de f et préciser leur nature.
2. Calculer les résidus de f en 0 et en i.

Exercice 4 (6 points). 1. Démontrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + 8(\cos t)^2} = \frac{2\pi}{3}.$$

2. Soient a et b deux réels strictement positifs distincts. Calculer par la méthode des résidus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)(x^2 + b)}.$$

Le résultat trouvé vaut-il encore pour $a = b$?

Indications 4. Pour le 1.), noter que $z^2 + 2(z^4 + 2z^2 + 1) = (z^2 + 2)(1 + 2z^2)$.

Scanné avec CamScanner

UFRMI-UFHB
L3

2018-2019
2 heures

Examen d'Analyse complexe session 2

Exercice 1 (7 points). On considère la série entière $\sum(\frac{6^n}{2} - 4n + 1)z^n$

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série et calculer sa somme. (on ne vous demande pas de réduire au même dénominateur l'expression finale).
2. Rappeler la définition de la détermination principale du logarithme et calculer l'image de $1+i$.
3. Déterminer les fonctions $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ de $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ pour lesquelles on a

$$\log(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$$

où $\log(z)$ désigne la détermination principale du logarithme.

4. Montrer que une fonction f est holomorphe en un point $z_0 \in \mathbf{C}$ si et seulement si la fonction $\varphi(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, avec $P(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ et $Q(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ est différentiable en (x_0, y_0) et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en ce point.

Exercice 2 (7 points). Calculer à l'aide du théorème des résidus l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx.$$

Exercice 3 (6 points).

1. Montrer que si f est holomorphe dans un ouvert connexe $\Omega \neq \emptyset$ de $\mathbf{C}$ et $f(z) \in \mathbf{R}$ pour tout $z \in \Omega$, alors f est constante dans Ω.
2. Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$, f et g deux fonctions holomorphes sur U avec $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$. Montrer que si $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbf{R}$ pour tout $z \in U$ alors il existe $c \in \mathbf{R}$ telle que $f(z) = cg(z)$ pou tout $z \in U$.

Scanné avec CamScanner

Université FHB
Licence 3

Année universitaire 2015-2016

Examen de Recherche Opérationnelle 1
Documents non autorisés
Durée 3H

Exercice 1 (6 points)
La matrice M qui suit donne en heures les durées des vols entre les villes $v_1, v_2, \cdots, v_6$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & \infty \\ \infty & 4 & 0 & \infty & 4 & 3 \\ 6 & 2 & \infty & 0 & 4 & 4 \\ \infty & 4 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 5 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Appliquer un algorithme de plus court chemin approprié pour répondre à la question suivante :
S'il y a une escale obligatoire de respectivement 3 heures et 1 heure aux villes v_2 et v_4, quel est alors l'itinéraire le plus rapide de v_1 à v_6.

Exercice 2 (6 points)
Une entreprise générale s'est spécialisée dans la construction de maisons individuelles d'un type donné. Son slogan est le suivant "achetez votre terrain ! nous vous construisons ensuite votre maison en un minimum de temps!" Chaque projet se compose d'un certain nombre de travaux décrits dans le tableau suivant :

Tâche	Désignation	Durée (jours)	Contraintes
a	Signature du marché	0	Précède toutes les autres
b	Excavation-Fondations	5	-
c	Plomberie extérieure	3	Fondations terminées
d	Construction des murs	8	Fondations terminées
e	Charpente	3	Murs achévés
f	Couverture	4	Charpente terminée
g	Maçonnerie intérieure	8	Murs achévés
h	Plomberie intérieure	7	Plomberie extérieure terminée Murs terminé Charpenté terminée
i	Electricité	4	Murs terminés Charpente terminée Maçonnerie intérieure terminée
j	Finitions	6	Toutes tâches précédentes terminées
k	Livraison	0	Tout achévé

Déterminer la durée minimale du projet. On utilisera la méthode MPM.

Exercice 3 (7 points)
On considère une entreprise produisant trois produits en quantités x_1, x_2 et x_3. Les productions unitaires de ces biens nécessitent respectivement 1, 2 et 1 unitésd'oeuvres d'un premier atelier et 2, 3 et 3 unités d'œuvres d'un deuxième atelier. Les capacités de ces deux ateliers sont de 10 et 18 unités d'oeuvres. On veut maximoser la marge sur coût variable, les marges unitaires étant de 4, 7 et 2.

Scanné avec CamScanner

1) Ecrire le programme linéaire correspondant et le résoudre par l'algorithme du simplexe.

2) On envisage une extension de capacité du premier atelier pour une capacité inchangée du second atelier ($b_2 = 18$). Quelle valeur limite b_1^* peut-on donner à b_1 si on veut conserver la base optimale obtenue dans 1).

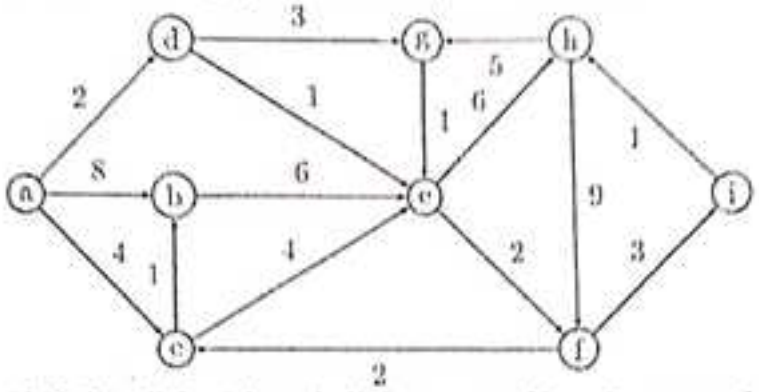
Scanné avec CamScanner

Université FHB
Licence 3

Année universitaire 2015-2016

Examen de Recherche Opérationnelle 1 (Session 2)
Documents non autorisés
Durée 2H 30

Exercice 1 (7 points)
On considère le graphe orienté et pondéré suivant :



1) Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour déterminer une arborescence des plus courts chemins issus de a.

2) La longueur de l'arc (g, c) est en fait -5. Déterminer une arborescence des plus courts chemins issus de a.

Exercice 2 (7 points)
Résoudre les programmes linéaires suivants par la méthode du simplexe en deux phases.

$$\min Z = x_1 + 3x_2 + x_3 \quad \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 \leq -5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max Z = -3x_1 + x_2 \quad \begin{cases} x_1 - x_2 \leq -1 \\ -x_1 - x_2 \leq -3 \\ 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 3 (6 points)
Utiliser la méthode du simplexe pour déterminer toutes les solutions optimales du programme linéaire ci-dessous :

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 3 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

UFHB
Licence 3

Année Universitaire 2016-20

Examen de Recherche Opérationnelle 1 (Session 1)
Durée 2h 30mn
Documents non autorisés

Exercice 1 (6 points)

Une grande entreprise propose à un sous-traitant de fabriquer trois produits P1, P2 et P3. Elle s'engage par contrat à acheter au sous-traitant tout ce qu'il produira dans la limite d'au plus 100 unités de P1, 100 unités de P2 et 200 unités de P3 à un prix unitaire unique de 120 unités monétaires. Ces produits sont fabriqués à partir de trois composants A, B et C qui entrent en proportion variable dans chacun des produits. La composition de chacun des produits, exprimée en nombre d'unités de composant est donnée dans le tableau suivant

	A	B	C
P1	3	5	2
P2	4	2	3
P3	1	2	5

Le sous-traitant ne peut acheter les composants que par lots. Deux types de lots sont disponibles dont le nombre de composants et le prix d'achat unitaire sont indiqués dans le tableau suivant :

	A	B	C	Prix d'achat unitaire (u. m.)
LOT 1	3	2	3	50
LOT 2	2	3	3	60

Le sous-traitant souhaite définir un plan général lui permettant de dégager une marge maximale. Ecrire le programme linéaire modélisant le problème.

Exercice 2 (7 points)

On considère le programme linéaire (P) suivant :

$$\begin{cases} \max Z - 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \\ 4x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ -x_1 + 6x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que $I = \{x_1, x_2, x_3\}$ est une base réalisable de ce programme. Est-elle optimale ? Si oui donner la solution de base réalisable optimale associée. Sinon utiliser la méthode des tableaux du simplexe pour déterminer une solution optimale du programme linéaire (P) en partant de cette base.

Exercice 3 (7 points)

Résoudre par la méthode des deux phases du simplexe le programme linéaire ci-dessous

$$\begin{cases} \max Z = 2x_2 - 5x_3 \\ x_1 + x_3 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1, x_2, x_3 > 0. \end{cases}$$

(scanné avec CamScanner

UFHB **Année Universitaire 2016-2017**
Licence 3

Examen de Recherche Opérationnelle 1 (Session 2)
Durée 3h
Documents non autorisés

Exercice 1 (10 points)
On considère le programme linéaire (PL) ci-dessous :

$$\begin{cases} \min Z = cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, avec $\text{rang}(A) = m < n$.

1) a) Démontrer que l'ensemble des solutions réalisables de ce problème est un ensemble convexe.

b) On suppose que son ensemble de solutions optimales est non vide. Démontrer que cet ensemble est convexe.

2) On dispose d'une base réalisable B avec I (respectivement J) les ensembles des indices des variables de base (respectivement hors base) associées. On note N la sous matrice de A associée aux variables hors base.

a) Rappeler l'algorithme primal du simplexe pour résoudre le problème (PL) en partant de la base B.

b) Montrer qu'à chaque étape l'algorithme du simplexe permet d'obtenir une base réalisable.

c) La forme canonique de (PL) par rapport à B est :

$$\begin{cases} \min Z = \widehat{Z} + \sum_{j \in J} \widehat{c}_j x_j \\ x_i + \sum_{j \in J} \widehat{a}_{ij} x_j = \widehat{b}_i \quad i \in I \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que s'il existe $k \in J$ tel que $\widehat{c}_k < 0$ avec $\widehat{a}_{ik} \leq 0$ pour tout $i \in I$, alors le programme (PL) est non borné c'est-à-dire que la valeur optimale est infinie.

Exercice 2 (5 points)
Trois types de machines peuvent être utilisés pour fabriquer 4 produits selon les durées d'occupation suivantes (par unité produite) :

	machine 1	machine 2	machine 3
produit 1	1heure	1heure	1heure
produit 2	0heure 30 min	1heure 30 min	1heure
produit 3	1heure 30 min	1heure	1heure
produit 4	0heure 45 min	1heure 30 min	1heure 15 min

Ecrire, en fonction des durées d'utilisation maximales d_1, d_2, d_3 des 3 types de machines, et des prix p_1, p_2, p_3, p_4 des 4 produits, le problème d'optimisation qui maximise les recettes.

Exercice 3 (5 points)
Soit le problème suivant

$$\begin{cases} \min\ Z = 5x_1 - 3x_2 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Le sommet associé à la base $\{x_1, x_2, x_3\}$ est un sommet optimal de ce problème. Déduire une solution optimale. Cette solution est-elle unique ?

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB Année universitaire : 2017-2018

SESSION 1 DE RECHERCHE OPERATIONNELLE 1

Niveau : Licence 3 Durée : 2H30min

Documents non autorisés

EXERCICE 1(6points)

Une entreprise fabrique des produits chimiques de trois types différents appelés respectivement Alpha 12, Bêta 51 et Bêta 52.

Le produit Alpha 12 très toxique et dont le stockage coûte cher à l'entreprise doit être fabriqué en tenant compte des possibilités de vente estimées à 290 kg par semaine.

Les produits Bêta 51 et Bêta 52 quant à eux n'ont pas de contraintes de vente.

L'entreprise dispose de 6 ouvriers qualifiés travaillant chacun 25 heures par semaine et 8 ouvriers non qualifiés travaillant chacun 35 heures par semaine. En outre, elle utilise une matière première M dont l'approvisionnement hebdomadaire est estimé à 230 kg. La marge sur coût variable des produits représente 20 pour cent du prix de vente.

Le tableau suivant indique les heures de main d'oeuvre, les quantités de matière M à utiliser pour la production, ainsi que les prix de vente unitaire de ces produits.

Pour 1 kg de produit	Alpha 12	Bêta 51	Bêta 52
Prix de vente par kg	1400 F	1050 F	600 F
Matière M (en kg)	3	2	5
Heures de main-d'oeuvre qualifiée	1	0	1
Heures de main-d'oeuvre non qualifiée	3	4	0

L'entreprise souhaite optimiser sa production hebdomadaire.

Donner le programme linéaire modélisant le problème.

EXERCICE 2(7points)

Le massif de la Rhune offre diverses possibilités de randonnées. Un randonneur a décidé de le traverser d'Ouest en Est. Après avoir répertorié sur une carte les différents

Scanné avec CamScanner

chemins qu'il pouvait emprunter, il a construit le tableau ci-dessous dans lequel il a estimé le temps de parcours à une allure normale.

1 : Vera de Bidasoa 2 : Col de Vera 3 : Insola 4 : Col des 3 fontaines 5 : Deskargabandiko Lepoa 6 : Subisia 7 : Col de Lizunia 8 : Zizkouitz Lepoa 9 : Landa Cainta Lepoa 10 : La Rhune 11 : Altxanga 12 : Fontaine d'Urkila 13 : Sare.

Départ \ Arrivée	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1		80							100				
2			25						15				
3					45								
4											25		
5						40		55					
6								25					
7													120
8				30						40		40	
9					60	60		80					
10				50							35	20	
11													65
12							90						100
13													

L'intérêt d'un randonneur étant de randonner, utiliser l'algorithme de FORD pour déterminer le chemin le plus long, qui lui permettra de joindre Vera de Bidasoa à Sare. Quelle sera la durée de sa randonnée ?

EXERCICE 3(7points)

On considère le programme linéaire (P) suivant :

$$(P)\begin{cases} \max Z = x_1 - 2x_2 + 20x_3 \\ 10x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 30 \\ 5x_2 - x_3 \geq 10 \\ 25x_1 - 10x_2 + 2x_3 \leq 105 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

1. Appliquer la phase 1 du simplexe au problème (P) pour montrer qu'il admet une solution réalisable de base.
2. A partir de la résolution précédente, conclure quant à l'optimisation du problème (P).

UFHB
Licence 3

Année Universitaire 2018-2018

Examen de Recherche Opérationnelle 1 (Session 2)
Durée 2h 30mn
Documents non autorisés

Exercice 1 (4 points)

Une grande entreprise propose à un sous-traitant de fabriquer trois produits P1, P2 et P3. Elle s'engage par contrat à acheter au sous-traitant tout ce qu'il produira dans la limite d'au plus 100 unités de P1, 100 unités de P2 et 200 unités de P3 à un prix unitaire unique de 120 unités monétaires. Ces produits sont fabriqués à partir de trois composants A, B et C qui entrent en proportion variable dans chacun des produits. La composition de chacun des produits, exprimée en nombre d'unités de composant, est donnée dans le tableau suivant

	A	B	C
P1	3	5	2
P2	4	2	3
P3	1	2	5

Le sous-traitant ne peut acheter les composants que par lots. Deux types de lots sont disponibles, dont le nombre de composants et le prix d'achat unitaire sont indiqués dans le tableau suivant :

	A	B	C	Prix d'achat unitaire (u. m.)
LOT 1	3	2	3	50
LOT 2	2	3	3	60

Le sous-traitant souhaite définir un plan général lui permettant de dégager une marge maximale.

Ecrire le programme linéaire modélisant le problème.

Exercice 2 (6 points)

On considère le programme linéaire (P) suivant :

$$\begin{cases} \max Z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \\ 4x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ -x_1 + 6x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que $I = \{x_1, x_2, x_3\}$ est une base réalisable de ce programme. Est-elle optimale? Si oui donner la solution de base réalisable optimale associée. Sinon utiliser la méthode des tableaux du simplexe pour déterminer une solution optimale du programme linéaire (P) en partant de cette base.

Exercice 3 (5 points)

Soient $G = (X, U)$ un graphe orienté d'ordre n , M la matrice d'adjacence associée et I la matrice identité d'ordre n. On pose $N = (I + M)^{n-1}$.

1. Montrer que $I + M + M^2 + \ldots + M^{n-1} = N$.

Scanné avec CamScanner

2. Montrer que $N_{ij} = 1$ si et seulement s'il existe un chemin allant de i à j de longueur au plus égale à $n-1$. Déduire que G est fortement connexe si et seulement si $N_{ij} = 1$ pour tous i et j.

Exercice 4 (5 points) Une université veut relier six de ses terminaux situés dans différents bâtiments du campus. Les distances en mètres, entre ces différents terminaux sont données dans le tableau suivant.

	Terminal 1	Terminal 2	Terminal 3	Terminal 4	Terminal 5	Terminal 6
Terminal 1		120	92	265	149	194
Terminal 2	120		141	170	93	164
Terminal 3	92	141		218	103	116
Terminal 4	265	170	218		110	126
Terminal 5	149	93	103	110		72
Terminal 6	194	164	116	126	72	

Distances séparant les différents terminaux (en mètre)

Ces terminaux sont à relier par des câbles souterrains. On suppose que le coût de connexion de deux terminaux est proportionnel à la distance les séparant. Déterminer les connexions à installer afin de minimiser les coûts d'installation.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB Année Universitaire : 2018-2019

SESSION 1 D'INTRODUCTION A LA RECHERCHE OPERATIONNELLE

Niveau :Licence 3 Durée : 2H

Documents non autorisés

EXERCICE 1(6points)

Le gérant d'un hôtel, en vue d'obtenir une étoile au GNT (Guide National du Tourisme), doit procéder à un réaménagement.

	Douche	Baignoire
Chambre a un lit	6000 FCFA	8000 FCFA
Chambre a deux lits	9000 FCFA	11000 FCFA

La proportion des chambres a un lit doit être supérieure ou égale à 60 pour-cent.
La proportion des chambres a une douche doit être supérieure ou égale à
25 pour-cent et inférieure ou égale à 75 pour-cent.
Pendant les périodes de cure aucun client ne doit se restaurer en dehors de l'hôtel, et le restaurant de l'hôtel a exactement 120 places.
En supposant que les dépenses de fonctionnement sont constantes, le but ultime du gérant est de maximiser sa recette.
Ecrire la forme canonique de ce problème.

EXERCICE 2(7points)

Pour réaménager un certain hôtel, il est nécessaire de faire passer un certain nombre de corps de métier, maçon, électricien, plombier, carreleur, plâtrier, chauffagiste, etc. Leur emploi du temps et les contraintes inhérentes à la construction conduisent à un certain nombre de tâches listées ci-dessous :

Tournez la feuille S.V.P.

Scanné avec CamScanner

Tâches	Tâches précédentes	Durée (en semaines)	Tâches immédiatement antérieures	Tâches suivantes
A	-	1	-	D, F, G
B	-	2	-	K
C	-	5	-	E, J
D	A	3	A	H, I, K
E	C	8	C	J
F	A	15	A	-
G	A	4	A	I
H	A, D	7	D	I
I	A,D, H, G, J	12	H, G, J	-
J	C, E, K	9	E, K	I
K	B, D	2	B, D	J

1. Construire le graphe MPM associé à ce projet.
2. Déterminer les calendriers au plus tôt (T_i), au plus tard (T_i^*), les tâches critiques, la durée totale du projet, les marges totales ($MT(i)$) et libres ($ML(i)$). NB : mettez les calendriers au plus tôt (T_i), au plus tard (T_i^*), les marges totales ($MT(i)$) et libres ($ML(i)$) dans un tableau.
3. Construire le graphe PERT du projet (il n'est pas demandé de déterminer de nouveau les calendriers).

EXERCICE 3(7points)

On considère le programme linéaire (P) suivant :

$$(P)\begin{cases} \max Z = 500x_1 + 300x_2 + 200x_3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 400 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5000 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 1200 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Résoudre le programme (P) par la méthode du simplexe.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB Année Universitaire : 2018-2019

SESSION 2 D'INTRODUCTION A LA RECHERCHE OPERATIONNELLE

Niveau :Licence 3 Durée : 2H

Documents non autorisés

Exercice 1(10points)

1) On considère le programme linéaire (PL) ci-dessous :

$$\begin{cases} \min Z = cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, avec $\text{rang}(A) = m < n$.

On dispose d'une base réalisable B avec I (respectivement J) les ensembles des indices des variables de base (respectivement hors base) associées. On note N la sous matrice de A associée aux variables hors base.

La forme canonique de (PL) par rapport à B est :

$$\begin{cases} \min Z = \widehat{Z} + \sum_{j \in J} x_j \widehat{c}_j \\ x_i + \sum_{j \in J} \widehat{a}_{ij} x_j = \widehat{b}_i \quad i \in I \\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) Expliciter les coefficients $\widehat{a}_{ij}$, $\widehat{b}_i$ et $\widehat{c}_j$ pour tout $i \in I$, $j \in J$.

b) Montrer que s'il existe $k \in J$ tel que $\widehat{c}_j < 0$ avec $\widehat{a}_{ik} \leq 0$ pour tout $i \in I$, alors le programme (PL) est non borné; c'est-à-dire que la valeur optimale est infinie.

2) Résoudre par la méthode des deux phases du simplexe le programme linéaire ci-dessous.

$$(P) \begin{cases} \min Z = x_1 + x_2 \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ -3x_1 + x_2 \leq 3 \\ -3x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

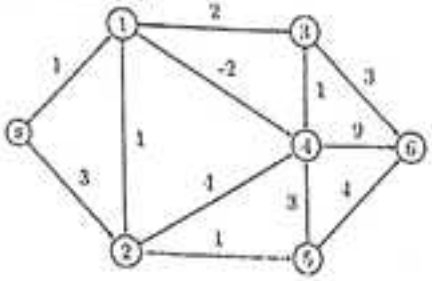
NB : lors de la résolution du programme linéaire ci-dessus, on prendra soin d'utiliser les remarques de l'initialisation de l'algorithme du simplexe.

Tournez la feuille S.V.P.

(Scanné avec CamScanner

Exercice 2(10 points)

1) Enoncer l'algorithme de Bellman pour trouver les plus longs chemins.
2) Appliquer l'algorithme de Bellman à la recherche des plus longs chemins issus de s dans le réseau suivant :



Scanné avec CamScanner

Année 2015 - 2016

INITIATION AUX BASES DE DONNEES - L3

COMPOSITION - Octobre 2016

Exercice 1 : Questions de cours (3 pts)

a) Qu'est ce que la normalisation ?
b) Dans un modèle Entité-Association, peut-on avoir des clés étrangères ?
c) Donnez la syntaxe d'ajout d'une colonne dans 1 table
d) Définissez les différents opérateurs relationnels de base
e) Quelles sont les instructions SQL du LMD (Langage de Manipulation de Données)

Exercice 2 : Modèle Entité - Association (7 pts)

Enoncé :
On se propose de représenter le système d'information d'une bibliothèque :

- La bibliothèque enregistre chaque lecteur à qui elle donne un numéro de lecteur. Elle lui prend son nom et son adresse. Le lecteur peut éventuellement être membre d'une société adhérente. On enregistre alors l'identification de cette société.
- Un lecteur peut emprunter plusieurs livres chaque jour. A chaque prêt, on associe une « date de retour au plus tard ».
- Un lecteur appartient à un « type de lecteur ». Ce type lui permet d'avoir ou non accès à certaines catégories de livres.
- La durée du prêt dépend de la catégorie du livre et du type de lecteur. Elle est la même pour tous les livres d'une catégorie donnée empruntés par un quelconque lecteur d'un type donné.
- Un livre est caractérisé par son numéro d'inventaire. Il est nécessaire de connaître sa catégorie, le nom de son auteur, son éditeur, ainsi que le nombre de ses différents exemplaires disponibles. L'édition, lorsqu'elle existe, est également à connaître.
- La catégorie d'un livre se repère par un numéro et possède un libellé. Il en est de même pour le type de lecteur.
- Une société adhérente possède un nom et une adresse ; elle s'engage à envoyer un minimum de 500 lecteurs.

Donner le schéma entité-association et les éventuels contraintes d'intégrité correspondant à cet énoncé.

Exercice 3 : La normalisation (3 pts)

Enoncé: Une base de données d'une petite clinique privée a les données suivantes:

Scanné avec CamScanner

id. d'inscription pharmacie associé à un patient. Chaque patient à un numéro inscription à la pharmacie de la clinique pour ses médicaments

Patient : le nom de famille d'un patient admis à la clinique (supposés tous distinct)

Docteur : le nom de docteur travaillant à la clinique

Médicament : le nom de marque d'un médicament

Qte : la quantité d'un médicament prescrite à un patient et les 4 Dfs :

- (1) NIP → Patient
- (2) Patient → Docteur
- (3) NIP, Médicament → Docteur
- (4) Patient, Médicament → Qté

A- Montrer que la DF (3) est redondante (déductible des autres DFs)
B- En déduire un schéma de base de données en 3FN pour cette clinique.

Exercice 4 : Le langage SQL (7 pts)

Enoncé : Soit la base de données relationnelle de schéma suivant :

REPRESENTANT (Num_rep, Nom_rep, Ad_rep, CP_rep, Vil_rep, Age_rep)

COUVRIR (#Num_rep, #Code_dep)

DEPARTEMENT (Code_dep, nom_dep, Nom_chef_secteur)

CLIENT (Code_clt, Nom_clt, #Num_rep, #Num_cat)

CATEGORIE_TARIFAIRE (Num_cat, Nom_cat, Remise)

Exprimer en SQL :

1) Afficher la liste des clients appartenant à la catégorie tarifaire n°1, classée par ordre alphabétique

2) Afficher la liste des clients (code, nom de client) rattachés au représentant YAPI

3) Afficher la liste des clients bénéficiant d'une remise de 10%

4) Afficher la liste des représentants (Numéro et nom) dépendant du chef de secteur KWAKOU

5) Insérez la catégorie tarifaire ayant les caractéristiques suivantes
   - Num_cat : 5
   - Nom_cat : PME
   - Remise : 15%

6) Supprimez de la table CLIENT tous les clients du représentant 2

7) Remplacez par 'HOUPHOUET' le nom des chefs de secteur des départements dont le code est compris entre 91 et 94

Bonne Chance à tous

Scanné avec CamScanner

UFR MI

Année 2015 - 2016

COMPOSITION L3 - 2 heures

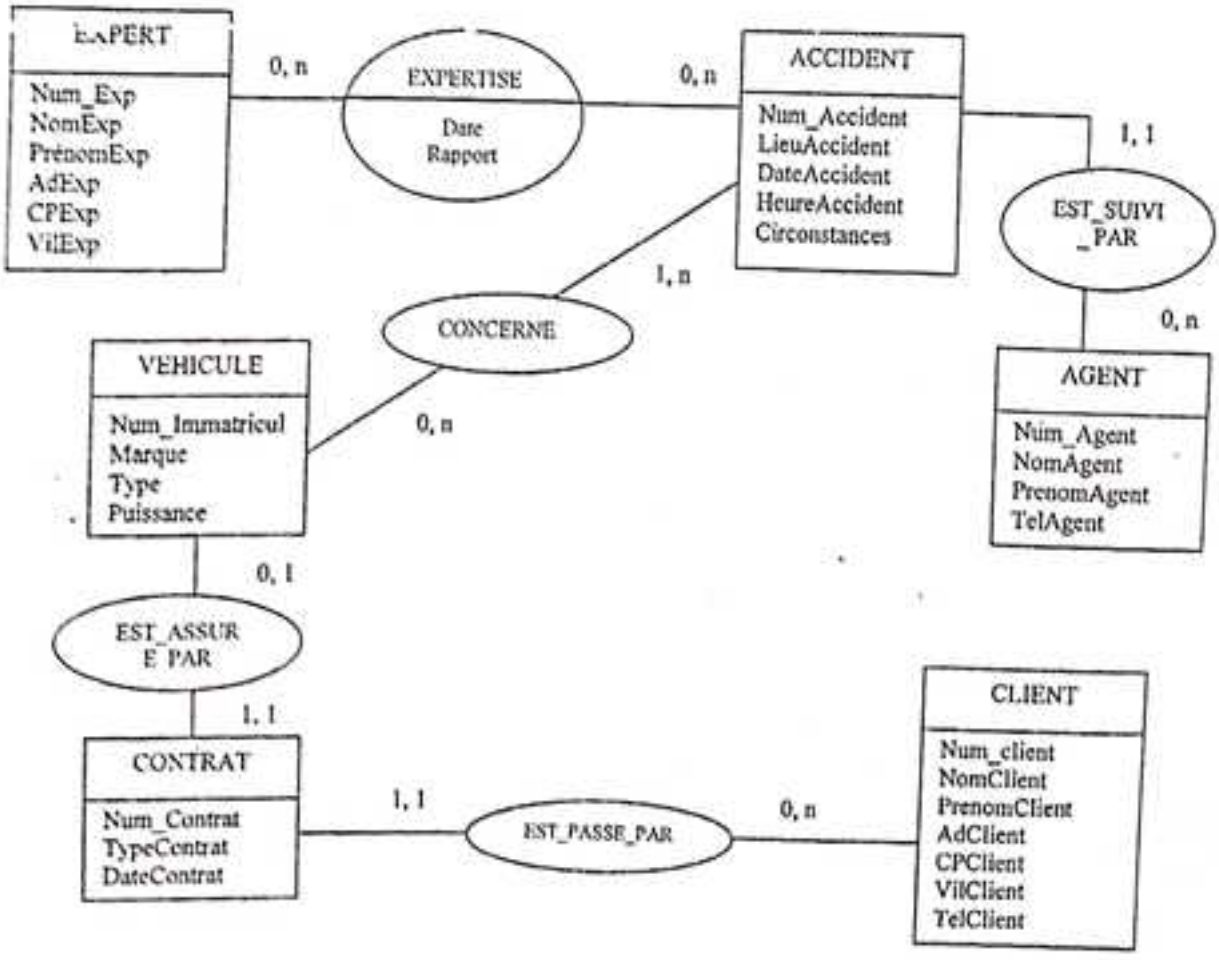
INITIATION AUX BASES DE DONNEES

Exercice 1 : Questions de cours (5 pts)

- Qu'est ce qu'un SGBD (0.5pt)
- Enumérer 4 fonctions fondamentales d'un SGBD (1pt)
- Enumérer les différents types de SGBD qui existent (1pt)
- Donner la définition de chacune des 3 premières formes normales (1.5pt)
- Donner la définition de SQL ainsi que son rôle (1pt)

Exercice 2 : Passage au relationnel (6 pts)

Enoncé : Soit le modèle entité association suivant :



(scanné avec CamScanner)

Le modèle traite de la gestion d'accidents de voiture de la compagnie d'assurance ASSURETOUT. Un accident est expertisé une ou plusieurs fois. Il est suivi par un agent et un seul. Un accident concerne des véhicules assurés ou pas par ASSURETOUT. Un véhicule a ou n'a pas de contrat d'assurance chez ASSURETOUT. Le contrat d'assurance est passé par un client et un seul et concerne une voiture et une seule.

Question : Transcrire le modèle Entité-Association ci-dessus dans le schéma relationnel.

NB : Vous préciserez les clés primaires des relations en les soulignant ainsi que les clés étrangères en les signalant par un #.

Dans votre schéma relationnel, chaque relation doit être spécifiée de la manière suivante : *Nom* (*att1*,...,*attn*) où *Nom* est le nom de la relation et *att1*, ..., *attn* sont des noms d'attributs.

Exercice 3 : Le langage SQL (9 pts)

Enoncé : Soit la base de données relationnelle de schéma suivant :

On considère le Schéma de la base de données CINEMA :

- FILM (NUMF, TITRE, GENRE, ANNEE, DUREE, BUDGET, NUM_REALISATEUR, SALAIRE_REAL)
- DISTRIBUTION (#NUMF, #NUMA, ROLE, SALAIRE)
- PERSONNE (NUMP, PRENOM, NOM, DATENAIS)
- ACTEUR (NUMA, NUM_AGENT, SPECIALITE, TAILLE, POIDS)

Remarques importantes

- L'attribut NUM_REALISATEUR de la relation FILM correspondant à l'identifiant d'une PERSONNE.
- L'attribut NUMA de la relation ACTEUR correspondant à l'identifiant d'une PERSONNE
- L'attribut NUM_AGENT de la relation ACTEUR correspond à l'identifiant d'une PERSONNE.

Les attributs NUM_REALISATEUR, NUMA, NUM_AGENT et NUMP sont du donc du même domaine fonctionnel

Exprimer en SQL :

1) Retrouver la liste de tous les films
2) Retrouver la liste des films dont la longueur dépasse 180 min

Scanné avec CamScanner

3) Donner la liste de tous les genres de film
4) Donner le nombre de films par genre
5) Trouver le/les titre(s) et l'/les année(s) du/des film(s) le(s) plus long(s)
6) Trouver le nom des personnes qui ne sont ni agents, ni acteurs et ni réalisateurs
7) Donner le nom et le prénom des réalisateurs qui ont joué dans au moins un de leurs propres films

Bonne Chance à tous

(Scanné avec CamScanner

UFR MI

Année 2016 - 2017

COMPOSITION L3 - 2 heures

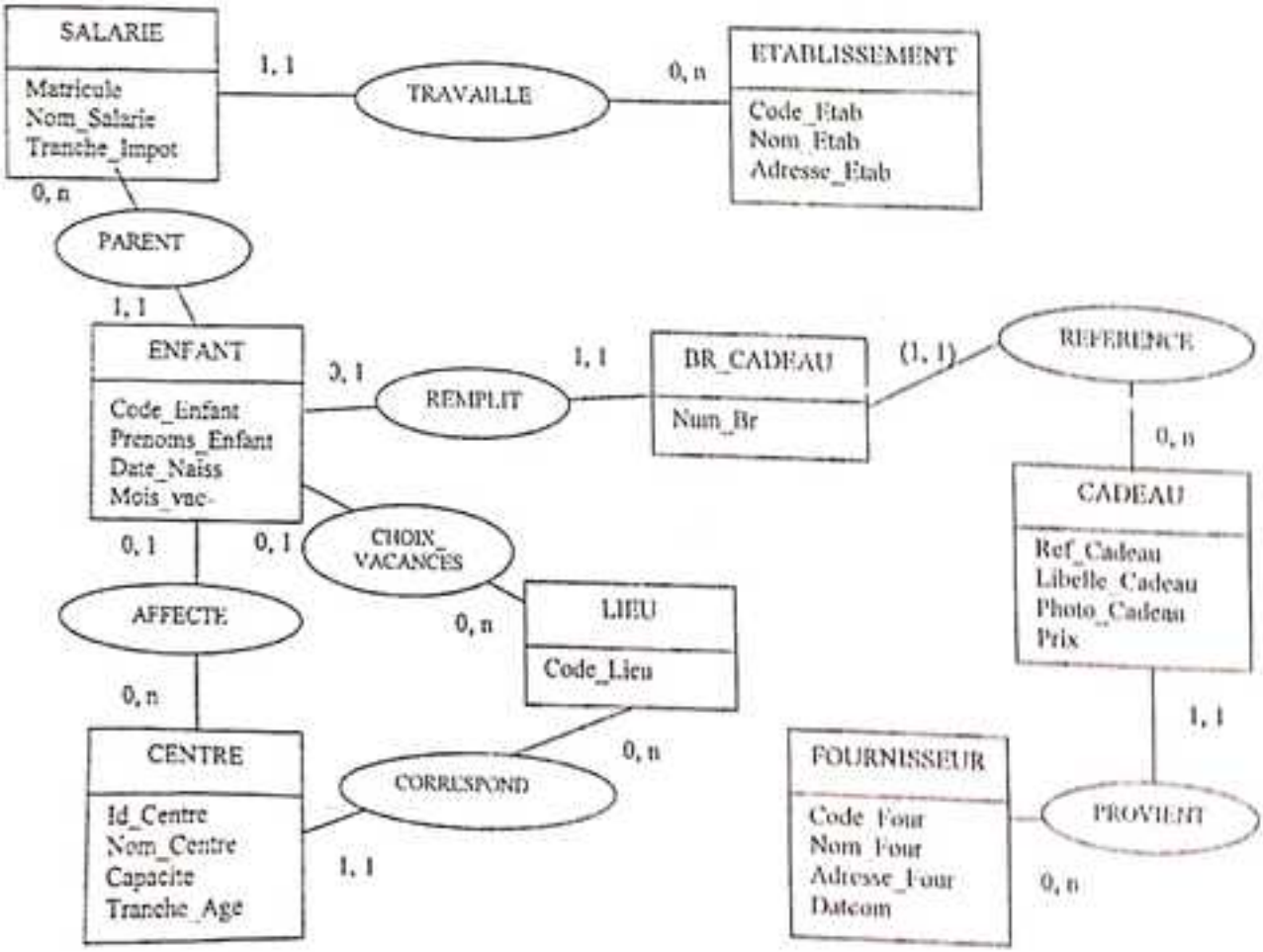
INITIATION AUX BASES DE DONNEES

Exercice 1 : Questions de cours (5 pts)

a. Qu'est-ce que la normalisation ?
b. Dans un modèle Entité-Association, peut-on avoir des clés étrangères ?
c. Donnez la syntaxe d'ajout d'une colonne dans 1 table
d. Définissez les différents opérateurs relationnels de base
e. Quelles sont les instructions SQL du LMD (Langage de Manipulation de Données)

Exercice 2 : Passage au relationnel (6 pts)

Enoncé : Soit le modèle entité association suivant :



(Scanné avec CamScanner

Une importante entreprise de la région du GONTOUGO, répartie en plusieurs établissements implantés géographiquement sur des communes distinctes, dispose d'un comité d'entreprise (CE) avec un service enfance qui gère, notamment, les cadeaux de Noël ainsi que les centres de vacances destinés aux enfants du personnel.
Le processus de gestion des cadeaux de noël comporte les étapes suivantes. Le CE sélectionne en cours d'année un certain nombre de jouets ou cadeaux divers, auprès de plusieurs fournisseurs, et édite un catalogue qui est mis à disposition des salariés. Quelques mois avant noël, le CE expédie à chaque parent salarié de l'entreprise un bulletin de réservation par enfant. Ce bulletin de réservation est renvoyé au CE avec le choix du cadeau. Après réception de toutes les réponses, le CE effectue les commandes aux fournisseurs et un chiffrage prévisionnel du coût. Quelques jours avant noël, les cadeaux sont répartis, pour la distribution, dans les déférentes permanences du CE. Le salarié se rend alors dans la permanence de son établissement pour prendre possession des cadeaux choisis.
La gestion du centre de vacances pour enfants requiert la réalisation des tâches suivantes. Au printemps, le CE édite un bulletin de réservation qui est envoyé aux parents. Le bulletin de réservation est renvoyé auCE avec le choix du mois et du lieu de vacances (mer, montagne ou campagne), qui sont codifiés. Chaque enfant a théoriquement droit à un séjour. Le CE, qui dispose de plusieurs centres de vacances, effectue la répartition des enfants en fonction du choix du lieu et du mois ainsi que de la tranche d'âge de l'enfant.
La réservation définitive est renvoyée aux parents avec la facturation du séjour, calculée en fonction du tarif du centre choisi et de la tranche d'imposition des parents qui détermine éventuellement un abattement.

Question : Transcrire le modèle Entité-Association ci-dessus dans le schéma relationnel.
NB : Vous préciserez les clés primaires des relations en les soulignant ainsi que les clés étrangères enles signalant par un #.
Dans votre schéma relationnel, chaque relation doit être spécifiée de la manière suivante : *Nom*(*att1*,...,*attn*) où *Nom* est le nom de la relation et *att1*, ..., *attn*sont des noms d'attributs.

Exercice 3 : Le langage SQL (9 pts)

Enoncé : Soit la base de données relationnelle de schéma suivant :

AGENCE (Num_Agence, Nom, Ville, Actif)
CLIENT (Num_Client, Nom, Ville)
COMPTE (Num_Compte, #Num_Agence, #Num_Client, Solde)
EMPRUNT (Num_Emprunt, #Num_Agence, #Num_Client, Montant)

Scanné avec CamScanner

Exprimer en SQL :

1) Les noms des agences ayant des comptes-clients

2) Les noms des Clients ayant un compte à "YAMOUSSOUKRO"

3) Les noms des Clients ayant un compte à l'Agence "Prestige" et le nom de la ville où ils habitent

4) Les noms des Clients ayant un compte dans une agence où "Claude" a un compte

5) Les noms des Agences ayant un actif plus élevé que toute agence d'"ABIDJAN"

6) Les noms des Clients ayant un compte dans au-moins une agence d'"ABIDJAN"

7) Les noms des Emprunteurs de l'agence "Prestige" classés par ordre alphabétique

8) Donnez le Solde moyen des comptes-clients de chaque agence

9) Insérer le n-uplet « 147202, "Houphouët", "YAMOUSSOUKRO" » dans la relation CLIENT

10) Diminuez l'emprunt de tous les clients habitant "ADZOPE" de "5%"

11) Fermez les comptes de "Coulibaly"

Bonne Chance à tous

Scanné avec CamScanner

UFR MI

Année 2016 - 2017

COMPOSITION L3 - 2ème Session - 2 heures

INITIATION AUX BASES DE DONNEES

Exercice 1 : Questions de cours

a. Qu'est ce que la normalisation (1 pt)

b. Enumérer 4 rôles ou fonctions d'un SGBD (0,75 pt)

c. Enumérer les différents types de SGBD qui existent (0,75 pt)

d. Donner la définition de chacune des 3 premières formes normales (1.5pt)

e. Donner la syntaxe d'ajout d'une colonne dans 1 table (1pt)

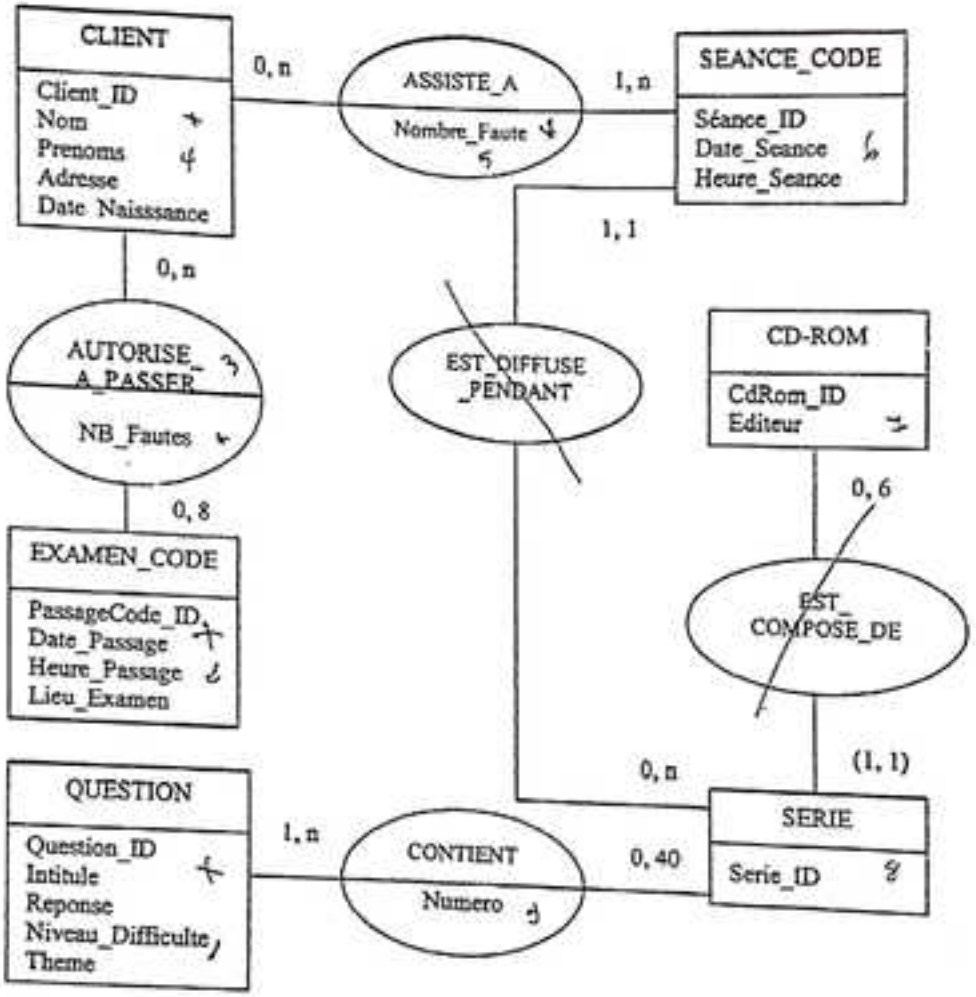
Exercice 2 : Passage au relationnel

Enoncé : Une auto-école souhaite construire une base de données pour gérer les examens théoriques du code de la route de ses élèves. Chaque élève est identifié par un numéro unique et est caractérisé par un nom, un prénom, une adresse et une date de naissance. Chaque élève assiste à plusieurs séances de code (autant qu'il le souhaite). Chaque séance est caractérisée par une date et une heure. A chaque séance de code, le directeur de l'auto-école choisit une série de questions sur un CD-ROM. Chaque CD-ROM est identifié par un numéro et est caractérisé par un nom d'éditeur. Chaque CD-ROM est composé de 6 séries maximum, numérotées de 1 à 6. Chaque série est composée de 40 questions maximum. Chaque question est identifiée par un intitulé et est caractérisée par une réponse, un niveau de difficulté et un thème. Une même question peut apparaître dans plusieurs séries avec un numéro d'ordre pour chaque série ; par exemple une même question peut apparaître comme question N° 2 dans la série 5 du CD-ROM 15 et comme question N° 12 dans la série 3 du CD-ROM 4. Une même série peut être projetée plusieurs fois à des séances différentes. Lorsqu'un élève assiste à une séance, il obtient le nombre de fautes (une note sur 40) qu'il a fait pour la série passée pendant la séance.
Lorsqu'un élève a obtenu, au cours des quatre dernières séances auxquelles il a assistées, un nombre de fautes inférieur ou égal à 5, le directeur de l'auto-école l'autorise à passer l'examen théorique du code de la route à une date donnée (un seul examen pour une date donnée). L'auto-école ne peut présenter que 8 élèves maximum à chaque date d'examen. Les élèves ayant obtenu plus de 5 fautes à

Scanné avec CamScanner

l'examen sont recalés et doivent assister de nouveau à des séances de code avant de pouvoir se représenter à l'examen.

Le modèle entité association obtenu est le suivant :



Question : Transcrire le modèle Entité-Association ci-dessus dans le schéma relationnel.

NB : Vous préciserez les clés primaires des relations en les soulignant ainsi que les clés étrangères en les signalant par un #.

Dans votre schéma relationnel, chaque relation doit être spécifiée de la manière suivante : *Nom (att1,...,attn)* où *Nom* est le nom de la relation et *att1, ..., attn* sont des noms d'attributs.

Scanné avec CamScanner

Exercice 3 : Le langage SQL

Enoncé : Soit la base de données relationnelle de schéma suivant :

Emp(NumE, NomE, Fonction, NumS, Embauche, Salaire, Comm, #NumD)
Dept(NumD, NomD, Lieu)

Décrivant le fait que :
Emp : relation des employés avec NumE (Numéro employé), NomE (Nom employé), Fonction, NumS (Numéro du supérieur hiérarchique), Embauche (date d'embauche), Salaire, Comm (montant commision), NumD (Numéro du département)

Dept : Un département est décrit par son NumD (Numéro du département), NomD (Nom du département), lieu

Exemple :

NumD	NomD	Lieu
1	Droit	Abidjan
2	Commerce	Bouaké

NumE	NomE	Fonction	NumS	Embauche	Salaire	Comm	NumD
001A	SEKA	Président		10/10/1979	10 000	0	
002B	KASSI	Doyen	001A	05/03/1999	5 000	0	1
003C	ALCAPONE	Commercial	001A	18/10/2006	4 000	100	2
005E	NAZAIRE	Stagiaire	002B	15/12/2007	500	0	1

Exprimer en SQL :

1) Donnez la liste des employés ayant une commission supérieure à zéro et classé par commission décroissante

2) Donnez le nom des personnes embauchées depuis le 01/09/2006

3) Donnez la liste des employés (nom, date d'embauche et Numéro département) travaillant à Abidjan

4) Donnez la liste des subordonnés (numéro et nom) de "KASSI"

5) Donnez la moyenne des salaires

6) Donnez le nom des employés ayant 1 commission égale à zéro

7) Donnez la liste des employés (nom, fonction et salaire) gagnant plus que la moyenne des salaires de l'entreprise

(7pts)

Bonne Chance à tous

Scanné avec CamScanner

UFR MI

Année 2017 - 2018

COMPOSITION L3 - Durée : 2 heures

INITIATION AUX BASES DE DONNEES

Exercice 1 : Questions de cours

- Qu'est ce qu'un SGBD
- Enumérer 4 fonctions fondamentales d'un SGBD
- Enumérer les différents types de SGBD qui existent
- Donner la définition de chacune des 3 premières formes normales
- Donner la définition de SQL ainsi que son rôle

Exercice 2 : Normalisation

Soit un schéma de bases de données contenant les relations suivantes :

BUREAU (NumBureau, NumTelephone, Taille)

avec FBureau = {NumBureau→NumTelephone,Taille; NumTelephone→NumBureau; }

OCCUPANT (NumBureau, PersonneID)

avec FOccupant={NumBureau→PersonneID }

MATERIEL (NumBureau, NumPC) avec FMateriel={NumPC→NumBureau }

Les contraintes ci-dessous sont-elles vérifiées par ce schéma de bases de données? Si la réponse est positive, expliquez pourquoi. Si la réponse est négative, indiquez quelle(s) dépendance(s) fonctionnelle(s) il faut ajouter/supprimer ou modifier pour que la contrainte soit vérifiée.

(a) "Un bureau peut contenir plusieurs postes téléphoniques."

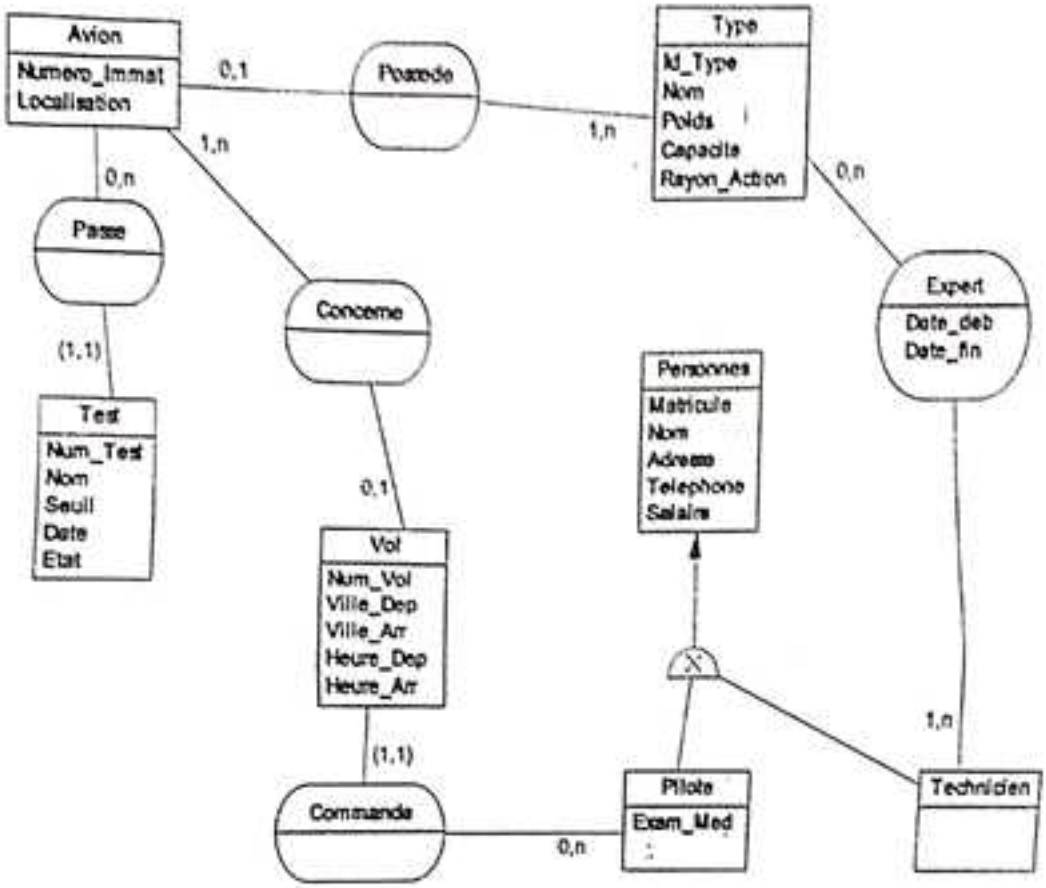
(b) "Il y a une et une seule personne par bureau."

(c) "Un bureau contient un seul ordinateur."

Scanné avec CamScanner

Exercice 3 : Passage au Relationnel

Enoncé : Soit le modèle entité association suivant :



Question : Transcrire le modèle Entité-Association ci-dessus dans le schéma relationnel.

NB : Vous préciserez les clés primaires des relations en les soulignant ainsi que les clés étrangères en les signalant par un #.

Dans votre schéma relationnel, chaque relation doit être spécifiée de la manière suivante : *Nom (att1,...,attn)* où *Nom* est le nom de la relation et *att1, ..., attn* sont des noms d'attributs.

Scanné avec CamScanner

Exercice 4 : Le langage SQL

Enoncé : Soit la base de données relationnelle de schéma suivant :

AGENCE (Num_Agence, Nom, Ville, Actif)

CLIENT (Num_Client, Nom, Ville)

COMPTE (Num_Compte, Num_Agence, Num_Client, Solde)

EMPRUNT (Num_Emprunt, Num_Agence, Num_Client, Montant)

Avec :

- Num_Agence (numérique) indiquant le Numéro de l'Agence
- Num_Client (numérique) indiquant le Numéro du Client
- Num_Compte (varchar2(25)) indiquant le Numéro de Compte

Exprimer en SQL :

1) Supprimez les comptes de "Coulibaly"

2) Donnez la liste des noms des agences ayant des comptes-clients

3) Donnez les noms des Clients ayant un compte ainsi que le nom de la ville où ils habitent

4) Donnez les Nom des Clients ayant un compte à "YAMOUSSOUKRO"

5) Donnez la liste des noms des Clients ayant un compte dans une agence où "Claude" a un compte

6) Donnez la liste des noms des Emprunteurs de l'agence "Paris-Rambuteau" classés par ordre alphabétique

7) Donnez le Solde moyen des comptes-clients de chaque agence

8) Diminuez l'emprunt de tous les clients habitant "BOUAKE" de "5%"

9) Donnez le nom des Clients ayant un compte dans au-moins une agence d'"ABIDJAN"

Bonne Chance à tous

Scanné avec CamScanner

UFR MI

Année 2017 - 2018

COMPOSITION L3 - Durée : 2 heures

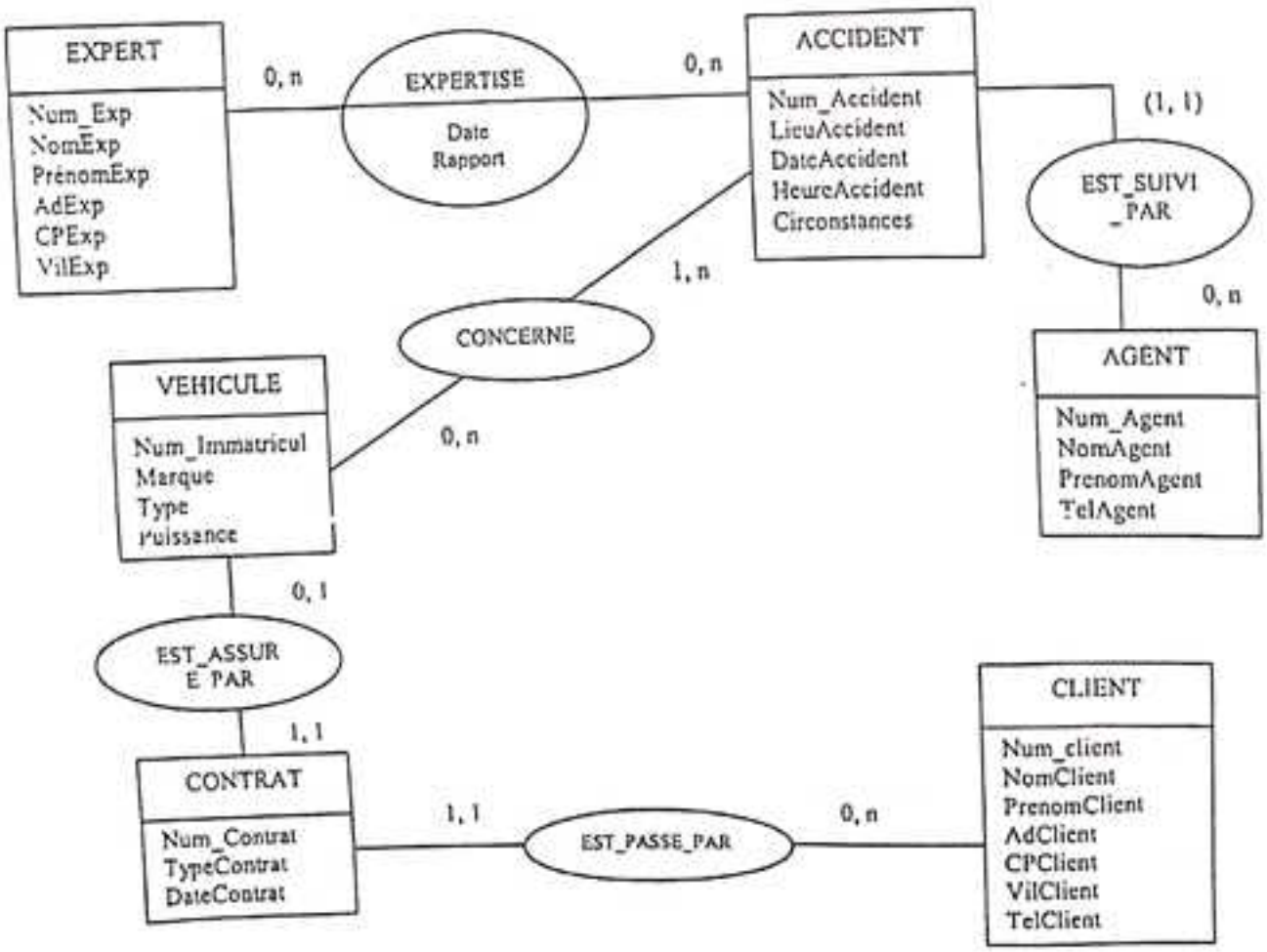
INITIATION AUX BASES DE DONNEES

Exercice 1 : Questions de cours (5 pts)

- Qu'est ce qu'un SGBD (0.5pt)
- Enumérer 4 fonctions fondamentales d'un SGBD (1pt)
- Enumérer les différents types de SGBD qui existent (1pt)
- Donner la définition de chacune des 3 premières formes normales (1.5pt)
- Donner la définition de SQL ainsi que son rôle (1pt)

Exercice 2 : Passage au relationnel (7 pts)

Enoncé : Soit le modèle entité association suivant :



Scanné avec CamScanner

Le modèle traite de la gestion d'accidents de voiture de la compagnie d'assurance ASSURETOUT. Un accident est expertisé une ou plusieurs fois. Il est suivi par un agent et un seul. Un accident concerne des véhicules assurés ou pas par ASSURETOUT. Un véhicule a ou n'a pas de contrat d'assurance chez ASSURETOUT. Le contrat d'assurance est passé par un client et un seul et concerne une voiture et une seule.

Question : Transcrire le modèle Entité-Association ci-dessus dans le schéma relationnel.
NB : Vous préciserez les clés primaires des relations en les soulignant ainsi que les clés étrangères en les signalant par un #.
Dans votre schéma relationnel, chaque relation doit être spécifiée de la manière suivante : *Nom* (att1,...,attn) où *Nom* est le nom de la relation et att1, ..., attn sont des noms d'attributs.

Exercice 3 : Le langage SQL (8 pts)

Enoncé : Soit la base de données relationnelle de schéma suivant :

On considère le Schéma de la base de données CINEMA :

- FILM (NUMF, TITRE, GENRE, ANNEE, DUREE, BUDGET, NUM_REALISATEUR, SALAIRE_REAL)
- DISTRIBUTION (#NUMF, #NUMA, ROLE, SALAIRE)
- PERSONNE (NUMP, PRENOM, NOM, DATENAIS)
- ACTEUR (NUMA, NUM_AGENT, SPECIALITE, TAILLE, POIDS)

Remarques importantes

- L'attribut NUM_REALISATEUR de la relation FILM correspondant à l'identifiant d'une PERSONNE.
- L'attribut NUMA de la relation ACTEUR correspondant à l'identifiant d'une PERSONNE
- L'attribut NUM_AGENT de la relation ACTEUR correspond à l'identifiant d'une PERSONNE.

Les attributs NUM_REALISATEUR, NUMA, NUM_AGENT et NUMP sont du donc du même domaine fonctionnel

Exprimer en SQL :

1) Retrouver la liste de tous les films
2) Retrouver la liste des films dont la longueur dépasse 180 min

Scanné avec CamScanner

3) Donner la liste de tous les genres de film
4) Donner le nombre de films par genre
5) Trouver le/les titre(s) et l'/les année(s) du/des film(s) le(s) plus long(s)
6) Trouver le nom des personnes qui ne sont ni agents, ni acteurs et ni réalisateurs
7) Donner le nom et le prénom des réalisateurs qui ont joué dans au moins un de leurs propres films

Bonne Chance à tous

Scanné avec CamScanner

UFR MI

Année 2018 - 2019

COMPOSITION L3 - 2 heures

INITIATION AUX BASES DE DONNEES

Exercice 1 : Questions de cours (5 pts)

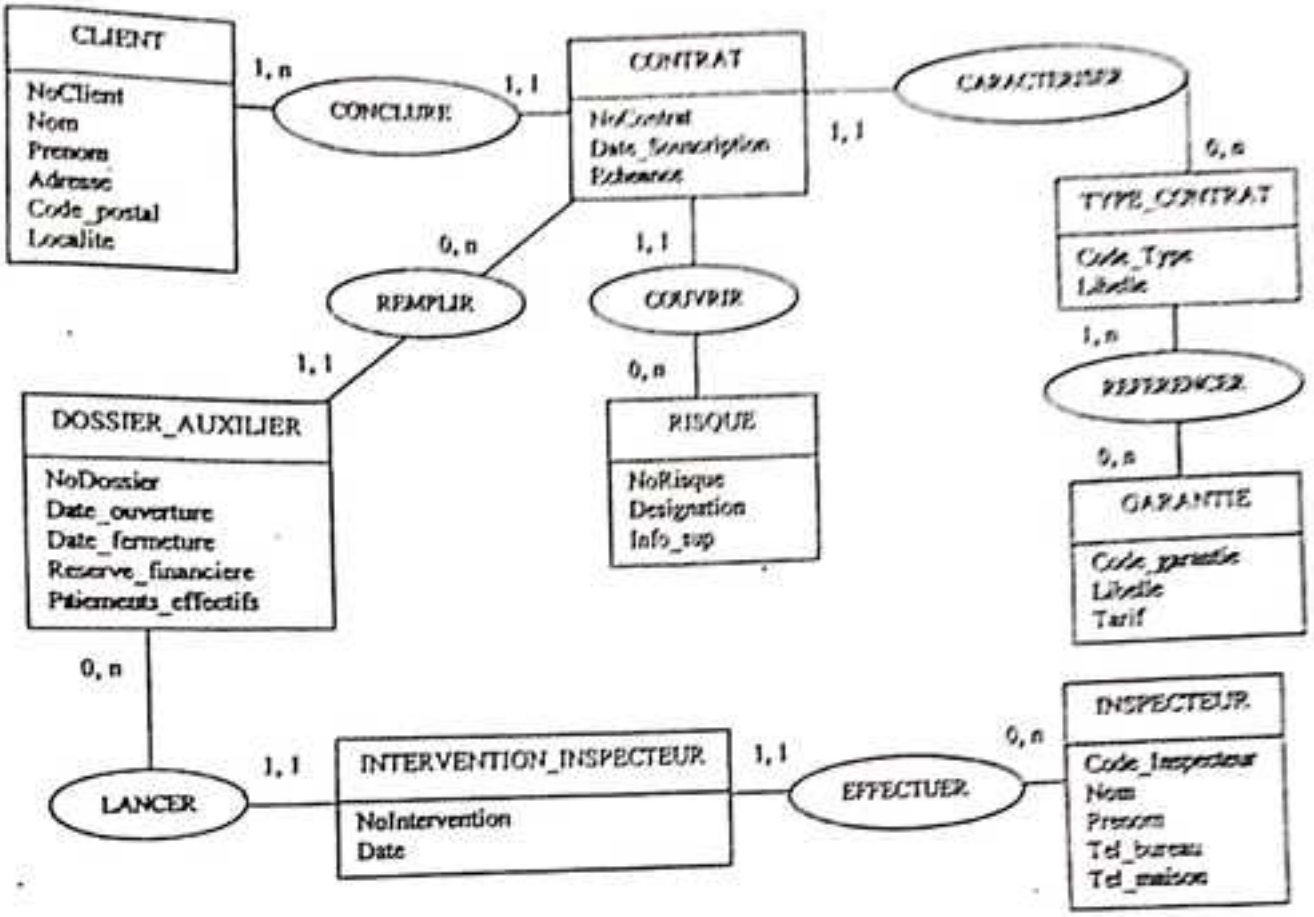
a. Qu'est-ce qu'un SGBD (0.5pt)
b. Dans un modèle Entité-Association, peut-on avoir des clés étrangères ? (0.5 pt)
c. Soit la commande MySql : *USE NomDeLaBase*. Que permet-elle de faire ? Si la commande est réussie, quel est le message retourné par MySql ? (2 pts)
d. Soit la commande MySql : *SHOW TABLES*. Que fait-elle ? (1 pt)
e. Donner la définition de SQL ainsi que son rôle (1 pt)

Exercice 2 : Passage au relationnel (6 pts)

Enoncé : Le modèle entité association suivant (voir page suivante) représente de façon très simplifiée la gestion d'une compagnie d'assurances.

Question : Transcrire le modèle Entité-Association ci-dessus dans le schéma relationnel.
NB : Vous préciserez les clés primaires des relations en les soulignant ainsi que les clés étrangères en les signalant par un #.
Dans votre schéma relationnel, chaque relation doit être spécifiée de la manière suivante : *Nom* (*att1*,...,*attn*) où *Nom* est le nom de la relation et *att1*, ..., *attn* sont des noms d'attributs.

Scanné avec CamScanner



Exercice 3 : Le langage SQL (9 pts)

Enoncé : Soit la base de données relationnelle de schéma suivant :

REPRESENTANT (Num_rep, Nom_rep, Adresse_rep, Ville_rep, Age_rep)
COUVRIR (#Num_rep, #Code_dep)
DEPARTEMENT (Code_dep, nom_dep, chef_secteur)
CLIENT (Code_clt, Nom_clt, #Num_rep, #Num_cat)
CATEGORIE_TARIFAIRE (Num_cat, Nom_cat, Remise)

Exprimer en SQL :

1) Affichez la liste des clients appartenant à la catégorie tarifaire 1, classée par ordre alphabétique
2) Affichez la liste des clients (code, nom de client) rattachés au représentant "KOFFI"

Scanné avec CamScanner

3) Affichez la liste des clients bénéficiant d'une remise de 10%

4) Affichez la liste des représentants (Numéro et nom) dépendant du chef de secteur "OUATTARA"

5) Donnez la liste des représentants (numéro, nom et adresse) dont l'âge est plus que la moyenne des âges de l'entreprise

6) Donnez la somme des âges par département

7) Donnez la moyenne des âges par département

8) Donnez la liste des Clients (code et nom) ayant le même représentant que "Claude"

9) Insérez un nouveau représentant avec des valeurs de votre choix

10) Remplacez par 'HOUPHOUET' le nom des chefs de secteur des départements dont le code est compris entre 91 et 94

11) Supprimez de la table CLIENT tous les clients du représentant 2

Bonne Chance à tous

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet Boigny
UFR Mathématiques et Informatique
Année universitaire : 2017 -2018

LICENCE 3 – Mention : Mathématiques - Parcours : Mathématiques et Applications - UE : Topologie
Exercices pour Travaux Dirigés

Exercice 1. *Soit (X, d) où d est la distance discrète. Quelles sont les suites de Cauchy pour cette distance ? L'espace (X, d) est-il complet ?*

Exercice 2. *Soient X et Y deux espaces métriques et $f : X \to Y$.*

(a) *Montrer que si f est uniformément continue, alors elle conserve les suites de Cauchy.*

(b) *On suppose f est uniformément continue, bijective et de réciproque continue. Montrer que si Y est complet, X l'est aussi.*

Exercice 3. *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés et g une applications linéaire de E dans F.*

(a) *Montrer que g est continue si et seulement si elle est bornée sur la sphère unité de E.*

(b) *On suppose que E est de dimension finie. Montrer qu'il existe un réel M positif tel que, pour tout élément x dans la sphère unité de E, $\|g(x)\|_F \leq M$.*

Exercice 4. *Soient (X_1, d_1), (X_2, d_2) des espaces métriques, $f, g : X_1 \to X_2$ des applications continues. On pose :*

$$E = \{x \in X_1 : f(x) = g(x)\}.$$

(i) *Montrer que l'ensemble E est fermé.*

(ii) *On suppose que E est dense dans X_1. Montrer que f et g sont égales.*

(iii) *On suppose que (X_1, d_1) est compact. Montrer que f et g sont uniformément continues.*

(iv) *Démontrer que tout espace métrique compact est borné*

(v) *On suppose que : (X_1, d_1) est connexe et compact, $X_2 = \mathbf{R}$ et E n'est pas vide. Démontrer que $f(X_1) \cap g(X_1)$ est un intervalle fermé et borné.*

Exercice 5. *Soit $X = \{f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) : x \to (1 + x^2)f(x)$ est bornée $\}$. Pour tout $f \in X$, on pose $N(f) = \sup_{x \in \mathbf{R}}(1 + x^2)|f(x)|$.*

(a) *Montrer que l'application $f \in X \to N(f)$ est une norme.*

Scanné avec CamScanner

(b) *Montrer que la forme linéaire $\mathcal{L}$ définie sur X par*

$$\mathcal{L}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

est continue.

(c) *Calculer la norme de $\mathcal{L}$.*

Exercice 6. *Soient A un réel strictement positif et (E, D) l'espace des fonctions numériques continues définies sur l'intervalle compacte $[0, A]$ muni de la distance de la convergence uniforme D. Soit $T : E \to E$, $x \to T(x)$, l'applicaation définie par :*

$$T(x)(t) = 1 + \int_0^t x(s)ds. \tag{1}$$

(a) *Donner, en la justifiant, la définition de D.*

(b) *Montrer que l'on a bien $T(x) \in E$ pour tout $x \in E$.*

(c) *Montrer que l'application T est lipchitzienne.*

(d) *On suppose que $A < 1$. Montrer que T admet un point fixe unique.*

(d) *Montrter que ce point fixe de T, x, est l'unique solution du problème de Cauchy :*

$$u'(t) - u(t) = 0, \quad t \in [0A], \quad u(0) = 1.$$

Exercice 7. *Soit (X, d) un espace métrique compact et f une application continue de X dans X. On suppose que*

$$\forall x \in X : f^2(x) \not/ x,$$

$f^2 = f \circ f$.

(a) *Montrer que l'application $g : X \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = d(x, f^2(x))$ est continue.*

(b) *L'application g admet-elle une borne inférieure ? une borne supérieure ? Dans l'affirmative, ces bornes sont-elles atteintes ?*

(c) *Montrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que*

$$\forall x \in X : d(x, f^2(x)) \geq k.$$

Exercice 8. *Soient (X, d) et (Y, δ) des espaces métriques et $f : X \to Y$ une application.Montrer que :*

1. *Si f est continue, son graphe $G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$.*
2. *Si le graphe $G(f)$ de f est fermé et que $\overline{f(X)}$ est compact alors f est continue.*

Scanné avec CamScanner

Exercice 9. *Soient (X,d) un espace métrique compacte , $f : X \to X$ une isométrie.*

1. *Démontrer que f est un homéomorphisme de X sur X. **Indication** Si $f(X) \neq X$, prendre $x_1 \in X \backslash f(X)$ et considérer la suite (x_n) telle que $x_{n+1} = f(x_n)$. Prouver qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall p, q \in \mathbf{N}, p \neq q$: $d(x_p, x_q) \geq \alpha$.*
2. *Démontrer qu'une isométrie $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ qui admet un point fixe est un homéomorphisme.*

Exercice 10 1. *Soit (X,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points de X qui converge vers $y \in X$. Démontrer que l'ensemble $K = \{x_n : n \in \mathbf{N}\} \bigcup \{y\}$ est compact.*

2. *Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une application continue et propre, c'est-à-dire, telle que, pour toute partie compacte K de $\mathbf{R}^n$, $f^{-1}(K)$ est compact.*

   (a) *Montrer que si f est propre, alors l'image par f de toute partie fermée de $\mathbf{R}^n$ est un fermé.*

   (b) *Etablir l'équivalence suivante : f est propre si et seulement si $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.*

Exercice 11. *Soit E l'espace vectoriels réels des fonctions de classe C^1 sur l'intervalle $[0,1]$. On muni E de la norme*

$$\|x\| = |x(0)| + sup_{t\in[0,1]}|x'(t)|.$$

Vérifier que $x \to \|x\|$ est bien une norme. Montrer que $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach.

Exercice 12. *Soit E, l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrer que l'application $L : E \to E$ définie par*

$$L((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) = (\frac{x_n}{n+1})$$

est linéaire, bijective et continue. Montrer que L^{-1} n'est pas continue.

Exercice 13. *Soit E l'espace de Banach des fonctions continues sur l'intervalle $[-1,4]$ muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer que la fonction*

$$F : E \to \mathbf{R} \quad f \to L(f) = f(-1) - 4f(0) + 5f(1) - 3f(2) + 2f(3) - 8f(4)$$

est une forme linéaire continue et calculer sa norme.

Scanné avec CamScanner

Université F.H.B. - Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2018 - 2019

Licence 3: E.C.U.E. Mesure: Fiche de TD n°1

Exercice 1:

Soient X un ensemble non vide, $\mathcal{C}$ un sous - ensemble non vide de $\mathcal{P}(X)$ et $M \subset \mathcal{P}(X)$. On pose

$$\mathcal{C}_M = \{M \cap E \ / \ E \in \mathcal{C}\}.$$

1°) Montrer que, si $\mathcal{C}$ est une tribu sur X alors $\mathcal{C}_M$ est une tribu sur M.

2°) On suppose que $\mathcal{C}$ est une tribu sur X et que $M \in \mathcal{C}$. Montrer que $\{A \subseteq M \ / \ A \in \mathcal{C}\}$ est une tribu sur M, et comparer cet ensemble à $\mathcal{C}_M$.

3°) Soit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tel que $\mathcal{C} = \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{C})$. Montrer que $\mathcal{C}_M = \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{E}_M)$.

4°) On suppose que X est muni d'une topologie, M est muni de la topologie induite, et on note $\mathcal{B}(X)$ et $\mathcal{B}(M)$ les tribus Boréliennes correspondantes. Montrer que $\mathcal{B}(M) = \mathcal{B}(X)_M$.

Exercice 2:

1°) Soient A et B deux sous - ensembles de $X = \{1,2,3,4,5,6\}$. Déterminer l'algèbre de parties de X, ainsi que la σ - algèbre de parties de X, engendrée par $\{A, B, C\}$ pour

$$A = \{1,5\}, B = \{2,3\} \text{ et } C = \{1,2,6\}.$$

2°) Soient X un ensemble non vide et

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq X \ / \ A \text{ est dénombrable ou } X \backslash A \text{ est dénombrable}\}.$$

Montrer que $\mathcal{A}$ est une σ - algèbre de parties de X.

3°) Soit

$$\mathcal{I} := \{[a,b] \ / \ a,b \in \mathbb{R} \text{ et } a \leq b\}.$$

Déterminer la classe σ - additive de parties de $\mathbb{R}$ engendrée par $\mathcal{I}$, ainsi que la σ - algèbre de parties de $\mathbb{R}$ engendrée par $\mathcal{I}$. Comparer ces deux quantités.

Exercice 3:

1°) Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et $x_0 \in X$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose

$$\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que δ_{x_0} est une mesure positive sur $(X, \mathcal{A})$.

Scanné avec CamScanner

2°) P est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{P}(X))$, où $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties d'un ensemble X donné.

Montrer que:

a) Pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble

$$A_n := \{a \in X \ / \ P(\{a\}) > \frac{1}{n}\}$$

possède au plus n éléments;

b)

$$A := \{a \in X \ / \ P(\{a\}) > 0\}$$

est dénombrable.

Exercice 4:

μ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1°) Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert et non vide de $\mathbb{R}$.

a) Exhiber une suite d'intervalles compacts $([c_n, d_n])_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}$ vérifiant:

- $\forall n \geq 1, [c_n, d_n] \subseteq [c_{n+1}, d_{n+1}]$
- $\bigcup_{n\geq 1}[c_n, d_n] =]a, b[$.

b) Montrer que

$$\mu(]a, b[) = \sup\{\mu(K) \ / \ K \text{ est un compact de } \mathbb{R} \text{ et } K \subseteq]a, b[\}.$$

2°) Soit $(]a_n, b_n[)_{n\geq 1}$ une suite disjointe d'intervalles ouverts et non vides de $\mathbb{R}$, et $O := \bigcup_{n\geq 1}]a_n, b_n[$. On suppose que $\mu(O) < +\infty$.

Montrer que

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que: $\forall k \geq k, \mu(\bigcup_{1\leq n\leq k}]a_n, b_n[) > \mu(O) - \varepsilon$

b) $\mu(O) = \sup\{\mu(K) \ / \ K \text{ est un compact de } \mathbb{R} \text{ et } K \subseteq O\}$.

N.B.: On rappelle que toute réunion d'un nombre fini de compacts de $\mathbb{R}$ est un compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 5:

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré fini, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites d'éléments de $\mathcal{A}$ telles que : $A_n \subseteq B_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Montrer que:

a) $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(B_n \setminus A_n))$

b) $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) - \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} [\mu(B_n) - \mu(A_n)]$.

Scanné avec CamScanner

2°) P est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{P}(X))$, où $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties d'un ensemble X donné.

Montrer que:

a) Pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble

$$A_n := \{a \in X \ / \ P(\{a\}) > \frac{1}{n}\}$$

possède au plus n éléments;

b)

$$A := \{a \in X \ / \ P(\{a\}) > 0\}$$

est dénombrable.

Exercice 4:

μ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

1°) Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert et non vide de $\mathbf{R}$.

a) Exhiber une suite d'intervalles compacts $([c_n, d_n])_{n\geq 1}$ de $\mathbf{R}$ vérifiant:

- $\forall n \geq 1, [c_n, d_n] \subseteq [c_{n+1}, d_{n+1}]$
- $\cup_{n\geq 1}[c_n, d_n] =]a, b[$.

b) Montrer que

$$\mu(]a, b[) = \sup\{\mu(K) \ / \ K \text{ est un compact de } \mathbf{R} \text{ et } K \subseteq]a, b[\}.$$

2°) Soit $(]a_i, b_i[)_{i\geq 1}$ une suite disjointe d'intervalles ouverts et non vides de $\mathbf{R}$, et $O := \cup_{i\geq 1}]a_i, b_i[$. On suppose que $\mu(O) < +\infty$.

Montrer que:

a) $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists k_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ tel que: $\forall k \geq k_\varepsilon, \mu(\cup_{1\leq i\leq k}]a_i, b_i[) > \mu(O) - \varepsilon$

b) $\mu(O) = \sup\{\mu(K) \ / \ K \text{ est un compact de } \mathbf{R} \text{ et } K \subseteq O\}$.

N.B.: On rappelle que toute réunion d'un nombre fini de compacts de $\mathbf{R}$ est un compact de $\mathbf{R}$.

Exercice 5:

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré fini, et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux suites d'éléments de $\mathcal{A}$ telles que : $A_n \subseteq B_n, \forall n \in \mathbf{N}$.

Montrer que:

a) $(\cup_{n\in\mathbf{N}} B_n)\backslash(\cup_{n\in\mathbf{N}} A_n) \subseteq (\cup_{n\in\mathbf{N}}(B_n\backslash A_n))$;

b) $\mu(\cup_{n\in\mathbf{N}} B_n) - \mu(\cup_{n\in\mathbf{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbf{N}} |\mu(B_n) - \mu(A_n)|$.

Scanné avec CamScanner

Université F.H.B. - Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2015 - 2016

Licence 3: E.C.U.E. Intégration: Fiche de TD n°1

Exercice 1:

Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables, et $f : X \to Y$ une application $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ - mesurable.

Soient $\{A_n / n \in \mathbb{N}\}$ une partition de Y formée d'éléments de $\mathcal{B}$, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans Y.

On pose: $\forall x \in X$

$$g(x) := \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \in A_0 \\ x_n \text{ si } f(x) \in A_n, n \geq 1. \end{cases}$$

1°) Montrer que g est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ - mesurable.

2°) On suppose que $X = Y = \mathbb{R}$ muni de la tribu Borélienne, $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, $A_0 =]-\infty, 0[$, $A_n = [n-1, n[, \forall n \geq 1$, et λ la mesure de Lebesgue.

Calculer $\int_X |g| \, d\lambda$.

Exercice 2:

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré positif, et $f : X \to \bar{\mathbb{R}}_+$ une application $\mathcal{A}-$ mesurable. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Montrer que:

1°) $$\int_X \chi_A d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{\chi_A \geq t\}) d\lambda(t), \forall A \in \mathcal{A}.$$

2°) $$\int_X f d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{f \geq t\}) d\lambda(t)$$

Exercice 3:

λ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1°) Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une application dérivable. Montrer que sa dérivée f' est Borel mesurable.

2°) Depuis les classes antérieures nous savons que: si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, alors

$$\int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a).$$ Nous admettons ce résultat.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection croissante de classe C^1. λ^f est la mesure image par f de λ.

Scanné avec CamScanner

a) Montrer que:

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda f^{-1}(A) = \int_A f'(t)d\lambda(t).\ (\text{Prendre d'abord } A = [a,b[\ ).$$

b) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une application $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - mesurable. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} hd\lambda^{f^{-1}} = \int_{\mathbb{R}} h(t)f'(t)d\lambda(t).\ (\text{Indication: Commencer par le cas où } h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{B}(\ldots))$$

Exercice 4:

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ finie et positive, et $h : X \to \mathbb{R}$ une application μ - intégrable. Soit $(t_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres réels strictement croissante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ telle que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{k\to-\infty} t_{k,n} = -\infty,\ \lim_{k\to+\infty} t_{k,n} = +\infty,\ \text{et } \sup_{k\in\mathbb{Z}}(t_{k+1,n} - t_{k,n}) \leq \frac{1}{n}.$$

Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, on considère

$$\xi_{k,n} \in [t_{k,n}, t_{k+1,n}[\text{ et } A_{k,n} := \{x \in X\ /\ t_{k,n} \leq h(x) < t_{k+1,n}\}.$$

1°) Montrer que: $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ on a

$$|\xi_{k,n}|\,\mu(A_{k,n}) \leq \frac{1}{n}\mu(A_{k,n}) + \int_X |h(x)|\,\chi_{A_{k,n}}(x)d\mu.$$

En déduire que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{k,n}\mu(A_{k,n})$ est convergente $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2°) Montrer que

$$\int_X hd\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{k,n}\mu(A_{k,n}).$$

Exercice 5:

On pose

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x^2\chi_{[-n^3,-n]}(x) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu Borélienne de $\mathbb{R}$.

1°) Etudier la $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - mesurabilité et la λ - intégrabilité de f_n.

2°) Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3°) Etudier la monotonie ainsi que la convergence dans $\mathcal{L}^p$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour $p \in [1, +\infty]$.

4°) Etudier la convergence en $\lambda-$ mesure de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 6:

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f_n, n \in \mathbb{N}$, et f des applications $\mathcal{A}$ - mesurables de X dans $\mathbb{R}$ telles que: f est μ - intégrable et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X,\ |f_n(x)| \leq f(x).$$

(scanné avec CamScanner

1°) Montrer que $\liminf f_n$ est μ - intégrable.
2°) Montrer que

$$\int_X (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu.$$

Exercice 7:

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ positive, $f, f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu), \forall n \in \mathbb{N}$, tels que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f μ - p.p..
1°) Montrer que f est finie μ - p.p..
2°) a) Montrer que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que: } \forall A \in \mathcal{A} \text{ tel que } \mu(A) < \alpha \text{ on a } \int_A |f| d\mu < \varepsilon$$

b) On suppose que $\mu(X) < +\infty$.
Montrer que: $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathcal{A}$ tel que $(f_{n|A})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f_{|A}$ et

$$\int_{X\setminus A} |f| d\mu < \varepsilon.$$

Exercice 8:

Soient λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) := \begin{cases} \frac{(xy)^p}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } -1 \leq x, y \leq 1 \text{ et } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1°) Calculer si possible les intégrales suivantes et comparer leurs valeurs

$$\int_{\mathbb{R}} [\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(x)] d\lambda(y) \text{ et } \int_{\mathbb{R}} [\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(y)] d\lambda(x).$$

2°) f est - elle $\lambda \otimes \lambda$ - intégrable sur $[0, 1] \times [0, 1]$?
3°) f est - elle $\lambda \otimes \lambda$ - intégrable?

Exercice 9:

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f une application $\mathcal{A}$ - mesurable de X dans $\bar{\mathbb{R}}_+$.
On pose

$$G_f := \{(x, y) \in X \times [0, +\infty] \ / \ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

1°) Montrer que G_f est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ - mesurable.
2°) Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\bar{\mathbb{R}}$. Montrer que $(\mu \otimes \lambda)(G_f) = \int_X f d\mu$.

Scanné avec CamScanner

Exercices

Exercice 1 :

(a) Montrer que dans l'anneau $\mathbb{Z}$ les idéaux sont de la forme

$$n\mathbb{Z}\text{ , où } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Montrer que toute suite croissante $(I_n)_{0\leq n}$ d'idéaux de $\mathbb{Z}$ est stationnaire.

(c) Quels sont les sous-anneaux de $\mathbb{Z}$?

Exercice 2 : Soit A un anneau unitaire. Montrer que le centre de A : l'ensemble

$$C(A) = \{a \in A : ax = xa \text{pour tout } x \in A\}$$

est un sous-anneau commutatif de A.

Exercice 3 : Soient A et B deux anneaux commutatifs unitaires.

1. Montrer que les idéaux du produit cartésien d'anneaux $A \times B$ sont de la forme $I \times J$ où I est un idéal de A et J idéal de B.
2. Quels sont les idéaux maximaux de $A \times B$?
3. Montrer que $\mathcal{U}(A \times B) = \mathcal{U}(A) \times \mathcal{U}(B)$

Exercice 4 : Soient A un anneau commutatif unitaire et P un idéal Propre de A. Montrer les équivalences suivantes

1. P est premier $\Longleftrightarrow \dfrac{A}{P}$ est un anneau intègre.
2. P est maximal $\Longleftrightarrow \dfrac{A}{P}$ est un corps.
3. Pour un idéal I, montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   — (i) I est premier
   — (ii) Si K et J sont deux idéaux de A tels que $K \cdot J \subset I$, alors $K \subset I$ ou $J \subset I$

Exercice 5 : Soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux

(a) Montrer que $f(0_A) = 0_B$

(b) Montrer que $\ker f$ est un idéal de A, Imf est un sous anneau de B

(c) Montrer que la relation d'équivalence de Lagrange définie par $\ker f$ est la même que celle définie par les images de f.

(d) Montrer que l'anneau quotient $\dfrac{A}{\ker f}$ est isomorphe à Imf

Scanné avec CamScanner

Exercice 6 :

Résoudre dans Z les systèmes de congruence suivants ;

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod (17) \\ x \equiv -6 \mod (24) \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv 1 \mod (6) \\ x \equiv 1 \mod (7) \\ x \equiv -1 \mod (11) \end{cases}$$

Exercice 7 : . On considère l'ensemble

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ est un sous-anneau du corps $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
2. Si $z = a + b\sqrt{5}$, on note $\widehat{z} = a - b\sqrt{5}$. Montrer que
$$\widehat{z_1 + z_2} = \widehat{z_1} + \widehat{z_2}, \quad \widehat{z_1 \cdot z_2} = \widehat{z_1} \cdot \widehat{z_2}, \text{ et } \quad z \cdot \widehat{z} \in \mathbb{Z}$$
3. Montrer que si z est inversible alors $\widehat{z}$ est inversible et $z\widehat{z} \in \{-1, 1\}$.
4. Donner six éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.
5. Montrer que 2, $1 - \sqrt{5}$, $1 + \sqrt{5}$ ne sont pas inversibles.
6. Montrer que 2, $1 - \sqrt{5}$, $1 + \sqrt{5}$ sont irréductibles. c'est à dire qu'ils ne peuvent être sous la forme produit uv, avec u et v non-inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.
7. Calculer $(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})$, en déduire que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ n'est pas factoriel.

Exercice 8 :

La racine d'un idéal.

Soient A un anneau commutatif unitaire et I de A. On note

$$\sqrt{I} = \{x \in A : \exists n \in \mathbb{N} \text{ et } x^n \in I\}$$

1. Montrer que $I \subseteq \sqrt{I}I$
2. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal
3. Montrer que $\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$
   Déterminer $\sqrt{8\mathbb{Z}}$, $\sqrt{6\mathbb{Z}}$, $\sqrt{2\mathbb{Z}}$

Exercice 9 :

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ et $S^{-1}\mathbb{Z} = \{\frac{a}{s} : a \in \mathbb{Z}, s \notin 2\mathbb{Z}\}$ sont des sous-anneaux de C
2. Ces anneaux sont-ils factoriels ?
3. Trouver des idéaux maximaux pour chacun de ces anneaux.

Scanné avec CamScanner

Exercice 8 : . Soient A et B deux anneaux commutatifs unitaires et $\theta \in Hom(A, B)$ un homomorphisme d'anneaux.

1. Montrer que l'application

$$\pi_\theta : A[X] \longrightarrow B[X],$$
$$a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \longmapsto \theta(a_0) + \theta(a_1)X + \cdots + \theta(a_n)X^n$$

est un homomorphisme d'anneaux.

2. Montrer que si θ est surjectif (Resp : injectif, bijectif), alors π_θ surjectif (Resp : injectif, bijectif)

3. : Critère d'irréductibilité modulo p.

On considère l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[X]$, p un nombre premier de $\mathbb{Z}$ et la surjection canonique $\theta : \mathbb{Z} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$, $a \longmapsto \bar{a}$.

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $a_n \notin p\mathbb{Z}$.

Montrer que :

$P(X)$ est irréductible $\Longleftrightarrow \pi_\theta(P(X))$ est irréductible dans $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}[X]$.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY-ABIDJAN
UFR de Mathématiques et Informatique Année 2008-2009

LICENCE DE MATHEMATIQUES
U.V.L2: ANALYSE NUMERIQUE I
TD $N°$ 2

MATRICES ET NORMES MATRICIELLES

Exercice 1

a) Montrer que la multiplication des matrices est une opération interne sur les sous-ensembles des matrices suivantes:

- *Matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures).*
- *Matrices unitaires*
- *Matrices de Permutation.*

b) Même question pour l'inversion des matrices sur les ensembles suivants:

- *Matrices définies positives.*
- *Matrices unitaires.*
- *Matrices triangulaires non singulières.*

c) Montrer qu'une matrice triangulaire orthogonale est diagonale.

d) Montrer que si une matrice A est hermitienne alors ses valeurs propres sont réelles. A est unitaire alors le module des valeurs propres est égal à un. ($|\lambda| = 1$)

e) Montrer que si λ est valeur propre de A alors λ^k est valeur propre de A^k.

Exercice 2

Soient φ une norme définie sur $\mathbb{C}^n$ et ψ une norme définie sur $\mathbb{C}^m$.

(1) Si $A \in \mathcal{M}(m,n)$, montrer que

$$S_{\psi,\varphi}(A) = \sup_{x \neq 0}\left(\frac{\psi(Ax)}{\varphi(x)}\right) \quad \text{notée} \quad \|A\|$$

définit une norme sur $\mathcal{M}(m,n)$. (On admettra ici que la borne supérieure de $\frac{\psi(Ax)}{\varphi(x)}$ est bien finie).

Scanné avec CamScanner

(2) Montrer que, si $A \in \mathcal{M}(n,n)$ est inversible, on a

$$0 < \frac{1}{S_{\varphi\varphi}(A^{-1})} \leq \frac{\varphi(Ax)}{\varphi(x)} \leq S_{\varphi\varphi}(A) \qquad \forall x \neq 0$$

(3) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de $A \in \mathcal{M}(n,n)$ est

$$\text{il existe } \alpha \text{ tel que} \quad 0 < \alpha \leq \frac{\varphi(Ax)}{\varphi(x)} \qquad \forall x \neq 0$$

(4) Si $A,B \in \mathcal{M}(n,n)$, montrer que

$$S_{\varphi\varphi}(AB) \leq S_{\varphi\varphi}(A) S_{\varphi\varphi}(B)$$

(5) Dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), on définit pour tout réel $p \geq 1$, la norme de Hölder :

$$\varphi_p(x) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

associée à tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), de composantes $x_i (i = 1,...,n)$.

5-1) Montrer que si $p \to \infty$, $\varphi_p(x) \to \max_i |x_i|$.
On posera alors $\varphi_\infty(x) = \max_i |x_i|$.

5-2) Etant donnée la matrice A, réelle, carée d'ordre n, calculer

$$S_{\varphi_p\varphi_p}(A) = \|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\varphi_p(Ax)}{\varphi_p(x)}$$

lorsque

a) $p = \infty$ (norme du max)
b) $p = 1$ (norme des valeurs absolues)
c) $p = 2$ (norme euclidienne).

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ hermitienne positive.

1) Montrer qu'il existe une et une seule matrice R hermitienne positive d'ordre n telle que

$$A = R.R = R^2$$

(On dit que R est la "racine positive" de A)

2) Soit $B \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ inversible
Montrer que l'on peut trouver U unitaire et une seule matrice R hermitienne définie positive telle que : $B=U.R$.

3) Montrer que cette décomposition est unique.

Exercice 4

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n.
On dit que A est stochastique si A vérifie les conditions suivantes :

$$\forall i,\forall j, \quad a_{ij} \geq 0, \quad \forall i \quad \sum_{j=1}^{n} aij = 1.$$

1) Vérifier que le vecteur V de coordonnées toutes égales à 1 est un vecteur propre.

Scanné avec CamScanner

2) *Montrer que les valeurs propres de A sont telles que* $|\lambda| \leq 1$.

3) *Montrer que si* λ *est valeur propre de module* 1 *et* $x_1,...,x_n$ *les coordonnées d'un vecteur propre associé* x *et* x_k *la coordonnée de plus grand module, qu'il existe* k_1 *tel que* $x_{k_1} = \lambda x_k$.
En déduire que λ *est une racine* $n^{ième}$ *de l'unité.*

Exercice 5

Les normes vectorielles et les normes matricielles subordonnées sont notées de la même façon.
Vérifier les relations suivantes:

a) $\|x| - |y\| \leq |x - y| \quad \forall x,y \in \mathbb{C}^n$.

b) $\|A\| = \sup_{X \in \mathbb{C}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$

c) *Montrer que si* λ *est une valeur propre d'une matrice A inversible, on a:*

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq |\lambda| \leq \|A\|$$

d) *Montrer que A est inversible si et seulement si*

$$\exists \alpha > 0 \quad tel\ que \quad \forall X \neq 0 \quad \frac{\|AX\|}{\|X\|} \geq \alpha.$$

e) *Montrer que si A est inversible, on a*

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} = \min_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \quad et \quad \frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\|AX\|}{\|X\|} \leq \|A\|.$$

f) *On désigne par* $\|\cdot\|_2$ *la norme spectrale subordonnée à la norme vectorielle* $\|\cdot\|_2$ *et* $\|\cdot\|_1$, *la norme de Schur.*

1) *montrer qu'une matrice hermitienne est définie positive si et seulement si*

$$\exists \alpha > 0 \quad (AX,X) \geq \alpha \|X\|_2^2.$$

2) *Montrer que les normes* $\|\ \|_2$ *et* $\|\ \|_1$ *sont invariant par transformation unitaire.*

3) *Montrer que si A est une matrice hermitienne définie positive, alors* $[X] = (AX,X)^{1/2}$ *définit une norme sur* $\mathbb{C}^n$.

Exercice 6

Soit A une matrice carré d'ordre n dont les valeurs propres sont $\lambda_i (i = 1,...,n)$.

a) *Montrer que si* $lim_{p \to \infty} A^p = 0$ *alors* $|\lambda_i| < 1, i = 1,...,n$.

b) *Montrer que si* $lim_{p \to \infty} A^p = 0$ *alors* $lim_{p \to \infty} \sum_{k=0}^{p-1} A^k = (I - A)^{-1}$.

c) *Montrer que si* $\|A\| < 1$ *alors la suite*

$$(B_k)_{k \geq 1} \quad où \quad B_k = I + A + A^2 + ... + A^k$$

est convergente et que $lim_{p \to \infty} B_k = (I - A)^{-1}$.

d) *On pose:*

$$C_k = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + ... + \frac{A^k}{k!} \quad k \geq 1$$

- *Montrer que le suite* (C_k) *est convergente. On note* e^A *sa limite.*
-*Montrer que* e^A *est toujours inversible. (On montrera que dét* $e^A = e^{tr(A)}$*).*

Scanné avec CamScanner

Exercice 7

Soit la matrice X carrée d'ordre n, donnée. On suppose que la matrice $(I + X)$ est symétrique définie positive.
Montrer que, si q est un entier different de 0, une solution de l'équation

$$Y^q - I = X \tag{2.1}$$

est donnée par

$$Y = (I + X)^\alpha = I + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-p+1)}{p!} X^p, \quad (\alpha = 1/q),$$

si $|x_i| < 1 \quad (i = 1,...,n)$ *où les* x_i *sont les valeurs propres de* X.

N.B. : Nous vous demandons de bien chercher chez vous avant d'aller aux travaux dirigés (T.D.)

Scanné avec CamScanner

Méthodes directes et Itératives pour la résolution des systèmes linéaires

UNIVERSITE DE COCODY-ABIDJAN
UFR de Mathématiques et Informatique Année 2008-2009
LICENCE DE MATHEMATIQUES
U.V.L2 : ANALYSE NUMERIQUE I
TD N° 3

METHODES DIRECTES ET ITERATIVES POUR LA RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

Exercice 6

Soient E et U des matrices carrées d'ordre n définies par : $E_{i+1,i}$ pour $1 \leq i \leq n-1$, tous les autres $E_{i,j} = 0$;

$$U_{i,j} = \begin{cases} 1 & pour \quad j \geq i \\ 0 & pour \quad j < i \end{cases}$$

et f un vecteur défini par $f_i = 1$ pour $1 \leq i \leq n$.
Soit A la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \dots & \dots & 2 \\ -1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Vérifier que $A = U - E + e_1 f^2$ où e_1 est le premier vecteur de la base canonique.*
2. *Montrer que $A = (2I - E)U$. Que vaut $det(A)$?*
3. *Montrer que $U^{-1} = I - E^T$.*
4. *Montrer que*

$$(I - \frac{E}{2})^{-1} = I + \frac{E}{2} + \frac{E^2}{2^2} + \dots + \frac{E^{n-1}}{2^{n-1}}.$$

En déduire l'expression de A^{-1} et montrer que

$$\|A^{-1}\|_\infty = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Scanné avec CamScanner

3. *Montrer que* $cond_\infty = 2n$, *et comparer avec* $det(A)$.

Exercice 7

Soit A *une matrice réelle, carrée d'ordre* n *et symétrique.*

1. *Examiner comment la symétrie de* A *permet d'éviter certains calculs, dans l'algorithme de Gauss pour la résolution de*

$$Ax = b \qquad x,b \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

2. *On sait que si* A *est symétrique définie positive, on peut écrire*

$$A = RR^T \qquad \text{où} \quad R \text{ est triangulaire inférieure.}$$

2.a. *Rappeler les relations qui permettent de calculer les coefficients de* R *en fonction des* (a_{ij}).

2.b. *Résoudre par la méthode de Cholesky le système linéaire* (1) *lorsque*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad et \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 8

Soit $A \in \mathcal{M}(n,n)$, b *et* $x \in \mathbb{R}^n$. *On suppose que* n *est grand, et on considère le système*

$$Ax = b. \qquad (1)$$

1. *On partitionne* A *en quatre matrices, où* $A_1 \in \mathcal{M}(p,p)$, $p < n$.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}.$$

Montrer que la résolution de (1) *revient à l'inversion d'une matrice suivie de la résolution d'un système linéaire d'ordre* $n - p$.

2. *Lorsque* A *est partitionnée comme en* 1), *indiquer une méthode permettant de calculer* A^{-1}.

3. *Application numérique : résoudre* $Ax = b$ *avec*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

On se propose de résoudre $Ax = b$ *où* $A \in \mathcal{M}(n,n)$, $b \in \mathbb{R}^n$. *On désigne par « matrice*

Scanné avec CamScanner

de rotation », une matrice du type

$$R_{kl}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & & \vdots & & & & \vdots & \\ & 1 & \vdots & & & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & cos\theta & \cdots & \cdots & \cdots & -sin\theta & \\ & & \vdots & 1 & & & \vdots & \\ & & \vdots & & 1 & & \vdots & \\ & & \vdots & & & 1 & \vdots & \\ \cdots & \cdots & sin\theta & \cdots & \cdots & \cdots & cos\theta & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

1) Notant $R_k = R_{kn}....R_{kk+1}$, montrer que l'on peut construire une matrice R telle que

$$R = R_{n-1}R_{n-2}...R_1$$

telle que

$$RA = T \qquad \text{soit une matrice triangulaire supérieure.}$$

2) En déduire les conséquences relatives à la résolution de $Ax = b$ et montrer que $\|A\| = \|T\|$, les normes de matrices considérées étant déduites de la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 10

Soit la matrice A, carrée d'ordre n

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 3 & 4 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{vmatrix} \quad \text{de terme général} \quad a_{ij} \begin{vmatrix} = & n+j-i+1 & si & j<i \\ = & 1+j-i & si & j \geq i \end{vmatrix}$$

Etant donné un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$, on se propose de résoudre par la méthode de Jacobi, le système linéaire suivant

$$(A + mI)x = b \qquad (1)$$

où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}(n,n)$.

1) Si l'on pose $q_k = e^{2i\pi\frac{k}{n}}(k = 0,1,...,n-1)$. Vérifier que les vecteurs propres de A sont

$$v_k = (1,q_k,....,q_k^{n-1}) \quad k = 0,1,...,n-1$$

Donner la valeur propre λ_k associée à v_k.

2) Discuter, par rapport à m, la convergence de la méthode de Jacobi.

3) Application numérique : on prend $n = 4$, $b = (1;0;0;0)$.

a) dans le cas où $m = 19$, donner une solution approchée de (1) telle que le résudu $b - (A + mI)x$ soit de norme inférieure à 0,03 (la norme choisie étant φ_∞)

b) dans le cas où $m = 0$, examiner ce que donne la méthode de Jacobi pour résoudre (1).

Scanné avec CamScanner

Exercice 11

Soit $A \in \mathcal{M}(n,n)$ symétrique définie positive. Si b est un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$, on se propose de résoudre le système $Ax = b$ (1) de solution ω.

1) On dit que n vecteurs $v_i, i = 0,1,...,n-1$ sont « A-orthogonaux » s'ils vérifient

$$(Av_i,v_j) = 0 \quad \forall i \neq j \quad et \quad (Av_i,v_i) > 0$$

où la notation (v,w) désigne le produit scalaire de deux vecteurs v et w de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer, qu'étant donné un tel ensemble de vecteurs, la solution ω de (1) peut s'écrire comme combinaison linéaire des v_i

$$\omega = \sum_{i=0}^{n-1} a_i v_i \qquad (2)$$

et déterminer a_i en fonction de A, b, v_i.

b) La calcul défini par la formule (2) s'explime par le schéma itératif suivant

$$x_0 = 0 \quad x_{i+1} = x_i + a_i v_i \qquad (3)$$

Montrer que le choix des a_i est tel qu'il rend mi,imum la fonction

$$H(x) = (A(\omega - x),\omega - x),$$

sur la droite de $\mathbb{R}^n$ parallèle à v_i et passant par x_i.

2) Soit $\{w_i\}, i = 0,1,...,n-1$ un ensemble de n vecteurs linéairement indépendants. On désire obtenir à partir de cet ensemble, un ensemble de vecteurs $\{t_i\}$ qui soient A-orthogonaux.

a) Méthode 1 : On pose $t_0 = w_0$ et on détermine t_{k+1} en fonction des termes qui le précèdent par

$$t_{k+1} = w_{k+1} + \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k+1,j} t_j \qquad (4)$$

Donner la valeur de $\alpha_{k+1,j}$.

b) Méthodes 2 : On pose $\tilde{t}_0 = w_0$ et on détermine $\tilde{t}_{k+1}$ par

$$\tilde{t}_{k+1} = \tilde{t}_k + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{k+1,j} \tilde{t}_j + \beta_{k+1,k} w_{k+1} \qquad (5)$$

Donner la valeur de $\beta_{k+1,j}$.

3) Pour résoudre (1), on part d'une approximation arbitraire x_0 du vecteur solution ω. On pose $v_0 = r_0 = b - Ax_0$ et on construit deux séries de vecteurs r_i et $v_i (i = 0,1,....,n-1)$ déterminés l'ordre $r_0,v_0,r_1,v_1,....,r_{n-1},v_{n-1}$.

Les $\{r_i\}$ sont obtenus en calculant par la méthode 2 une série de vecteurs I-orthogonaux à partir de $r_0,Av_0,....,Av_{n-2}$, où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}(n,n)$.

Les $\{v_i\}$ sont obtenus en calculant par la méthode 1 une série de vecteurs A-orthogonaux à partir de $r_0,r_1,...,r_{n-1}$.

Montrer que l'on a les formules suivantes

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i A v_i$$

$$v_{i+1} = r_{i+1} + \beta_i v_i$$

$$\alpha_i = \frac{(r_i,r_i)}{(v_i,Av_i)} \quad \beta_i = -\frac{(r_{i+1},Av_i)}{(v_i,Av_i)}$$

Si l'on forme l'itération : $x_{i+1} = x_i + \alpha_i v_i$, *montrer par récurrence que*

$$r_{i+1} = b - Ax_{i+1}.$$

Que peut-on dire alors de x_n ?

N.B. : Nous vous demandons de bien chercher chez vous avant d'aller aux travaux dirigés (T.D.)

Scanné avec CamScanner

Equations Differentielles

UNIVERSITE DE COCODY-ABIDJAN
UFR de Mathématiques et Informatique Année 2008-2009
LICENCE DE MATHEMATIQUES
U.V.I.2 : ANALYSE NUMERIQUE I
TD N° 4

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice 1
On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t,y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \qquad (1)$$

par une méthode à un pas de type Runge-Kutta. Ici $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, est supposée 2 fois continûment différentiable dans $\mathbb{R}^2$. On note $t_i = t_0 + ih$ et η_i l'approximation de $y(t_i)$, avec η_i solution du schéma

$$\begin{aligned} \eta_0 &= y_0 \\ \eta_{i+1} &= \eta_i + h\phi(t_i,\eta_i;h) \\ t_{i+1} &= t_i + h \end{aligned}$$

avec $\phi(t_i,\eta_i;h) = f(t_i+\frac{h}{2},\eta_i+\frac{h}{2}f(t_i,\eta_i))$ (cette méthode de résolution est appelée la méthode d'Euler modifiée).

1. *On note*

$$\tau(t,y;h) = \frac{y(t+h)-y(t)}{h} - \phi(t,y;h)$$

l'erreur de discrétisation locale, $y(t)$ étant la solution exacte de (1). Montrer que $\tau(t,y;h) = 0(h^2)$, i.e. le schéma est d'ordre 2.

2. *Montrer que le schema (2) fournit la solution exacte de l'équation différentielle*

$$y'(t) = -2at, \quad y(t_0) = y_0, \quad a \in \mathbb{R} \quad (3)$$

3. *Soit maintenant*

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = 1, \quad avec \quad \lambda < 0; \qquad (4)$$

montrer que $\eta_i \to 0$ quand $i \to +\infty$, si et seulement si $2 < \lambda h < 0$, avec η_i l'approximation donnée par le schéma (2), de la solution $y(t_i)$, $t_i = ih$ de (4).

Scanné avec CamScanner

Exercice 2

A) On s'intéresse à l'inégalité de recurrence

$$\theta_{n+1} \leq \theta_{n-1} + 2hL\theta_n + a_n \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$
$$\text{avec} \quad \forall i \quad \theta_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad h \quad \text{et} \quad L \in \mathbb{R}_+.$$

a) On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2hL & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\rho(A) \leq e^{hL}$, $\rho(A)$ rayon spectral de A.

b) En déduire que

$$\sqrt{\theta_{n+1}^2 + \theta_n^2} \leq e^{hL}\sqrt{\theta_n^2 + \theta_{n-1}^2} + \alpha_n.$$

c) En déduire une majoration de θ_n en fonction de

$$\theta_0, \theta_n, h, L, \ldots, \alpha_{n+1}.$$

B) On cherche à approcher la solution y du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) & t \in [0,T] \\ y^{(0)} = \eta \end{cases}$$

où $f \in C^\infty([0,T],\mathbb{R},\mathbb{R})$ et η sont donnés, f vérifie l'hypothèse de Lipschitz. Pour cela on utilise la méthode suivante

$$h = \frac{T}{N}, \quad t_n = n.h \quad n = 0,1,\ldots,N.$$

et on définit les approximations y_n de $y(t_n)$ par

$$\begin{cases} y_0 = \eta \\ y_1 = y_0 + hf(0,y_0) \\ y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(t_n,y_n), \quad n = 1,2,\ldots,N-1 \end{cases}$$

a) Majorer les erreurs de consistance

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = y(t_1) - y(0) - hf(0,y(0)) \\ \varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_{n+1}) - 2hf(t_n,y(t_n)), \quad n = 1,2,\ldots,N-1 \end{cases}$$

en fonction de M_2, M_3, avec $M_k = \max_{t\in[0,T]} |y^{(k)}(t)|$.

(a) (b)] Montrer que l'on a

$$\max_{0\leq n\leq N} |y(t_n) - y_n| \leq Ch^2$$

ou C dépend de M_2, M_3, L et T.

Scanné avec CamScanner

Exercice 3

On considère le problème différentiel de condition initiale

$$\begin{cases} y'(t) &= f(y,t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

Notons

$$y_i = y(t_i) \quad et \quad t_{i+1} = t_i + h.$$

Soit la formule d'intégration

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \alpha_0 K_0 + \alpha_1 K_1 \\ K_0 &= hf(y_i, t_i) \\ K_1 &= hf(y_i + \lambda K_0, t_i + \lambda h) \end{aligned}$$

1. *Déterminer les coefficients α_0, α_1 pour que l'ordre de la formule d'intégration soit le plus élevé possible.*
2. *Calculer l'expression de l'erreur par pas.*
3. *A quelle méthode est-on ramené lorsque*

$$a) \quad \lambda = \frac{1}{2}, \qquad b) \lambda = 1, \qquad c) \frac{2}{3}$$

Donner dans chaque cas l'expression de l'erreur.

Exercice 4

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}$, on considère le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t),t), \quad t > 0, \qquad (1) \\ x(0) &= \bar{x}_0 \end{aligned}$$

dont on cherche à calculer la solution sur $[0,T]$, où $T > 0$ est donnée. On se donne un pas de discrétisation $h = \frac{T}{n}$ avec $n \geq 1$.
Dans toute la suite, on note $x^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de x, $\partial_i^k f$ la dérivée partielle d'ordre k de f par rapport à la $i^{ème}$ variable, $\partial_i^k \partial_j^l f$ la dérivée partielle d'ordre k de f par rapport à la i-ème variable et d'ordre l par rapport à la j-ème variable (on omettra les symboles k et l lorsque $k = 1$ ou $l = 1$).
On définit $f^{(m)} \in C^{(\infty)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f, \\ f^{(m+1)} &= (\partial_1 f^{(m)}) f + \partial_2 f^{(m)}, \quad pour \quad m \geq 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

1) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la solution x du problème de Chauchy (1) satisfait :

$$x^{(m+1)}(t) = f^{(m)}(x(t),t).$$

2) Calculer $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ en fonction des dérivées partielles $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_1 \partial_2 f$, $\partial_1^2 f$, $\partial_2^2 f$ et de f.

Scanné avec CamScanner

On déduit pour $p \geq 1$ la fonction ψ_p de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\psi_p(y,t,h) = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{h^j}{(j+1)!} f^{(j)}(y,t).$$

Pour $k = 1,...,n$, on note $t_k = kh$. On définit alors la suite $(x_k)_{k=0,n+1} \subset \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} x_0 &= \bar{x}_0, \\ x_{k+1} &= x_k + h\psi_p(x_k,t_k,h) \quad pour \quad k = 0,1,...,n. \end{aligned} \tag{3}$$

3) Montrer que dans le cas $p = 1$, le système (3) définit un schéma de discretisation vu en cours, dont on précisera le nom exact.

4) On suppose que $f(t,y) = y$ pour tout $(y,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et que $\bar{x}_0 = 1$.

4-1 a/ Calculer $\psi_p(y,t,h)$ en fonction de y et h.

4.b/ Montrer que $x_k = (\sum_{j=0}^{p} \frac{h^j}{j!})^k$, pour $k = 1,...,n$.

4.c/ Montrer que $|x_k - x| \leq \frac{h^p}{(p+1)!} t_k e^{t_k}$.

Exercice 5

Soit le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t) & A \in \mathcal{M}(m,m) \quad \text{à coefficients constants} \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \tag{1}$$

1) Quelle est la condition nécessaire et suffisante de stabilité du système différentiel (1) ?

2) Soit y_n la solution approchée de Y au point $t_n = t_0 + nh$ vérifiant la relation récurrente

$$y_{n+1} = P(Ah)y_n.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la solution approchée soit stable lorsque $t_n \to \infty$ (h constant). En déduire le rayon de stabilité.

3) Quelle est, pour une méthode d'ordre 1 et de rang q, la formule qui a le plus grand rayon de stabilité ?

N.B. : Nous vous demandons de bien chercher chez vous avant d'aller aux travaux dirigés (T.D.)

Scanné avec CamScanner

1.6 Exercices

Exercice 1 *Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes :*

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}z^n;\ \sum_{n\geq 0}n!z^{n^2};\ \sum_{n\geq 0}2^n z^{n!};\ \sum_{n\geq 1}n2^n z^{2^n}$$

Exercice 2 *On considère la série entière $\sum a_n z^n$ avec*

$$\forall n\in\mathbb{N}, a_n=\frac{5^n}{2}-4n+1.$$

1. *Calculer le rayon de convergence de cette série.*
2. *Calculer sa somme (on ne vous demande pas de réduire au même dénominateur l'expression finale).*

Exercice 3 1. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$*

2. *On pose $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ et $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.*
   Quel est l'ensemble des nombres complexes z tels que

$$|\cos^2(z)|+|\sin^2(z)|=1?$$

Exercice 4 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0. Existe-t-il une fonction analytique sur Ω vérifiant $f(\frac{1}{n})=f(-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ assez grand ?*

Exercice 5 *Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{A}(\Omega)$ lensemble des fonctions analytiques sur Ω. Soit $f\in\mathcal{A}(\Omega)$, et $V=\{\overline{z}:z\in\Omega\}$.*

1. *Si $z\in V$, on pose $g(z)=\overline{f(\overline{z})}$. Prouver que $g\in\mathcal{A}(V)$.*
   Dans toute la suite, on suppose que Ω est connexe et symétrique par rapport à l'axe réel (on a donc $V=\Omega$).
2. *Prouver que $\Omega\cap\mathbb{R}$ est non vide.*
3. *Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*
   (a) *$f(\overline{z})=\overline{f(z)}$ pour tout $z\in\Omega$.*
   (b) *Il existe une composante connexe C de $U\cap\mathbb{R}$ telle que $f(z)\in\mathbb{R}$ pour tout $x\in C$.*
4. *Prouver que la fonction f s'écrit de manière unique sous la forme $f=u+iv$, avec $u,v\in\mathcal{A}(\Omega)$ et u,v à valeurs réelles sur $U\cap\mathbb{R}$.*

Scanné avec CamScanner

2.6 Exercices

Exercice 6 *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Déterminer toutes les applications $f \in \mathcal{H}(U)$ qui vérifient $\mathrm{Im} f(z) = [\mathrm{Re} f(z)]^2$ pour tout $z \in U$.*

Exercice 7 *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f et g deux fonctions holomorphes sur U avec $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$. Montrer que si $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in U$ alors il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $f(z) = cg(z)$ pour tout $z \in U$.*

Exercice 8 *Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f, g des fonctions holomorphes sur U telles que $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in U$. Prouver qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = c + g(z)$ pour tout $z \in U$.*

Exercice 9 *Soit $f = P + iQ$ une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$, où P et Q sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de f. Montrer que s'il existe des réels a, b tels que $P + aQ + b = 0$ sur Ω, alors f est constante.*

Exercice 10 *Soit f une fonction analytique dans le disque $|z| < R$, $R > 0$ donnée, telle que $|f'(z)| \leq M$, pour tout $|z| < R$. Si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est le développement en série entière de f, démontrer que l'on a $|a_n| \leq \frac{M}{nR^{n-1}}$*

Exercice 11 *Soient $m, n \in \mathbb{Z}^*$ et $([0,1], \gamma_1), ([0,1], \gamma_2)$ des chemins fermés tels que $0 \in \mathrm{im}\gamma_1 \cup \mathrm{im}\gamma_2$. Si $t \in [0,1]$, on pose :*

$$\gamma(t) = [\gamma_1(t)]^m [\gamma_2(t)]^n.$$

Vérifier que γ est un chemin fermé et que $0 \notin \mathrm{im}\gamma$. Calculer $\mathrm{ind}_\gamma(0)$ en fonction de $\mathrm{ind}_{\gamma_1}(0)$ et $\mathrm{ind}_{\gamma_2}(0)$.

Scanné avec CamScanner

UFR MI

Année 2018 - 2019

INITIATION AUX BASES DE DONNEES
Travaux Dirigés

Exercice 1 : Modèle conceptuel et Modèle Physique de données

Enoncé : Un développeur doit informatiser une bibliothèque. On lui fixe les règles de gestion suivantes :

- Pour chaque livre, on doit connaître le titre, l'année de parution, un résumé et le type (roman, poésie, science fiction, ...).
- Un livre peut être rédigé par aucun (dans le cas d'une uvre anonyme), un ou plusieurs auteurs dont on connaît le nom, le prénom, la date de naissance et le pays d'origine.
- Chaque exemplaire d'un livre est identifié par une référence composée de lettres et de chiffres et ne peut être paru que dans une et une seule édition.
- Un inscrit est identifié par un numéro et on doit mémoriser son nom, prénom, adresse, téléphone et adresse e-mail.
- Un inscrit peut faire zéro, un ou plusieurs emprunts qui concernent chacun un et un seul exemplaire. Pour chaque emprunt, on connaît la date et le délai accordé (en nombre de jours).

a) Réaliser le modèle conceptuel de données avec le formalisme Entité-Association
b) Transcrire le modèle Entité-Association obtenu en relationnel

Exercice 2 : Le langage SQL

Enoncé : Soit la base relationnelle de données LC3 de schéma :

U (NumU, NomU, VilleU)

P (NumP, NomP, Couleur, Poids)

F (NumF, NomF, Statut, VilleF)

PUF (#NumP, #NumU, #NumF, Quantité)

Décrivant le fait que (avec des DF évidentes) :

U : une usine est d'écrite par son numéro NumU, son nom NomU et la ville VilleU où elle est située

P : un produit est décrit par son numéro NumP, son nom NomP, sa couleur et son poids

F : un fournisseur est décrit par son numéro NumP, son nom NomF, son statut (sous-traitant, client...) et la ville VilleF où il est domicilié

PUF : le produit de numéro NumP a été délivré à l'usine de numéro NumU par le fournisseur de numéro NumF dans une quantité donnée

Exprimer en SQL :

1) Ajouter un nouveau fournisseur avec les attributs de votre choix
2) Supprimer tous les produits de couleur noire et de numéros compris entre 100 et 1999
3) Changer la ville du fournisseur 3 par Toulouse

Scanné avec CamScanner

4) Donnez le numéro, le nom, la ville de toutes les usines

5) Donnez le numéro, le nom, la ville de toutes les usines de Paris

6) Donnez les numéros des fournisseurs qui approvisionnent l'usine de numéro 2 en produit de numéro 100

7) Donnez les noms et les couleurs des produits livrés par le fournisseur de numéro 2

8) Donnez les numéros des fournisseurs qui approvisionnent l'usine de numéro 2 en un produit rouge

9) Donnez les noms des fournisseurs qui approvisionnent une usine de Paris ou de Créteil en produit rouge

10) Donnez les numéros des produits livrés à une usine par un fournisseur de la même ville

11) Donnez les numéros des produits livrés à une usine de Paris par un fournisseur de Paris.

12) Donnez les numéros des usines qui ont au moins un fournisseur qui n'est pas de la même ville

13) Donnez les numéros des fournisseurs qui approvisionnent à la fois des usines de numéros 2 et 3

14) Donnez les numéros des usines qui utilisent au moins un produit disponible chez le fournisseur de numéro 3 (c'est-à-dire un produit que le fournisseur livre mais pas nécessairement à cette usine)

15) Donnez le numéro du produit le plus léger (les numéros si plusieurs produits ont ce même poids)

16) Donnez la valeur moyenne des quantités de produits livrés par fournisseur

17) Donnez le numéro des usines qui ne reçoivent aucun produit rouge d'un fournisseur parisien

18) Donnez les numéros des fournisseurs qui fournissent au moins un produit fourni par au moins un fournisseur qui fournit au moins un produit rouge

19) Donnez tous les triplets (VilleF, NumP, VilleU) tels qu'un fournisseur de la première ville VilleF approvisionne une usine de la deuxième ville VilleU avec un produit NumP.

20) Donnez les numéros des produits qui sont livrés à toutes les usines de Paris en ordonnant le résultat par ordre croissant

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE L'EXAMEN DE TOPOLOGIE
LICENCE3-Mention :Mathematiques 2015-2016

EXERCICE1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.
(a) démontrons que E est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ pour un certain entier naturel n.
Pour $n = \dim E$, E est isomorphe À $\mathbb{R}^n$, démonstrations aussie, laissée dome au lecteur.
(b) Démontrons que sur $\mathbb{R}^n$ toutes les norme sont équivalentes.
Soit $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ la norme sur $\mathbb{R}^n$ définir par :

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \mu(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

et soit $\|.\|$ n'importe qu'elle autre norme sur $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

où (e_i) est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En conséquent,

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|e_i\| \leq (\sup_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|) \sum_{i=1}^{n} |x_i| = M\mu(x)$$

où

$$M = \sup_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|$$

Ainsi, $\|x\| \leq M\mu(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. (I)
Munissons $\mathbb{R}^n$ de la distance induite par μ (la distance induite par μ est la distance $d_\mu : E \times E \to \mathbb{R}_+$ déinir par : $d_\mu(x, y) = \mu(x - y)$). Alors, dans l'espace métrique ainsi obtenu ie $(\mathbb{R}^n, d_\mu)$ l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu(x) = 1\}$ est fermée et bornée et dés lors compact. En outre,l'application $\| \cdot \|$ est continue car lipschitzienne. En fait, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq M\mu(x - y).$$

En conséquence, elle atteint sa borne inférieur sur A Il existe donc $\alpha > 0$, $\exists x_0 \in A$ tels que

$$\alpha = \|x_0\| = \inf_{x \in A} \|x\|.$$

(Scanné avec CamScanner)

Ainsi $\exists \alpha > 0$ qui est tel que

$$\alpha \leq \|x\| \qquad \forall x \in A.$$

Pour tout $x \neq 0$ de $\mathbb{R}^n, y = \frac{1}{\mu(x)} \in A$ dés lors

$$\alpha \leq \|y\| = \frac{1}{\mu(x)}\|x\|.$$

c'est -Ã -dire : $\alpha\mu(x) \leq \|x\|$. (II)

De (I) et de (II) on a $\|x\| \leq M\mu(x) \leq \alpha\mu(x) \leq \|x\|$
Donc sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes.

(c) Déduisons que sur E toutes les normes sont équivalentes.
Soit $n = \dim E$ et soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.
L'application $f : \mathbb{R}^n \to E$ définie par

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

à $x = (x_1, \cdots, x_n)$ est linéaire continue et bijective. Soit v et η deux normes sur E . Alors, les applications vof et ηof sont des normes de $\mathbb{R}^n$,toutes deus équivalentes Ã μ en vertu de la question (b).En conséquence, il existe m_1, m_2, M_1 et M_2 des réels stictement positifs tels que $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

$$m_1(vof)(x) \leq \mu(x) \leq M_1(vof)(x).$$

$$m_2\mu(x) \leq (\eta of)(x) \leq M_2\mu(x).$$

Donc $\forall y \in E$.

$$m_1 v(y) \leq \mu(f^{-1}(y)) \leq M_1 v(y) \text{(i)}$$

$$m_2\mu(f^{-1}(y)) \leq \eta(Y) \leq M_2\mu(f^{-1}(y)). \text{(ii)}$$

(ii) donne $\frac{\mu(f^{-1}(y)}{m_2)} \leq \frac{\eta(Y)}{m_2} \leq \frac{M_2\mu(f^{-1}(y))}{m_2}$. (iii)
(ii) × (iii) donne :

$$m_1 v(y) \leq \frac{\eta(Y)}{m_2} \leq \frac{M_1 M_2 v(y)}{m_2} \qquad \forall y \in E.$$

Scanné avec CamScanner

Donc les normes $\nu et \eta$ sont équivalentes. comme $\nu et \eta$ sont prise arbitrairement, alors sur E toutes les normes sont équivalentes.

(d) démontrons que toute application linéaire $g : E \to F$, où F est un espace vectoriel normée, est continue.
soit une application linéaire $g : E \to F$, avec F est un espace vectoriel normée. Soit $n = \dim E$. Alors, d'après la question (a) il existe une application linéaire bijective $f : \mathbb{R}^n \to E$. D'après le cour, f est un isomorphisme.
Posons $h : \mathbb{R}^n \to F$ telle que $h = gof$.
g et f sont linéaires donc h est linéaire. D'après le cour de topologie, toute application linéaire de $\mathbb{K}^n \to F$ avec $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ est continue. Donc h est continue. f est un isomorphisme donc f^{-1} est continue d'où $hof^{-1} = g$ est continue.
Par conséquent toute application linéaire $g : E \to F$, où F est un espace vectoriel normée,est continue.

EXERCICE2
* * * * * *
EXERCICE3

Soit $X = C([0,1])$ l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[0,1]$ muni de la distance de la convergence uniforme D.
(i) Définition et justification de D

$(\mathbb{R}, |.|)$ un espace métrique.
$[0,1]$ est un intervalle fermé donc compact. Soient f et g deux éléments de X.
f et g sont continues sur $[0,1]$ donc bornées sur $[0,1]$ (toute fonction continue sur un conpact est bornée sur ce compact) .
(On rappelle qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite bornée si le nombre
$\delta(f) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in E \cap dom(f)\}$ est fini.)
fixons a dans $[0,1]$ et posons $c = |f(a) - g(a)|$. Alors $\forall x \in [0,1]$, nous avons :

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - g(a)| + |g(a) - g(x)| \leq \delta(f) + c + \delta(g)$$

.
Ceci montre que, pour f et g dans X, le nombre :
$D(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in [0,1]\}$ est fini et définie une application

Scanné avec CamScanner

numérique sur $X \times X$ qui vérifie les propriétés d'une distance. Et c'est cette distance qui est notée D et appelée la distance de la convergence uniforme.

Montons que (X, D) est un espace métrique complet.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de X. Alors
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q > n_0, D(f_p, f_q) < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q > n_0, \sup_{t\in[0,1]} |f_p(t) - f_q(t)| < \varepsilon$ $(*)$
Donc $\forall t \in [0,1]$, la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |.|)$. Comme $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet, alors $t \in [0,1]$, $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $f(t)$ dans $\mathbb{R}$. Soit

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto f(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t)$$

Donc d'après $(*)$, en fixant p et en faisant tendre q vers $+\infty$ on a $\forall p > n_0$, $\forall t \in [0,1]$; $|f_p(t) - f_q(t)| < \varepsilon$ $(**)$
La partie $\{t \in [0,1];\ |f_p(t) - f_q(t)|\}$ est non vide et majorée par ε donc admet une borne supérieure.
$(**) \Rightarrow \sup_{t\in[0,1]} |f_p(t) - f(t)| \leq \varepsilon \Rightarrow D(f_p, f) < \varepsilon$.
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformement vers f. La limite uniforme d'une suite d'application continue étant continue, alors f est continue. Donc f est continue sur $[0,1]$. Par suite $f \in X$.
conclusion : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X qui converge vers un élément $f \in X$ donc (X, D) est complet.

(ii) Soit l'application $F : X \to X$ telle que

$$\forall f \in X,\quad F(f)(x) = \frac{1}{5}\cos(f(x)) + \int_0^x f(t)dt \quad \forall x \in [0,1]$$

- Montrons que F est continue
  . On a : la fonction $x \mapsto \cos x$ est de classe C^∞; Donc continue sur $[0,1]$
  . Comme f est continue sur $[0,1]$, alors la fonction $x \mapsto \cos(f(x))$ continue entant que composée de deux applications continue.
  . La fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est de classe C^1 donc continue.
  Par conséquent F est continue en tant que somme de deux applications

Scanné avec CamScanner

continues.

Montrons que F est lipschitzienne.
Soient $f, g \in X$,on a :

$$\begin{aligned}
|F(f)(x) - F(g)(x)| &= \left|\frac{1}{5}cos(f(x)) + \int_0^x f(t)dt - \frac{1}{5}cos(g(x)) - \int_0^x g(t)dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{5}(cos(f(x)) - cos(g(x))) + \int_0^x (f(t) - g(t))dt\right| \\
&\leq \frac{1}{5}|cos(f(x)) - cos(g(x))| + \left|\int_0^x (f(t) - g(t))dt\right| \\
&\leq \frac{1}{5}|cos(f(x)) - cos(g(x))| + \int_0^x |f(t) - g(t)|\,dt
\end{aligned}$$

Comme f, g sont continue sur $[0,1]$ alors $|f(x) - g(x)|$ est continue sur $[0,1]$ donc atteint sa borne superieure sur $[0,1]$. Alors

$$\begin{aligned}
|F(f)(x) - F(g)(x)| &\leq \frac{1}{5}|cos(f(x)) - cos(g(x))| + \int_0^x \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|dt \\
&\leq \frac{1}{5}|cos(f(x)) - cos(g(x))| + \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)| \int_0^x dt \\
&\leq \frac{1}{5}|cos(f(x)) - cos(g(x))| + x \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|
\end{aligned}$$

Or la fonction cos est 1-lipschitzienne ie
$|cos(f(x)) - cos(g(x))| \leq |f(x) - g(x)|$ donc

$$\begin{aligned}
|F(f)(x) - F(g)(x)| &\leq \frac{1}{5}|f(x) - g(x)| + x \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)| \\
&\leq \frac{1}{5}\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| + x \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|dt \\
&\leq \frac{1}{5}D(f,g) + xD(f;g) \\
&\leq \frac{1}{5}D(f,g) + D(f;g) \quad car \quad x \in [0,1] \\
&\leq \frac{6}{5}D(f,g)
\end{aligned}$$

Conclusion F est lipchitzienne de rapport $\frac{6}{5}$

Scanné avec CamScanner

(III) Montrons que FoF est une contraction dans χ.

On

$$FoF(f)(x) = \frac{1}{5}cos\left(\frac{1}{5}cos(f(x)) + \int_0^x f(t)dt\right) + \int_0^x \left(\frac{1}{5}cos(f(t)) + \int_0^t f(s)ds\right)dt$$

$$\begin{aligned}
FoF(f)(x) - FoF(g)(x) &= \frac{1}{5}cos\left(\frac{1}{5}cos(f(x)) + \int_0^x f(t)dt\right) + \int_0^x \left(\frac{1}{5}cos(f(t)) + \int_0^t f(s)ds\right)d \\
&\quad - \frac{1}{5}cos\left(\frac{1}{5}cos(g(x)) + \int_0^x g(t)dt\right) + \int_0^x \left(\frac{1}{5}cos(g(t)) + \int_0^t g(s)ds\right)dt \\
&= \frac{1}{5}\left(cos\left(\frac{1}{5}cos(f(x)) + \int_0^x f(t)dt\right) - cos\left(\frac{1}{5}cos(g(x)) + \int_0^x g(t)dt\right)\right. \\
&\quad \left. + \int_0^x \left(\frac{1}{5}cos(f(t)) + \int_0^t f(s)ds - \frac{1}{5}cos(g(t)) - \int_0^t g(s)ds\right)dt\right. \\
&= \frac{1}{5}\left(cos\left(\frac{1}{5}cos(f(x)) + \int_0^x f(t)dt\right) - cos\left(\frac{1}{5}cos(g(x)) + \int_0^x g(t)dt\right)\right. \\
&\quad \left. + \int_0^x \left(\frac{1}{5}\left(cos(f(t)) - cos(g(t))\right) + \int_0^t f(s) - g(s)ds\right)dt\right.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|FoF(f)(x) - FoF(g)(x)| \leq &\left|\frac{1}{5}\left(cos\left(\frac{1}{5}cos(f(x)) + \int_0^x f(t)dt\right) - cos\left(\frac{1}{5}cos(g(x)) + \int_0^x g(t)d\right.\right. \\
&+ \left|\int_0^x \left(\frac{1}{5}\left(cos(f(t)) - cos(g(t))\right) + \int_0^t f(s) - g(s)ds\right)dt\right|
\end{aligned}$$

Or cos est 1-lipchitzienne donc $\forall x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{5}\left(cos\left(\frac{1}{5}cos(f(x)) + \int_0^x f(t)dt\right) - cos\left(\frac{1}{5}cos(g(x)) + \int_0^x g(t)dt\right)\right)\right| \leq \\
&\forall x \left|\left(\frac{1}{5}cos(f(x)) + \int_0^x f(t)dt\right) - \left(\frac{1}{5}cos(g(x)) + \int_0^x g(t)dt\right)\right| \\
&\forall x \left|\left(\frac{1}{5}\left(cos(f(x)) - cos(g(x))\right) + \int_0^x f(t) - g(t)dt\right)\right| \\
&\forall x \left(\frac{1}{5}\left|cos(f(x)) - cos(g(x))\right| + \int_0^x |f(t) - g(t)|\,dt\right) \\
&\forall x \left(\frac{1}{5}|f(x) - g(x)| + \int_0^x |f(t) - g(t)|\,dt\right) \\
&\forall x \left(\frac{1}{5}\sup_{x\in[0,1]}|f(x) - g(x)| + \int_0^x \sup_{x\in[0,1]}|f(t) - g(t)|\,dt\right)
\end{aligned}$$

Scanné avec CamScanner

$\leq \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)| + \sup_{x\in[0,1]}|f(t)-g(t)|\int_0^x dt\right)$
$\leq \frac{1}{5}\left(\left(\frac{1}{5}+x\right)\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|\right)$
$\leq \frac{1}{5}\left(\left(\frac{1}{5}+1\right)\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|\right)$ car $x\in[0,1]$
$\leq \frac{6}{25}\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$
$\leq \frac{6}{25}D(f,g)$. (I)

Et de plus on a :
$\left|\int_0^x\left(\frac{1}{5}(cos(f(t))-cos(g(t))) + \int_0^t f(s)-g(s)ds\right)dt\right| \leq$
$\leq \int_0^x\left|\frac{1}{5}(cos(f(t))-cos(g(t)))\right|dt + \int_0^x\left(\int_0^t|f(s)-g(s)|\,ds\right)dt$
$\leq \int_0^x \frac{1}{5}|f(t)-g(t)|\,dt + \int_0^x\left(\int_0^t|f(s)-g(s)|\,ds\right)dt$
$\leq \int_0^x \frac{1}{5}\sup_{x\in[0,1]}|f(t)-g(t)|\,dt + \int_0^x\left(\int_0^t\sup_{x\in[0,1]}|f(s)-g(s)|\,ds\right)dt$
$\leq \frac{1}{5}\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|\int_0^x dt + \int_0^x\left(\sup_{s\in[0,1]}|f(s)-g(s)|\int_0^t ds\right)dt$
$\leq \frac{x}{5}\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)| + \int_0^x t\left(\sup_{s\in[0,1]}|f(s)-g(s)|\right)dt$
$\leq \frac{x}{5}\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)| + \left(\sup_{s\in[0,1]}|f(s)-g(s)|\right)\int_0^x t dt$
$\leq \frac{x}{5}\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)| + \frac{x^2}{2}\left(\sup_{s\in[0,1]}|f(s)-g(s)|\right)$
$\leq \frac{1}{5}\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)| + \frac{1}{2}\left(\sup_{s\in[0,1]}|f(s)-g(s)|\right)$ car $x\in[0,1]$
$\leq \frac{7}{10}\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|$
$\leq \frac{7}{10}D(f,g)$ (II).

De (I) et de(II) on montre que : $\forall x\in[0,1]$

$$|FoF(f)(x)-FoF(g)(x)| \leq \frac{6}{25}D(f,g) + \leq \frac{7}{10}D(f,g)$$

ie

$$\sup_{x\in[0,1]}|FoF(f)(x)-FoF(g)(x)| = D(FoF(f),FoF(g)) \leq \frac{47}{50}D(f,g)$$

comme $\frac{47}{50}<1$ alors FoF est une contraction.

(iv) Déduisons l'existance et l'unicité d'une application $g\in X$ telle que

$$g(x) = \frac{1}{5}cos(g(x)) + \int_0^x g(t)dt$$

Scanné avec CamScanner

d'après la question (i) et (iii) (X,D) est complet et FoF est une contraction de X dans X.
Donc FoF admet un point fixe unique $g \in X$ telle que

$$g(x) = FoF(g)(x) = \frac{1}{5}cos(g(x)) + \int_0^x g(t)dt$$

Scanné avec CamScanner

EXAMEN DE TOPOLOGIE 1ère session 2016-2017

Exercice 1

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés et g une application linéaire de E dans F

a) Montrons que g est continue ssi elle est bornée sur la sphère unité de E

• Supposons que g est continue

On a g une application linéaire continue sur F alors $\exists M > O$ tel que quel que soit $x \in E$ on a

$\|g(x)\|_F \leq M\|x\|_E \Rightarrow \forall x \in E, \|x\|_E = 1$ on a

$\|g(x)\|_F \leq M$

Donc g est bornée sur la sphère unité de E

• Supposons que g est bornée sur la sphère unité de E

De cette hypothèse on a $\forall x \in E, \|x\|_E = 1$

$\exists M > O$ tel que $\|g(x)\|_F \leq M$

Soit $x_0 \in E$. Montrons que g est continue en x_0.

Prenons $y \in E\backslash\{0\}$

Soit

$$v = \frac{y}{\|y\|_E}$$

On a $\|v\|_E = 1$ alors

$$\|g(v)\|_F \leq M \Rightarrow \|g(\frac{y}{\|y\|_E})\|_F \leq M$$

Comme g est une application linéaire alors on aura $\|g(y)\|_F \leq M\|x\|_E$ avec $y \in E\backslash\{0\}$

Donc g est continue

b) On considère que E est de dimension finie.

Montrons qu'il existe un réel positif M tel que

$\forall x \in E$ tel que $\|x\|_E = 1, \|g(x)\|_F \leq M$.

On a g une application linéaire de E dans F

De plus $\dim E = 1 < +\infty$ donc g est continue.Ainsi d'après a) g est bornée sur la sphère unité de E

Alors $\exists M > O$ et $x \in E, \|x\|_E = 1$ tels que $\|g(x)\|_F \leq M$

Exercice 2

Soit (X, d) un espace métrique compact et f une application linéaire continue de X dans X

On suppose que

Scanné avec CamScanner

$$\forall x \in X, f^2(x) \neq x \qquad f^2 = f \circ f$$

a) Montrons que l'application $g : X \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = d(x, f^2(x))$ est continue.
Soit

$$\alpha : X \to \mathbb{R}^2$$
$$x \mapsto (x, f^2(x))$$

$$\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto d(x, y)$$

Donc $g = \beta \circ \alpha$
Montrons que α et β sont continues
Par hypothèse f est continue donc $f^2 = f \circ f$ est continue
D'où $\alpha(x) = (x, f^2(x))$ est continue car ses composantes sont continues
On a l'application distance qui est continue donc β est continue.
Ainsi $g = \beta \circ \alpha$ est continue.

b) L'application g admet-elle une borne inférieure?
On a (X, d) un espace métrique compacte et g une application linéaire continue sur X.Alors g admet une borne inférieure et une borne supérieure.De plus elle atteint ses bornes.

c) Montrons qu'il existe un réel $k > 0$ tel que

$$\forall x \in X : d(x, f^2(x)) \geq k.$$

Par définition d'une distance on a $\forall x \in X : d(x, f^2(x)) \geq 0$.
Or $\forall x \in X, f^2(x) \neq x$
Donc $d(x, f^2(x)) > 0 \quad \forall x \in X$
D'après b) g atteint sa borne inf.
Soit donc $k = \inf g(x)$ alors on aboutit à :

$$g(x) \geq k > 0$$

Exercice 3

Scanné avec CamScanner

1. Soit (X,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X qui converge vers $y \in X$.
Démontrons que $K = \{x_{n/n\in\mathbb{N}}\} \cup \{y\}$ est compact.
Soit $F = \{O_i, i \in I\}$ un recouvrement ouvert de K.
Alors $K \subset \cup_{i\in I} O_i \Rightarrow \{x_{n/n\in\mathbb{N}}\} \cup \{y\} \subset \cup_{i\in I} O_i$.
Alors $\exists i_0 \in \mathbb{N}/\{y\} \in O_{i_0}$.
Comme $\lim_{x\to+\infty} x_n = y$ alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N, x_n \in O_{i_0}$.
D'où n<N $\Rightarrow x_n \in \cup_{i=1}^{N-1} O_i$.
Par la suite $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in (\cup_{i=1}^{N-1} O_i) \cup O_{i_0}$
Par conséquent $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\} \subset (\cup_{i=1}^{N-1} O_i) \cup O_{i_0}$
D'où $K \subset (\cup_{i=1}^{N-1} O_i) \cup O_{i_0}$ qui est un recouvrement fini.Ainsi K est compact.

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et propre :

   a) Montrons que si f est propre alors l'image de toute partie fermée de $\mathbb{R}^n$ est fermée.
   Supposons f propre.Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.Démontrons que $f(F)$ est fermée.
   On a bien $f(F) \subset \overline{f(F)}$
   Montrons donc que $\overline{f(F)} \subset f(F)$.
   Soit $y \in \overline{f(F)} \Rightarrow \exists une suite (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $f(F)$ qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$.
   Notons $K = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ qui est compact.On a
   $y_n \in f(F) \Rightarrow \exists x_n \in F/f(x_n) = y_n$
   $y_n \in f(F) \Rightarrow x_n = f^{-1}(y_n)$ qui est compact car f est propre.
   Ainsi on peut extraire une sous-suite convergente $x_{\varphi(n)}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x.
   Par suite $x_{\varphi(n)} \in F$ or F est fermée donc $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x \in F$.
   Ainsi $y_n = f(x_n) \Rightarrow f(x_{\varphi(n)}) = y_{\varphi(n)}$
   $\lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)}$ car f est continue.
   Or $\lim y_{\varphi(n)} = x$ donc $f(x) = \lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)}$ or y_n converge vers y d'où $y_{\varphi(n)}$ converge vers y.Ainsi $f(x) = y$ dès lors $y \in f(F)$ par conséquent $\overline{f(F)} \subset f(F)$.
   Conclusion $f(F)$ est fermé.

   b) Etablissons l'équivalence :
   f est propre ssi $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$
   • Supposons f propre
   $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$ revient à dire que

(Scanné avec CamScanner)

$\forall M > 0, \exists m > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n, x \notin B(0,m) \Rightarrow f(x) \notin B(0,M)$
Soit M>0,on a B(0,M) est compact dans $\mathbb{R}^n$.Comme f est propre alors $f^{-1}(B(0,M))$ est bornée.
Alors $\exists m > 0$ tel que $f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$.Donc si $x \notin B(0,m)$ alors $f(x) \notin B(0,M)$.Par conséquent on a bien
$\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$
• Supposons $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$ et montrons que f est propre. Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.
montrons que $f^{-1}(K)$ est compact
K est une partie compacte alors K est fermée.Etant donné que f est continue,alors $f^{-1}(K)$ est fermée.
De plus K compact $\Rightarrow$ K est bornée.Alors $\exists M > 0, K \subset B(0,M)$.
Or $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$
i.e :$x \notin B(0,m) \Rightarrow f(x) \notin B(0,M)$
$f(x) \in B(0,M) \Rightarrow x \in B(0,m)$
$x \in f^{-1}(B(0,M)) \Rightarrow x \in B(0,m)$
Donc $f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$
Or $K \subset B(0,M) \Rightarrow f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$
donc $f^{-1}(K) \subset B(0,m)$
Or $K \subset B(0,M) \Rightarrow f^{-1}(K) \subset f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$
donc $f^{-1}(K) \subset B(0,m)$ d'où $f^{-1}(K)$ est bornée.
$f^{-1}(K)$ est donc fermée et bornée donc compact ce qui conclut que f est propre.

Scanné avec CamScanner

EXAMEN DE TOPOLOGIE 2esession 2016-2017

Exercice 1

Soit A un réel strictement positif.(E,D) l'espace des fonctions numériques continues définies sur [0,A].

T :E$\longrightarrow$E,$x \mapsto T(x)$ tel que :

$T(x)(t) = 1 + \int_0^t x(s)ds$

a) Définition de D

$(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace métrique.

$[0, A]$ est un intervalle fermé borné donc compact. Soient f et g deux éléments de X.

f et g sont continues sur $[0, A]$ donc bornées sur cet intervalle (toute fonction continue sur un compact est bornée sur ce compact).

(Rappelons qu'une fonction de E dans $\mathbb{R}$ est dite bornée si le nombre réel $\delta(f) = sup|f(x) - f(y)|; x, y \in E \cap dom(f)$ est fini).

Fixons a dans $[0, A]$ et posons $c = |f(a) - g(a)|$.Alors $\forall x \in [0, A]$,on a :

$|f(x)-g(x)| \leq |f(x)-f(a)|+|f(a)-g(a)|+|g(a)-g(x)| \leq \delta(f)+c+\delta(g)$

ceci montre que pour f et g dans X,le nombre :

$D(f, g) = sup|f(x) - g(x)|; x \in [0, A]$ est fini et définie une application numérique sur $X \times X$ qui vérifie les propriétés d'une distance.

Et c'est cette distance qui est notée D et appelée la distance de la convergence uniforme.

b) Montrons que $T(x) \in E, \forall x \in E$

Soit $x \in E$, on a $\forall t \in [0, A]$

$T(x)(t) = 1 + \int_0^t x(s)ds$

La fonction $t \mapsto x(t)$ est de classe C' sur $[0, A]$ donc continue sur cet intervalle d'où $\int_0^t x(s)ds$ existe et appartient à $\mathbb{R}$.

Dès lors l'application $x \mapsto 1 + \int_0^t x(s)ds$ est de classe C' sur $[0, A]$ donc un élément de E.

Ainsi $\forall x \in E, T(x) \in E$.

c) Montrons que T est lipschitzienne.

soient $x, y \in E, \forall t \in [0, A]$:

$T(x)(t) = 1 + \int_0^t x(s)ds$ et $T(y)(t) = 1 + \int_0^t y(s)ds$

$|T(x)(t) - T(y)(t)| = |\int_0^t (x - y)(s)ds| \leq \int_0^t |(x - y)(s)ds|$

$sup|T(x)(t) - T(y)(t)| \leq supt|x - y|$

$D(T(x), T(y)) \leq A \times D(x, y)$. Comme $A \geq 1$ alors T est A-lipschitzienne.

d) On suppose $A < 1$. Montrons que T admet un point fixe unique.

Scanné avec CamScanner

On a d'après la question précédente :
$D(T(x),T(y)) \leq A \times D(x,y), \forall x,y \in E.\ A < 1$ donc T est une contraction.On montre par ailleurs que (E,D) est complet dés lors d'après le théorème du point fixe T admet un unique point fixe.

e) Soit x le point fixe de T alors on a :
$\forall t \in [0,A]\ :T(x)(t) = x(t)$
$1 + \int_0^t x(s)ds = x(t)$,
comme ces deux fonctions sont de classe C^1 alors on a
$x(t) = x\prime(t)$
De plus pour $t = 0, x(0) = 1$
Ainsi x est l'unique solution du problème de Cauchy
$u\prime(t) - u(t) = 0, t \in [0,A], u(0) = 1$

Exercice 2

1. Soit (X,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in N}$ une suite de points de X qui converge vers $y \in X$.
Démontrons que $K = \{x_{n/n\in N}\} \cup \{y\}$ est compact.
Soit $F = \{O_i, i \in I\}$ un recouvrement ouvert de K.
Alors $K \subset \cup_{i\in I} O_i \Rightarrow \{x_{n/n\in N}\} \cup \{y\} \subset \cup_{i\in I} O_i$.
Alors $\exists i_0 \in \mathbb{N}/\{y\} \in O_{i_0}$.
Comme $\lim_{x\to+\infty} x_n = y$ alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N, x_n \in O_{i_0}$.
D'où n<N $\Rightarrow x_n \in \cup_{i=1}^{N-1} O_i$.
Par la suite $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in (\cup_{i=1}^{N-1} O_i) \cup O_{i_0}$
Par conséquent $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\} \subset (\cup_{i=1}^{N-1} O_i) \cup O_{i_0}$
D'où $K \subset (\cup_{i=1}^{N-1} O_i) \cup O_{i_0}$ qui est un recouvrement fini.Ainsi K est compact.

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et propre :

a) Montrons que si f est propre alors l'image de toute partie fermée de $\mathbb{R}^n$ est fermée.
Supposons f propre.Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.Démontrons que $f(F)$ est fermée.
On a bien $f(F) \subset \overline{f(F)}$
Montrons donc que $\overline{f(F)} \subset f(F)$.
Soit $y \in \overline{f(F)} \Rightarrow \exists unesuite (y_n)_{n\in N}$ de $f(F)$ qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$.
Notons $K = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ qui est compact.On a
$y_n \in f(F) \Rightarrow \exists x_n \in F/f(x_n) = y_n$

Scanné avec CamScanner

$y_n \in f(F) \Rightarrow x_n = f^{-1}(y_n)$ qui est compact car f est propre.
Ainsi on peut extraire une sous-suite convergente $x_{\varphi(n)}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x.
Par suite $x_{\varphi(n)} \in F$ or F est fermée donc $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x \in F$.
Ainsi $y_n = f(x_n) \Rightarrow f(x_{\varphi(n)}) = y_{\varphi(n)}$
$\lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)}$ car f est continue.
Or $\lim y_{\varphi(n)} = x$ donc $f(x) = \lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)}$ or y_n converge vers y d'où $y_{\varphi(n)}$ converge vers y.Ainsi $f(x) = y$ dès lors $y \in f(F)$ par conséquent $\overline{f(F)} \subset f(F)$.
Conclusion $f(F)$ est fermé.

b) Etablissons l'équivalence :
f est propre ssi $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$
• Supposons f propre
$\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$ revient à dire que
$\forall M > 0, \exists m > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n, x \notin B(0,m) \Rightarrow f(x) \notin B(0,M)$
Soit M>0,on a B(0,M) est compact dans $\mathbb{R}^n$.Comme f est propre alors $f^{-1}(B(0,M))$ est bornée.
Alors $\exists m > 0$ tel que $f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$.Donc si $x \notin B(0,m)$ alors $f(x) \notin B(0,M)$.Par conséquent on a bien
$\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$
• Supposons $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$ et montrons que f est propre. Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.
montrons que $f^{-1}(K)$ est compact
K est une partie compacte alors K est fermée.Etant donné que f est continue,alors $f^{-1}(K)$ est fermée.
De plus K compact $\Rightarrow$ K est bornée.Alors $\exists M > 0, K \subset B(0,M)$.
Or $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$
i.e :$x \notin B(0,m) \Rightarrow f(x) \notin B(0,M)$
$f(x) \in B(0,M) \Rightarrow x \in B(0,m)$
$x \in f^{-1}(B(0,M)) \Rightarrow x \in B(0,m)$
Donc $f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$
Or $K \subset B(0,M) \Rightarrow f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$
donc $f^{-1}(K) \subset B(0,m)$
Or $K \subset B(0,M) \Rightarrow f^{-1}(K) \subset f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$
donc $f^{-1}(K) \subset B(0,m)$ d'où $f^{-1}(K)$ est bornée.
$f^{-1}(K)$ est donc fermée et bornée donc compact ce qui conclut que f est propre.

Scanné avec CamScanner

UFR-MI :L3 Année 2017-2018

CORRECTION TOPOLOGIE 1ERE SESSION

EXERCICE 1

1. Montrons que L est :

   (a) Linéarité
   Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$
   $L(\alpha(x_n)_n + \beta(y_n)_n) = (\frac{\alpha x_n + \beta y_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{\alpha x_n}{n+1} + \frac{\beta y_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

$$= (\frac{\alpha x_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} + (\frac{\beta y_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$
$$= \alpha(\frac{x_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} + \beta(\frac{y_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$
$$= \alpha L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \beta L((y_n)_{n\in\mathbb{N}}).$$

   D'où L est linéaire.

   (b) Bijectivité $L : E \to E$ est un endomorphisme car L est linéaire.
      (i) Injectivité :
      Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$
      $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq y_n$
      $L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\frac{x_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $L((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\frac{y_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
      Or $x_n \neq y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.
      D'où $\frac{x_n}{n+1} \neq \frac{y_n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \neq L((y_n)_{n\in\mathbb{N}})$.
      Donc L injective ;
      (ii) Surjectivité : Comme $dim(E) < +\infty$ L étant injective est surjective et donc bijective.

   (c) Continuité
   $L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \leq \|L((x_n)_{n\in\mathbb{N}})\|$

$$\leq \|(\frac{x_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}\|$$

Scanné avec CamScanner

$$\leq \frac{1}{n+1}\max\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\}.$$

D'où L est continue.

2. Montrons que L est un homéomorphisme.
$L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\frac{x_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
Posons $\frac{x_n}{n+1} = y_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow x_n = (n+1)y_n$.
$L^{-1}((\frac{x_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((n+1)y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$((n-1)y_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq \|((n-1)y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|$
$\leq (n-1)\|y_n\|$
$L^{-1}(y_n) \leq (n-1)\max\{|y_n|, n \in \mathbb{N}\}$.
D'où L^{-1} est continue.
De plus L étant continue et bijective alors L est un homéomorphisme.

EXERCICE 2

1.

(i) Montrons que pour toute suite $(x_n)_n$ de X_1 convergeant vers $a \in X_1$ $(f(x_n))_n \longrightarrow f(a) \in X_2$ et $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$

- Supposons que $\forall (x_n) \in X_1$ on a x_n converge vers a $\in X_1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = a$
Soient $(f(x_n))_n \in X_2, \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = f(a)$ (car f est continue et $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$).
Or $f : X_1 \longrightarrow X_2$, alors $f(a) \in X_2$.
Conclusion : Pour toute suite $(x_n)_n$ de X_1 convergeant vers $a \in X_1$. $(f(x_n))_n \longrightarrow f(a) \in X_2$ et $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$

(ii) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$
$x \in \mathbb{Q}, f(x) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$:
$x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, f(x) \in \mathbb{Q}$?
Il s'agit de l'application nulle.

(scanné avec CamScanner

UFR MI :L3 2018-2019

CORRECTION : TOPOLOGIE SESSION 1

Exercice 1

LM 360 Topologie TD4 Exercice 4

Exercice 2

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.
Supposons que $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ où $l \in X$.
A est une partie partout dense d'un espace métrique (X,d), donc $\overline{A} = X$.
Or : $A \subset \overline{A} = X$.
Par conséquent,$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ où $l \in X$.
Conclusion : X est complet.

Exercice 3

1. Montrons que N est une norme sur E

• On peut déjà remarquer que E est un espace vectoriel.
De plus, $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ donc, f est continue sur $[0,1]$. Par conséquent f est bornée sur $[0,1]$ et atteint ses bornes.
On en déduit que f admet une borne supérieure sur $[0,1]$.
De même f' est continue sur $[0,1]$, donc f' admet aussi une borne supérieure sur $[0,1]$.
Conclusion : N est bien une application de E dans $\mathbb{R}_+$.

• Soit $f \in E$.
On a :

$$\begin{aligned} N(f) = 0 &\Leftrightarrow ||f||_\infty + ||f'||_\infty = 0 \\ &\Leftrightarrow ||f||_\infty = 0 \text{ et } ||f'||_\infty = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in [0,1], |f(x)| \leq 0 \text{ et } |f'(x)| \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in [0,1], f(x) = 0 \text{ et } f'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in [0,1], f(x) = 0 \\ N(f) = 0 &\Leftrightarrow f = 0 \end{aligned}$$

Scanné avec CamScanner

• Soit $f \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{aligned} N(\alpha f) &= \|\alpha f\|_\infty + \|(\alpha f)'\|_\infty \\ &= \|\alpha f\|_\infty + \|\alpha f'\|_\infty \\ &= |\alpha| \ \|f\|_\infty + |\alpha| \ \|f'\|_\infty \\ &= |\alpha| \ [\ \|\alpha f\|_\infty + \|\alpha f'\|_\infty] \\ N(\alpha f) &= |\alpha| \ N(f) \end{aligned}$$

• Soient $f, g \in E$.
$\forall x \in [0,1] \quad |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ et $|f'(x)+g'(x)| \leq |f'(x)| + |g'(x)|$

Or : $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, $|g(x)| \leq \|g\|_\infty \ \forall x \in [0,1]$ et $|f'(x)| \leq \|f'\|_\infty$, $|g'(x)| \leq \|g'\|_\infty \ \forall x \in [0,1]$
Donc $\forall x \in [0,1], |f(x)+g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ et
$\forall x \in [0,1], |f'(x)+g'(x)| \leq \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty$

Ainsi : $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de $\{|f(x)+g(x)|, x \in [0,1]\}$ et $\|f'\|_\infty + \|f'\|_\infty$ est aussi un majorant de $\{|f'(x)+g'(x)|, x \in [0,1]\}$
Puis que : $\|f+g\|_\infty$ et $\|f'+g'\|_\infty$ sont respectivement les plus petits majorants de $\{|f(x)+g(x)|, x \in [0,1]\}$ et $\{|f'(x)+g'(x)|, x \in [0,1]\}$.

On en déduit que : $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ et
$\|f'+g'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty$.
Et donc : $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$.

Conclusion : N est une norme sur E

Montrons que (E, N) est un espace de Banach réel

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (E, N).
Soit $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N} \backslash \forall n, m \geq n_0 \ &\Rightarrow N(f_n - f_m) \leq \varepsilon. \\ &\Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty + \|f'_n - f'_m\| \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon \ \text{ et } \ \|f'_n - f'_m\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy pour $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$

Scanné avec CamScanner

On en déduit que : Les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformement vers f et g sur $[0,1]$.
Or : un théorème sur les suites de fonction stipule que f est de classe C^1 et $f' = g$.
Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f'_n - g\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|f'_n - f\| = 0$
Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} N(f_n - f) = \lim\limits_{n\to+\infty} [\, \|f_n - f\| + \|f'n - f'\| \,]$
$\lim\limits_{n\to+\infty} N(f_n - f) = 0 \Rightarrow$ converge vers f dans (E, N).

Conclusion : (E, N) est un espace complet et donc un espace de Banach réel.

2. Soit T l'opérateur défini par E par $\forall f \in E, \forall x \in [0,1]$

$$T(f)(x) = 1 + \int_0^x f(t - t^2)\, dt.$$

a) Montrons que $T \circ T$ est une contraction

Il faut montrer que $\exists k \in [0,1[\backslash \forall f, g \in E$,
$N(T \circ Tf - T \circ Tg) \leq kN(f - g)$ c'est-à-dire
$\|T \circ Tf - T \circ Tg\|_\infty + \|(T \circ Tf)' - (T \circ Tg)'\|_\infty \leq k[\, \|f - g\|_\infty + \|f' - g\|_\infty \,]$.
On a :

$$\begin{aligned}(T \circ Tf)(x) &= 1 + \int_0^x Tf(t - t^2)\, dt \\ &= 1 + \int_0^x \left(1 + \int_0^{t-t^2} f(u - u^2)\, du\right) dt \\ &= 1 + x + \int_0^x \int_0^{t-t^2} f(u - u^2)\, du dt\end{aligned}$$

D'où $(T \circ Tf)'(x) = 1 + \int_0^{x-x^2} f(u - u^2)\, du$

De même, $(T \circ Tg)(x) = 1 + x + \int_0^x \int_0^{t-t^2} g(u - u^2)\, du dt$

Et $(T \circ Tg)'(x) = 1 + \int_0^{x-x^2} g(u - u^2)\, du$

On a :

$$\begin{aligned}(T \circ Tf)(x) - (T \circ Tg)(x) &= \int_0^x \int_0^{t-t^2} f(u - u^2)\, du dt - \int_0^x \int_0^{t-t^2} g(u - u^2)\, du dt \\ &= \int_0^x \int_0^{t-t^2} (f - g)(u - u^2)\, du dt\end{aligned}$$

Scanné avec CamScanner

$$\left|(T\circ Tf)(x)-(T\circ Tg)(x)\right| = \left|\int_0^x\int_0^{t-t^2}(f-g)(u-u^2)\,dudt\right|$$
$$\leq \int_0^x\left|\int_0^{t-t^2}(f-g)(u-u^2)\,du\right|dt.$$

Or : $\left|\int_0^{t-t^2}(f-g)(u-u^2)\,du\right| \leq \int_0^{t-t^2}\left|(f-g)(u-u^2)\right|du$

$u-u^2\in[0,t-t^2]$ et après une étude de la fonction $t\mapsto t-t^2$, on montre que $t-t^2\leq\frac{1}{4}\ \forall t\in[0,1]$.

D'où $0\leq u-u^2\leq\frac{1}{4}\leq 1$, et donc $|(f-g)(u-u^2)|\leq\|f-g\|_\infty$

Donc :

$$|(T\circ Tf)(x)-(T\circ Tg)(x)| \leq \int_0^{t-t^2}\|f-g\|_\infty\,du$$
$$\leq (t-t^2)\|f-g\|_\infty$$
$$|(T\circ Tf)(x)-(T\circ Tg)(x)| \leq \frac{1}{4}\|f-g\|_\infty \text{ Car } t-t^2\leq\frac{1}{4}\ \forall t\in[0,1]$$

On en déduit que :

$$\|T\circ Tf-T\circ Tg\|_\infty\leq\frac{1}{4}\|f-g\|_\infty \qquad (1)$$

On a :

$$|(T\circ Tf)'(x)-(T\circ Tg)'(x)| = \left|\int_0^{x-x^2}f(u-u^2)\,du-\int_0^{x-x^2}g(u-u^2)\,du\right|$$
$$= \left|\int_0^{x-x^2}(f-g)(u-u^2)\,du\right|$$
$$\leq \int_0^{x-x^2}\|f-g\|_\infty\,du$$
$$\leq (x-x^2)\|f-g\|_\infty\,du$$
$$|(T\circ Tf)'(x)-(T\circ Tg)'(x)| \leq \frac{1}{4}\|f-g\|_\infty \text{ car } x-x^2\leq\frac{1}{4}\ \forall x\in[0,1]$$

Par conséquent $\|(T\circ Tf)'-(T\circ Tg)'\|_\infty\leq\frac{1}{4}\|f-g\|_\infty \qquad (2)$

$(1)+(2)\Rightarrow\|T\circ Tf-T\circ Tg\|_\infty+\|(T\circ Tf)'-(T\circ Tg)'\|_\infty\leq\frac{1}{2}\|f-g\|_\infty$

Or : $\frac{1}{2}\|f-g\|_\infty\leq\frac{1}{2}\left[\|f-g\|_\infty+\|f'-g'\|_\infty\right]$

Scanné avec CamScanner

Donc $\|T\circ Tf - T\circ Tg\|_\infty + \|(T\circ Tf)' - (T\circ Tg)'\|_\infty \leq \frac{1}{2}\left[\|f-g\|_\infty + \|f'-g'\|_\infty\right]$

$$N(T\circ Tf - T\circ Tg) \leq \frac{1}{2}N(f-g)$$

Conclusion : $T\circ T$ est une contraction.

b) Montrons que T admet un point fixe et ce point fixe est unique

$T\circ T$ est une contraction et (E,N) est un espace de Banach réel donc complet, ainsi d'après le théorème du point fixe $T\circ T$ admet un unique point fixe, notons h ce point fixe.

• Montrons l'unicité d'un point fixe pour T
Soit $k\in E$, tel que $T(k)=k$.
On a :

$$\begin{aligned} T(k)=k &\Rightarrow T\circ T(k) = T(k) \\ &\Rightarrow (T\circ T)(k) = k. \end{aligned}$$

Donc : k est aussi un point fixe pour $T\circ T$ donc $h=k$

• Montrons que f possède effectivement un tel point fixe.
On a :

$$\begin{aligned} (T\circ T)(h)=h &\Rightarrow T(T(h)) = h \\ &\Rightarrow T\circ (\,T(\,T(h)\,)\,) = T(h) \end{aligned}$$

Donc $T(h)$ est un point fixe de $T\circ T$.
Comme $T\circ T$ possède un unique point fixe h alors $T(h)=h$

Conclusion : h est bien un unique point fixe pour T.

c) Deduisons-en l'existence d'une unique application $f\in E$ telle que :
$f(0)=1$ et $f'(x) = f(x-x^2)\ \forall x\in[0,1]$.

Soit f un point fixe de T.
Donc $T(f)=f$.
T étant dérivable alors $\forall x\in[0,1]$, $T(f)(x)=f(x)$.
Ainsi f est dérivable.

Scanné avec CamScanner

Donc $\forall x \in [0,1]$, $T(f)'(x) = f'(x)$
Or : $T(f)'(x) = f(x - x^2)$
Donc $\forall x \in [0,1]$, $f'(x) = f(x - x^2)$
On a : $T(f)(x) = f(x)$.
Pour $x = 0$, $T(f)(x) = f(0)$
$\Rightarrow 1 + \int_0^0 f(t - t^2)\, dt = f(0)$
$\Rightarrow f(0) = 1$
On en déduit donc l'existence d'une application $f \in E$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x - x^2)$, $\forall x \in [0,1]$

• Montrons que f est unique.
Soit $g \in E$ vérifiant :

$$g(0) = 1 \text{ et } f'(x) = f(x - x^2),\ \forall x \in [0,1]$$

Comme g est continue sur $[0,1]$ alors elle est Riemann-intégrable.
Donc : $\int_0^x g'(t)\, dt = \int_0^x g(t - t^2)\, dt$
$\Rightarrow g(x) - g(0) = \int_0^x g(t - t^2)\, dt$
$\Rightarrow g(x) = g(0) + \int_0^x g(t - t^2)\, dt$
$\Rightarrow g(x) = 1 + \int_0^x g(t - t^2)\, dt$

Par conséquent $T(g)(x) = g(x)\ \forall x \in [0,1]$.
D'où : $T(g) = g$
Conclusion : g est un point fixe de T
Donc $g = f$
Ainsi : f est unique.
En définitive : il existe une unique application $f \in E$ telle que : $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x - x^2)\ \forall x \in [0,1]$.

CORRECTION DE L'EXAMEN DE MESURE
LICENCE3-Mention :Mathematiques 2015-2016

I. On donne $X = \{1;2;3;4;5;6\}, A = \{1;3;5\}$ et $B = \{4;5;6\}$

1. Les eléments de l'algèbre $\mathcal{A}$ de parties de X engendré par $\mathcal{E} = \{A;B\}$

On a : $A \cap B = \{5\}$
donc posons $C = A \cap B = \{5\}, D = A \setminus B = \{1;3\}$,
$E = B \setminus C = \{4;6\}$ et $F = X \setminus (A \cup B) = \{2\}$
C,D,E et F constituent alors une partition de X.
Ansi

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\{A;B\}) &= \mathcal{A}(\{C;D;E;F\})\\ &= \{\emptyset; X; \textit{toutes les reunions finies d'elements de } \{C;D;E;F\}\}\\ &= \{\emptyset; X; C; D; E; F; C\cup D; C\cup E; C\cup F; D\cup E;\\ &\quad D\cup F; E\cup F; C\cup E\cup D; C\cup F\cup D; F\cup D\cup E\}\\ &= \{\emptyset; \{1;2;3;4;5;6\}; \{5\}; \{1;3\}; \{4;6\}; \{2\}; \{4;5;6\}; \{2;5\}; \{1;3;5\};\\ &\quad \{1;3;4;6\}; \{1;2;3\}; \{2;4;6\}; \{1;3;4;5;6\}; \{1;2;3;5\}; \{1;2;3;4;6\}\}\end{aligned}$$

2. $\mathcal{A}$ est bien une $\sigma-$*algebre* de parties de X car elle est stable par reunion dénombrable.
3. Mesure de probabilité μ sur $(X,\mathcal{A})$ verifiant :
$\mu(A) = \frac{1}{3}, \mu(B) = \frac{1}{4}$ et $\mu(A \cup B) = \frac{1}{2}$

μ est une mesure de probabilité ssi μ est une mesure positive et $\mu(X) = 1$.
la mesure de probabilité est donc definie par :
$\mu(\emptyset) = 0, \mu(X) = 1, \mu(A) = \frac{1}{3}, \mu(B) = \frac{1}{2}, \mu(A \cup B) = \frac{1}{2}$
$\mu(C) = \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cup B) = \frac{1}{12}$
$\mu(D) = \mu(A \setminus c) = \mu(A) - \mu(c) = \frac{1}{4}$
$\mu(E) = \mu(B \setminus c) = \mu(B) - \mu(c) = \frac{1}{6}$
$\mu(F) = \mu(X \setminus (A \cup B)) = \mu(X) - \mu(A \cup B) = \frac{1}{2}$
$\mu(C \cup D) = \mu(C) + \mu(D) = \frac{1}{3}, \mu(C \cup E) = \mu(C) + \mu(E) = \frac{1}{4}$
$\mu(C \cup F) = \mu(C) + \mu(F) = \frac{7}{12}, \mu(D \cup E) = \mu(D) + \mu(E) = \frac{5}{12}$
$\mu(D \cup F) = \mu(D) + \mu(F) = \frac{3}{4}$

Scanné avec CamScanner

$\mu(E\cup F)=\mu(E)+\mu(F)=\frac{7}{3}, \mu(C\cup E\cup D)=\mu(C)+\mu(E)+\mu(D)=\frac{1}{2}$
$\mu(C\cup F\cup D)=\mu(C)+\mu(F)+\mu(D)=\frac{10}{12}$
$\mu(F\cup D\cup E)=\mu(F)+\mu(D)+\mu(E)=\frac{11}{12}$

II. f est une application d'un ensemble Ω dans un autre X

1. Montrons que :
   (a) $\forall T\in\mathcal{P}(X)\quad f^{-1}(X\setminus T)=\Omega\setminus f^{-1}(T)$
   On a
   $$\begin{aligned}f^{-1}(X\setminus T)&=\{\omega\in\Omega/\ f(\omega)\in X\setminus T\}\\&=\{\omega\in X/\ f(\omega)\in X \text{ et } f(\omega)\notin T\}\\&=\{\omega\in\Omega/\ f(\omega)\notin T\} \text{ car } f \text{ est une application donc } \forall\omega\in\Omega, f(\omega)\in X\\&=\{\omega\in\Omega/\ \omega\notin f^{-1}(T)\}\\&=\Omega\setminus f^{-1}(T)\end{aligned}$$
   (b) $\forall A,B\in\mathcal{P}(X)\quad f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$
   On a
   $$\begin{aligned}f^{-1}(A\cap B)&=\{\omega\in\Omega/\ f(\omega)\in A\cap B\}\\&=\{\omega\in\Omega/\ f(\omega)\in A \text{ et } f(\omega)\in B\}\\&=\{\omega\in\Omega/\ f(\omega)\in A\}\cap\{\omega\in\Omega/\ f(\omega)\in B\}\\&=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)\end{aligned}$$
   (c) $\forall(A_n)_{n\geq 0}\in\mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}\quad f^{-1}(\bigcup_{n\geq 0}A_n)=\bigcup_{n\geq 0}f^{-1}(A_n)$
   On a
   $$\begin{aligned}f^{-1}\Big(\bigcup_{n\geq 0}A_n\Big)&=\Big\{\omega\in\Omega/\ f(\omega)\in\bigcup_{n\geq 0}A_n\Big\}\\&=\Big\{\omega\in\Omega/\ \bigcup_{n\geq 0}\{f(\omega)\in A_n\}\Big\}\\&=\bigcup_{n\geq 0}\{\omega\in\Omega/\ f(\omega)\in A_n\}\\&=\bigcup_{n\geq 0}f^{-1}(A_n)\end{aligned}$$

Scanné avec CamScanner

2. $\mathcal{S}$ est une σ-algebre de parties de Ω et μ une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{S})$

(a) Montrons que $f(\mathcal{S}) = \{T \subset X / \ f^{-1}(T) \in \mathcal{S}\}$ est une tribu de parties de X

On a :$\mathcal{S}$ est une tribu donc $\Omega \in \mathcal{S}$.

- Par définition $f(\mathcal{S}) \subset \mathcal{P}(X)$.
- $X \in f(\mathcal{S})$ car $X \subset X$ et $f^{-1}(X) = \Omega \in \mathcal{S}$.
  Donc $f(\mathcal{S})$ est non vide
- Soit $T \in f(\mathcal{S})$, $X \setminus T \subset X, f^{-1}(X \setminus T) = \Omega \setminus f^{-1}(T) \in \mathcal{S}$
  car $\mathcal{S}$ est une tribu.
  Donc $X \setminus T \in f(\mathcal{S})$
- soit $A, B \in f(\mathcal{S})$ alors $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$
  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$ car $\mathcal{S}$ est une tribu.
  Donc$A \cap B \in f(\mathcal{S})$
- soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'élements de $f(\mathcal{S})$,
  donc $\forall n \geq 0, f^{-1}(A_n) \in \mathcal{S}$ $f^{-1}(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{S}$
  car$\mathcal{S}$ est une tribu.
  Donc $\bigcup_{n\geq 0} A_n \in f(\mathcal{S})$

Ainsi $f(\mathcal{S})$ est une tribu de parties de X

(b) On pose : $\forall T \in f(\mathcal{S})\ \nu(T) = \mu(f^{-1}(T))$
Montrons que ν est une mesure positve sur $(X, f(\mathcal{S}))$
$T \in f(\mathcal{S})$ donc $f^{-1}(T) \in \mathcal{S}$ et $\emptyset \in \mathcal{S}$ car$\mathcal{S}$ est une tribu.

- $\nu(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ car μ est une mesure positive
- Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments disjoint de $f(\mathcal{S})$ on a :

$$\nu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \mu(f^{-1}(\bigcup_{n\geq 0} A_n)) = \mu(\bigcup_{n\geq 0} f^{-1}(A_n))$$

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \neq n$
alors $f^{-1}(A_m) \cap f^{-1}(A_n) = f^{-1}(A_m \cap B_n) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ donc les $f^{-1}(A_n)$ sont disjoints. D'ou $\mu(\bigcup_{n\geq 0} f^{-1}(A_n)) = \sum_{n\geq 0} \mu(f^{-1}(A_n))$
par conséquent $\nu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \sum_{n\geq 0} \nu(A_n)$

Ainsi ν est une mesure positive

III. X est un ensemble non vide. Pour tous sous ensemble E de X on pose :

$$\mu^*(E) = \begin{cases} 0 & si \quad E = \emptyset \\ 1 & si \quad E \neq \emptyset \end{cases}$$

1. montrons que μ^* est une mesure exterieur sur X

Scanné avec CamScanner

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- Soit $A \subset B \subset X$
  (a) $A, B \neq \emptyset$
  on a : $\mu^*(A) = \mu^*(B) = 1$
  (b) $A = \emptyset, B \neq \emptyset$
  on a $\mu^*(A) = 0 \leq \mu^*(B) = 1$
  (c) $A = \emptyset, B = \emptyset$
  on a $\mu^*(A) = \mu^*(B) = 0$
  donc $\forall A \subset B \subset X, \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- Soit $A, A_n \in \mathcal{P}(X)$ tel que $A \subset \bigcup_{n\geq 0} A_n$
  $A \subset \bigcup_{n\geq 0} A_n \Rightarrow, \exists n_0$ tel que $A = A_{n_0}$
  On a

$$\sum_{n\geq 0} \mu^*(A_n) = \mu^*(A_{n_0}) + \sum_{n\geq 0, n\neq n_0} \mu^*(A_n)$$

or par définition de μ^*

$$\sum_{n\geq 0, n\neq n_0} \mu^*(A_n) \geq 0$$

donc $\mu^*(A) = \mu^*(A_{n_0}) \leq \sum_{n\geq 0} \mu^*(A_n)$ par conséquent

$$\left.\begin{array}{c} \forall A, A_n \in \mathcal{P}(X) \\ A \subset \bigcup_{n\geq 0} A_n \end{array}\right\} \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n\geq 0} \mu^*(A_n)$$

Ainsi μ^* est une mesure exterieure sur X

2. Soit A un sous-ensemble de X tel que : $A \neq \emptyset$ et $X \setminus A \neq \emptyset$.
A n'est pas μ^*-mesurable car $X = A \cup (X \setminus A)$ donc

$$1 = \mu^*(X) = \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = 1 + 1 = 2$$

absurde

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE MESURE S1 2016-2017

EXERCICE 1

Soit X un ensemble non vide.

1) Montrons que si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite de parties de X et $A = \bigcup_{n\geq 0} A_n$, alors $A\backslash(\bigcap_{n\geq 0} A_n) = \bigcup_{n\geq 0}(A\backslash A_n)$

Soit $x \in X$
On a $x \in A\backslash(\bigcap_{n\geq 0} A_n) \Leftrightarrow x \in A$ et $x \notin \bigcap_{n\geq 0} A_n$
$\Leftrightarrow x \in A$ et $(x \notin A_0$ ou $\cdots$ ou $x \notin A_n$ ou $\cdots)$
$\Leftrightarrow (x \in A$ et $x \notin A_0)$ ou $\cdots$ ou $(x \in A$ et $x \notin A_n)$ ou $\cdots$
$\Leftrightarrow x \in A\backslash A_0$ ou $\cdots$ ou $x \in A\backslash A_n$ ou $\cdots$
$\Leftrightarrow x \in A\backslash A_0 \cup \cdots \cup x \in A\backslash A_n \cup \cdots$
$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{n\geq 0}(A\backslash A_n)$
Ainsi $A\backslash(\bigcap_{n\geq 0} A_n) = \bigcup_{n\geq 0}(A\backslash A_n)$

2) Soit $\mathcal{R}$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}(x)$ verifiant :
(i) $\forall A, B \in \mathcal{R}, A\backslash B \in \mathcal{R}$
(ii) $\forall (A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$, $\bigcup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{R}$

a) Montrons que $\forall (A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$, $\bigcap_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{R}$
Soit $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$.
Posons $A = \bigcup_{n\geq 0} A_n$, alors d'après (ii), $A \in \mathcal{R}$ et d'après (i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $A\backslash A_n \in \mathcal{R}$. En appliquant l'hypothèse (ii) à la suite $(A\backslash A_n)_{n\geq 0}$ on a $\bigcup_{n\geq 0}(A\backslash A_n) \in \mathcal{R}$ or d'après la question 1) on a $A\backslash(\bigcap_{n\geq 0} A_n) = \bigcup_{n\geq 0}(A\backslash A_n)$. Alors $A\backslash(\bigcap_{n\geq 0} A_n)\mathcal{R}$. En appliquant l'hypothèse (i) aux éléments A et $A\backslash(\bigcap_{n\geq 0} A_n)$ ou $A\backslash(A\backslash(\bigcap_{n>0} A_n)) \in \mathcal{R}$ or $A\backslash(A\backslash(\bigcap_{n\geq 0} A_n)) \in \mathcal{R} = \bigcap_{n\geq 0} A_n$ alors $\bigcap_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{R}$

b) Montrons que $\mathcal{R}$ est une T-algèbre de parties de X si et seulement si X edst un élément de $\mathcal{R}$.

($\Rightarrow$) supposons que $\mathcal{R}$ est une T-algèbre de parties de X. $\mathcal{R}$ est une T-algèbre de parties de X suppose que $\mathcal{R}$ est une algèbre de parties de X. Ce

Scanné avec CamScanner

qui implique que $X \in \mathcal{R}$.

($\Leftarrow$) supposons que $X \in \mathcal{R}$.
En ajoutant cette nouvelle hypothèse aux hypothèses (i), (ii) et on sait que $\mathcal{R} \neq \phi$, On montre facilement que $\mathcal{R}$ est une T-algèbre de parties de X

EXERCICE 2

Soit X un ensemble non vide, $\mathcal{T}$ une tribu de parties de X et μ une mesure positive sur $(X, \mathcal{T})$.

1) Montrons que $\forall\, T, S \in \mathcal{T}$ on a : $\mu(T \cup S) + \mu(T \cap S) = \mu(T) + \mu(S)$

Soit $T, S \in \mathcal{T}$ on a $S\cup = (S\backslash T) \cup (T\backslash S) \cup (T \cap S)$, $S\backslash T, T\backslash S$ et $T \cap S$ sont des éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints. Donc $\mu(T \cup S) = \mu(S\backslash T) + \mu(T\backslash S) + \mu(T \cap S)$ (1)
On a aussi, $\begin{cases} T = (T\backslash S) \cup (T \cap S) \\ (T\backslash S) \cap (T \cap S) = \phi \end{cases}$ donc $\mu(T) = \mu(T\backslash S) + \mu(T \cap S)$
de même, $\begin{cases} S = (S\backslash T) \cup (T \cap S) \\ (S\backslash T) \cap (T \cap S) = \phi \end{cases}$ donc $\mu(S) = \mu(S\backslash T) + \mu(T \cap S)$
Ainsi, on a $\mu(T) + \mu(S) = \mu(T\backslash S) + \mu(S\backslash T) + \mu(T \cap S) + \mu(T \cap S)$
or d'après (1) on a $\mu(S\backslash T) + \mu(T\backslash S) + \mu(T \cap S) = \mu(T \cup S)$
d'où $\mu(T \cup S) + \mu(T \cap S) = \mu(T) + \mu(S)$ CQFD

2)Une condition necessaire et suffisante sur μ pour que l'on ait $\forall\, T, S \in \mathcal{T}$, $\mu(T \cup S) = \mu(T) + \mu(S) - \mu(T \cap S)$ (*)
Il faut et il suffit que la mesure μ soit finie c'est à dire $\mu(X) < +\infty$

3) Ona suppose que μ verifie (*). Montrons que $\forall\, (T_1, T_2, T_3) \in \mathcal{T}^3$ on a : $\mu(T_1 \cup T_2 \cup T_3) = \mu(T_1) + \mu(T_2) + \mu(T_3) - \mu(T_1 \cap T_2) - \mu(T_1 \cap T_3) - \mu(T_2 \cap T_3) + \mu(T_1 \cap T_2 \cap T_3)$

Appliquons (*) sur les deux éléments $T_1 \cup T_2$ et T_3 de $\mathcal{T}$. On a : $\mu(T_1 \cup T_2 \cup T_3) = \mu(T_1 \cup T_2) + \mu(T_3) - \mu[(T_1 \cup T_2) \cap T_3]$ (2)
on a $(T_1 \cup T_2) \cap T_3 = (T_1 \cap T_3) \cup (T_2 \cup T_3)$
appliquons (*) sur $T_1 \cap T_3$ et $T_2 \cap T_3$ puis sur T_1 et T_2
$\mu[(T_1 \cap T_3) \cup (T_2 \cap T_3)] = \mu(T_1 \cap T_3) + \mu(T_2 \cap T_3) - \mu(T_1 \cap T_2 \cap T_3)$

$\mu(T_1 \cup T_2) = \mu(T_1) + \mu(T_2) - \mu(T_1 \cap T_3)$
Ainsi l'expression (2) devient : $\mu(T_1 \cup T_2 \cup T_3) = \mu(T_1) + \mu(T_2) + \mu(T_3) - \mu(T_1 \cap T_2) - \mu(T_1 \cap T_3) - \mu(T_2 \cap T_3) + \mu(T_1 \cap T_2 \cap T_3)$
CQFD

EXERCICE 3

$\Omega = \{a, b, c\}$. On pose : $\mathcal{T}(\phi) = 0$, $\mathcal{T}(\{a\}) = 1$, $\mathcal{T}(\{b\}) = \mathcal{T}(\{c\}) = 2$, $\mathcal{T}(\{a, b\}) = \mathcal{T}(\{a, c\}) = \mathcal{T}(\{b, c\}) = 3$ et $\mathcal{T}(\Omega) = 4$

1) Montrons que $\mathcal{T}$ est une mesure exterieure sur Ω et que $\mathcal{T}$ n'est pas une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

Rappel : une application $\zeta : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est appelée mesure exterieure sur X lorsque :
(i) $\zeta(\phi) = 0$
(ii) $\forall, A, B \in \mathcal{P}(\Omega)\ A \subset B \Rightarrow \zeta(A) \leq \zeta(B)$
(iii) $\forall, (A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{P}(\Omega)^{\mathbb{N}}$, $\zeta(\bigcup_{n\geq 0} A_n) \leq \sum_{n\geq 0} \zeta(A_n)$
Dans notre cas, Ω est fini et on a : $\mathcal{P}(\Omega) = \{\phi, \Omega, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$.
verifions (i),(ii) et (iii).
(i) On a $\mathcal{T}(\phi) = 0$
(ii) On a d'abord : $\forall\ A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{T}(A) \leq \mathcal{T}(\Omega)$ et on a :
$\mathcal{T}(\{a\}) < \mathcal{T}(\{a, b\}), \mathcal{T}(\{a, c\})$
$\mathcal{T}(\{b\}) < \mathcal{T}(\{a, b\}), \mathcal{T}(\{b, c\})$
$\mathcal{T}(\{c\}) < \mathcal{T}(\{a, c\}), \mathcal{T}(\{b, c\})$
(iii) On a $\Omega = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$ et $\mathcal{T}(\Omega) < \mathcal{T}(\{a\}) + \mathcal{T}(\{b\}) + \mathcal{T}(\{c\})$. Ainsi, on verifie pour toutes les reunions possibles.
Par exemple ; $\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$ et $\mathcal{T}(\{a, b\}) = 3, \mathcal{T}(\{a\}) + \mathcal{T}(\{b\}) = 1+2 = 3$
Ainsi de suite $\cdots$
Alors $\mathcal{T}$ est une mesure exterieure sur Ω. Par contre, on a $\Omega = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$: reunion disjointe, or on a $\mathcal{T}(\Omega) = 4$ et $\mathcal{T}(\{a\}) + \mathcal{T}(\{b\}) + \mathcal{T}(\{c\}) = 1+2+2 = 5$
Alors $\mathcal{T}$ n'est pas une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

2) Quels sonts les sous-ensembles de Ω qui sont $\mathcal{T}-$Mesurables ?

Rappel : Un sous-ensemble A de Ω est dit $\mathcal{T}-$Mesurable lorsque : $\forall\ \epsilon \in \Omega$,

(scanné avec CamScanner

$\mathcal{T}(\epsilon) = \mathcal{T}(\epsilon \cap A) + \mathcal{T}(\epsilon \backslash A)$.
Ainsi on verifie que $\{a\}$ est le seul sous-ensemble non vide de Ω qui est $\mathcal{T}-$Mesurable.
Rappelons que l'ensemble vide $\mathcal{T}-$Mesurable car $\forall\ \epsilon \in \Omega$, $\mathcal{T}(\epsilon \cap \phi) + \mathcal{T}(\epsilon \backslash \phi) = \mathcal{T}(\phi) + \mathcal{T}(\epsilon) = \mathcal{T}(\epsilon)$

Scanné avec CamScanner

UFR :L3

2019

CORRECTION E.C.U.E MESURES SESSION 1

EXERCICE 1

Définition :

1. Une tribu de partie de X.
   Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$ $(\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X))$
   $\mathcal{A}$ est une tribu de partie de X si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :

   i) $\{\varnothing, X\} \subset \mathcal{A}$

   ii) $\forall A \in \mathcal{A},\ X, A \backslash \mathcal{A}$

   iii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}},\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

2. Une mesure positive su. (X, T)
   Soit (X, T) un espace mesurable et
   $\mu : T \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application vérifiant :
   $A \longmapsto \mu(A)$

   i) $\mu(\varnothing) = 0$

   ii) $\forall\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ une suite d.d.d $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

3. Partie négligeable de $(X, \mathcal{T}, \mu)$.
   Soit $A \subset X$. On dit A est négligeable s'il existe $B \in \mathcal{T}$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

4. Mesure complète.
   μ est une mesure dite complète si toute partie partie négligeable de X est dans $\mathcal{T}$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2

On pose $\mathcal{D}_A = \{A \cap E : E \in \mathcal{D}\}$.

1. Montrons que $\mathcal{D}$ une tribu sur $X \Rightarrow \mathcal{D}_A$ est une tribu sur A.

   On a : $\forall \in \mathcal{D}$, $A \cap E \in \mathcal{D}_A$, or $A \cap E \subset A$ car $\begin{cases} A \subset X \\ E \subset X \end{cases}$
   $\Rightarrow A \cap E \in \mathcal{P}(A)$
   Ainsi $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{P}(A)$

   i) On a : $A \cap X = A$ car $A \in \mathcal{P}(X)$
   $A \in \mathcal{P}(X) \Rightarrow A \subset X$
   $\Rightarrow A \cap X = A \in \mathcal{D}_A$
   Car $X \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ tribu sur X donc contient X)

   ii) On a : $A \cap \varnothing = \varnothing$
   $\Rightarrow \varnothing \in \mathcal{D}_A$ car $(\varnothing \in \mathcal{D})$
   Ainsi $\{A, \varnothing\} \subset \mathcal{D}_A$.

   iii) Soit $B \in \mathcal{D}_A$
   Alors $\exists E \in \mathcal{D}$ tel que $B = A \cap E$
   $\Rightarrow A \backslash B = A \backslash (A \cap E)$
   $= A \cap (X \backslash E)$
   Or $X \backslash E \in \mathcal{D}$.

   Donc $A \backslash B \in \mathcal{D}_A$.

   iv) Soit $(B_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}_A^{\mathbb{N}}$ on a : $\exists\, (E_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ tel que
   $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $B_i = A \cap E_i$.
   $\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A \cap E_i)$
   $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = A \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i)$
   Comme $\mathcal{D}$ est une tribu alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{D}$.
   D'où $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{D}_A$.
   De tout ce qui précède, on déduit que $\mathcal{D}_A$ est bien une tribu sur A.

Scanné avec CamScanner

2. Posons $B = \{M \subseteq A \backslash M \in \mathcal{D}\}$
Montrons que B est une tribu sur A.

i) On a : $\varnothing \subseteq A$ et $\varnothing \in \mathcal{D}$
$\Rightarrow \varnothing \in \mathcal{D}$
On a : $A \subseteq A$ et $A \in \mathcal{D}$
$\Rightarrow A \in B$.

ii) Soit $M \in B$.
Ainsi $M \subseteq A$ et $M \in \mathcal{D}$.
On a : $A \backslash M \subseteq A$ et $A \backslash M \in \mathcal{D}$.
D'où $A \backslash M \in B$.

iii) Soit$(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$
Ainsi $\forall i \in \mathbb{N}$, $M_i \subseteq A$ et $M_i \in \mathcal{D}$.
$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i \subseteq A$ et $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i \in \mathbb{D}$
D'où $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i \in B$.
Finalement B est une tribu sur A.

3. Soit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Montrons que $(\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}))_A = \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}_A)$.

• Montrons tout d'abord que $\mathcal{D}_A = B$.

Soit $A \cap E \in \mathcal{D}_A \Rightarrow E \in \mathcal{D}$.
On a : $A \cap E \subseteq A$ et $A \cap E \in \mathcal{D}$ car $A \in \mathcal{D}$.
D'où $A \cap E \in B$.
$\Rightarrow \mathcal{D}_A \subset B \quad (1)$

Soit $M \in B$.
D'où $M \subseteq A$ et $M \in \mathcal{D}$.
$\Rightarrow M = A \cap M \in \mathcal{D}_A$ (Car $M \in \mathcal{D}$) d'où $M \in \mathcal{D}_A$.
Ainsi $B \subset \mathcal{D}_A \quad (2)$
De (1) et (2), on conclut que $\mathcal{D}_A = B$.
On sait que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$
$(\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}))_A = \{A \cap E \backslash E \in \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F})\}$

Scanné avec CamScanner

$\mathcal{F}_A = \{A \cap E \setminus E \in \mathcal{F}\}$
$\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}_A)$ est la plus petite tribu de A contenant $\mathcal{F}_A$.

On a : $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X) \Rightarrow \mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{P}(A)$
Montrons que $\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}_A) \subset (\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}))_A$
$(\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}))_A$ est bien une tribu sur A d'après (1) car $\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une tribu sur X.

$\mathcal{F}_A \subset (\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}))_A$?
Soit $T \in \mathcal{F}_A$
$\Rightarrow T = A \cap E$ avec $E \in \mathcal{F}$.
$\Rightarrow T = A \cap E$ avec $E \in \mathcal{F} \subset \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F})$.
$\Rightarrow T = A \cap E$ avec $E \in \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F})$.
$\Rightarrow T \in (\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}))_A$.
D'où $\mathcal{F}_A \subset (\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}))_A$.
Finalement $\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}) \subset (\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}))_A \quad (I)$.
Posons $\mathcal{N} = \{E \subseteq X \setminus A \cap E \in \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}_A)\}$.

$\mathcal{N}$ une tribu sur X ?

i) On a : $\varnothing \subseteq X$ et $\varnothing \cap A = \varnothing \in \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}_A)$
$\Rightarrow \varnothing \in \mathcal{N}$.
On a : $X \subseteq X$ et $A \cap X = A \in \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}_A)$ car tribu sur A.
$\mathcal{N}$ est bien une tribu sur X (Travail analogue que précédent).

$\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F})$? Soit $H \in \mathcal{F}$
$\Rightarrow A \cap H \in \mathcal{F}_A$ or $\mathcal{F}_A \subset \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}_A)$
$\Rightarrow H \subseteq X$. Dóù $H \in \mathcal{N}$.
Ainsi $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}$. D'où $\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{N}$.
Soit $H \in \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F})$
$\Rightarrow H \in \mathcal{N}$
Donc $H \subseteq X$ et $A \cap H \in \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}_A)$
Or $H \in \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}) \Rightarrow A \cap H \in (\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}))_A$
Ainsi $(\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}))_A \subseteq \sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}_A) \quad (II)$
(I) et (II) nous donne : $\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}_A) = (\sigma - \mathcal{A}(\mathcal{F}))_A$

(Scanné avec CamScanner

EXERCICE 3

Soit (E, T, m) un espace mésuré. On note comme $\mathcal{N}_m$ l'ensemble des parties négligéable.
On pose $\overline{T} = \{A \cup N : A \in T, N \in \mathcal{N}_m\}$.

1. Montrons que $\overline{T}$ est une tribu.
   • $\varnothing \in \overline{T}$ car $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing$ et $\varnothing$ appartient à T et $\mathcal{N}_m$ (Car il est de mesure nulle).
   • $\overline{T}$ est stable par passage au complémentaire :
   Soit $C \in \overline{T}$. Il existe $A \in T$ et $N \in \mathcal{N}_m$ tel que $C = A \cup N$. Comme $N \in \mathcal{N}_m$, il existe $B \in T$ tel que $N \subset B$ et $m(B) = 0$.
   On remarque alors que $C^c = E \backslash C = (A \cup N)^c = A^c \cap N^c = (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap N^c \cap B)$
   Comme $A^c \cap B^c \in T$ (par les propriétés de stabilité de T) et $(A^c \cap N^c \cap B) \in \mathcal{N}_m$ (car inclus dans B), on endeduit que $C^c = E \backslash C \in \overline{T}$.
   Donc $\overline{T}$ est stable par passage au complémentaire.
   • $\overline{T}$ est stable par union dénombrable :
   Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{T}$. Il existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_m$ tel que $C_n = A_n \cup N_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_n \in \mathcal{N}_m$, il existe $B_n \in T$ tel que $N_n \subset B_n$ et $m(B_n) = 0$
   On a alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right)$. On remarque que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \subset B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset T$ et $m(B) = 0$ par $\sigma-$sous additibité de m.
   Donc, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \in \mathcal{N}_m$.
   Comme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$, on a finalement $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \overline{T}$. Ce qui prouve bien que $\overline{T}$ est stable par union dénombrable.
   On a bien montré que $\overline{T}$ est une tribu sur E.

   b) On montre maintenant que $T \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$

   • Si $A \in T$,on a : $A = A \cup \varnothing$ comme $\varnothing \in \mathcal{N}_m$ on en déduit $A \subset \overline{T}$.Donc $T \subset \overline{T}$.
   • Si $N \in \mathcal{N}_m$ on a : $N = \varnothing \cup N$. Comme $\varnothing \in T$, on en déduit $N \in \overline{T}$ donc $\mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.
   Finalement, on a bien $T \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$

(Scanné avec CamScanner

2. Soit $A_1, A_2 \subset T$ et $N_1, N_2 \subset \mathcal{N}_m$ tel que $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$.

Montrons que $m(A_1) = m(A_2)$

Soit $B_2 \in T$ tel que $N_2 \subset B_2$ et $m(B_2) = 0$
On a : $A_1 \subset A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \subset A_2 \cup B_2$
Donc par monotonie et sous additivité de m,
$m(A_1) \leq m(A_2 \cup B_2) \leq m(A_2) + m(B_2) = m(A_2)$.
En changeant les rôles de A_1 et A_2, on a aussi $m(A_2) \leq m(A_1)$. On a donc $m(A_1) = m(A_2)$.
Pour $B \in \overline{T}$, soit $A \in T$ et $N \in \mathcal{N}_m$ tel que $B = A \cup N$.
On pose $\overline{m}(B) = m(A)$ (La question précédente montre que cette définition est cohérente.)

3. Montrons que $\overline{m}$ est une mesure sur $\overline{T}$ et $\overline{m}_{\setminus T} = m$.

Montrons que $\overline{m}$ est la seule mesure sur $\overline{T}$ égale à m sur T.

a) On montre d'abord que $\overline{m}$ est une mesure sur $\overline{T}$.

Comme $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing$ et $\varnothing \in T \cap \mathcal{N}_m$, on a $\overline{m}(\varnothing) = m(\varnothing) = 0$
Soit maintenant $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{T}$ tel que $C_n \cap C_m = \varnothing$ si $n \neq m$. $\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_m$ tel que $C_n = A_n \cup N_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}, N_n \in \mathcal{N}_m$, il existe $B_n \in T$ tel que $N_n \subset B_n$ et $m(B_n) = 0$
On a donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right)$. On a déjà vu que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \subset \mathcal{N}_m$. Par définition de $\overline{m}$, on a donc $\overline{m}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$
Comme $C_n \cap C_m = \varnothing$ si $n \neq m$, on a aussi $A_n \cap A_m = \varnothing$ si $n \neq m$ (Car $A_p \subset C_p$ pour tout p)

Scanné avec CamScanner

La $\sigma-$additivité de m (et la définition de $\overline{m}(C_n)$) donc alors :

$$\overline{m}\left(\bigcup_{n\in N} C_n\right) = m\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{n\in N} m(A_n)$$
$$= \sum_{n\in N} \overline{m}(C_n)$$

Ce qui prouve la $\sigma-$additivité de $\overline{m}$.

b) On montre maintenant que $\overline{m}_{\setminus T} = m$:

Si $A \in T$, on a : $A = A \cup \varnothing$ comme $\varnothing \in \mathcal{N}_m$. On a donc ($A \in \overline{T}$, on le savait déjà, et $\overline{m}(A) = m(A)$). Donc $\overline{m}_{\setminus T} = m$

c) Enfin, on montre que $\overline{m}$ est la seule mesure sur $\overline{T}$ égale à m sur T.

Soit $\widetilde{m}$ une mesur sur $\overline{T}$ égale à m sur T
Soit $C \in \overline{T}$. Il existe $A \in T$ et $N \in \mathcal{N}_m$ tel que $C = A \cup N$. Comme $N \in \mathcal{N}_m$, il existe $B \in T$ tel que $N \subset B$ et $m(B) = 0$. On a alors $A \subset C \subset A \cup B$. La monotonie de $\widetilde{m}$, fait que $\widetilde{m} = m$ sur T et la sous-additivité de m donnent :
$m(A) = \widetilde{m}(A) \leq \widetilde{m}(C) \leq \widetilde{m}(A \cup B) = m(A \cup B)$
Or $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B) = m(A)$
$\Rightarrow$ On a donc $\widetilde{m}(C) = m(A) = \overline{m}(C)$. Ce qui prouve que $\widetilde{m} = \overline{m}$.

4. Montrons que $\mathcal{N}_{\overline{m}} = \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$

On a déjà vu (à la question 1) que $\mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.
Il est facile de voir que $\mathcal{N}_m \subset \mathcal{N}_{\overline{m}}$. En effet, Soit $N \in \mathcal{N}_m$. Il existe $B \in T$ tel que $N \subset B$ et $m(B) = 0$. Comme $T \subset \overline{T}$ et que $\overline{m} = m$ sur T. On a donc aussi $B \in \overline{T}$ et $\overline{m}(B) = 0$. Ce qui prouve que $N \in \mathcal{N}_{\overline{m}}$.

• Soit maintenant $N \in \mathcal{N}_{\overline{m}}$. Il existe $C \in \overline{T}$ tel que $N \subset C$ et $\overline{m}(C) = 0$. Comme $C \in \overline{T}$,il existe $A \in T$, $M \in \mathcal{N}_m$ et $B \in T$ tel que $m(B) = 0$ et $C = A \cup M \subset A \cup B$. La définition de $\overline{m}$ donne que $\overline{m}(C) = m(A)$, on a donc $m(A) = 0$. On en déduit $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B) = 0$ et donc comme $C \subset A \cup B$ on a bien $C \in \mathcal{N}_m$

Scanné avec CamScanner

On a bien montré que $\mathcal{N}_{\mathfrak{m}} = \mathcal{N}_{\mathfrak{m}} \subset T$

EXERCICE 4

On donne $T = \{A \in \mathcal{M} : \mu(A) = 1 \text{ ou } \mu(A) = 0\}$

Montrons que T est une tribu sur X.

i) On a : $\varnothing \in \mathcal{M}$ et $\mu(\varnothing) = 0$
$\Rightarrow \varnothing \in T$
• $X \in \mathcal{M}$ car tribu sur X et $\mu(X) = 1$
$\Rightarrow X \in T$
D'où $\{\varnothing, X\} \subset T$

ii) Soit $A \in T$
$\Rightarrow A \in \mathcal{M}$ et $\mu(A) \in \{0, 1\}$.
On a : $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A \subseteq X$
$\Rightarrow X \backslash A \subset X$
$\Rightarrow \mu(X \backslash A) \in \{0, 1\}$
et comme $X \backslash A \in \mathcal{M}$, Alors $X \backslash A \in T$.

iii) Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$
Alors $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{M}$ et $\mu(A_i) \in \{0, 1\}$
On a : $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$
$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_i \subseteq X$
$\Rightarrow$ D'où $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq 1$
$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_i \in T$
Finalement on conclut que T est bien une tribu sur X.

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DU DEVOIR D'INTEGRATION

EXERCICE 2

Soient $A_0 =]-\infty, 0[$; $A_n = [2(n-1), 2n[$, $\forall n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \in A_0 \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } f(x) \in A_n \ ; \ n \geq 1 \end{cases}$$

λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu Borélienne de $\mathbb{R}$.

1°) Montrons que $g = f\chi_{f^{-1}(A_0)} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\chi_{f^{-1}(A_n)}$,

où $\chi_{f^{-1}(A_0)}$ de la fonction indicatrice de $f^{-1}(A_0)$.

$\forall n \geq 1$, $\frac{1}{n^2}\chi_{f^{-1}(A_n)} \geq 0$; donc $\forall n \geq 1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\chi_{f^{-1}(A_n)}$ existe.

$\forall n \geq 1$; $0 \leq \frac{1}{n^2}\chi_{f^{-1}(A_n)} \leq \frac{1}{n^2}$ avec $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}_+^*$,

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\chi_{f^{-1}(A_n)}(x) \in \mathbb{R}_+$.

Par conséquent,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(f\chi_{f^{-1}(A_0)} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\chi_{f^{-1}(A_n)}\right)(x) = f(x)\cdot\chi_{f^{-1}(A_0)}(x) + \sum \frac{1}{n^2}\chi_{f^{-1}(A_n)}(x) \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R} = \bigcup A_n$ est une partition. Donc g est bien une application.

D'où $\mathbb{R} = f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-1}(A_n)$ partition.

(Scanné avec CamScanner)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Alors $\exists ! \, n_0 \in \mathbb{N} \;/\; x \in f^{-1}(A_{n_0})$.

1er cas : $n_0 = 0$

$$f(x)\,\chi_{f^{-1}(A_0)}^{(x)} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n_0^2}\,\chi_{f^{-1}(A_n)}^{(x)} = f(x) \quad \text{car } \chi_{f^{-1}(A_n)}^{(x)} = 0 \;\; \forall\, n \geq 1$$

$x \in f^{-1}(A_0) \Rightarrow f(x) \in A_0 \Rightarrow g(x) = f(x)$.

Donc $g(x) = f(x)\,\chi_{f^{-1}(A_0)}^{(x)} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\,\chi_{f^{-1}(A_n)}^{(x)}$.

2e cas : $n_0 \neq 0$

$$f(x)\,\chi_{f^{-1}(A_0)}^{(x)} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\,\chi_{f^{-1}(A_n)}^{(x)} = \frac{1}{n_0^2} \quad \text{car}$$

$$\chi_{f^{-1}(A_n)}^{(x)} = 0 \quad \forall \; n \neq n_0 .$$

$x \in f^{-1}(A_{n_0})$ avec $n_0 \geq 1$, donc $f(x) \in A_{n_0}$ avec $n_0 \geq 1$

d'où $g(x) = \frac{1}{n_0^2}$.

Donc $g(x) = f(x)\,\chi_{f^{-1}(A_0)}^{(x)} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\,\chi_{f^{-1}(A_n)}^{(x)}$.

Ainsi, dans tous les cas, on a :

$$g(x) = f(x)\,\chi_{f^{-1}(A_0)}^{(x)} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\,\chi_{f^{-1}(A_n)}^{(x)} .$$

Conclusion : $\boxed{g = f\,\chi_{f^{-1}(A_0)} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\,\chi_{f^{-1}(A_n)}}$

Scanné avec CamScanner

2) Déduisons de 1) que g est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable.

f est un polynôme, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

D'où f est ~~Borel~~ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable.

A_0 est un ouvert de $\mathbb{R}$ donc $A_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\forall n \geq 1$, $A_n =]2(n-1), 2n[\cup \{2(n-1)\}$

avec $]2(n-1), 2n[$ ouvert de $\mathbb{R}$ et $\{2(n-1)\}$ un fermé de $\mathbb{R}$.

Donc $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Comme f est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable, $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$

D'où $\chi_{f^{-1}(A_n)}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable $\forall n \in \mathbb{N}$.

$f\chi_{f^{-1}(A_n)}$ est donc $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable par la règle du produit.

$\forall n \geq 1$: $0 \leq \frac{1}{n^2}\chi_{f^{-1}(A_n)}$ qui est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable.

Donc d'après un corollaire du T.C.M ;

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\chi_{f^{-1}(A_n)}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable.

Par conséquent $f\chi_{f^{-1}(A_0)} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\chi_{f^{-1}(A_n)}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable par la règle de la somme.

Ainsi g est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable.

3) Montrons que l'intégrale de g sur $\mathbb{R}$ i/r à la mesure λ existe :

D'après 2°, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\chi_{f^{-1}(A_n)}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable et positive

donc son intégrale par rapport à λ existe et $\in \overline{\mathbb{R}}_+$

$f^{-1}(A_0) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in A_0\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2 \in]-\infty, 0[\}$

$=]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

Scanné avec CamScanner

f est continue et bornée sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$, donc f est Riemann intégrable sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$.

D'après le cours, l'intégrale de f sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ par rapport à λ existe et on a :

$$\int_{]-\sqrt{2},\sqrt{2}[} f\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f\,\chi_{]-\sqrt{2},\sqrt{2}[}\,d\lambda = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x)\,dx \in \mathbb{R}.$$

Donc l'intégrale de g par rapport à la mesure λ ex

4) Calculons $\int_{\mathbb{R}} g\,d\lambda$.

D'après 3°) $\int_{\mathbb{R}} f\,\chi_{f^{-1}(A_0)}\,d\lambda = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x)\,dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^2-2)\,dx$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 2\left(\frac{2}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right) = -\frac{8}{3}$$

D'après le corollaire du T.C.M, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\chi_{f^{-1}(A_n)}\right)d\lambda = \sum_{n\geq 1}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n^2}\chi_{f^{-1}(A_n)}\,d\lambda$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\int_{\mathbb{R}} \chi_{f^{-1}(A_n)}\,d\lambda = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\lambda\left(f^{-1}(A_n)\right)$$

Soit $n\geq 1$, $f^{-1}(A_n) = \{x\in\mathbb{R} / f(x)\in A_n\}$

$$= \{x\in\mathbb{R} / x^2-2 \in [2(n-1), 2n[\}$$

$$= \{x\in\mathbb{R} / x^2 \in [2n, 2n+2[$$

$$= \{x\in\mathbb{R} / |x| \in [\sqrt{2n}, \sqrt{2n+2}[\}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(A_n) =]-\sqrt{2n+2}, -\sqrt{2n}] \cup [\sqrt{2n}, \sqrt{2n+2}[$$

$$\lambda(f^{-1}(A_n)) = \lambda\left(]-\sqrt{2n+2}, -\sqrt{2n}]\right) + \lambda\left([\sqrt{2n}, \sqrt{2n+2}[\right)$$

Scanné avec CamScanner

D'où $\int_{\mathbb{R}} \left(\sum \frac{1}{n^2} \lambda_{f^{-1}(A_n)} \right) d\lambda = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{2n+2} - \sqrt{2n} \right)$

$$= 2 \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{2n+2}}{n^2} - \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{2n}}{n^2} \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}} \right)$$

Donc $\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda = -\frac{8}{3}\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}} \right)$

3) D'après 4°), l'intégrale de g par rapport à λ existe et appartient à $\mathbb{R}$, donc g est λ-intégrable.

$A \times B = \{ (A, B) \mid A \in \mathcal{A} ; B \in \mathcal{B} \}$

$A \otimes B = \{ A \times B \mid A \in \mathcal{A} ; B \in \mathcal{B} \}$.

Scanné avec CamScanner

UFR-MI :L3 Année 2016-2017

CORRECTION INTEGRATION 1ERE SESSION

EXERCICE 1

1. Donnons les définitions des differents types de convergence suivantes :
   (a) La converge $\mu-$p.p
   Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonction limite f. $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f $\mu-$p.p s'il existe Λ tel que $\mu(A)=0$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x), \forall x\in A^c$
   (b) Convergence uniforme
   $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformement vers f si $\forall \epsilon>0, \exists \delta$ telque $\forall x,y\in Df\ |x-y|<\epsilon \Longrightarrow |f_n(x)-f(x)|<\delta$
   (c) Convergence dans L^p
   $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans L^p si : $\lim_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_p=0$
   (d) Convergence en $\mu-$mesure
   $(f_n)_{n\geq 0}$ converge en $\mu-$mesure vers f $\forall \epsilon>0, \lim_{n\to+\infty}\mu(\{x\in X/|f_n(x)-f(x)|\geq r\})=0$
   (e) Convergence $\mu-$p uniforme
   $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f $\mu-$p uniforme si $\forall \delta\in\mathbb{R}_+^*, \exists N_\epsilon$ $\mu-$mesurable tel que $\mu(N_E)<\epsilon$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformement vers f sur $X\backslash N_E$
2. Enonçons les implications entre les différents types de convergence
   - La conevrgence uniforme entraine la convergence $\mu-$p.p qui entraine la convergence μ-mesure d'une suite de fonction à valeur finie.
   - La convergence en L^p entraine la convergence en μ-mesure.
   - La convergence en μ-mesure entraine la convergence μ presque partout d'une suite de fonction à valeur finie.
3. Montrons que la convergence dans L^p, $1\leq p<+\infty$ implique la convergence en μ-mesure
   Posons $E_n:=\{x\in X/|f_n(x)-f(x)|\geq r, \forall r\in \mathbf{N}^*\}$
   - Premier cas :$1\leq p<+\infty$
   D'après l'inegalité de Markov on a $\mu(E_n)\leq [\frac{1}{r}\|f_n-f\|^p$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_p=0$ on a $\lim_{n\to+\infty}\mu(E_n)=0$

Scanné avec CamScanner

- Deuxième cas : $p = +\infty$
  $\exists n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n - f| < r$

$$\Rightarrow \mu(E_n) = 0$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = 0$. Ainsi $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f en $\mu-$mesure.

EXERCICE 2

1. Montrons que $\mathcal{X}_A$ est $\mathcal{B}$-mesurable.
   Soit $B \in \mathcal{B}, \mathcal{X}_A^{-1}(B) = \{x \in X / \mathcal{X}_A(x) \in B\}$
   - Si $0 \in B$ et $1 \notin B$; $\mathcal{X}_A^{-1}(B) = \{x \in X / \mathcal{X}_A(x) = B\} = X \backslash A \in \mathcal{B}$
   - Si $0 \notin B$ et$1 \in B$; $\mathcal{X}_A^{-1}(B) = \{x \in X / \mathcal{X}_A(x) = B\} = A \in \mathcal{B}$
   - Si $0 \notin B$ et $1 \notin B$; $\mathcal{X}_A^{-1}(B) = \{x \in X / \mathcal{X}_A(x) = B\} = \emptyset \in \mathcal{B}$
   - si $0 \in B$ et $1 \in B$; $\mathcal{X}_A^{-1}(B) = \{x \in X / \mathcal{X}_A(x) = B\} = X \in \mathcal{B}$
   - Conclusion : Dans tous les cas $\mathcal{X}_A^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ donc $\mathcal{X}_A$ est $\mathcal{B}$-mesurable.
2. (a) Montrons que $\{f > a\} \in \mathcal{B}$
   $\{f > a\} = \{x \in X / f(x) > a\} = f^{-1}(]a, +\infty[\in \mathcal{B}$ car f est $\mathcal{B}-$mesurable et $]a, +\infty[\in \mathcal{B}$.
   (b) Montrons que : $a\mathcal{X}_{\{f>a\}} \leq f\mathcal{X}_{\{f>a\}}$
   $(*)$ $\forall x \in \{f > a\}, f(x) > a$ et $\mathcal{X}_{\{f>a\}} = 1$ donc $a\mathcal{X}_{\{f>a\}} \leq f\mathcal{X}_{\{f>a\}}$
   $(**)$ $\forall x \notin \{f > a\}, \mathcal{X}_{\{f>a\}} = 0$.
   Donc $a\mathcal{X}_{\{f>a\}} \leq f\mathcal{X}_{\{f>a\}}$
   De $(*)$ et $(**)$ on obtient $\mathcal{X}_{\{f>a\}} \leq f\mathcal{X}_{\{f>a\}}$
   D'où d'après le théorème de convergence monotone (TCM)
   $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu = \int_X f d\mu$
3. (a) Montrons que $\lim_{n\to+\infty} \int_{\{f\leq n\}} f d\mu = \int_X f d\mu$
   On sait que $\int_{\{f\leq n\}} f d\mu = \int_X f\mathcal{X}_{\{f\leq n\}} d\mu$
   On pose $f_n = f\mathcal{X}_{\{f\leq n\}} > 0$ car f et $\mathcal{X}_{\{f\leq n\}} > 0$ et $f\mathcal{X}_{\{f\leq n\}} \leq f\mathcal{X}_{\{f\leq n+1\}}$ car $\{f \leq n\} \subset \{f \leq n+1\}$ donc $f_n \leq f_{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n = f\mathcal{X}_{\{f\leq+\infty\}} = f$.D'où d'après le théorème de convergence monotone (TCM) $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu = \int_X f d\mu$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \int_{\{f\leq n\}} f d\mu = \int_X f d\mu$
   (b) Montrons que $\lim_{n\to+\infty} n\mu(\{f > n\}) = 0$
   $\mu(\{f > n\}) = \mu(\{f^2 \geq n^2\}) \leq \frac{1}{n^2} \int_X f^2 d\mu$

Scanné avec CamScanner

$\mu(\{f > n\}) \leq \frac{1}{n^2}\int_X f^2 d\mu$ (d'après l'inégalité de Markov).
$n\mu(\{f > n\}) \leq \frac{1}{n}\int_X f^2 d\mu$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_X f^2 d\mu = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} n\mu(\{f > n\}) = 0$

4. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} a\mu(\{f > a\}) = 0$
Au vu de la question 3-b.

5. (a) Montrons que $\lim_{n\to+\infty}\int_X f\mathcal{X}_{\{f>\frac{1}{n}\}}d\mu = \int_X f d\mu$
Posons $f_{(n)} = f\mathcal{X}_{\{f>\frac{1}{n}\}} > 0$ car $f > 0$ et $\mathcal{X}_{\{f>\frac{1}{n}\}} > 0$
$f \leq f_{n+1}$ car $\{f > \frac{1}{n}\} \subset \{f > \frac{1}{n+1}\} \Rightarrow \mathcal{X}_{\{f>\frac{1}{n}\}} \leq \mathcal{X}_{\{f>\frac{1}{n+1}\}}$
$\lim_{n\to+\infty} f_n = \lim f\mathcal{X}_{\{f>\frac{1}{n}\}} = f\lambda_{\{f>0\}}$
D'après le TCM on a : $\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu =$
$\int_X f d\mu$ donc $\lim_{n\to+\infty}\int_X f\mathcal{X}_{\{f>\frac{1}{n}\}}d\mu = \int_X f d\mu$

(b) Déduisons
$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \Rightarrow \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, |a_n - a| < \epsilon$
D'après la question 5-a) on a $|\int_X f\mathcal{X}_{\{f>\frac{1}{n}\}}d\mu - \int_X f d\mu| < \epsilon$
On a : $f\mathcal{X}_{\{f>\frac{1}{n}\}} \leq f$
Donc $\int_X f\mathcal{X}_{\{f>\frac{1}{n}\}}d\mu \leq \int_X f d\mu$
$|\int_X f\mathcal{X}_{\{f>\frac{1}{n}\}}d\mu - \int_X f d\mu| = \int_X f d\mu - \int X f\mathcal{X}_{\{f>\frac{1}{n}\}}d\mu < \epsilon$
$\Rightarrow \int_X f d\mu < \epsilon + \int_X f\mathcal{X}_{\{f>\frac{1}{n}\}}d\mu.$
Posons $A = \{f > \frac{1}{n}\}$
$\mu(A) = \mu(\{f > \frac{1}{n}\}) \leq \frac{1}{(\frac{1}{n})}\int_X f d\mu < +\infty$. D'où $\mu(A) < +\infty$
On a donc : $\int_X f d\mu < \epsilon + \int_X f\mathcal{X}_A d\mu$
d'où,$\forall\epsilon > 0, \exists A \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(A) < +\infty$ et $\int_X f d\mu < \epsilon + \int_A f d\mu$

(c) On a : f est $\mu-$negligeable alors f est finie- μpp.
On a $\{f = +\infty\} = \cap_{n\geq 0}\{f > n\}$. $\{x \in X/f(x) = +\infty\} = \{x \in$
$X/f(x) > n, \forall n \in \mathbf{N}\} = \cap_{n\in\mathbf{N}}\{x \in X/f(x) > n\}$ et $(\{f > n\})_{n\in\mathbf{N}}$
est decroissante car $\{f > n+1\} \subset \{f > n\}$
$\mu(\{f = +\infty\}) = \lim_{n\to+\infty}\mu(\{f > n\}) = 0$; $\int_{\{f>n\}} f d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_X f\mathcal{X}_{\{f>n\}}d\mu =$
0 ; $\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0$ on a $|\int_X f\mathcal{X}_{\{f>n\}}| < \epsilon \Longrightarrow \int_{\{f>n\}} f d\mu <$
ϵ
On pose $\delta = \mu(\{f > n\})$
$\forall A \in \mathcal{B}, \mu(A) < \delta$ on a donc $\int_A f d\mu \leq \int_{\{f>n\}} f d\mu < \epsilon$
Ainsi
$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ tel que $\forall A \in \mathcal{B}$,
$\mu(A) < \delta \Longrightarrow \int_A f d\mu < \epsilon$

Scanné avec CamScanner

UFR-MI : L3 Année 2018-2019

CORRECTION : INTEGRATION SESSION 1

EXERCICE 1 (Cours)

EXERCICE 2

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré positif et $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n, f et $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ des applications μ- mesurables.
On suppose que f est u-intégrable, g est positive et $f_n \geq f$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. a) Selon le signe de $f(x)$, montrons que : $(f+g)^- \leq f^-$.
   - Supposons que $f \geq 0$
     On a : $f \geq 0 \Rightarrow f = f^+$ et $f^- = 0$. Par hypothèse $g \geq 0$,
     d'où $(f+g) \leq 0$. Ainsi $f+g = (f+g)^+$ et $(f+g)^- = 0$.
     Donc $(f+g)^- \leq f^-$.
   - Supposons $f < 0$.
     Ona $f < 0 \Rightarrow f = -f^-$ et $f^+ = 0$. On a $(f+g) \geq f$, donc

     $$\Rightarrow -(f+g) \leq -f \qquad (1)$$

     On a $f = -f^- \Rightarrow -f = f^-$ et $f+g = (f+g)^+ - (f+g)^-$.
     Ainsi, $-(f+g) = -(f+g)^+ + (f+g)^-$. L'inéquation 1 devient :

     $$-(f+g)^+ + (f+g)^- \leq f^- \qquad (2)$$

     1er Cas : $(f+g) \geq 0$
     Ce qui donne $(f+g)^- = 0$, or $f^- \geq 0$. Donc on a bien $(f+g)^- \leq f^-$
     2ème Cas : $(f+g) < 0$
     Ce qui donne $(f+g)^+ = 0$. Ainsi, en remplaçant dans 2 on obtient :

     $$(f+g)^- \leq f^-$$

     On conclut dans tous les cas $(f+g)^- \leq f^-$.

   b) Montrons que $\int_X (f+g)d\mu$ existe et appartient à $\overline{\mathbb{R}}_+$.
   On a : f est μ-intégrale donc f^- est μ-intégrale ,
   i.e $\int_X f^- d\mu < +\infty$.
   D'après la question a) on a $(f+g)^- \leq f^-$.
   Comme f et $g \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}$ alors $(f+g) \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}$.
   Donc $(f+g)^- \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}$ et de plus $(f+g)^- \geq 0 \Rightarrow (f+g)^- \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$.

Scanné avec CamScanner

D'où $\int_X (f+g)^- d\mu$ existe et $\in \overline{\mathbb{R}}_+$.
On note $(f+g)^- \leq f^-$, donc $\int_X (f+g)^- d\mu \leq \int_X f^- d\mu < +\infty$.
D'où $(f+g)^-$ est μ-intégrable. Ainsi $\int_X (f+g) d\mu$ existe et est définie par : $\int_X (f+g) d\mu = \int_X (f+g)^+ d\mu - \int_X (f+g)^- d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$

c) Montrons que $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$
On sait que : $\int_X (f+g)^+ d\mu$, $\int_X (f+g)^- d\mu$, $\int_X f^+ d\mu$, $\int_X g^+ d\mu$, $\int_X f^- d\mu$ et $\int_X g^- d\mu$ existent,
car $\int_X (f+g) d\mu$, $\int_X f d\mu$ et $\int_X g d\mu$ existent.
De plus d'après ce qui précède : $\int_X (f+g)^- d\mu \leq \int_X f^- d\mu < +\infty$.
Donc $\int_X (f+g)^- d\mu$ et $\int_X f^- d\mu$ sont finies $(\star)$.
On a par définition :
$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+$, car $g \geq 0$ donc $g = g^+$.
Soit $(f+g)^+ + f^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$.
Par passage à l'intégrale on a :

$$\int_X [(f+g)^+ + f^-] d\mu = \int_X [(f+g)^- + f^+ + g^+] d\mu \qquad (3)$$

Comme $(f+g)^+$, f^-, $(f+g)^-$, f^+ et g^+ sont μ-intégrables positives, d'après le TCM on a :
$\int_X [(f+g)^+ + f^-] d\mu = \int_X (f+g)^+ d\mu + \int_X f^- d\mu$ et
$\int_X [(f+g)^- + f^+ + g^+] d\mu = \int_X (f+g)^- d\mu + \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu$.
Ainsi 3 devient :
$\int_X (f+g)^+ d\mu + \int_X f^- d\mu = \int_X (f+g)^- d\mu + \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu$.
Alors, $(\star)$ nous permet d'écrire :

$$\int_X (f+g)^+ d\mu - \int_X (f+g)^- d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu + \int_X g^+ d\mu.$$

$$\Rightarrow \int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

2. a) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n = (f_n - f) + f$ μ-p.p. .
Il s'agit ici de montrer que l'ensemble

$$B = \{x \in X | f_n(x) \neq [(f_n - f) + f](x)\}$$

est μ-négligeable.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons qu'il existe $x \in X$ tel que $x \in B$, i.e
$f_n(x) \neq [(f_n - f) + f](x)$
On a

$$\begin{aligned}[(f_n - f) + f](x) &= (f_n - f)(x) + f(x) \\ &= f_n(x) - f(x) + f(x).\end{aligned}$$

Scanné avec CamScanner

D'après le cours f μ-intégrale $\Rightarrow \mu(\{x \in X : |f(x)| = +\infty\}) = 0$.
Soit $|f| \neq +\infty$ μ-p.p. .
D'où

$$\begin{aligned}[(f_n - f) + f](x) &= f_n(x) - f(x) + f(x) \\ &= f_n(x) \quad \text{car } f(x) \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ce qui est contradictoire à l'hypothèse précédente. Donc $B = \emptyset \Rightarrow \mu(B) = 0$. Ainsi B est μ-négligeable.
Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, f_n = (f_n - f) + f$ μ-p.p. .

b) Montrons que $\int_X f_n d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$.
On sait $\forall \in \mathbb{N}, f_n \geq f \Rightarrow (f_n - f) \geq 0$. Donc $(f_n - f) \in \mathcal{L}^+$.
On a donc, $f_n = (f_n - f) + f$ avec $(f_n - f) \in \mathcal{L}^+$ et $f \in \mathcal{L}^1$
D'après la question 1) $\int_X [(f_n - f) + f] d\mu$ existe et $\in \overline{\mathbb{R}}_+$
Soit $\int_X f_n d\mu$ existe et $\in \overline{\mathbb{R}}_+$ (juste remplacer g dans 1) par $f_n - f$)

3. a) Montrons que $\underline{\lim} f_n = \liminf f_n \geq f$.
On sait que :
$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \geq f \Rightarrow \inf_{k \geq n} f_k \geq f$
par passage à la limite on obtient :

$$\begin{aligned}&\lim_{n \to +\infty} (\inf_{k \geq n} f_k) \geq f \\ &\Rightarrow \underline{\lim} f_n \geq f.\end{aligned}$$

b) Montrons que $\int_X \underline{\lim} f_n d\mu$ existe et $\in \overline{R}_+$
On a $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}} \Rightarrow \underline{\lim} f_n \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{R}}}$.
De plus

$$\begin{aligned}&\underline{\lim} f_n = (\underline{\lim} f_n - f) + f \qquad \mu - \text{p.p.} \\ &\underline{\lim} f_n \geq f.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après ce qui précède $\int_X \underline{\lim} f_n d\mu$ existe et $\in \overline{R}_+$ ($\underline{\lim}$ joue ici le rôle de f_n dans ce qui précède)

c) Montrons que $\int_X \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n d\mu$.
On a : $f_n - f \in \mathcal{L}^+$.
Alors d'après le lemme de Fatou on a :

$$\int_X \underline{\lim}(f_n - f) d\mu \leq \underline{\lim} \int_X (f_n - f) d\mu.$$

$$\Rightarrow \int_X (\underline{\lim} f_n - f) d\mu \leq \underline{\lim} \int_X (f_n - f) d\mu. \qquad (4)$$

Scanné avec CamScanner

On sait que

$$f_n = (f_n - f) + f$$
$$\Rightarrow \int_X f_n d\mu = \int_X ((f_n - f) + f) d\mu$$
$$\Rightarrow \int_X f_n d\mu = \int_X (f_n - f) d\mu + \int_X f d\mu \qquad \text{d'après 1.c)}$$

Comme $\int_X f d\mu < +\infty$. Alors $\int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu = \int_X (f_n - f) d\mu$ $(\star)$
De façon analogue on a :

$$\underline{\lim} f_n = (\underline{\lim} f_n - f) + f$$
$$\Rightarrow \int_X \underline{\lim} f_n d\mu = \int_X ((\underline{\lim} f_n - f) + f) d\mu$$
$$\Rightarrow \int_X (\underline{\lim} f_n - f) d\mu = \int_X \underline{\lim} f_n d\mu - \int_X f d\mu \qquad (\star\star)$$

$(\star)$ et $(\star\star)$ dans 4 donne :

$$\int_X \underline{\lim} f_n d\mu - \int_X f d\mu \leq \underline{\lim} (\int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu)$$
$$\Rightarrow \int_X \underline{\lim} f_n d\mu - \int_X f d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu.$$

Comme $\int_X f d\mu < +\infty$. Alors

$$\int_X \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n d\mu \qquad \text{CQFM.}$$

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DU DEVOIR DE THEORIE DES GROUPES 2016-2017

EXERCICE 1

Soient $A = \{a, b, c\}$ et le groupe $(\mathcal{P}(A), \Delta)$ où Δ est la loi difference symetrique.

1) Determinons $\mathcal{P}(A)$

$\mathcal{P}(A)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de A et $card(\mathcal{P}(A)) = 2^{card(A)}$. d'où $card(\mathcal{P}(A)) = 2^3 = 8$.
On a : $\mathcal{P}(A) = \{\Phi, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

2) Quelles sont les cardinaux possibles des differents sous-groupes de $\mathcal{P}(A)$?

D'après le theorème de lagrange, les cardinaux possibles des differents sous-groupes de $\mathcal{P}(A)$ sont les diviseurs du cardinal de $\mathcal{P}(A)$, c'est à dire les diviseurs de 8. Ce sont : 1, 2, 4 et 8.

3) Montrons que $\mathcal{H} = \{\Phi, A\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{P}(A)$.

- Montrons que $\mathcal{H} < \mathcal{P}(A)$
-L'ensemble vide(Φ) est l'élément neutre du groupe $\mathcal{P}(A)$ et il est bien élément de $\mathcal{H}$
-la stabilité est trivialement assurée.
-Chaque élément de $\mathcal{H}$ admet un symetrique qui est lui même donc contenu dans $\mathcal{H}$.
Par consequent $\mathcal{H} < \mathcal{P}(A)$
- Montrons que $\mathcal{H} \Delta \mathcal{P}(A)$
La loi difference symetrique est commutative donc $(\mathcal{P}(A), \Delta)$ est un groupe abelien fini, doù tout sous-groupe est distingué. Ainsi $\mathcal{H} \Delta \mathcal{P}(A)$

4) Determinons le groupe quotient $\frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{H}}$, puis la table de sa loi quotient.

On a $card(\frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{H}}) = \frac{8}{2} = 4$
$\frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{H}} = \{\overline{X} / X \in \mathcal{P}(A)\}$ où $\overline{X} = X \Delta \mathcal{H}$
On a $\mathcal{H} = \{\Phi, A\}$, alors $\forall X \in \mathcal{P}(A)$, $\overline{X} = \{X \Delta \Phi, X \Delta A\}$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \overline{X} = \{X, X \Delta A\}$, On a $X \Delta A = (X \cup A) \backslash (X \cap A) = A \backslash X$
D'où $X \in \mathcal{P}(A)$, $\overline{X} = \{X, X \backslash A\}$. Ainsi, on a :
$\overline{\Phi} = \mathcal{H} = \overline{A}$;
$\{\overline{a}\} = \{\{a\}, \{b, c\}\} = \{\overline{b, c}\}$; $\{\overline{b}\} = \{\{b\}, \{a, c\}\} = \{\overline{a, c}\}$
$\{\overline{c}\} = \{\{c\}, \{a, b\}\} = \{\overline{a, b}\}$.
D'où $\frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{H}} = \{\Phi, \{\overline{a}\}, \{\overline{b}\}, \{\overline{c}\}\}$

Table de la loi quotient

Δ	$\overline{\Phi}$	$\{\overline{a}\}$	$\{\overline{b}\}$	$\{\overline{c}\}$
$\overline{\Phi}$	$\overline{\Phi}$	$\{\overline{a}\}$	$\{\overline{b}\}$	$\{\overline{c}\}$
$\{\overline{a}\}$	$\{\overline{a}\}$	$\{\overline{a}\}$	$\{\overline{b}\}$	$\{\overline{c}\}$
$\{\overline{b}\}$	$\{\overline{b}\}$	$\{\overline{c}\}$	$\{\overline{b}\}$	$\{\overline{a}\}$
$\{\overline{c}\}$	$\{\overline{c}\}$	$\{\overline{b}\}$	$\{\overline{a}\}$	$\{\overline{c}\}$

EXERCICE 2

Soit l'anneau quotient $A = \frac{\mathbb{Z}}{23\mathbb{Z}}$

1) Déterminons le groupe multiplicatif $\mathcal{U}(A)$ de A.

23 étant un nombre premier, le groupe multiplicatif est $\mathcal{U}(A) = A \backslash \{\overline{0}\} = \{\overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{22}\}$

2) Trouvons tous les sous-groupes du groupe multiplicatif $\mathcal{U}(A)$

On a $card(\mathcal{U}(A)) = 22 = 2 \times 11$
Les sous-groupes du groupe $\mathcal{U}(A)$, sont de cardinaux diviseurs de 22. C'est à dire : 1, 2, 11 et 22
*Les sous-groupes de cardinaux 1 et 22 sont les sous-groupes triviaux : $\{\overline{1}\}$ et $\mathcal{U}(A)$
*Le sous-groupe de cardinal 2 est constitué de l'élément neutre qui est $\overline{1}$ et d'un élément qui est son propre symetrie. Soit $\mathcal{H}$ ce sous-groupe. Alors $\mathcal{H} = \{\overline{1}, \overline{x}\}$ tel que $(\overline{x})^2 = \overline{1}$. On a $22 \times 22 = 484 = 23 \times 21 + 1$ donc $(\overline{22})^2 = 1$
D'où $\mathcal{H} = \{\overline{1}, \overline{22}\}$
*Soit K le sous-groupe de cardinal 11. $0(K) = 11$ premier.
Donc K est cyclique, c'est à dire que K est engendré par un seul élément de

Scanné avec CamScanner

$\mathcal{U}(A)$.
-Commençons par $\overline{2}$
On a :$\{\overline{2}^0 = \overline{1}; \overline{2}^1 = \overline{2}; \overline{2}^2 = \overline{4}; \overline{2}^3 = \overline{8}; \overline{2}^4 = \overline{16}; \overline{2}^5 = \overline{32} = \overline{23+9} = \overline{9}; \overline{2}^6 = \overline{2}.\overline{2}^5 = \overline{2}.\overline{9} = \overline{18}; \overline{2}^7 = \overline{36} = \overline{23+13} = \overline{13}; \overline{2}^8 = \overline{26} = \overline{23+3} = \overline{3}; \overline{2}^9 = \overline{6}; \overline{2}^10 = \overline{12}; \overline{2}^11 = \overline{24} = \overline{1}\}$ On a de la chance!

Ainsi $K = < \overline{2} > = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{18}\}$

Scanné avec CamScanner

EXAMEN DE THEORIE DE GROUPES ET D'ANNEAUX

1re session 2016-2017

Exercice 1 : $A = \{1, 2, 4\}$,On considère le groupe $(\mathcal{P}(A), \Delta)$ où Δ est la loi différence symétrique :$[A\Delta B = (A \cup B)/(A \cap B)]$

1) Déterminons $\mathcal{P}(A)$
$Card(\mathcal{P}(A)) = 2^3 = 8$
$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, A, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,4\}\}$

2)Les cardinaux possibles des différents sous-groupes de $\mathcal{P}(A)$:
D'après le théorème de Lagrane les cardinaux possibles des différents sous-groupe de $\mathcal{P}(A)$ sont les diviseurs du cardinal de $\mathcal{P}(A)$. C'est-à-dire les diviseurs de 8. ce sont :1, 2, 4 et 8

3)Montrons que $\mathcal{H} = \{\varnothing, \{1,2\}\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{P}(A)$

* Montrons que $\mathcal{H} < \mathcal{P}(A)$.

L'élément neutre du groupe$(\mathcal{P}(A), \Delta)$est $\varnothing$. On a bien $\varnothing \in \mathcal{H}$.
Soit la table suivante :

Δ	$\varnothing$	$\{1,2\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\varnothing$

D'après le tablau $\mathcal{H}$ est stable.
Tout élément de $\mathcal{H}$ admet un symétrique qui est lui même et qui est donc contenu dans $\mathcal{H}$. Par conséquent $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{P}(A)$.

* Montrons que $\mathcal{H}$ est distingué

La loi différence symétrique est commutative donc$(\mathcal{P}(A), \Delta)$est un groupe abélien. Par conséquent tout sous-groupe de$(\mathcal{P}(A), \Delta)$est distingué. En particulier $\mathcal{H}$ est distingué.
Conclusion :$\mathcal{H} \Delta \mathcal{P}(A)$

4)Déterminons le groupe quotien$\frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{H}}$,puis la table de sa loi quotient

On a :$Card(\frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{H}}) = \frac{Card(\mathcal{P}(A))}{Card(\mathcal{H})} = \frac{8}{2} = 4$
On a :$\frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{H}} = \{\overline{X}/X \in \mathcal{P}(A)\}$ où $\overline{X} = X\Delta\mathcal{H}$.

Scanné avec CamScanner

$\mathcal{H} = \{\varnothing, \{1,2\}\}$,donc pour tout $X \in \mathcal{P}(A), \overline{X} = \{X\Delta\varnothing, X\Delta\{1,2\}\} \Rightarrow \overline{X} = \{X, X\Delta\{1,2\}\}$
$\cdot\overline{\varnothing} = \{1,2\} = \mathcal{H}$,
$\cdot\overline{\{1\}} = \{\{1\}, \{1\}\Delta\{1,2\}\} = \{\{1\}, \{2\}\} = \overline{\{2\}}$,
$\cdot\overline{\{4\}} = \{\{4\}, \{4\}\Delta\{1,2\}\} = \{\{4\}, A\} = \overline{A}$,
$\cdot\overline{\{1,4\}} = \{\{1,4\}, \{1,4\}\Delta\{1,2\}\} = \{\{1,4\}, \{2,4\}\} = \overline{\{2,4\}}$.
Ainsi ; $\frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{H}} = \{\overline{\varnothing}, \overline{\{1\}}, \overline{\{4\}}, \overline{\{1,4\}}\}$
Table de la loi quotient

Δ	$\overline{\varnothing}$	$\overline{\{1\}}$	$\overline{\{4\}}$	$\overline{\{1,4\}}$
$\overline{\varnothing}$	$\overline{\varnothing}$	$\overline{\{1\}}$	$\overline{\{4\}}$	$\overline{\{1,4\}}$
$\overline{\{1\}}$	$\overline{\{1\}}$	$\overline{\varnothing}$	$\overline{\{1,4\}}$	$\overline{\{4\}}$
$\overline{\{4\}}$	$\overline{\{4\}}$	$\overline{\{1,4\}}$	$\overline{\varnothing}$	$\overline{\{1\}}$
$\overline{\{1,4\}}$	$\overline{\{1,4\}}$	$\overline{\{4\}}$	$\overline{\{1\}}$	$\overline{\varnothing}$

Pour tout $x, y \in \mathcal{P}(A), \overline{X}\Delta\overline{Y} = \overline{X\Delta Y}$

5)Le groupe $\frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{H}}$ est-il cyclique?

Chaque élément du groupe est son propre symétrique,donc il ne peut existé un élément générateur de tous les éléments du groupe. Par conséquent $\frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{H}}$ ne peut être cyclique.

Exercice 2(Théorème de Sylow).

G est un groupe dont $O(G) = 33$. V_p est le nombre de p-sylow pour tout p premier divisant $O(G)$.

1)Montrons que $V_3 = 1$ et $V_{11} = 1$

$O(G) = 33 = 3 \times 11$
. V_3 étant le nombre de 3-sous-groupe de sylow de G,on a :
- V_3 divise 33 donc $V_3 \in \{1,3,11\}$.
- $V_3 \equiv 1[3] \Rightarrow V_3 = 1$. Alors ,on a un seul 3-sylow.
. V_{11} est le nombre de 11-sylow de G.
- V_{11} divise 33 donc $V_{11} \in \{1,3,11\}$
- $V_{11} \equiv 1[11] \Rightarrow V_{11} = 1$. Alors on a un seul 11-sylow.
Déduction :
. Soit H l'unique 3-sylow. Alors H est l'unique sous-groupe de G d'ordre 3. Par conséquent $H\Delta G$.

Scanné avec CamScanner

. Soit K l'unique 11-sylow. Alors K est l'unique sous-groupe de G d'ordre 11. Par conséquent $K\Delta G$.

2)Montrons que :

* $H \cap K = \{e_G\}$.
On a : $H\Delta G$ et $K\Delta G$ donc $H \cap K < H \Rightarrow O(H \cap K) \backslash O(H)$,de même $H \cap K < K \Rightarrow O(H \cap K) \backslash O(K)$. d'où $O(H \cap K) \backslash pgcd(O(H), O(K))$ or $pgcd(O(H), O(K)) = pgcd(3, 11) = 1$ donc $O(H \cap K) \backslash 1$. D'où $O(H \cap K) = 1$ et par conséquent $H \cap K = \{e_G\}$.
* Tous les éléments de H commutent avec tous les éléments de K.
Soit $h \in H$ et $k \in K$
On a : $(hk)(kh)^{-1} = hkh^{-1}k^{-1} = h(kh^{-1}k^{-1}) \in H$ car $H\Delta G$
De même $(hk)(kh)^{-1} = hkh^{-1}k^{-1} = (hkh^{-1})k^{-1} \in K$ car $K\Delta G$
Ainsi ;On a : $(hk)(kh)^{-1} \in H \cap K = \{e_G\} \Rightarrow (hk)(kh)^{-1} = e_G$. D'où $hk = kh$. Le choix de h et k étant quelconque,alors $\forall h \in H, \forall k \in K; hk = kh$.

*Montrons que $G = HK$.
On a : $H\Delta G, K\Delta G$ et $H \cap K = \{e_G\}$. Alors d'après le théorème du produit direct interne HK est isomorphe à $H \times K$.
$HK \cong H \times K \Rightarrow O(HK) = O(H) \times O(K) = 3 \times 11 = 33 = O(G)$
HK et G sont deux sous-groupes de G de même cardinal,alors $G = HK$.

3)Déduction : G est abélien,puis montrons que G est cyclique.
$G = HK$ donc $G \cong H \times K$.
- On a : $O(H) = 3$ prémier donc H est cyclique et donc abélien.
- De même $O(K) = 11$ prémier donc K est cyclique,K est abélien. Par suite $H \times K$ est abélien. Par conséquent G est abélien.

*Montrons que G est cyclique
H et K sont cycliques et $pgcd(O(H), O(K)) = 1$. Alors $H \times K$ est cyclique. Ainsi,G est cyclique.

Exercice 3
On considère A et B deux anneaux commutatifs unitaires.
1)Montrons que $\mathcal{U}(A \times B) = \mathcal{U}(A) \times \mathcal{U}(B)$.
. Soit $(x, y) \in \mathcal{U}(A \times B)$.
Alors $\exists (a, b) \in A \times B$ tel que $(x, y).(a, b) = (1_A, 1_B) \Rightarrow \begin{cases} x - a = 1_A \\ y - b = 1_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathcal{U}(A) \\ y \in \mathcal{U}(B) \end{cases}$

(scanné avec CamScanner

Ce qui donne $(x,y) \in \mathcal{U}(A) \times \mathcal{U}(B)$.
Ainsi, $\mathcal{U}(A \times B) \subset \mathcal{U}(A) \times \mathcal{U}(B)(1)$.
. Soit $(r,s) \in \mathcal{U}(A) \times \mathcal{U}(B)$.
$r \in \mathcal{U}(A) \Rightarrow \exists a \in A$ tel que $r.a = 1_A$.
$s \in \mathcal{U}(B) \Rightarrow \exists b \in B$ tel que $s.b = 1_B$.
On a : $(a,b) \in A \times B$ et $(r,s)(a,b) = (r.a, s.b) = (1_A, 1_B)$,donc $(r,s) \in \mathcal{U}(A \times B)$.
Ainsi, $\mathcal{U}(A) \times \mathcal{U}(B) \subset \mathcal{U}(A \times B)(2)$.
De (1) et (2),on déduit que $\boxed{\mathrm{U}(\mathrm{A}\times B) = \mathcal{U}(A) \times \mathcal{U}(B)}$

2)Montrons que les idéaux de $A \times B$ sont de la forme $I \times J$ où I est un idál de A et J un idéal de B

N.B : vérifions que si I est un idéal de A et J un idéal de B alors $I \times J$ est bien un idéal de $A \times B$
i) $I \times J < (A \times B, +)$?
.$(O_A, O_B) \in I \times J$ car $\begin{cases} I < A \Rightarrow O_A \in I \\ J < B \Rightarrow O_B \in J \end{cases}$
. Soient $(x,y),(x',y') \in I \times J$.
$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \in I \times J$ car $\begin{cases} I < A \\ J < B \end{cases}$
. $(x,y) = (-x,-y) \in I \times J$ car $\begin{cases} I < A \\ J < B \end{cases}$
Alors $I \times J < (A \times B, +)$.
ii) Soient $(a,b) \in A \times B$ et $(x,y) \in I \times J$.
On a : $(a,b).(x,y) = (a.x, b.y) \in I \times J$ car I et J sont des idéaux
Conclusion :(i) et (ii) donnent que $I \times J$ est bien un idéal de $A \times B$.
Comment sont les idéaux de $A \times B$?
Soit K un idéal de $A \times B$. Posons :
$T_1 = \{a \in A / \exists b \in B \, et (a,b) \in K\}$
$T_2 = \{b \in B / \exists a \in A \, et (a,b) \in K\}$
Montrons que T_1 est un idéal de A et que T_2 est un idéal de B.
* T_1 est un idéal de A?
. Elément neutre.
K étant idéal de $A \times B, (O_A, O_B) \in K$ d'où $O_A \in T_1$
. Stabilité par addition.
Soit $a_1, a_2 \in T_1$.
$(a_1, a_2) \in T_1^2 \Rightarrow \exists (b_1, b_2) \in B^2$ tel que $(a_1, b_1) \in K$ et $(a_2, b_2) \in K$. K est un idéal de $A \times B$ donc $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) \in K \Rightarrow (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in K$.

Scanné avec CamScanner

Ainsi, $a_1 + a_2 \in T_1 \Rightarrow T_1$ est stable pour l'addition.
. Soit $a \in A$ et $a_1 \in T_1$.
$a_1 \in T_1 \Rightarrow \exists b_1 \in B$ tel que $(a_1, b_1) \in K$
On sait que $(a, 1_B) \in A \times B$. Comme K est un idéal de $A \times B$ alors $(a, 1_B).(a_1, b_1) \in K \Rightarrow (a.a_1, b_1) \in K \Rightarrow a.a_1 \in T_1$.
Conclusion : T_1 est un idéal de A.
* Par un raisonnement analogue que le précédent,on montre que T_2 est aussi un idéal de B.
-Montrons que $K = T_1 \times T_2$
* $K \subset T_1 \times T_2$?
Soit $(x, y) \in K$ Alors $x \in A$ et $y \in B$,par définition de T_1 et T_2,on a : $x \in T_1$ et $y \in T_2$.
D'où $(x, y) \in T_1 \times T_2$.
Ainsi, $K \subset T_1 \times T_2$ (1)
* $T_1 \times T_2 \subset K$?.
Soit $(a, b) \in T_1 \times T_2$. Alors il existe $(u, v) \in A \times B$ tel que $(a, v) \in K$ et $(u, b) \in K$.
K est un idéal de $A \times B$ et on a : $\begin{cases} (1_A, O_B) \in A \times B \\ (a, v) \in K \end{cases}$ donc $(1_A, O_B).(a, v) \in K \Rightarrow (a, O_B) \in K$
De même $\begin{cases} (O_A, 1_B) \in A \times B \\ (u, b) \in K \end{cases}$ donc $(O_A, 1_B).(u, b) \in K \Rightarrow (O_A, b) \in K$
K est un sous-groupe de $(A \times B, +)$ donc $(a, O_B) + (O_A, b) \in K$ c'est-à-dire $(a, b) \in K$.
Ainsi, $T_1 \times T_2 \subset K$ (2).
(1) et (2) donnent que $\boxed{K = T_1 \times T_2}$
Conclusion : Les idéaux de $A \times B$ sont de la forme $I \times J$ où I est un idéal de A et J un idéal de B.

3) Quels sont les idéaux maximaux de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

Scanné avec CamScanner

UFR-MI :L3 Année 2017-2018

CORRECTION THEORIE DES GROUPES 1ERE SESSION

EXERCICE 1

1. G et F sont deux groupes d'éléments neutres respectifs e_G et e_F et $\varphi : G \to F$ un morphisme de groupes.

   (a) Montrons que $Ker\varphi$ est sous-groupe distingué de G
   On suppose que G est muni de '$*$' et F de '$\cdot$' . Soit $h \in Ker\varphi$.
   $\forall x \in G$ on a :

$$\begin{aligned} f(x^{-1} * h * x) &= f(x^{-1}) \cdot f(h) \cdot f(x) \\ &= f(x^{-1}) \cdot e_F \cdot f(x) \text{ car } h \in Ker\varphi \\ &= f(x^{-1}) \cdot f(x) = f(x^{-1} * x) = f(e_G) = e_F \\ &\text{car } f \text{ est un morphisme.} \end{aligned}$$

   D'où $x^{-1} * h * x \in Ker\varphi$ c'est-à-dire que $Ker\varphi$ est distingué

   (b) Montrons que φ est injectif ssi $Ker\varphi = e_G$
   ($\Rightarrow$) Supposons que φ est injectif.
   Soit $x \in G$ tel que $f(x) = e_F$. C'est-à-dire $x \in Ker\varphi$. Comme f est un morphisme on a $f(e_G) = e_F$.D'où $f(x) = f(e_G)$.Puisque f est injective, il vient que $x = e_G$. Ainsi $\forall x \in G, x \in Ker\varphi \Rightarrow x = e_G$. Alors $Ker\varphi = \{e_G\}$.
   ($\Leftarrow$) Supposons que $Ker\varphi = \{e_G\}$.
   Soient $x, y \in G$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x * y^{-1}) &= f(x) \cdot f(y^{-1}) \\ &= f(y) \cdot f(y^{-1}) \\ &= f(y * y^{-1}) = f(e_G) = e_F \end{aligned}$$

   . Donc $x * y^{-1} \in Ker\varphi = \{e_G\}$
   $\Rightarrow x * y^{-1} = e_G \Rightarrow x * y^{-1} * y = e_G * y \Rightarrow x = y$.
   D'où φ est injective.

Scanné avec CamScanner

2.

(c) Condition nécessaire et suffisante pour que $\bullet_t$ soit commutative :
Soient $(a,b),(a',b') \in E \times F$. On a :
$(a,b) \bullet_t (a',b') = (a',b') \bullet_t (a,b)$
$\Leftrightarrow (a[t(b)(a')], bb') = (a'[t(b')a], b'b)$
$\Leftrightarrow \begin{cases} bb' = b'b & (1) \\ a[t(b)(a')] = a'[t(b')a] & (2) \end{cases}$
$(1) \Leftrightarrow F$ est commutatif.
$(2) \Leftrightarrow t :\rightarrow Aut(G)\ b \mapsto Id_G$ et G est commutatif.
D'où $\bullet_t$ est commutatif si et seulement si F, G sont commutatif et

$$t : F \longrightarrow Aut(G)$$
$$b \longmapsto Id_G.$$

EXERCICE 3

On note A l'anneau des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et
$I = \{f \in A / f(0) = 0\}$.

1. Montrons que I est un idéal de A .

(i) On note 0_A la fonction identiquement nulle.
$\forall x \in \mathbb{R},\ 0_A(x) = 0 \Leftrightarrow 0_A(0) = 0$ D'où $0_A \in I$.

(ii) Soient $f_1, f_2 \in I$. Alors :
$f_1(0) = f_2(0) = 0 \Leftrightarrow (f_1 + f_2)(0) = f_1(0) + f_2(0) = 0$.
C'est-à-dire $f_1 + f_2 \in I$.

(iii) Soient $f_1 \in I$ et $f_2 \in A$.

$$\begin{aligned}(f_1 \cdot f_2)(0) &= f_1(0) \cdot f_2(0) \\ &= 0 \times f_2(0) \text{ car } f_1 \in I \text{ donc } f_1(0) = 0 \\ &= 0 \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in I.\end{aligned}$$

Alors I est un idéal de A.

2. Vérifions si I est principal :

Soit f_0 definie par $f_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$

(i) Soit $h \in I$.
Alors $h(x) = f_0(x).h(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow h = f_0 h$.
D'où $I \subset \{f_0.f;\ f \in A\}$ $(*)$

Scanné avec CamScanner

(ii) Soit $f_0.f \in \{f_0.f;\ \ f \in A\}$
On a : $(f_0.f)(0) = f_0(0).f(0) = 0.f(0) = 0 \Rightarrow f_0.f \in I$
$\Rightarrow \{f_0.f :\ \ f \in A\} \subset I$ $(**)$
$(*)$ et $(**) \Rightarrow I = \{f_0 \cdot f;\ \ f \in A\}$. D'où I est principal.

3. Montrons que I est premier.
Soient $f_1, f_2 \in A$ tels que $f_1 \cdot f_2 \in I$.
Alors $(f_1 \cdot f_2)(0) = 0$, c-à-d $f_1(0) \cdot f_2(0) = 0$
$\Rightarrow f_1(0) = 0$ ou $f_2(0) = 0$
$\Rightarrow f_1 \in I$ ou $f_2 \in I$.
D'où I est un idÃ©al premier.

Scanné avec CamScanner

EXAMEN DE THEORIE DES NOMBRES : ARITHMETIQUE 2015-2016

(1ère session)

Exercice 1 :
Exercice 2 : } voir TD.

Exercice 3 : (voir cm)

Exercice 4 : Cryptographie, méthode RSA

Bob donne sa clef publique $\sigma \in S(\Omega)$ à Alice.
$\Omega = \{0,1,\dots,9\} \cup \{A,B,\dots,Z\}$ et σ st le produit de cycles.

$$\sigma = (1,N,S,T)(0,A,E)(7,N,M)(1,I,2,K,7)(3,B,H,Z)$$

1) Ecrire σ en produit de cycles à supports disjoints.

On a $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4 \circ \sigma_5$.

Donc $\sigma_1 = (1,N,S,T)$
$\sigma_2 = (0,A,E)$.
$\sigma_3 = (7,N,M)$
$\sigma_4 = (1,I,2,K,7)$
$\sigma_5 = (3,B,H,Z)$.

donc ; $\sigma(0) = \sigma_1(\sigma_2(\sigma_3(\sigma_4(\sigma_5(0))))) = A$, de la même façon on obtient :

$\sigma(A) = E$
$\sigma(E) = 0$

Alors $(0,A,E)$ est un cycle.

• On a $\sigma(1) = I$; $\sigma(I) = 2$; $\sigma(2) = K$; $\sigma(K) = S$;

Scanné avec CamScanner

$\sigma(S) = T$, $\sigma(T) = 1$. Donc $(1, I, 2, K, S, T)$ est un cycle.

- Ona $\sigma(3) = B$; $\sigma(B) = H$; $\sigma(H) = Z$, $\sigma(Z) = 3$ Alors $(3, B, H, Z)$ est un cycle.
- $\sigma(7) = N$, $\sigma(N) = M$ et $\sigma(M) = 7$. Alors $(7 : N, M)$ est un cycle.

Ainsi, σ s'écrit en produit de cycle de support disjoints par : $\sigma = (0, A, E)(1, I, 2, K, S, T)(3, B, H, Z)(7, N, M)$.

NB : Tout élément n'appartenant pas au produit est sa propre image.

2. Alice envoie le message suivant à Bob :

HOMMO ON ZOUBOUTO EMMO KAIN.

Découvrez le message que Bob lira :

Pour découvrir le message on utilise la bijection réciproque σ^{-1}.

par exemple : $\sigma^{-1}(H) = B$, $\sigma^{-1}(0) = 0$ .... Ainsi, le message de Bob est : "BONNE ET HEUREUSE ANNEE 2017"

Scanné avec CamScanner

UFR-MI : L3 Année 2015-2016

CORRECTION : ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE SESSION 1

EXERCICE 1 (Voir exercice 2 de l'examen de 2017-2018)

EXERCICE 2

Résolvons le système $Ax = b$ avec:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Par la méthode de Gauss sans stratégie du pivot

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} L_3 = L3 - L_1 \text{ et } L_4 = L_4 - 2L_1 \text{ donnent :}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} L_3 = L_3 - 2L_2 \text{ et } L_4 = L_4 - L_2 \text{ donnent :}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Alors on a $\begin{cases} x_4 = 3 \\ -6x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 3 \\ x_3 = -\frac{13}{6} \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_1 = -\frac{53}{12} \end{cases}$

2. Par la méthode de Gauss avec stratégie du pivot partiel
On a $\max_{1 \le i \le 4} |a_{i1}| = 4$

Scanné avec CamScanner

D'où, $\tilde{A}^{(1)} = P_1 A$ et $\tilde{b}^{(1)} = P_1 b$ où

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{b}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Étape 1 :

$$\left(\tilde{A}^{(1)}|\tilde{b}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant $L_3 = L_3 - \frac{1}{2}L_1$ et $L_4 = L_4 - \frac{1}{2}L_1$ on obtient :

$$\left(\tilde{A}^{(1)}|\tilde{b}^{(1)}\right) \sim \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \left(A^{(2)}|b^{(2)}\right)$$

On a $\max_{2 \le i \le 4} |a_{i1}^{(2)}| = \frac{3}{2}$, et donc $\tilde{A}^{(2)} = P_2 A^{(2)}$ et $\tilde{b}^{(2)} = P_2 b^{(2)}$, avec

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 9 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{b}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Étape 2 :

$$\left(\tilde{A}^{(2)}|\tilde{b}^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

En effectuant $L_3 = L_3 - \frac{2}{3}L_2$, $L_4 = L_4 + \frac{1}{3}L_2$ on obtient :

$$\left(\tilde{A}^{(2)}|\tilde{b}^{(2)}\right) \sim \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \left(A^{(3)}|b^{(3)}\right)$$

On a $\max_{3 \le i \le 4} |a_{i1}^{(3)}| = 4$, donc $\tilde{A}^{(3)} = P_3 A^{(3)}$ et $\tilde{b}^{(3)} = P_3 b^{(3)}$ où $P_3 = I_3$ et

$$\tilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 9 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{b}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(Scanné avec CamScanner)

Étape 3 :

$$\left(\tilde{A}^{(3)}|\tilde{b}^{(3)}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

En effectuant , $L_4 = L_4 + \frac{1}{2}L_3$ on obtient :

$$\left(\tilde{A}^{(3)}|\tilde{b}^{(3)}\right) \sim \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \left(A^{(4)}|b^{(4)}\right)$$

Ainsi on a , $AX = b \Leftrightarrow A^{(4)}X = b^{(4)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = 3 \\ x_3 = -\frac{13}{6} \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_1 = -\frac{53}{12} \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

UFHB ANNEE 2016-2017
URFMI L3

EXAMEN DE ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE - SESSION 1

EXERCICE 1

Soit A une matrice carrée définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & 0 \\ 1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Ecrivons A sous la forme $A = 4(I - N)$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & & 0 \\ -\frac{1}{4} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{1}{4} \\ 0 & & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = 4(I - N) \text{ avec } N = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & & 0 \\ -\frac{1}{4} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{1}{4} \\ 0 & & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

- Montrons que A est inversible.
  Soit $\| \ \|_\infty$ la norme associée à la matrice A.
  On a $\|N\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = |-\frac{1}{4}| + |-\frac{1}{4}| = \frac{1}{2}$
  $\Longrightarrow \| N \|_\infty \le \frac{1}{2}$
  $\Longrightarrow (I - N)$ est inversible $\Rightarrow 4(I - N)$ est inversible. Finalement A est inversible.
- Déduisons-en que $\|A^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{2}$
  $(I - N)$ est inversible $\Rightarrow \|(I - N)^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{1 - \|N\|_\infty}$
  Or $\|N\|_\infty \le \frac{1}{2} \Rightarrow \|(I - N)^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \le 2$
  Or $A = 4(I - N) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}(I - N)^{-1}$
  $\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{4}\|(I - N)^{-1}\| \le \frac{1}{4} \times 2$
  donc $\|A^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{2}$.
- Déduisons un majorant de $Cond(A)$
  On a $Cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$
  Or $Cond_\infty(A) = \|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty$ et $\|A\|_\infty = 1 + 4 + 1 = 6$

Scanné avec CamScanner

et $\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ alors $Cond_\infty(A) \leq 6 \times \frac{1}{2}$
$\Longrightarrow Cond_\infty(A) \leq 3$ Ainsi 3 est un majorant de $Cond(A)$.

2. λ est valeur propre de A
Soit $(A) = \max\limits_{1\leq i\leq n} |\lambda_i| \leq \|A\|_\infty$ par definition $|\lambda| \leq \|A\|_\infty$
$\hookrightarrow$

$$|\lambda| \leq 6 \qquad (1)$$

De plus $\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{min|\lambda_i|} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \leq min|\lambda_i|$
Or $min|\lambda_i| \leq |\lambda|$
$\Rightarrow$

$$2 < min|\lambda_i| \leq |\lambda|$$

(1) et (2) $\Rightarrow 2 \leq |\lambda| \leq 6$

EXERCICE 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Resolvons le système $AX = b$
Par la méthode de Gauss on a $3 - 1 = 2$ étapes car la matrice est d'ordre 3.

- Etape 1, $k = 1$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Ainsi $AX = b$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{cases}$$

$$(x,\ y,\ z)^T = (1,\ 1,\ 1)^T$$

2. Verifions que A est à diagonale dominante
$2\ et 4 > 0$ donc la matrice est à diagonale strictement dominante.

Scanné avec CamScanner

A étant une matrice à diagonale strictrment dominante, la méthode de Gauss-Seidel et Jacobi est convergente.

3. Déterminons les valeurs propre de A et en déduisons qu'elle est definie positive.

   On a $P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 0 & 2-X & 0 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (2-X)^2(4-x)$

   $Sp(A) = \{2, 4\}$ alors A est definie positive.

4. A est definie positive, symetrique à diagonale strictement dominante et $w \in]0, 2[$ alors la méthode relaxation converge.

VALIDEUR LMD: Conseils - Examens & TD - Corrections

Scanné avec CamScanner

UFR-MI :L3 Année 2016-2017

EXAMEN ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE

Session 2

N.B : Le sujet n'a pas été corrigé dans le valideur édition 2018

Exercice 1

1. Relation entre $Card(A^2)$ et $(Card(A))^2$

On sait que $Card(A) = ||A||.||A^{-1}||$

$\Rightarrow Card(A^2) = ||A^2||.||(A^{-1})^2||$

$$\begin{aligned} Card(A^2) &= ||A^2||.||(A^{-1})^2|| \\ &= ||A.A||.||A^{-1}.A^{-1}|| \\ &\leq ||A||.||A||.||A^{-1}||.||A^{-1}|| \\ &\leq ||A||.||A^{-1}||.||A||.||A^{-1}|| \\ &\leq Card(A).Card(A) \end{aligned}$$

$$\boxed{Card(A^2) \leq (Card(A))^2}$$

2. Montrons que $Card(A^2) = (Card_2(A))^2$

On sait que $Card(A^2) \leq (Card_2(A))^2$

On a : $Card_2(A) = ||A||_2.||A^{-1}||_2$

$$\begin{aligned} Card_2(A) &= ||A||_2.||A^{-1}||_2 \\ &= \sqrt{\rho(A.A)}.\sqrt{\rho(A^{-1}.A^{-1})} \\ &= \sqrt{\rho(A^2)}.\sqrt{\rho((A^{-1})^2)} \\ &= \sqrt{\rho(A^2).\rho((A^{-1})^2)} \end{aligned}$$

$$\boxed{(Card_2(A))^2 = \rho(A^2).\rho((A^{-1})^2)}$$

Posons $\lambda n = \max_{1\leq i\leq n}(\lambda_i)$ et $\lambda_1 = \min_{1\leq i\leq n}(\lambda_i)$

$\Rightarrow \rho(A) = \lambda_n$ et $\lambda(A^{-1}) = \dfrac{1}{\lambda_1}$

$\Rightarrow \rho(A^2) = \lambda_n^2$ et $\rho((A^{-1})^2) = \dfrac{1}{\lambda_1^2}$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \rho(A^2).\rho((A^{-1})^2 = \dfrac{\lambda_n^2}{\lambda_1^2} = Card(A^2)$
Ainsi $Card(A^2) = (Card_2(A))^2$

3. Supposons $Card(A^2) = (Card_2(A))^2$

On a : $(Card_2(A))^2 = \dfrac{\lambda_n^2}{\lambda_1^2}$
$(Card_2(A))^2 = \rho(A\,A^*)\,\rho(A^{-1}(A^{-1})^*)$
$= \rho(A\,A^\top)\,\rho(A^{-1}(A^{-1})^\top)$
(Car A est réel : $A^* = A^\top$)
$(Card_2(A))^2 = \rho(A\,A^\top)\,\rho(A^{-1}(A^\top)^{-1})$
$= \rho(A\,A^\top)\,\rho((A^\top A)^{-1})$
$= \rho(A^\top A)\,\rho((A^\top A)^{-1})$
$= \rho(A^\top A)\,\rho((A^\top A)^{-1})$
Or $\rho(A^\top A) = \lambda_n^2$ et $\rho((A^\top A)^{-1}) = \dfrac{1}{\lambda_1^2}$; Alors $A = A^\top$
Donc A est symétrique.

Exercice 2

1. Montrons que $Ker(A) = 0$.
$Ker(A) = \{V \in \mathbb{R}^n \backslash Av = 0\}$
On a : $< AV, V > \geq\ C\|V\|_2^2$
$< 0, V > \geq\ C\,\|V\|_2^2$
On a : $C > 0$ et $\|V\|_2^2 \geq 0, \forall V \in \mathbb{R}^n$ d'où $\|V\|_2^2 = 0 \Rightarrow V = 0$
Ainsi $Ker(A) = 0$

. Déduisons-en pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, le système linéaire $Ax = b$ admet une unique solution.
D'après ce qui précède, on a : $Ker(A) = 0$, d'où le système $Ax = 0$ admet une unique solution.

2. a) Montrons que $r^{(n)} = (I_n - \alpha A)^n r(0)$
On a : $r^{(n)} = Ax^{(n)} - b$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow r^{(n-1)} = Ax^{(n-1)} - b$
$x^{(x+1)} = x^{(n)} - \alpha(Ax^{(n)} - b),\ \forall x \in \mathbb{N}$
Posons $n = n - 1$
$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \alpha(Ax^{(n-1)} - b)$
Portons $x^{(n)}$ dans $r^{(n)}$.

$$\begin{aligned} r^{(n)} &= Ax^{(n-1)} - \alpha\left(Ax^{(n-1)} - b\right) - b \\ &= Ax^{(n-1)} - \alpha A\left(Ax^{(n-1)} - b\right) - b \\ &= Ax^{(n-1)} - b - \alpha A\left(Ax^{(n-1)} - b\right) \\ &= (I_n - \alpha A)\left(Ax^{(n-1)} - b\right) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{r^{(n)} = (I_n - \alpha A)\, r^{(n-1)}}$

. Montrons que $r^{(n)} = (I_n - \alpha A)^n\, r(0)$
On a : $r(n) = (I_n - \alpha A)\, r^{(n-1)}$
$\Rightarrow r^{(n+1)} = (I_n - \alpha A)\, r^{(n)}$
D'où la suite $r^{(n)}$ est une suite géométrique de raison $(I_n - \alpha A)$
Donc $r^{(n)} = (I_n - \alpha A)^n\, r(0) \quad \forall n \in \mathbb{R}^n$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $||x||_2 < 1$
Montrons que : $||(I_n - \alpha A)\, x||_2^2 \leq \alpha^2 ||A||_2^2 - 2(\alpha + 1)$
On a :

$$\begin{aligned} ||(I_n - \alpha A)\, x||_2^2 &\leq ||I_n - \alpha A||_2^2 ||x||_2^2 \\ &\leq ||I_n||_2^2 - 2\alpha ||I_n||_n ||A||_n + \alpha^2 ||A||_2^2 \\ &\leq 1 - 2\alpha ||A||_2 + \alpha^2 ||A||_2^2 \end{aligned}$$

Car $\forall x \in \mathbb{R}^n ||x||_2 < 1 \Rightarrow ||x||_2^2 < 1$
On a : $< Ax, x > \geq C||x||$
$\Rightarrow ||A||_2 \geq C||x||_2$
$-||A||_2 \leq -C||x||_2$
$-||A||_2 \leq -C$
car $||x||_2 < 1$
D'où $||(I_n - \alpha A)\, x||_2^2 \leq 1 - 2\alpha C||A||_2 + \alpha^2 ||A||_2^2$
$\boxed{||(I_n - \alpha A)\, x||_2^2 \leq \alpha^2 ||A||_2^2 - 2\alpha C + 1}$

c) Déduisons-en $||(I_n - \alpha A)\, x||_2 \leq 1$ pour α appartenant à un intervalle bien choisi.

Scanné avec CamScanner

On a : $||(I_n - \alpha A)x||_2^2 \leq ||(I_n - \alpha A)||_2^2$
Pour que $||(I_n - \alpha A)x||_2 \leq 1$, il faut que $\alpha^2||A||_2^2 - 2\alpha C = 0$
$\Rightarrow \alpha(\alpha||A||_2^2 - 2C) = 0$
$\Rightarrow \alpha = 0$ ou $\alpha||A||_2^2 - 2C = 0$
$\Rightarrow \alpha||A||_2||A||_2 - 2C = 0$ ou $\alpha = 0$
$\Rightarrow \alpha||A||_2||A||_2||I_n|| - 2C = 0$ ou $\alpha = 0$
$\Rightarrow \alpha||A||_2 C - 2C = 0$ ou $\alpha = 0$
$\Rightarrow \alpha||A||_2 - 2 = 0$ ou $\alpha = 0$
$\Rightarrow \alpha = \dfrac{2}{||A||_2}$ ou $\alpha = 0$
$\Rightarrow \alpha = \dfrac{2}{||A||_2}$ or $||A||_2 \geq C||x||_2$
$\Rightarrow \dfrac{1}{||A||_2} \leq \dfrac{1}{C||x||_2} \leq \dfrac{1}{C}$
D'où $\alpha \leq \dfrac{2}{C}$ ou $\alpha = 0$
Ainsi $\alpha \in]-\infty, \dfrac{2}{C}]$.

3. Déduisons une condition nécessaire sur α pour que la suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution de $Ax = b$.
On a : $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \alpha(Ax^{(n)} - b), \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \alpha r^{(n)}$
$x^{(n+1)} - x^{(n)} = -\alpha r^{(n)}$

$$\begin{aligned} ||x^{(n+1)} - x^{(n)}|| &= \alpha||r^{(n)}|| \\ &= \alpha||(I_n - \alpha A)^n r^{(0)}|| \\ &= \alpha|r^{(0)}|\,||(I_n - \alpha A)^n|| \\ &\leq \alpha|r^{(0)}|\,||(I_n - \alpha A)||^n \\ &\leq \alpha|r^{(0)}| \quad car||(I_n - \alpha A)|| < 1 \end{aligned}$$

Donc une condition necessaire est que $\alpha \in [0, \dfrac{2}{C}]$ pour que $x^{(n)}$ converge vers la solution de $Ax = b$

Scanné avec CamScanner

UFR :L3 2017-2018

CORRECTION ANALYSE NUMERIQUE SESSION 1

EXERCICE 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Ecrivons A sous la forme LU où
$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$
Posons $L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ l_{21} \\ l_{31} \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ l_{32} \end{pmatrix}$, $L_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$U_1 = (u_{11}, u_{12}, u_{13}); U_2 = (0, u_{22}, u_{23}), U_3 = (0, 0, u_{33})$

Etape 1 : Déterminons la première colonne de L c'est-à-dire L_1.
Le pzoot de la première colonne de A est 1. On divise donc la première colonne de A par 1 :
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Etape 2 : Déterminons la première ligne de U c'est-à-dire u_1.

C'est tout simplement la preièreligne de A.
Ainsi, $u_1 = (1, -1, 2)$

Etape 3 : Déterminons la deuxième line de u

On sait que $U_{pj} = a_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk}\, u_{kj},\ p < j$.
D'où $u_{22} = a_{22} - l_{21}\, u_{12} = 1 - (-2) \times (-1) = -1$
$u_{23} = a_{23} - l_{21}\, u_{13} = 1 - (-2) \times 2 = 5$
Ainsi, $u_2 = (0, -1, 5)$

Scanné avec CamScanner

Etape 4 : Déterminons la deuxième colonne de L

On sait que : $l_{ip} = \left(a_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk}\, u_{kj}\right) | u_{pp},\ p < i.$

Alors $l_{32} = (a_{32} - l_{31}\, u_{12}) | u_{22} = (2 - (-1) \times (-1)) | -1 = -1$

Donc $L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Etape 5 : Calculons la troisième ligne de U

On sait que $U_{pj} = a_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk}\, u_{kj},\ p \leq j.$

Par conséquent $u_{33} = a_{33} - \sum_{k=1}^{2} l_{3k}\, u_{k3}$

$u_{33} = a_{33} - (l_{31}\, u_{13} + l_{32}\, u_{23}) = 1 - [(-1) \times 2 + (-1) \times 5]$

$u_{33} = +8$

D'où : $u_3 = (0, 0, 8)$

Finalement, on obtient : $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

2. Déterminons de A

On a : $A = LU$

Alors $det(A) = det(L)\, det(U)$

$= det(U)$ car $det(L) = 1$

$= u_{12}\, u_{22}\, u_{33}$ car U est triangulaire

Soit $det(A) = -8$

3. Pour calculer A^{-1} on resout les systèmes linéaires pour les colonnes de A^{-1}

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i.e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/8 \\ -1/8 \\ 3/8 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i.e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5/8 \\ -3/8 \\ 1/8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i.e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3/8 \\ 5/8 \\ 1/8 \end{pmatrix}$

D'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & -5/8 & 3/8 \\ -1/8 & -3/8 & 5/8 \\ 3/8 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -1 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2

Soit le système linéaire $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

1. Méthode de Jacobi avec $x^{(0)} = (2,2,2)^T$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{12-(1\times 2+1\times 2)}{6} \\ \frac{0-(2\times 2+0\times 2)}{4} \\ \frac{6-(1\times 2+2\times 2)}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{12-(1\times(-1)+1\times 0)}{6} \\ \frac{0-(2\times\frac{4}{3}+0\times 0)}{4} \\ \frac{6-(1\times\frac{4}{3}+2\times(-1))}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/6 \\ -2/3 \\ 10/9 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{12-(1\times-\frac{2}{3}+1\times\frac{10}{9})}{6} \\ \frac{0-(2\times\frac{13}{6}+0\times\frac{10}{9})}{4} \\ \frac{6-(1\times\frac{13}{6}+2\times-\frac{2}{3})}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52/27 \\ -13/12 \\ 31/36 \end{pmatrix}$$

Ainsi $x \simeq \begin{pmatrix} 1,926 \\ -1,083 \\ 0,861 \end{pmatrix}$

2. Méthode de Gauss-Seidel

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{12-(1\times 2+1\times 2)}{6} \\ \frac{0-(2\times\frac{4}{3}+0\times 2)}{4} \\ \frac{6-(1\times\frac{4}{3}+2\times(-\frac{2}{3}))}{6} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{12-(1\times 2+1\times 2)}{6} \\ \frac{0-(2\times\frac{4}{3}+0\times 2)}{4} \\ \frac{6-(1\times\frac{4}{3}+2\times(-\frac{2}{3}))}{6} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{12-(1\times-\frac{2}{3}+1\times 1)}{6} \\ \frac{0-(2\times\frac{35}{18}+0\times 1)}{4} \\ \frac{6-(1\times\frac{35}{18}+2\times(-\frac{35}{36}))}{6} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 35/18 \\ -35/36 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{12-(1\times\frac{35}{18}+1\times-\frac{35}{36})}{6} \\ \frac{0-(2\times\frac{431}{216}+0\times 1)}{4} \\ \frac{6-(1\times\frac{431}{216}+2\times(-\frac{431}{432}))}{6} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 431/216 \\ -431/432 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où $x \simeq \begin{pmatrix} 1,995 \\ -0,995 \\ 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE 3

1. Soit LU la factorisation LU de A. On va intercaler dans cette factorisation la matrice réelle $D = diag\left(\sqrt{|u_{ii}|}\right)$

   On a : $A = (LD)(D^{-1}U) = B\,\widetilde{B}$. Avec $\widetilde{B} = D^{-1}U$.

   La symétrie de A entaine $B\,\widetilde{B} = \widetilde{B}^T\,B^T$.

   On a : $\widetilde{B}\,(B^T)^{-1}$ matrice triangulaire supérieure car $\widetilde{B}\,(B)^{-1} = (D^{-1}U)\,(B^T)^{-1}$

   avec $\begin{cases} B^T \text{ et } (B^T)^{-1} \text{ triangulaire supérieure} \\ U \text{ triangulaire supérieure} \end{cases}$

   $B^{-1}\,\widetilde{B}^T$ matrice triangulaire inférieure et $\widetilde{B}\,(B^T)^{-1} = B^{-1}\widetilde{B}^T$ et donc $\widetilde{B}\,(B^T)^{-1} = B^{-1}\,\widetilde{B}$

   D'où $\widetilde{B}\,(B^T)^{-1} = B^{-1}\,\widetilde{B} = diag\,(Sign(u_{ii})) = S$

   $\Rightarrow \widetilde{B}\,(B^T)^{-1}\,S^{-1} = I = S^{-1}\,B^{-1}\,(\widetilde{B})^T \Leftrightarrow \widetilde{B}^T = BS = C$

   Donc A peut être mise sous la forme $A = BC^T$ avec $C = BS$. C'est-à-dire la i-ème colonne de C est égale à la i-ème colonne de B affectée

Scanné avec CamScanner

du signe de u_{ii}

2. Application numérique.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$diag\, u_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = LD$ avec $D = diag\sqrt{|u_{ii}|} = I$. D'où $B = L$.

Ainsi $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

Examen deuxième session

Analyse numérique matricielle

2017-2018

Exercice 1

Soit le système suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Méthode de Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 1 & 9 \\ -2 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & -9 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_4 \\ L_4 \leftarrow L_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -9 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_4 \leftarrow L_2 - 3L_4 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -9 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -15 & -5 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

On obtient une solution en faisant la montée :

C'est-à-dire $x_4 = 1$

On a : $-15x_3 - 5x_4 = -20 \Rightarrow x_3 = 1$

On a : $3x_2 - 9x_3 + 4x_4 = -2 \Rightarrow x_2 = 1$

On a : $2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \Rightarrow x_1 = 1$

Exercice 2

1.

Scanné avec CamScanner

2. Itération de Gauss-Seidel : $(D-E)X_{n+1} = FX_n + b$ avec

$$D-E = \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ 0 & 2 & 3 & & \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, -F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 3 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $e_n = X_n - X^*$, $X_{n+1} = (D-E)^{-1}FX_n + (D-E)^{-1}b$, $X^* = (D-E)^{-1}FX^* + (D-E)^{-1}b \Rightarrow e_{n+1} = (D \quad E)^{-1}Fe_n$

On obtient alors $(D-E)e_{n+1} = (D-E)^{-1}Fe_n$ et si on écrit composante à composante on obtient

$3e^1_{n+1} = -e^2_n \Rightarrow |e^1_{n+1}| \leqslant \frac{1}{3}\|e_n\|_\infty$

$e^1_{n+1} + 2e^2_{n+1} = -e^3_n \Rightarrow |e^2_{n+1}| \leqslant \frac{1}{6}\|e_n\|_\infty + \frac{1}{2}\|e_n\|_\infty = \frac{2}{3}\|e_n\|_\infty$

$2e^2_{n+1} + 3e^3_{n+1} = -e^4_n \Rightarrow |e^3_{n+1}| \leqslant \frac{2}{9}\frac{2}{3}\|e_n\|_\infty + \frac{1}{3}\|e_n\|_\infty = \frac{7}{9}\|e_n\|_\infty$

$e_{n+1}32 + 4e^4_{n+1} = -3e^5_n \Rightarrow |e^4_{n+1}| \leqslant \frac{1}{4}\frac{7}{9}\|e_n\|_\infty + \frac{3}{4}\|e_n\|_\infty = \frac{34}{36}\|e_n\|_\infty$

$e^4_{n+1} + e^5_{n+1} = 0 \Rightarrow |e^5_{n+1}| \leqslant \frac{17}{18}\|e_n\|_\infty$

et donc

$$\|e_n\|_\infty \leqslant \frac{17}{18}\|e_n\|_\infty$$

4.

$$(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_1 = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

et donc $\|L_1\|_\infty = \max(\frac{1}{3}, \frac{4}{6}, \frac{17}{18}, \frac{32}{36}, \frac{32}{36}) = \frac{17}{18}$.

On en déduit donc la convergence de (X_n) vers X^*.

Scanné avec CamScanner

UFR MI :L3 2018-2019

CORRECTION : ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE SESSION 1

Exercice 1

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. $\|A\|_{sc} = \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2\right]^{1/2}$

1. Vérifions que $\|.\|_{sc}$ est une norme sur $M_{m,n}(\mathbb{R})$

- Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Alors $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$

$\forall (i,j) \in \{1,\cdots,m\} \times \{1,\cdots,n\},\ |a_{ij}| \geq 0$

$$\Rightarrow |a_{ij}|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$$

$$\Rightarrow \|A\|_{sc} \geq 0$$

Donc $\|.\|_{sc}$ est une application de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$.

- Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, Alors $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$.

$$\|A\|_{sc} = 0 \Leftrightarrow \|A\|_{sc} = \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right]^{1/2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow |a_{ij}| = 0 \ \forall (i,j) \in \{1,\cdots,m\} \times \{1,\cdots,n\}$$
$$\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \ \forall (i,j) \in \{1,\cdots,m\} \times \{1,\cdots,n\}$$
$$\|A\|_{sc} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ où } 0 \text{ est la matrice nulle dans } M_{m,n}(\mathbb{R})$$

- Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Scanné avec CamScanner

$$\begin{aligned}
||\lambda A||_{sc} &= \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|\lambda a_{ij}|^2\right]^{1/2} \\
&= \left[|\lambda|^2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right]^{1/2} \\
&= |\lambda| \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right]^{1/2} \\
||\lambda A||_{sc} &= |\lambda|\, ||A||_{sc}
\end{aligned}$$

• Rappel : Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soient $(u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ où $\mathbb{C}^n$ et $(v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ où $\mathbb{C}^n$.

Alors $\sum_{k=1}^{n}|u_k\, v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|u_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}|v_k|^2\right)^{1/2}$

Remarque $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} = \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$

Soient $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Alors

$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$

$B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$

$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, n\},\ |a_{ij} + b_{ij}|^2 = |a_{ij} + b_{ij}|\ |a_{ij} + b_{ij}|$

Or $|a_{ij} + b_{ij}| \leq |a_{ij}| + |b_{ij}|$.

Donc $\forall (i,j) \in \{1, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, n\}$,

$|a_{ij} + b_{ij}|^2 \leq \left[|a_{ij}| + |b_{ij}|\right]|a_{ij} + b_{ij}|$

$|a_{ij} + b_{ij}|^2 \leq |a_{ij}|\,|a_{ij} + b_{ij}| + |b_{ij}|\,|a_{ij} + b_{ij}|$

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}|a_{ij} + b_{ij}|^2 \leq \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}|a_{ij}|\,|a_{ij} + b_{ij}| + \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}|b_{ij}|\,|a_{ij} + b_{ij}|$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}|a_{ij}|\,|a_{ij} + b_{ij}| \leq \left(\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}|a_{ij} + b_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}|b_{ij}|\,|a_{ij} + b_{ij}| \leq \left(\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}|b_{ij}|\right)^{1/2}\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}|a_{ij} + b_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

Ainsi $\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}|a_{ij} + b_{ij}|^2 \leq \left(\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}|a_{ij} + b_{ij}|^2\right)^{1/2} +$

$$\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}|b_{ij}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}|a_{ij} + b_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

Scanné avec CamScanner

$$\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}+b_{ij}|^2 \le \left[\left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |b_{ij}|^2\right)^{1/2}\right]\left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}+b_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

$$\frac{\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}+b_{ij}|^2}{\left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}+b_{ij}|^2\right)^{1/2}} \le \left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |b_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

$$\left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}+b_{ij}|^2\right)^{1-\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |b_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

$$\left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}+b_{ij}|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |b_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

Or $\left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}b_{ij}|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}+b_{ij}|^2\right)^{1/2} = ||A+B||_{sc}$

$$\left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = ||A||_{sc}$$

$$\left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |b_{ij}|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|^2\right)^{1/2} = ||B||_{sc}$$

Donc : $||A+B||_{sc} \le ||A||_{sc} + ||B||_{sc}$

Conclusion : $||.||_{sc}$ est une norme.

Vérifions que : $||A||_{sc}^2 = tr(A^tA)$

Soit $A \in M_{m,n}\mathbb{R}$.
Alors $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ et ${}^tA = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$

Donc : $A^tA = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij}$

Or : $tr(A^tA) = \sum_{i=1}^{m} c_{ii}$

On en déduit que : $tr(A^tA) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{ki} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} (a_{ik})^2$ car $b_{ij} = a_{ji}$

Or : $(a_{ik})^2 = |a_{ik}|^2$

Par conséquent : $tr(A^tA) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$ en prenant $j = k$

Scanné avec CamScanner

$$tr(A^tA) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 \qquad (1)$$

$$||A||_{sc} = \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right]^{1/2} \Rightarrow ||A||_{sc} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 \qquad (2)$$

De (1) et (2), on en déduit que :

$$||A||_{sc} = tr(A^tA)$$

2. Supposons que : $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

Alors $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$

$AB = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le p}}$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$

$|c_{ij}| = |\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}| \le \sum_{k=1}^{n}|a_{ik}\, b_{kj}|$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}\, b_{kj}| \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_{ik}|^2\right)^{1/2}$$

Donc $|c_{ij}| \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_{ik}|^2\right)^{1/2}$

$$|c_{ij}|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|b_{ik}|^2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} = \sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le p}}|c_{ij}|^2 \le \sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|b_{ik}|^2\right)$$

$$\le \left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le p}}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}|b_{ik}|^2\right)$$

$$\left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le p}}|c_{ij}|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le n}}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le j\le p}}|b_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

Or : $\left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le p}}|c_{ij}|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}|c_{ij}|^2\right)^{1/2} = ||AB||_{sc}$

$$\left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le p}}|a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)^{1/2} = ||A||_{sc}$$

$$\left(\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le p}}|b_{kj}|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|b_{kj}|^2\right)^{1/2} = ||B||_{sc}$$

Scanné avec CamScanner

Donc $||AB||_{sc} \leq ||A||_{sc}\, ||B||_{sc}$.

3. Montrons que $||AB||_{sc}$ est invariante par translation orthogonale.

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $U \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale c'est-à-dire ${}^tUU = I_{m,m}$.
On a :

$$\begin{aligned} ||UA||_{sc} &= \sqrt{tr\left((UA)\,{}^t(UA)\right)} = \sqrt{tr\left({}^t(UA)\,(UA)\right)} \\ &= \sqrt{tr\left({}^tA\,{}^tUUA\right)} = \sqrt{tr\left({}^tAA\right)} \text{ car } {}^tUU = I_m \\ &= \sqrt{tr\left(A\,{}^tA\right)} \\ ||UA||_{sc} &= ||A||_{sc} \text{ car } ||A||_{sc}^2 = tr\left(A\,{}^tA\right). \end{aligned}$$

Donc : $||A||_{sc}$ est invariante par translation orthogonale.

4. Supposons que $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Soit $U \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$

On a : $||AU||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, u_k\right|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}\, u_k|\right)^2\right)^{1/2}$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}\, u_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^2\right)^{1/2}$

D'où

$$\begin{aligned} ||A\,u||_2 &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right) \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^2\right)\right]\right)^{1/2} \\ &\leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right)\right]^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^2\right)^{1/2} \times \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right)^{1/2} \end{aligned}$$

Or : $||u||_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^2\right)^{1/2}$ et $||A||_{sc} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right)^{1/2}$

Scanné avec CamScanner

Par conséquent : $||Au||_2 = ||u||_2 \, ||A||_{sc}$

$\Leftrightarrow \dfrac{||Au||_2}{||u||_2} \leq ||A||_{sc}$

Or, $||A||_2 = \underset{u \in \mathbb{R}^n \setminus (0)}{Sup} \dfrac{||Au||_2}{||u||_2}$

Donc $||A||_2 \leq ||A||_{sc}$ (1)

Supposons que $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de $A\,{}^tA$.
Alors, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \lambda_i \leq \varphi(A\,{}^tA)$ et
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A\,{}^tA) = ||A||_{sc}^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \varphi(A\,{}^tA)$.

Donc $||A||_{sc}^2 \leq n\varphi(A\,{}^tA) = n\,||A||_2^2$

$||A||_{sc}^2 \leq n\,||A||_2^2$

$||A||_{sc} \leq \sqrt{n}\,||A||_2$ (2)

De (1) et (2), on en déduit que : $||A||_2 \leq ||A||_{sc} \leq \sqrt{n}\,||A||_2$.

5. Soit $I = (\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

On a :

$$\begin{aligned} ||I||_{sc} &= \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\delta_{ij}|^2\right]^{1/2} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} |\delta_{ij}|^2\right)^{1/2} \\ ||I||_{sc} &= \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^{1/2} = \sqrt{n} \neq 1 \end{aligned}$$

Donc $||.||_{sc}$ n'est pas une norme matricielle induite.

6. Supposons que $A = uv^t$

Scanné avec CamScanner

UFR :L3 2016-2017

CORRECTION EDO 1 SESSION 2

EXERCICE 1

Soit la méthodede Runge Kutta avec pour tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_2 & 0 & 0 \\ C_3 & 0 & C_3 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Les conditions sur C_2 et C_3 pour l'ordre le plus élevé.

• Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 1 (et donc consistante) si :

$\sum_{i=1}^{q} b_i = 1$ ($q = 3$ étages).

$\sum_{i=1}^{3} b_i = b_1 + b_2 + b_3 = 0 + 0 + 1 = 1$

Ainsi quelque soit C_2 et C_3 cette méthode est au moins d'ordre 1

• Une méthode de Runde-Kutta est d'ordre 2 si elle est d'ordre 1 et si $\sum_{i=1}^{3} b_i C_i = \frac{1}{2}$

On a : $\sum_{i=1}^{3} b_i C_i = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C_3 = \frac{1}{2}$.

Ainsi cette méthode est au moins d'ordre 2 pour $C_3 = \frac{1}{2}$ et C_2 quelconque.

• Une méthode de Runge-Kutta est au moins d'ordre 3 si : $b^T A^2 e = \frac{1}{6}$

$b^T = (0 \;\; 0 \;\; 1)$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a : $b^T A^2 e = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (absurde)

Ainsi cette méthode ne peut être d'ordre 3. Finalement l'ordre le plus élévé est 2 avec $C_3 = \frac{1}{2}$ et C_2 quelconque.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2

Par définition : Générale la méthode de Runge-Kutta à 2 étage (2 niveaux) a pour schema :

$\phi(t,y,h) = \sum_{j=1}^{2} b_j\, k_j = b_1 k_1 + b_2 k_2$ avec $k_1 = f(t,y)$

$k_2 = f(t + C_2\, h\, , y + a_{21}\, h\, k_1)$

Méthode de Heun

On a : $y_{n+1} = y_n + h\,\phi(t, y_n, h)$ avec

$$\phi(t,y_n,h) = \frac{1}{2} f(t_n, y_n) + \frac{1}{2} f(t_n + h, y_n + h\, f(t_n, y_n))$$
$$= \sum_{j=1}^{2} b_j\, k_j$$

avec $b_1 = \frac{1}{2}$ et $b_2 = \frac{1}{2}$

$k_1 = f(t_n, y_n)$

$k_2 = f(t + h, y_n + h\, k_1)$

Ainsi Heun vérifie la formule. Donc c'est bien une méthode de Runge-kutta à deux niveaux.

Tableau de Butcher :

0	0	0
1	1	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Méthode d'Euler modifié

$\phi(t,y,h) = f(t_n + \frac{h}{2}\, y_n + \frac{h}{2}\, f(t_n, y_n))$

De façon analogue on montre qu'il s'agit bien d'une méthode de Runge-Kutta à 2 niveaux et on deduit :

Tableau de Butcher :

0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	0	1

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 3

Soit la méthode : $y_{n+1} = y_n + h\,\phi(x_n, y_n, h)$

On a : $\phi(x_n, y_n, h) = \sum_{j=1}^{2} b_j v_j$ avec $b^T = (\frac{1}{6} \ \frac{4}{6} \ \frac{1}{6})$

avec le tableau de Butcher $\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline & b^T \end{array}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- La méthode est au moins d'ordre 1 ssi $\sum_{j=1}^{3} b_j = 1$

On a : $\sum_{j=1}^{3} b_j = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = 1$

Donc la méthode est au moins d'ordre 1.

- La méthode est au moins d'ordre 2 ssi $b^T C.e = b^T A e = \frac{1}{2}$

On a : $b^T A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$

Donc la méthode est au moins d'ordre 2

- La méthode est au moins d'ordre 3 ssi $b^T A^2 e = \frac{1}{6}$

On a : $b^T A^2 e = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}$

D'où $b^T A^2 e = \frac{1}{6}$

La méthode est au moins d'ordre 3.

Comme il s'agit d'un schema de Runge-Kutta à 3 étages (niveaux) alors la méthode est au plus d'ordre 3.

Finalement la méthode est d'ordre 3.

Scanné avec CamScanner

UFR :MI L3 2018-2019

CORRECTION ANALYSE NUMERIQUE DES EDO SESSION 1

EXERCICE 1

On donne $\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}y(t) \\ y(0) = y_0 = 5 \end{cases}$

Schema de Euler explicite.

$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\,f(t_n, y_n) \\ y_0 = 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + h\frac{1}{1+t_n^2}.y_n = \left(1 + h\frac{1}{1+t_n^2}\right)y_n$$

On a : $t_n = t_0 + nh = 0 + nh$

$\Rightarrow t_n = 0,5\,n.$

$t_0 = 0,\ t_1 = 0,5,\ t_2 = 1,\ t_3 = 1,5,\ t_4 = 2$

On a successivement :

- $y(t_1) \simeq y_1 = \left(1 + 0,5\dfrac{1}{1+0^2}\right).5$

$$y(t_1) \simeq \frac{15}{2}$$

- $y(t_2) \simeq y_2 = \left(1 + 0,5\dfrac{1}{1+0,5^2}\right).\dfrac{15}{2}$

$$y(t_2) \simeq \frac{21}{2}$$

- $y(t_3) \simeq y_3 = \left(1 + 0,5\dfrac{1}{1+1^2}\right).\dfrac{21}{2}$

$$y(t_3) \simeq \frac{105}{8}$$

- $y(2) \simeq y_4 = \left(1 + 0,5\dfrac{1}{1+1,5^2}\right).\dfrac{105}{8}$

Ainsi $y(2) \simeq 15,14$

EXERCICE 3

Soit l'équation différentielle de Van Der Pol.

Scanné avec CamScanner

$$(E)\begin{cases} y_1'(t) = y_2 \\ y_2'(t) = (1-y_1^2)y_2 - y_1 \\ y_1(0) = \frac{1}{2} \quad y_2(0) = \frac{1}{2},\ t \in [0,25] \end{cases}$$

1. Appliquons le $\theta-$Schema

$\underline{\theta-\text{Schema}}$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\left((1-\theta)f(t_n,y_n) + \theta f(t_{n+1},y_{n+1})\right) \\ y_0 = y(t_0) \text{ donné} \end{cases}$$

$$\text{On a : } (E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ (1-y_1^2)y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y'(t) = f(t,y(t)) \text{ avec } y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ et } f(t,y(t)) = \begin{pmatrix} y_2 \\ (1-y_1^2)y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Appliquons maintenant le θ-Schema :

$$\text{On a : } y_{n+1} = y_n + h\left[(1+\theta)\begin{pmatrix} y_{n,2} \\ (1-y_{n,1}^2)y_{n,2} - y_{n,1} \end{pmatrix} + \theta\begin{pmatrix} y_{n+1,2} \\ (1-y_{n+1,1}^2)y_{n+1,2} - y_{n+1,1} \end{pmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_{n+1,1} \\ y_{n+1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{n,1} \\ y_{n,2} \end{pmatrix} + h\left[(1+\theta)\begin{pmatrix} y_{n,2} \\ (1-y_{n,1}^2)y_{n,2} - y_{n,1} \end{pmatrix} + \theta\begin{pmatrix} y_{n+1,2} \\ (1-y_{n+1,1}^2)y_{n+1,2} - y_{n+1,1} \end{pmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{n+1,1} = y_{n,1} + h(1-\theta)y_{n,2} + h\theta y_{n+1,2} \\ y_{n+1,2} = y_{n,2} + h(1-\theta)(1-y_{n,1}^2)y_{n,2} - h(1-\theta)y_{n,1} \\ \qquad\quad + h\theta(1-y_{n+1,1}^2)y_{n+1,2} - h\theta y_{n+1,1} \end{cases}$$

avec $y_{0,1} = \dfrac{1}{2}$ et $y_{0,2} = \dfrac{1}{2}$

2. * Pour $\theta = 0$ Euler explicite

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{n+1,1} = y_{n,1} + h\,y_{n,2} \text{ avec } y_{0,1} = y_1(0) = \frac{1}{2} \\ y_{n+1,2} = y_{n,2} + h(1-y_{n,1}^2)y_{n,2} - h\,y_{n,1} \text{ avec } y_{0,2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

* $\theta = \frac{1}{2}$ (Cranck-Nicholson)

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{n+1,1} = y_{n,1} + \frac{h}{2}y_{n,2} + \frac{h}{2}y_{n+1,2} \\ y_{n+1,2} = y_{n,2} + \frac{h}{2}(1-y_{n,1}^2)y_{n,2} - \frac{h}{2}y_{n,1} \\ \qquad\quad + \frac{h}{2}(1-y_{n+1,1}^2)y_{n+1,2} - \frac{h}{2}y_{n+1,1} \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} y_{0,1} = y_1(0) = \frac{1}{2} \\ y_{0,2} = y_2(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

CORRECTION

EXAMEN U.E : VARIABLE COMPLEXE

1ère Session 2015-2016.

EXERCICE 1

• f est une fonction entière vérifiant :
$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x+iy) = e^x f(iy)$ et $f(0)=1$.
Posons, pour tout réel y, $\mathrm{Re}\, f(iy) = c(y)$ et
$\mathrm{Im}\, f(iy) = s(y)$.

1 - Montrons en utilisant les conditions de Cauchy-Riemann que :
$\forall y\in\mathbb{R}$, $c'(y) = -s(y)$ et $s'(y) = c(y)$

On a $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$; $f(x+iy) = e^x f(iy) =$
$= e^x \mathrm{Re}\, f(iy) + i e^x \mathrm{Im}\, f(iy)$.

Posons $\begin{cases} P(x,y) = e^x \mathrm{Re}\, f(iy) = e^x c(y) \\ Q(x,y) = e^x \mathrm{Im}\, f(iy) = e^x s(y) \end{cases}$

Alors $f(x+iy) = P(x,y) + i\,Q(x,y) = e^x c(y) + i e^x s(y)$.

D'après les conditions de Cauchy-Riemann,

on a : $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c(y)e^x = s'(y)e^x \\ c'(y)e^x = -s(y)e^x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} c(y) = s'(y) \\ s'(y) = -s(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c'(y) = -s(y) \\ s'(y) = c(y) \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

Car $\begin{cases} \frac{\partial P}{x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[C(y)e^x] = C(y)e^x \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[C(y)e^x] = C'(y)e^x \end{cases}$ et

$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[e^x S(y)] = e^x S(y) \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[e^x S(y)] = e^x S'(y). \end{cases}$

2- Montrons que $y \longmapsto g(y) = (C(y) - \cos y)^2 + (S(y) - \sin y)^2$ vérifie : $\forall y \in \mathbb{R}$, $g'(y) = 0$.

On a $\forall y \in \mathbb{R}$, $g'(y) = 2(C'(y) + \sin(y))(C(y) - \cos y) + 2(S'(y) - \cos y)(S(y) - \sin y)$.

En remplaçant $C'(y) = -S(y)$ et $S'(y) = C(y)$; on obtient :

$\Rightarrow g'(y) = 2\left[(C(y) - \cos y)(-S(y) + \sin y) + (C(y) - \cos y)(S(y) - \sin y)\right]$

$= 2\left[-(C(y) - \cos(y))(S(y) - \sin y) + (C(y) - \cos y)(S(y) - \sin y)\right]$

$g'(y) = 0$.

Donc $\forall y \in \mathbb{R}$; $g'(y) = 0$.

Déduisons que : $\forall y \in \mathbb{R}$; $\begin{cases} g(y) = 0 \\ C(y) = \cos y \\ S(y) = \sin y \end{cases}$.

* Montrons que $g(y) = 0$.

D'après ce qui précède ; on a $\forall y \in \mathbb{R}$; $g'(y) = 0$

or $\mathbb{R}$ est connexe ; donc

g est constante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi : $\forall y \in \mathbb{R}$; $\exists! c \in \mathbb{R}$ tq $g(y) = c$.

calculons $g(0)$.

g est constante sur $\mathbb{R}$; donc $g(0) = c$.

Scanné avec CamScanner

On a $g(0) = (C(0) - \cos 0)^2 + (S(0) - \sin 0)^2$

$= (C(0) - 1)^2 + S^2(0)$.

Par ailleurs ; $f(0) = e^{0 \times} f(1 \times 0)$

$= C(0) + i S(0) = 1$

Donc $\begin{cases} C(0) = 1 \\ S(0) = 0 \end{cases}$; par identification.

D'où $g(0) = (1-1)^2 + 0^2 = 0$.

Ainsi $\forall y \in \mathbb{R}$; $g(y) = 0$

* Montrons que $\begin{cases} C(y) = \cos y \\ S(y) = \sin y \end{cases}$.

On a $\forall y \in \mathbb{R}$; $g(y) = 0 \Leftrightarrow$ $\forall y \in \mathbb{R}$;

$\Updownarrow$

$(C(y) - \cos y)^2 + (S(y) - \sin y)^2 = 0$

$\Updownarrow$

$\forall y \in \mathbb{R}$; $\begin{cases} C(y) - \cos y = 0 \\ S(y) - \sin y = 0 \end{cases}$;

$\Updownarrow$

$\forall y \in \mathbb{R}$; $\begin{cases} C(y) = \cos y \\ S(y) = \sin y. \end{cases}$

Car $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$a^2 + b^2 = 0$

$\Updownarrow$

$a = 0$ et $b = 0$

Scanné avec CamScanner

Exercice 2

Evaluons $\int_\gamma \bar{z}\,dz$ dans les cas suivants.

1. $\gamma : t \longmapsto t^2 + it$ definie sur $[a,b]$ tels que
$\begin{cases} \gamma(a) = 0 \\ \gamma(b) = 4+2i \end{cases}$.

Soit $f : z \longmapsto \bar{z}$.

Alors $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$.

Déterminons a et b.

$$\begin{cases} \gamma(a) = 0 \\ \gamma(b) = 4+2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + ia = 0 \\ b^2 + ib = 4+2i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \text{ et } a = 0 \\ b^2 = 4 \text{ et } b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Donc $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^2 \overline{\gamma(t)} \times \gamma'(t)\,dt$

$\gamma'(t) = 2t + i$ et $\overline{\gamma(t)} = t^2 - it$.

Alors $\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_0^2 (2t+i)(t^2 - it)\,dt$

$$= \int_0^2 \left[2t^3 + t + i(-2t^2 + t^2)\right] dt$$

$$= \int_0^2 \left[(2t^3 + t) + it^2\right] dt$$

$$= \left[\frac{t^4}{2} + \frac{t^2}{2} - i\frac{t^3}{3}\right]_0^2$$

$$= 8 + 2 - i\frac{8}{3} = 10 - \frac{8}{3}i$$

Ainsi $\int_\gamma \bar{z}\,dz = 10 - \frac{8}{3}i$

Scanné avec CamScanner

2- γ^* est la ligne brisée formée des segments de droite joignant 0 à $2i$ et $2i$ à $4+2i$.

Calculons $\int_{\gamma^*} \bar{z}\, dz$.

Déterminons le support γ^*: paramétrons-le.

On a $\gamma^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$; où γ_1^* et γ_2^* sont respectivement les segments de droites joignant 0 à $2i$ et $2i$ à $4+2i$.

Paramétrons γ_1^* et γ_2^*.

On a: $\gamma_1^* = [0, 2i]$ et $\gamma_2^* = [2i, 4+2i]$.

Alors $\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longmapsto 2it$; et

$\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longmapsto (1-t)\times 2i + t(4+2i)$

Donc $\forall\, t \in [0,1]$; $\gamma_1(t) = 2it$ et

$\gamma_2(t) = 4t + 2i$.

Ainsi a: $\int_{\gamma^*} \bar{z}\, dz = \int_{\gamma_1^*} \bar{z}\, dz + \int_{\gamma_2^*} \bar{z}\, dz$.

* $\int_{\gamma_1^*} \bar{z}\, dz := \int_0^1 \overline{\gamma_1(t)} \cdot \gamma_1'(t)\, dt$

$= \int_0^1 -2it \times 2i\, dt = 4\int_0^1 t\, dt$.

$$\boxed{\int_{\gamma_1^*} \bar{z}\, dz = 2.}$$

Scanné avec CamScanner

$$\int_{\gamma_2^*} \bar{z}\,dz = \int_0^1 \overline{\gamma_2(t)} \times \gamma_2'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (4t - 2i) \times 4\,dt$$

$$= 4\int_0^1 (4t - 2i)\,dt$$

$$= 4\left[2t^2 - 2it\right]_0^1$$

$$= 4(2 - 2i)$$

$$\boxed{\int_{\gamma_2^*} \bar{z}\,dz = 8 - 8i}$$

En somme, $\int_{\gamma^*} \bar{z}\,dz = \int_{\gamma_1^*} \bar{z}\,dz + \int_{\gamma_2^*} \bar{z}\,dz$

$$\Rightarrow \int_{\gamma^*} \bar{z}\,dz = 2 + 8 - 8i = 10 - 8i$$

Donc $\boxed{\int_{\gamma^*} \bar{z}\,dz = 10 - 8i}$

Scanné avec CamScanner

⑦ Exercice 3

1- Soit $r \in [1, +\infty]$.

γ_r est le lacet de support:

$\gamma_r^* = [-r, r] \cup \{z \in \mathbb{C} / |z| = r ; \operatorname{Im} z > 0\}$.

parcouru une fois dans le sens direct.

a- Montrons que $\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \frac{\pi}{e}$.

Posons $g(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$.

Alors $g(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2} = \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)}$

$= \frac{\frac{e^{iz}}{z+i}}{z-i} = \frac{f(z)}{z-i}$.

avec $f(z) = \frac{e^{iz}}{z+i}$.

Donc $\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = \int_{\gamma_r} \frac{\frac{e^{iz}}{z+i}}{z-i} dz$

$= \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-i} dz$.

$f : z \longmapsto \frac{e^{iz}}{z+i}$ est holo

holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$;

d'après la formule intégrale de Cauchy ;

on a : $f(i) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-i} dz$; $f(i) = \frac{e^{ixi}}{i+i}$

$= \frac{e^{-1}}{2i}$

Scanné avec CamScanner

(8) 10.08.2020

D'où $\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-i}\,dz = 2i\pi \times f(i)$

$= 2i\pi \times \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$.

Ainsi $\boxed{\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \frac{\pi}{e}}$

b) b_1 - Montrons que : $\int_{[-r,r]} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \int_{-r}^{r} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt$.

On a $g(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$; $\forall z \in [-r,r] \subset \mathbb{R}$.

Alors $g(z) = \frac{1}{1+z^2}\left[\cos(z) + i\sin(z)\right]$,

$g(z) = \frac{\cos z}{1+z^2} + i\,\frac{\sin z}{1+z^2}$; $\forall z \in [-r,r] \subset \mathbb{R}$.

Donc $\int_{[-r,r]} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \int_{-r}^{r} \frac{\cos z}{1+z^2}\,dz + i\int_{-r}^{r} \frac{\sin z}{1+z^2}\,dz$.

or $\forall z \in [-r,r] \subset \mathbb{R}$; la fonction $z \mapsto \sin z$ est impaire ; donc $\int_{-r}^{r} \frac{\sin z}{1+z^2}\,dz = 0$.

D'où $\int_{[-r,r]} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \int_{-r}^{r} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz$

D'où $\boxed{\int_{[-r,r]} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \int_{-r}^{r} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt}$

Scanné avec CamScanner

⑨ b_2 - Montrons que : $\forall z \in \mathbb{C}$;

$[|z|=r ; \operatorname{Im} z \geq 0] \Rightarrow |1+z^2| \geq r^2-1$.

- Supposons que $\forall z \in \mathbb{C}$; $|z|=r$ et $\operatorname{Im} z \geq 0$.

Rappel : $\forall a, b \in \mathbb{C}$;

$$|\,|a|-|b|\,| \leq |a-b| .$$

Donc en prenant, $a = z^2$ et $b=-1$;

on obtient : $\forall z \in \mathbb{C} : \left|\,|z^2|-|-1|\,\right| \leq |z^2-(-1)|$

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}$; $\left|\,|z|^2-1\,\right| \leq |z^2+1|$

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}$; $|r^2-1| \leq |z^2+1|$; car $|z|=r$.

Rappel : soit $\beta \geq 0$. soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$|\alpha| \leq \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha \leq \beta & (*) \\ -\alpha \leq \beta . & (**) \end{cases}$$

Donc en utilisant la relation (*); on obtient : $\forall z \in \mathbb{C}$; $r^2-1 \leq |z^2+1|$.

D'où $\forall z \in \mathbb{C}$; $|z^2+1| \geq r^2-1$.

- Montrons que $\forall z \in \mathbb{C}$; $|e^{iz}| \leq 1$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x+iy$; $x, y \in \mathbb{R}$.

Alors $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y} \times e^{ix}$

Donc $|e^{iz}| = |e^{-y} \times e^{ix}| = e^{-y} \times |e^{ix}| = e^{-y}$.

car $\forall x \in \mathbb{R}$; $|e^{ix}| = 1$.

Scanné avec CamScanner

(10) Or $\text{Im}\, z \geq 0 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow -y \leq 0$;

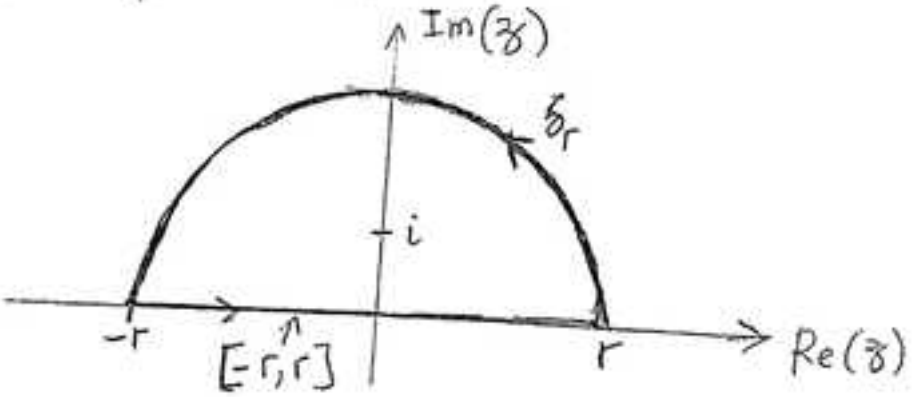
donc $e^{-y} \leq 1$.

Par conséquent : $\forall z \in \mathbb{C}$; $\text{Im} z > 0 \Rightarrow |e^{iz}| < 1$

b_3 - Supposons que δ_r est le chemin de support $\delta_r^* = \{ z \in \mathbb{C} / |z| = r, \text{Im} z > 0 \}$ parcouru une ~~seule~~ fois dans le sens direct.

Montrons que $\left| \int_{\delta_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz \right| \leq \pi \frac{r}{r^2-1}$

Paramétrons δ_r.



~~Soit~~ $z \in \delta_r^*$; Alors ~~$z(t) =$~~

$z \in \{ re^{it} / t \in [0,\pi] ; r \geq 1 \}$.

Posons $z = re^{it}$; $t \in [0,\pi]$.

Alors $\left| \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{ire^{it}}}{1+r^2e^{2it}} \times rie^{it} dt \right|$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$.

$\Rightarrow e^{ire^{it}} = e^{ir(\cos t + i \sin t)} = e^{-r\sin t} \times e^{ir\cos t}$.

Scanné avec CamScanner

Donc $\left|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{-r\sin t}\times e^{ir\cos t}}{1+r^2e^{2it}} \times rie^{it}\,dt\right|$

$$\leq \int_0^{\pi} \left|\frac{e^{-r\sin t}\times e^{ir\cos t}\times rie^{it}}{1+r^2e^{2it}}\right| dt$$

On a $\left|\frac{e^{-r\sin t}\times e^{ir\cos t}\times rie^{it}}{1+r^2e^{2it}}\right| =$

$$\frac{|e^{-r\sin t}|\times|e^{ir\cos t}|\times|rie^{it}|}{|1+r^2e^{2it}|} \leq \frac{re^{-r\sin t}}{|1+r^2e^{2it}|}$$

Comme $\mathrm{Im}\, z > 0$; $\sin t > 0$ donc $e^{-r\sin t} < 1$

D'où $\frac{re^{-r\sin t}}{|1+r^2e^{2it}|} < \frac{r}{|1+r^2e^{2it}|}$

D'après la question b2) ; $|1+z^2| \geq r^2-1$; donc $|1+r^2e^{2it}| \geq r^2-1$

et par suite $\frac{1}{|1+r^2e^{2it}|} \leq \frac{1}{r^2-1}$;

Ainsi $\boxed{\left|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{r}{r^2-1}\,dt = \pi\frac{r}{r^2-1}}$

3- Justifions la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{1+t^2}$ est paire.

Restreignons-nous à l'intervalle $[0,+\infty[$

Scanné avec CamScanner

Etude en $+\infty$.

$\forall\, t \in [0,+\infty[\,;\ \left|\frac{\cos t}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$.

Or $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge ; donc $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2+1} dt$ converge.

Par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt$ converge.

Montrons que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{e}$.

On a : $\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \int_{[-r,r]} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz + \int_{\zeta_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$.

$\Updownarrow$

$$\frac{\pi}{e} = \int_{-r}^{r} \frac{\cos t}{1+t^2} dt + \int_{\zeta_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$$

$\Downarrow$

$$\frac{\pi}{e} = \int_{-r}^{r} \frac{\cos t}{1+t^2} dt + \int_0^{\pi} \frac{e^{ir(\cos t + i\sin t)}}{1+r^2 e^{2it}} \times rie^{it} dt$$

En passant à la limite lorsque $r \longrightarrow +\infty$; on obtient

$$\frac{\pi}{e} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt + \lim_{r \to +\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{ir(\cos t + i\sin t)}}{1+r^2 e^{2it}} \cdot ire^{it} dt.$$

Or $\left|\int_{\zeta_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz\right| \leq \pi \cdot \frac{r}{r^2-1} \longrightarrow 0$ $\quad r \longrightarrow +\infty$

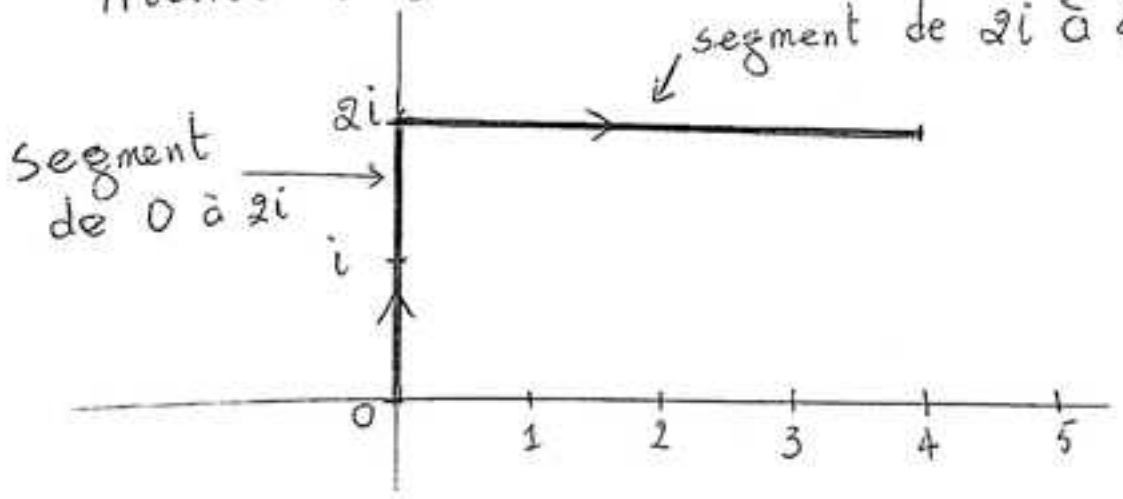
Scanné avec CamScanner

Donc $\lim_{r \to +\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{ir(\cos t + i \sin t)}}{1 + r^2 e^{2it}} \times ire^{it} dt = 0$

Par conséquent : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{e}}$

REMARQUE : EXERCICE 2

La ligne brisée formée des segments de droite joignant 0 à 2i et 2i à 4+2i se représente graphiquement de la manière suivante :



Scanné avec CamScanner

10.08.2020 EXAMEN DE VARIABLE COMPLEXE 2015-2016 (2e session) Lmd/csc

Exercice 1

1. Ω est un ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{z} \in \mathbb{C}$
$f: \Omega \to \mathbb{C}$, Montrons que $z \mapsto g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ est holomorphe sur Ω ssi f l'est.
Supposons $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe sur Ω.
Posons $z = x + iy$ $\quad Re f(z) = P(x,y)$ et $Im f(z) = Q(x,y)$
i.e : $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$
On a : $g(z) = \overline{f(x-iy)} = \overline{P(x,-y) + iQ(x,-y)}$
$= P(x,-y) - iQ(x,-y)$

i.e $\begin{cases} Re\, g(z) = P(x,-y) \\ Im\, g(z) = -Q(x,-y) \end{cases}$

Si f est holomorphe sur Ω alors P et Q admettent des dérivées partielles en tout point (x,y) tel que $x+iy \in \Omega$ et vérifient les conditions de Cauchy-Riemann (CCR)

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases} \quad \text{et } \forall z \in \Omega / z = x+iy,$$

$$f'(x+iy) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$$

Soient $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ les parties réelles et imaginaire de g respectivement.
Par définition on a $\tilde{P}(x,y) = P(x,-y)$ et $\tilde{Q}(x,y) = -Q(x,-y)$
Puisque P et Q admettent des dérivées partielles en tout point, (x,y) tel que $x+iy \in \Omega$, $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ admettent

Scanné avec CamScanner

des dérivées partielles en (x,y).

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} P(x,y) \\ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) \\ \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} Q(x,-y) \end{cases}$$

or P et Q vérifient les CCR donc :

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,-y) = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x,-y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,-y) = -\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}(x,y)$$

Conclusion : $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ vérifient les conditions de Cauchy-Riemann donc g est holomorphe sur Ω.

2. f est une fonction entière vérifiant $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}f(z)\,\mathrm{Im}f(z) = 1$. Montrons que f est constante.

Soit $f : x+iy \mapsto f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$

telle que $P(x,y) \cdot Q(x,y) = 1$.

f est entière donc vérifie les CCR. On a :

$P(x,y) \cdot Q(x,y) = 1 \Rightarrow Q(x,y) = \frac{1}{P(x,y)}$

d'où les CCR :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)}{(P(x,y))^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)}{(P(x,y))^2} \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

$* \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{P(x,y)^2}\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)$

$= -\frac{1}{P(x,y)^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\right) = -\frac{1}{P(x,y)}\left(-\frac{1}{P(x,y)^2}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)$

$= \frac{1}{P(x,y)^4}\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right)$

$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{P(x,y)^4}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$.

$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\left(1+\frac{1}{P(x,y)^4}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0$ car $1+\frac{1}{P(x,y)^4} > 0$

$* \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{P(x,y)^2}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{P(x,y)^2}\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right)$

$= \frac{1}{P(x,y)^2}\left(-\frac{1}{P(x,y)^2}\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{1}{P(x,y)^4}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right)$

$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{P(x,y)^4}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\right)$

$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\left(1+\frac{1}{P(x,y)^4}\right) = 0$ donc $\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 0$

$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow Q(x,y) = s(y) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = s'(y) = 0$

$\Rightarrow s(y) = k$, $k \in \mathbb{R}^*$.

i.e $Q(x,y) = k$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{R}^*$.

Or $P(x,y)Q(x,y) = 1 \Rightarrow P(x,y) = \frac{1}{Q(x,y)}$ d'où

$P(x,y) = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{R}^*$

Par conséquent $f(x+iy) = \frac{1}{k} + ik$, $x+iy \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}^*$

d'où $f : z \mapsto \frac{1}{k} + ik$, $k \in \mathbb{R}^*$ est constante.

Scanné avec CamScanner

Exercice 2

1. $\overline{D(0,1)} = \{ z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1 \}$

$f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur U un ouvert tel que $\overline{D(0,1)} \subset U$.

a) Expression de $I = \int_\gamma (2 + z + \frac{1}{z}) \frac{f(z)}{z} dz$ en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$.

$I = 2I_1 + I_2 + I_3$ avec :

* $I_1 = \int_\gamma \frac{f(z)}{z} dz$.

En appliquant la formule intégrale de Cauchy on a :

$I_1 = 2\pi i f(0)$.

* $I_2 = \int_\gamma f(z) dz$

On a : f holomorphe sur U. $\gamma^* \subset \overline{D}(0,1) \subset U$

γ étant un lacet, alors $\int_\gamma f(z) dz = 0$ donc $I_2 = 0$

* $I_3 = \int_\gamma \frac{f(z)}{z^2} dz$

D'après la formule intégrale de Cauchy,

$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^2} dz \Rightarrow I_3 = 2\pi i f'(0)$ d'où

$$\boxed{I = 2\pi i \left(f'(0) + 2 f(0) \right)}$$

b) Déduction de la valeur de $\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) dt$

$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto e^{it}$ est un chemin de support $C(0,1)$

soit $g(z) = (2 + z + \frac{1}{z}) \frac{f(z)}{z}$

$$\int_\gamma g(z) dz = \int_0^{2\pi} g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Scanné avec CamScanner

$$\int_\gamma g(z)\,dz = i\int_0^{2\pi} f(e^{it})(2+2\cos t)\,dt$$
$$= 2i\int_0^{2\pi} f(e^{it})(1+\cos t)\,dt$$
$$= 4i\int_0^{2\pi} f(e^{it})\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)dt = I$$

Donc $\boxed{\int_0^{2\pi} f(e^{it})\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)dt = \frac{\pi}{2}\left(f'(0)+2f(0)\right)}$

2. Déterminons la valeur de $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+3)}$ où $\gamma = \{z\in\mathbb{C} / |z-1| = 1\}$.

L'ensemble $\{z\in\mathbb{C} / |z-1| = 1\} = C(1,1)$

$\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto 1+e^{it}$ est un chemin de support $\gamma^* = C(1,1)$

Considérons $f : \mathbb{C}\setminus\{-3\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \frac{1}{z+3}$

f est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{-3\}$ et $\overline{D}(1,1) \subset \mathbb{C}\setminus\{-3\}$.

D'après la formule intégrale de Cauchy on a :

$\forall z\in D(1,1)$, $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\,du$

En particulier $f(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(u)}{u-1}\,du$

$\int_\gamma \frac{du}{(u-1)(u+3)} = 2\pi i f(1)$

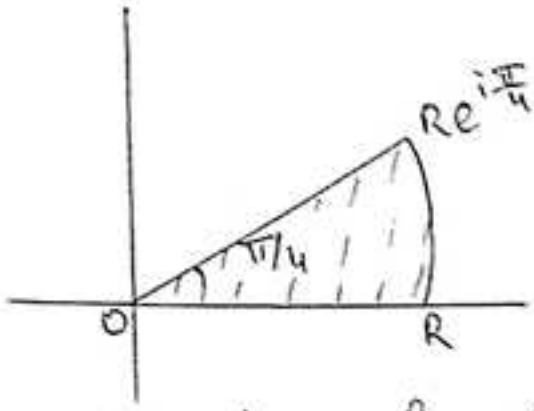
Donc $\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{(z-1)(z+3)} = \frac{1}{4}}$

Scanné avec CamScanner

Exercice 3

On a $z \mapsto e^{iz^2}$ et le chemin

$\Sigma = \{ z \in \mathbb{C} / 0 \leq |z| \leq R \ ; \ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \}$



Considérons le chemin fermé

$\gamma^* = [0, R, Re^{i\pi/4}, 0]$

Posons $f(z) = e^{iz^2}$ holomorphe sur Σ $\gamma^* \subset \Sigma$ alors

$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

$\gamma^* = [0, R] \cup [R, Re^{i\frac{\pi}{4}}] \cup [Re^{i\frac{\pi}{4}}, 0]$

Donc $0 = \int_{[0,R]} f(z)\,dz + \int_{[R, Re^{i\frac{\pi}{4}}]} f(z)\,dz + \int_{[Re^{i\frac{\pi}{4}}, 0]} f(z)\,dz$

Paramétrisons les chemins

$\gamma_1^* = [0, R]$

$\gamma_1 : [0, R] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto t$

$\gamma_2^* = [R, Re^{i\frac{\pi}{4}}]$

$\gamma_2 : [0, \frac{\pi}{4}] \longrightarrow \mathbb{C}$

$\theta \longmapsto Re^{i\theta}$

Scanné avec CamScanner

10.08.2020

$\gamma_3^* = [Re^{i\pi/4}, 0]$

$\gamma_3 : [0,R] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longmapsto t e^{i\frac{\pi}{4}}$

Donc : $\int_{[0,R]} f(z)dz = \int_0^R e^{it^2}dt$

$\int_{[R, Re^{i\pi/4}]} f(z)dz = \int_{\gamma_R} e^{iz^2}dz$

$\int_{[Re^{i\pi/4}, 0]} f(z)dz = -\int_0^R e^{-t^2} e^{i\pi/4}\, dt$

Ainsi $\int_0^R e^{it^2}dt + \int_{\gamma_R} e^{iz^2}dz - \int_0^R e^{-t^2}e^{i\pi/4}dt = 0$

En passant à la limite on a :

$\int_0^{+\infty} e^{it^2}dt + \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} e^{iz^2}dz - e^{i\pi/4}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = 0$

Or $\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} e^{iz^2}dz = 0$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

D'où $\int_0^{+\infty} e^{it^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\int_0^{+\infty} \cos^2 t\, dt + i\int_0^{+\infty} \sin^2 t\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$

Par identification : $\boxed{\int_0^{+\infty} \cos^2 t\, dt = \int_0^{+\infty} \sin^2 t\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}$

Scanné avec CamScanner

UFHB ANNEE 2016-2017
URFMI L3

EXAMEN DE VARIABLE COMPLEXE - SESSION 1

EXERCICE 1

$$P(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$$

Existe t-il une fonction $Q : (x,y) \mapsto Q(x,y)$ telle que la fonction $f : x + iy \mapsto P(x,y) + iQ(x,y)$ soit entière ?

$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \Longrightarrow \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial x^2} = -6x$

$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 6xy \Longrightarrow \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial y^2} = 6x \; \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial y^2} = -6x + 6x = 0$

alors P est harmonique alors il existe une fonction $f : x + iy \mapsto P(x,y) + iQ(x,y)$ soit entière.

- Déterminons Q

  f est entiere alors P et Q verifient les conditions de Cauchy.

  $\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} \Longrightarrow 2 - 3x^2 + 3y^2 = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$

  $\partial Q = 2 - 3x^2 + 3y^2 dy \Longrightarrow Q = 2y - 3x^2 y + y^3 + c(x)$

  $-\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Longrightarrow -\frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy - c'(x) = 0 \Longrightarrow c(x) = K, K \in \mathbb{R}$ on prend K=1

  d'où $Q(x,y) = 2y - 3x^2 y + y^3 + 1$.

EXERCICE 2

1. Calcul de $\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz$

   Soit $\gamma = C(0,1)$ parcouru une fois dans f est holomorphe sur $\mathbf{V}$ et γ est un chemin fermé $\gamma^* = D(0,1) \subset \mathbb{C}$ alors d'après la formule integrale de Cauchy on a $0 \in D(0,1)$ $f(0) = \frac{0!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-0)} dz$.

   $2\pi i f(0) = \int_\gamma \frac{e^z}{z} dz$ avec $f(0) = 1$

   $\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i f(0)$

2. Déduisond la valeur de chacune des integrales suivantes

   $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta) d\theta$ et $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(\sin\theta) d\theta$

   $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

   $t \mapsto e^{it}$

   $\gamma'(t) = ie^{it}$

   $\int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{it}}}{e^{it}} \times ie^{it} = i \int_0^{2\pi} e^{(\cos t + \sin t)} dt = i \int_0^{2\pi} e^{\cos t} (\cos(\sin t) + i \sin(\sin t)) dt$

Scanné avec CamScanner

$2\pi i = i\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)dt - \int_0^{2\pi}\sin(\sin t)e^{\cos t}dt$
d'où $2\pi = \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)dt$et $\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t)dt = 0$

EXERCICE 3

1. Calculons $\int_\gamma \frac{e^z+\cos z}{z^3}dz$ dans les cas suivants :

(a) $\gamma: \begin{array}{ccc}[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & 2+e^{it}\end{array}$
posons $f(z) = \frac{e^z+\cos z}{z^3}$
f est holomorphe sur $\mathbf{C}\setminus\{0\}$
$\mathbf{C}\setminus 0$ est un ouvert etoilée
$\gamma^* = C(2,1) \subset \mathbf{C}\setminus\{0\}$et $C(2,1)$ est un lacet alors d'aprés la formule de cauchy $\int_\gamma \frac{e^z+\cos z}{z^3}dz = 0$

(b) $\gamma: \begin{array}{ccc}[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & 2e^{it}\end{array}$
$f(z) = e^z + \cos z$
f est holomorphe sur$\mathbf{C}$
$D = \gamma^* = C(0,2) \subset \mathbf{C}$
$\mathbf{C}$ est un ouvert étoilé alors d'aprés la formule intégrale Cauchy
$\forall z \in D(0,2)$
$f^3(z) = \frac{z'}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(u-z)^4}du$
Pour $z = 0, z \in D(0,2)$
$f^{(3)}(0) = \frac{z'}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(u)}{u^4}du$
$2\pi i f^{(3)}(0) = z'\int_\gamma \frac{f(u)}{u^4}du$
$f^{(3)}(z) = e^z + \sin t, f^3(0) = 1$
$\frac{\pi i}{3} = \int_\gamma \frac{f(u)}{u^4}du$

2. $\forall r \in \mathbb{R}^+$, $\gamma_r: \begin{array}{ccc}[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & re^{it}\end{array}$
$I_r = \int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz$

(a) Montrons que $\left|\int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}-1}{z}dz\right| < \pi sup_{|z|=r}|e^{iz}-1|$
posons $f(z) = e^{iz} - 1$
f est holomorphe sur $\mathbf{C}$
$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq L(\gamma)sup_{z\in\gamma^*}|e^{iz}-1|$
Or $L(\gamma) = \int_0^\pi |\gamma'(t)|dt = \int_0^\pi |rie^{it}|dt = \pi r$
On a $\left|\int_\gamma e^{iz} - 1dz\right| \leq L(\gamma)sup|e^{iz}-1|$

(scanné avec CamScanner

$\Longrightarrow \left|\int_\gamma e^{iz} - 1 dz\right| \leq \pi r sup_{z\in\gamma}\cdot|e^{iz} - 1|$

d'où $\left|\int_\gamma \frac{e^{iz}-1}{z} dz\right| \leq \pi sup_{z\in\gamma}\cdot|e^{iz} - 1| car |z| = r$

ii) $\lim_{r\to 0} I_r = i\pi \ \forall r \ \in \mathbb{R}_+^*$

On sait que $\left|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}-1}{z} dz\right| \leq \pi sup|e^{ir} - 1|$

On a $\lim_{r\to 0} \pi sup|e^{ir} - 1| = 0$ d'où :

$$\lim_{r\to 0}\left|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}-1}{z} dz\right| = 0$$

On a : $\frac{e^{iz}-1}{z} = \frac{e^{iz}}{z} - \frac{1}{z}$

Posons $g(z) = \frac{1}{z}$

g est une fonction holomophe sur $z \setminus \{0\}$.

$\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}-1}{z} dz = \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_\gamma \frac{1}{z} dz$

$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = \int_0^\pi \frac{1}{re^{it}} re^{it} dt = i\pi$

$\Longrightarrow \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}-1}{z} dz = I_r - i\pi$

$$\Longrightarrow \lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}-1}{z} dz = \lim_{r\to 0} I_r - i\pi$$

d'où $\lim_{r\to 0} I_r - i\pi = 0 \Longrightarrow \lim_{r\to 0} I_r = i\pi$

(b) Montrons $\lim_{r\to+\infty}\int_0^\pi e^{-r\sin t} dt = 0$

$\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}]$on a $\frac{2t}{pi} \leq \sin t \leq t$

$$\begin{array}{lll} -rt & \leq -r\sin t & \leq -\frac{2rt}{\pi} \\ e^{-rt} & \leq e^{-r\sin t} & \leq e^{-\frac{2rt}{\pi}} \end{array}$$

$\int_0^\pi e^{-rt} dt \ \leq \int_0^\pi e^{-r\sin t} dt \ \leq \int_0^\pi e^{-\frac{2rt}{\pi}} dt$

Or $\int_0^\pi e^{-rt} dt = \left[-\frac{1}{r} e^{-rt}\right]_0^\pi = -\frac{1}{r}\left[e^{-rt}\right]_0^\pi$

$\Longrightarrow \int_0^\pi e^{-rt} dt = -\frac{1}{r}\left[e^{-r\pi} - 1\right]$

$$\Longrightarrow \lim_{r\to+\infty}\int_0^\pi e^{-rt} dt = 0$$

De plus $\int_0^\pi e^{-\frac{2rt}{\pi}} dt = \left[-\frac{\pi}{2r} e^{-\frac{2rt}{\pi}}\right]_0^\pi$

$\Longrightarrow \int_0^\pi e^{-\frac{2rt}{\pi}} dt = -\frac{\pi}{2r}\left[e^{-\frac{2rt}{\pi}}\right]_0^\pi$

$\Longrightarrow \int_0^\pi e^{-\frac{2rt}{\pi}} dt = -\frac{\pi}{2r}\left[e^{-2\pi} - 1\right]$

$\Longrightarrow \lim_{r\to+\infty}\int_0^\pi e^{-\frac{2rt}{\pi}} dt = \lim_{r\to+\infty} -\frac{\pi}{2r}\left[e^{-2\pi} - 1\right]$

$\lim_{r\to+\infty}\int_0^\pi e^{-\frac{2rt}{\pi}} dt = 0$. D'après le théorème des gendarmes

Scanné avec CamScanner

$$\lim_{r\to+\infty}\int_0^{\pi} e^{-r\sin t}dt = 0$$

ii) Deduisons que $\lim_{r\to+\infty} I_r = 0$

$\int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz = \int_0^{\pi}\frac{e^{ire^{it}}}{re^{it}}\times re^{it}dt$

$\Longrightarrow \int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{\gamma} ie^{ire^{it}}dt = i\int_0^{\pi} e^{ir(\cos t+i\sin t)}dt$

$\Longrightarrow \int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz = i\int_0^{\pi} e^{ir\cos t}\cdot e^{-r\sin t}dt$

$\Longrightarrow \left\|\int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz\right\| \geq \int_0^{\pi}\left|e^{ir\cos t}\right|\times\left|e^{-r\sin t}\right|dt$

$\Longrightarrow \left|\int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz\right| \geq \int_0^{\pi} e^{-ir\sin t} car \int_0^{\pi}\left|e^{ir\cos t}\right| = 1.$

Or $\lim_{r\to+\infty}\int_0^{\pi} e^{-r\sin t}dt = 0$ d'après la question précédente, Ainsi

$\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z}dz = 0$

$\Longrightarrow \lim_{r\to+\infty} I_r = 0.$

(c) Considérons deux réels a et A tels que $0 < a < A < \infty$

$\gamma_{a,A}: \begin{array}{ccc}[-A,-a] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & x\end{array}$

$\delta_{a,A}: \begin{array}{ccc}[a,A] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & x\end{array}$

$\gamma_a: \begin{array}{ccc}[0,\pi] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & ae^{it}\end{array}$

$\gamma_A: \begin{array}{ccc}[0,\pi] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & Ae^{it}\end{array}$

$\gamma^*_{a,A} = [-A,-a,a,A] \subset C\setminus 0$

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$, f est holomorphe sur $C\setminus 0$ d'après la formule de Cauchy.

$\int_{\gamma a,A} f(z)dz = 0.$

(Scanné avec CamScanner)

UFR MI :L3 2018-2019

CORRECTION : VARIABLES COMPLEXES SESSION 1

Exercice 1

Soit $f(z) = \begin{cases} \frac{z^3}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$

1. Demontrons que f est continue en 0

Posons $z = re^{i\theta}, r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Alors quand $z \xrightarrow[\neq]{} 0 \Longleftrightarrow r \xrightarrow[\neq]{} 0$.
Ainsi

$$\lim_{z \xrightarrow[\neq]{} 0} f(z) = \lim_{z \xrightarrow[\neq]{} 0} \frac{r^3 e^{-2i\theta}}{re^{i\theta}}$$
$$= \lim_{r \xrightarrow[\neq]{} 0} re^{-3i\theta}$$
$$\lim_{z \xrightarrow[\neq]{} 0} f(z) = 0$$

Or : $f(0) = 0$, donc $\lim_{z \xrightarrow[\neq]{} 0} f(z) = f(0)$

On en déduit que : f est continue en 0.

2. Démontrons que les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaitent en 0

Pour $z \neq 0$:
Posons $z = x + iy$
Alors : $f(z) = f(x+iy) = \dfrac{x^3 - 3xy^2 + i(-3x^2y + y3)}{x^2 + y^2}$
Posons $P(x,y) = \dfrac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2}$ et $Q(x,y) = \dfrac{-3x^2y + y^3}{x^2 + y^2}$
D'où : $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$.
Pour $z = 0, f(z) = 0$.
$f(0) = 0 \Rightarrow P(0,0) + iQ(0,0) = 0$
$\Rightarrow P(0,0) = Q(0,0) = 0$

Scanné avec CamScanner

On a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{P(x,0)-P(0,0)}{x-0}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{P(x,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1\\ \frac{\partial P}{\partial x}(0,0) &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{P(0,y)-P(0,0)}{y-0}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{P(0,y)}{y}\\ \frac{\partial P}{\partial y}(0,0) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{Q(x,0)-Q(0,0)}{x-0}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}(0,0) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{Q(0,y)-Q(0,0)}{y-0}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{Q(0,y)}{y}\\ \frac{\partial Q}{\partial y}(0,0) &= 1\end{aligned}$$

P et Q admettent en $(0,0)$ des dérivées partielles premières par rapport à x et y et on a :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(0,0)\\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(0,0) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(0,0)\end{cases}$$

Donc, les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaitent en 0.

Scanné avec CamScanner

3. Démontrons que f n'est pas dérivable (au sens complexe) en 0

On a : $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \dfrac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \dfrac{f(z)}{z}$

Pour $z \neq 0$, posons $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0, \theta \in \mathbb{R}$

Alors :

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0} &= \lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}\\ &= \lim_{r\to 0}\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\\ &= \lim_{r\to 0} e^{-4i\theta}\\ \lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0} &= e^{-4i\theta}\end{aligned}$$

Comme la suite depend que de θ, alors elle n'existe pas.
Donc , f n'est pas dérivable (au sens complexe)en 0.

Exercice 2

1. Démontrons que $|a_n| \leq \dfrac{M}{nR^{n-1}}$

Supposons que : $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ est le developpement en série entière de f.

On sait que $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)z^n$, et donc par unicité du développement en série entière, on en déduit que :

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0).$$

$f^{(n)}(0)\ ind\ \gamma(0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(s)}{s^{n+1}}\,ds$

D'où : $\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \dfrac{n!}{2\pi i\ ind_\gamma(0)}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(s)}{s^{n+1}}\,ds$

On vient de montrer que si $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ alors $a_n = \dfrac{n!}{2\pi i\ ind_\gamma(0)}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(s)}{s^{n+1}}\,ds.$

Scanné avec CamScanner

Ainsi donc, si $f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n\, z^{n-1}$ alors $n\, a_n = \dfrac{n!}{2\pi i\, ind_\gamma(0)} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(s)}{s^{(n-1)+1}}\, ds$

$$n\, a_n = \frac{n!}{2\pi i\, ind_\gamma(0)} \int_\gamma \frac{f(s)}{s^{(n-1)+1}}\, ds = \frac{n!}{2\pi i\, ind_\gamma(0)} \int_\gamma \frac{f(s)}{s^n}\, ds$$

Soit $r < R$.
Considérons le chemin fermé γ contenu dans le disque $|z| < R$ et defini par :

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto re^{i2\pi t} \end{aligned}$$

Alors : $ind_\gamma(0) = 1$ et $|n\, a_n| = \left| \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_0^1 \frac{f'(\gamma(t))}{[\gamma(t)]^n} \gamma'(t)\, dt \right|$
Or $\gamma'(t) = i2\pi r e^{i2\pi t} = i2\pi r \gamma(t)$
Donc :

$$\begin{aligned} |n\, a_n| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \times 2\pi i \int_0^1 \frac{f'(\gamma(t))}{[\gamma(t)]^n} \gamma(t)\, dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{f'(\gamma(t))}{[\gamma(t)]^{n-1}}\, dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{f'(\gamma(t))}{[\gamma(t)]^{n-1}} \right| dt = \int_0^1 \frac{|f'(\gamma(t))|}{|[\gamma(t)]^{n-1}|}\, dt \end{aligned}$$

Or : $|f'(\gamma(t))| \leq M$ car $\gamma(t)$ est contenu dans $|z| < R$ et $|\gamma(t)| = |re^{i2\pi t}| = r$
D'où : $|n\, a_n| \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{M}{r^{n-1}}\, dt = \frac{M}{r^{n-1}}$

Donc $|a_n| \leq \dfrac{M}{n\, r^{n-1}}$

En faisant tendre $r \longrightarrow R$, on a :

$$\boxed{|a_n| \leq \frac{M}{n\, R^{n-1}}}$$

2. Démontrons que l'on a :

$$\int_0^1 f'(tz)\, dt = \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z} & \text{pour } 0 < |z| < R \\ f'(0) & \text{pour } z = 0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Pour $|z| < R$ et $t \in [0,1]$, on a : $|tz| < R$

D'où $f'(tz) = \sum_{n\geq 1} n a_n t^{n-1} z^{n-1}$

Posons $u_n(t) = \sum_{n\geq 1} n a_n t^{n-1} z^{n-1}$

$|u_n(t)| = |\sum_{n\geq 1} n a_n t^{n-1} z^{n-1}| \leq n|a_n|\ |z^{n-1}|$

Or : $n|a_n|\ |z^{n-1}|$ est le terme général d'une série convergente car f et f' ont le même rayon de convergence.

Donc $\sum_{n\geq 1} u_n(t)$ converge normalement et donc uniforme sur $[0,1]$.

Par conséquent, $\sum_{n\geq 1} u_n(t)$ peut être intégré terme à terme.

Ainsi $\int_0^1 f'(tz)\,dt = \int_0^1 \sum_{n\geq 1} u_n(t)\,dt = \sum_{n\geq 1} \int_0^1 u_n(t)\,dt$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f'(tz)\,dt &= \sum_{n\geq 1} \int_0^1 u_n(t)\,dt \\
&= \sum_{n\geq 1} \int_0^1 n a_n t^{n-1} z^{n-1} \\
&= \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} \int_0^1 t^{n-1}\,dt \\
&= \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} \left[\frac{t^n}{n}\right]_0^1 \\
&= \sum_{n\geq 1} a_n z^{n-1} = \frac{1}{z} \sum_{n\geq 1} a_n z^n
\end{aligned}$$

Or : $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \Rightarrow f(z) = a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n z^n$

$$\Rightarrow f(z) - a_0 = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$$

On sait que : $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow a_0 = f(0)$

Donc $\sum_{n\geq 1} a_n z^n = f(z) - f(0)$

Ainsi : $\int_0^1 f'(tz)\,dt = \frac{1}{z}(f(z) - f(0))$

Scanné avec CamScanner

Pour $z = 0$

$$\int_0^1 f'(tz)\,dt = \int_0^1 f'(0)\,dt = f'(0)$$

En somme :

$$\int_0^1 f'(tz)\,dt = \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z} & \text{pour } 0 < |z| < R \\ f'(0) & \text{pour } z = 0 \end{cases}$$

Exercice 3

Soit $f(z) = \dfrac{z(e^z-1)}{e^{2z}-1} + \dfrac{1}{z^2+1}$.

1. Déterminons les points singuliers de f

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z(e^z-1)}{e^{2z}-1} + \frac{1}{z^2+1} \\ &= \frac{z(e^z-1)}{(e^z-1)(e^z+1)} + \frac{1}{z^2+1} \\ f(z) &= \frac{z}{e^z+1} + \frac{1}{z^2+1} \end{aligned}$$

On a : $z \in D_f \Rightarrow e^z + 1 \neq 0$ et $z^2 + 1 \neq 0$

$e^z + 1 = 0 \text{ ou } z^2 + 1 = 0 \Rightarrow e^z = -1$ ou $z^2 = -1$

$\Rightarrow e^z = e^{i\pi}$ ou $z_a = i, z_b = -i$

$\Rightarrow z_k = i\pi + 2k\pi i, k \in x$ ou $z_a = i, z_b = -i$

Donc les points singuliers de f sont : $z_k = i\pi + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$

$z_a = i, z_b = -i$

Déterminons la nature de ces points singuliers

Au point $z_k = i(2k+1)\pi$

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{z\to}(z - z_k)f(z) &= \lim_{z\to}(z - z_k)\left[\frac{z}{e^z+1} + \frac{1}{z^2+1}\right] \\ &= \lim_{z\to} z \\ &= z_k \neq 0 \end{aligned}$$

Scanné avec CamScanner

Donc z_k est un pôle simple de f.

Au point $z_a = i$

$$\begin{aligned}\lim_{z\to i}(z-i)f(z) &= \lim_{z\to i}(z-i)\left[\frac{z}{e^z+1}+\frac{1}{z^2+1}\right]\\ &= \lim_{z\to i}\frac{z(z-i)}{e^z+1}+\frac{1}{z+1}\\ &= \frac{1}{i+i}=\frac{1}{2i}\neq 0\end{aligned}$$

Donc $z_a = i$ est un pôle simple de f.

Au point $z_b = -i$

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -i}(z+i)f(z) &= \lim_{z\to -i}\left[\frac{z(z+i)}{e^z+1}+\frac{1}{z-1}\right]\\ &= -\frac{1}{2i}\neq 0\end{aligned}$$

Donc $z_b = -i$ est un pôle simple de f.

2. Calculons les résidus de f en 0 et en i

On a :

$$\begin{aligned}Res\,(f,0) &= \lim_{z\to 0} zf(z)\\ &= \lim_{z\to 0} z\times\left[\frac{z}{e^z+1}+\frac{1}{z^2+1}\right]\end{aligned}$$

$Res\,(f,0) = 0$ Car f est holomorphe en 0

On a :

$$\begin{aligned}Res\,(f,i) &= \lim_{z\to i}(z-i)f(z)\\ Res\,(f,i) &= \frac{1}{2i}\end{aligned}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 4

1. Démontrons que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+8\cos^2 t} = \frac{2\pi}{3}$$

Posons $z = e^{it} \Rightarrow dz = ie^{it}\,dt \Rightarrow \frac{dz}{iz} = dt$

On a : $\cos^2 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 = \left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^2 = \frac{(z^2+1)^2}{4z^2}$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+8\cos^2 t} &= \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(1+8\frac{(z^2+1)^2}{4z^2}\right)} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{z^2\,dz}{iz\,(z^2+2(z^2+1)^2)} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{i\,(z^2+2(z^4+2z^2+1))} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{i(z^2+2)(1+2z^2)}\end{aligned}$$

Posons $f(z) = \frac{z}{i(z^2+2)(1+2z^2)}$

Déterminons les pôles de f

On a : $D_f = \{z \in \mathbb{C} / z^2+2 \neq 0 \text{ et } 1+2z^2 \neq 0\}$

$z^2+2=0$ ou $1+2z^2=0 \Rightarrow z_1 = i\sqrt{2}, z_2 = -i\sqrt{2}$

$z_3 = i\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $z_4 = -i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$D_f = \mathbb{C}\backslash\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$

Appliquons le théorème des résidus

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} f(z)\,dz &= 2\pi i\,[Res\,(f,z_1)Ind_{|z|=1}(z_1) + Res\,(f,z_2)Ind_{|z|=1}(z_2) \\ &\quad + Res\,(f,z_3)Ind_{|z|=1}(z_3) + Res\,(f,z_4)Ind_{|z|=1}(z_4)\,]\end{aligned}$$

Scanné avec CamScanner

On a : $|z_1| = |Z_2| = \sqrt{2} > 1$ donc $Ind_{|z|=1}(z_1) = Ind_{|z|=1}(z_2) = 0$

$|z_3| = |z_4| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$ donc $Ind_{|z|=1}(z_3) = Ind_{|z|=1}(z_4) = 0$

D'où : $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i\,[Res\,(f, z_3) + Res\,(f, z_4)\,]$.

$$
\begin{aligned}
Res\,(f, z_3) &= \lim_{z \to z_3} (z - z_3) f(z) \\
&= \lim_{z \to z_3} \left[\frac{z}{i2(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)} \right] \\
&= \frac{z_3}{i2(z_3 - z_1)(z_3 - z_4)(z_3 - z_2)} \\
&= \frac{i\frac{1}{\sqrt{2}}}{i2(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\sqrt{2})} \\
&= \frac{i\frac{1}{\sqrt{2}}}{i2(-\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{2}{\sqrt{2}})(\frac{3i}{\sqrt{2}})} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{6i}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{6i}
\end{aligned}
$$

$$Res\,(f, z_3) = \frac{1}{6i}$$

Scanné avec CamScanner

$$Res\,(f,z_4) = \frac{z_4}{2i(z_4-z_1)(z_4-z_2)(z_4-z_3)}$$

$$= \frac{-\frac{i}{\sqrt{2}}}{2i(-\frac{i}{\sqrt{2}}-i\sqrt{2})(-\frac{i}{\sqrt{2}}+i\sqrt{2})(-\frac{i}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}})}$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2(-\frac{3i}{\sqrt{2}})(\frac{i}{\sqrt{2}})(-\frac{2i}{\sqrt{2}})}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{6i}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{6i}$$

$$Res\,(f,z_4) = \frac{1}{6i}$$

Donc

$$\int_{|z=1|} f(z) = 2\pi i(\frac{1}{6i}+\frac{1}{6i})$$

$$= \frac{2\pi}{3}$$

$$\int_{|z=1|} f(z) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+8\cos^2 t} = \frac{2\pi}{3}}$$

2. Soient $a>0$ et $b>0$.

Calculons par la méthode des résidus : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)(x^2+b)}$

Posons $f(z) = \frac{1}{(z^2+a)(z^2+b)}$

Déterminons les pôles de f

$D_f = \{z \in \mathbb{C} / \; z^2+a \neq 0 \text{ et } z^2+b \neq 0\}$

$z^2+a=0$ ou $z^2+b=0 \Rightarrow z_1 = i\sqrt{a}, z_2 = -i\sqrt{a}$ ou $z_3 = i\sqrt{b}$ ou $z_4 = -i\sqrt{b}$

D'où : $D_f = \mathbb{C}\backslash\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$.

Scanné avec CamScanner

Les pôles de f sont : z_1, z_2, z_3, z_4.

Déterminons le contour d'intégration

Soit Γ le contour.

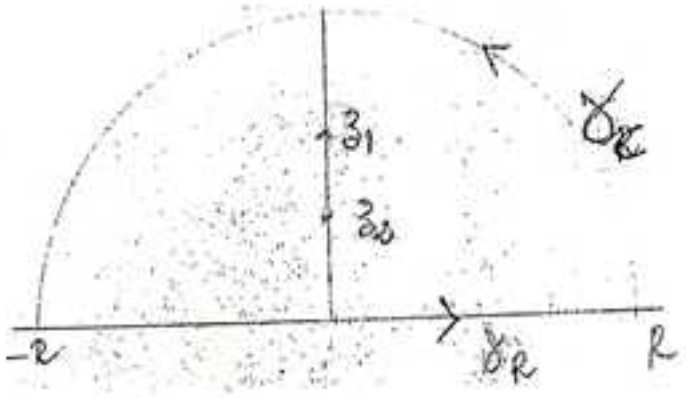


FIGURE 1 –

où $R > \sqrt{a}$ et $R > \sqrt{b}$

$\Gamma = \gamma_R \cup \delta_C$

Déterminons une paramétisation de γ_R et γ

$$\gamma_R : [-R, R] \longrightarrow \mathbf{C}, \quad t \longmapsto t \qquad \gamma_c : [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{C}, \quad t \longmapsto Re^{it}$$

Appliquons le théorème des résidus

On a : $\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,(Res(f, z_1) + Res(f, z_2))$

$$\int_{\gamma_R \cup \gamma_C} f(z)\,dz = 2\pi i\,(Res(f, z_1) + Res(f, z_2))$$

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_C} f(z)\,dz = 2\pi i\,(Res(f, z_1) + Res(f, z_2))$$

Scanné avec CamScanner

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(\gamma_R(t))\,\gamma_R'(t)\,dt = \int_{-R}^{R} f(t)\,dt$$

$$\int_{\gamma_C} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} f(Re^{it})iRe^{it}\,dt = iR\int_0^{2\pi} f(Re^{it})iRe^{it}\,dt.$$

$$\begin{aligned} Res(f,z_1) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) \\ &= \lim_{z\to z_1}\frac{1}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} \\ &= \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} \\ &= \frac{1}{(i\sqrt{a}+i\sqrt{a})(i\sqrt{a}-i\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}-\sqrt{a})} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{Res(f,z_1) = \frac{1}{2i\sqrt{a}(b-a)}}$

$$\begin{aligned} Res(f,z_3) &= \frac{1}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_4)} \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{b}(i\sqrt{b}-i\sqrt{a})(i\sqrt{b}+i\sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{b}(a-b)} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{Res(f,z_3) = \frac{1}{2i\sqrt{a}(b-a)}}$

Scanné avec CamScanner

Ainsi :

$$\int_{-R}^{R} f(t)\,dt + iR\int_0^{\pi} f(Re^{it})e^{it}\,dt = 2\pi i\left[\frac{1}{2i\sqrt{a}(b-a)} + \frac{1}{2i\sqrt{b}(a-b)}\right]$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a}(b-a)} + \frac{\pi}{\sqrt{a}(a-b)}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(b-a)} - \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{ab}(b-a)}$$

$$= \frac{\pi(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{\sqrt{ab}(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{ab}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}$$

$$\int_{-R}^{R} f(t)\,dt + iR\int_0^{\pi} f(Re^{it})e^{it}\,dt = \frac{\pi}{b\sqrt{a}+a\sqrt{b}}$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\int_{-R}^{R} f(t)\,dt + iR\int_0^{\pi} f(Re^{it})e^{it}\,dt\right] = \lim_{R\to+\infty}\frac{\pi}{b\sqrt{a}+a\sqrt{b}}$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(t)\,dt + \lim_{R\to+\infty} iR\int_0^{\pi} f(Re^{it})e^{it}\,dt = \frac{\pi}{b\sqrt{a}+a\sqrt{b}}$$

Or $\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$

$$\left|iR\int_0^{2\pi} f(Re^{it})e^{it}\,dt\right| \leq R\int_0^{2\pi}\left|f(Re^{it})e^{it}\right|\,dt$$

$$\leq R\int_0^{2\pi}\left|f(Re^{it})\right|\,dt$$

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+a)(z^2+b)}$$

$$|f(Re^{it})| = \left|\frac{1}{(R^2e^{2it}+a)(R^2e^{2it}+b)}\right| = \frac{1}{|R^2e^{2it}+a|\;|R^2e^{2it}+b|}$$

Scanné avec CamScanner

$$\begin{aligned}|R^2e^{2it}+a| &\geq |R^2e^{2it}|-|a| \\ &\geq R^2-a \text{ car } a>0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|R^2e^{2it}+b| &\geq |R^2e^{2it}|-|b| \\ &\geq R^2-b \text{ car } b>0\end{aligned}$$

Donc : $\left|\dfrac{1}{(R^2e^{2it}+a)(R^2e^{2it}+b)}\right| \leq \dfrac{1}{(R^2-a)(R^2-b)}$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\left|iR\int_0^{2\pi} f(Re^{it})e^{it}\,dt\right| &\leq R\int_0^{\pi} \frac{1}{(R^2-a)(R^2-b)}\,dt \\ &\leq \frac{\pi R}{(R^2-a)(R^2-b)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{R\to+\infty} \frac{\pi R}{(R^2-a)(R^2-b)} &= \lim_{R\to+\infty} \frac{\pi R}{R^4} \\ &= \lim_{R\to+\infty} \frac{2\pi}{R^3}\end{aligned}$$

$\lim\limits_{R\to+\infty} \dfrac{\pi R}{(R^2-a)(R^2-b)} = 0$ car $\lim\limits_{R\to+\infty} \dfrac{1}{R^3}$

Ainsi : $\lim\limits_{R\to+\infty} \left|iR\int_0^{\pi} f(Re^{it})e^{it}\,dt\right| = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{R\to+\infty} iR\int_0^{\pi} f(Re^{it})e^{it}\,dt = 0$

Par conséquent : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \dfrac{\pi}{b\sqrt{a}+a\sqrt{b}}$.

• La resultat vaut-il encore pour $a=b$?

Fixons a.

Pour $0<\varepsilon<a$, On a : $\dfrac{1}{(x^2+a)(x^2+b)} \leq \dfrac{1}{(x^2+a)(x^2+\varepsilon)}$

$\forall b \in [\varepsilon, +\infty[$

Donc les intégrales impropres $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2+a)(x^2+b)}$ sont uniformement

Scanné avec CamScanner

convergentes par rapport à b sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Ainsi : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a)^2}\,dx = \lim_{b\to a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)(x^2+b)} = \frac{\pi}{2a\sqrt{a}}$

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE L'EXAMEN DE RECHERCHE OPERATIONNELLE 1
LICENCE3 2015-2016

EXERCICE 1

La matrice M des durées de vols entre les ville $v_1, v_2, \cdots, v_6$

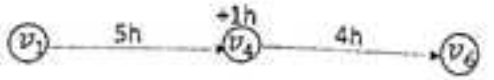
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & \infty \\ \infty & 4 & 0 & \infty & 4 & 3 \\ 6 & 2 & \infty & 0 & 4 & 4 \\ \infty & 4 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 5 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Appliquons l'algorithme de DIJKSTRA pour trouver le plus court chemin de v_1 à v_6 sachant qu'il y a une escale obligatoire de respectivement 3 heures et 1 heure aux villes v_2 et v_4

On obtient alors :

Sommets	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
Initialisation	0	$3+3=6$	∞	$5+1=6^*$	∞	∞
Itération 1	⋮	6^*	11	⋮	10	10
Itération 2	⋮	⋮	11	⋮	10	10^*
Itération 3	⋮	⋮	11	⋮	10^*	⋮
Itération 4	⋮	⋮	11^*	⋮	⋮	⋮

Le plus court chemin est



2jpg*page1.jpg*

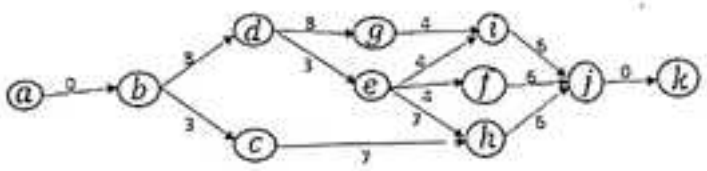
EXERCICE 2

Tableau :

Scanné avec CamScanner

Tâche	Durée	prédecesseur
a	0	
b	5	-
c	3	b
d	8	b
e	3	d
f	4	e
g	8	d
h	7	c,d,e
i	4	d,e,g
j	6	a,b,c,d,e,f,g,h,i
k	0	

les différents niveaux sont : $N_0 = \{a\}$, $N_1 = \{b\}$, $N_2 = \{c, d\}$, $N_3 = \{e, g\}$, $N_4 = \{f, h, i\}$, $N_5 = \{j\}$, $N_6 = \{k\}$
On obtient le graphe potentiel-tâche ci-dessous :



1jpg,page1.jpg

La table des date au plus tôt t_i et au plus tard T_i

Tache	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
Durée	0	5	3	8	3	4	8	7	4	6	0
t_i	0	0	5	5	13	16	13	8	21	25	31
T_i	0	0	15	5	18	21	13	18	21	25	31

la durée minimal du projet est donc 31 jours

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 3

1. Ecrivons le programme lineaire correspondant au problème posé
   - Variable : x_1, x_2, x_3 quantités respectives du produits 1 , 2 , 3
   - Contraintes de signe : $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

   Vrai contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 & \leq 18 \end{cases}$$

   - fonction-objectif : $Z = 4x_1 + 7x_2 + 2x_3$

   le problème revient donc a resoudre le P.L. suivant :

$$\begin{cases} maxZ = 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 18 \\ x_i \geq 0, i = 1, \cdots, 3 \end{cases}$$

   Resolution

   La forme standard de ce problème est

$$\begin{cases} maxZ = 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_5 = 18 \\ x_i \geq 0, i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

   On remarque que $I = \{x_4, x_5\}$ est une base réalisable évidente. En outre le programme est déja sous la forme canonique par rapport à cette base. Les tableaux de simplex sont les suivants. :

TS1

	x_1	x_2	x_3		
x_4	1	2*	1	10	←
x_5	2	3	3	18	
	4	7	2	0	
		↑			

TS2

	x_1	x_4	x_3		
x_2	1/2	1/2	1/2	5	
x_5	1/2*	-3/2	3/2	3	←
	1/2	-7/2	-3/2	-35	
	↑				

TS3

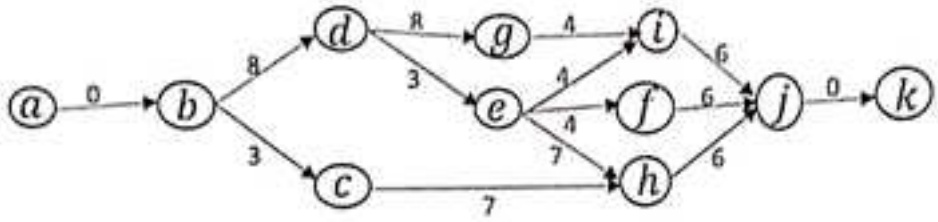
	x_5	x_4	x_3	
x_2	-1	2	-1	2
x_1	2	-3	3	6
	-1	-2	-3	-38

Scanné avec CamScanner

On est à l'optimum car la condition d'arrêt de l'algorithme est verifiée.
Une solution optimale du problème initial est $x^* = (6, 2, 0)^T$ et la valeur optimale est $Z^* = 38$.

2. Valeur limite b_1^* qu'on peut donner à b_1 si on veut conserver la base optimale obtenu dans 1)

Scanné avec CamScanner



Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE RECHERCHE OPERATIONNELLE 1

EXERCICE 1

Choix des variables
soient x_1 la quantité du produit P_1
x_2 la quantité du produit P_2
x_3 la quantité du produit P_3
x_4 le nombre de lot1
x_1 le nombre de lot2

Contraintes de signes
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Contraintes structurelles
$x_1 \leq 100$
$x_2 \leq 100$
$x_3 \leq 100$
composant A : $3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 3x_4 + 2x_5$
composant B : $5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2x_4 + 3x_5$
composant C : $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 3x_4 + 3x_5$

Fonction objectif : $Z = 120(x_1 + x_2 + x_3) - (50x_4 + 60x_5)$

Programme linéaire :
$Max\ Z = 120(x_1 + x_2 + x_3) - (50x_4 + 60x_5)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 3x_4 + 2x_5 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2x_4 + 3x_5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 3x_4 + 3x_5 \\ x_1 \leq 100 \\ x_2 \leq 100 \\ x_3 \leq 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

EXERCICE 2

On considère le programme linéaire (P) suivant :

Scanné avec CamScanner

$$(P):\begin{cases} max\, Z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \\ 4x_1 - 4x_2 + x_4 = 5 \\ -x_1 - 6x_2 + x_5 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

La matrice associée à $I = \{ x_1, x_2, x_3 \}$ est $B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

On a $det(B) = 20 \neq 0$ donc $I = \{ x_1, x_2, x_3 \}$ est une base.

est-elle réalisable? evaluons $B^{-1}b$ avec $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

On a $B^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 20 \end{pmatrix}$

On a $B^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 50 \\ 25 \\ 125 \end{pmatrix} \geq 0$. Alors $I = \{ x_1, x_2, x_3 \}$ est une base réalisable.

Est-elle optimale?

Ecrivons le programme sous forme canonique par rapport à cette base réalisable.

La forme canonique est : $\begin{cases} Z^* = max\, Z = \hat{c} \\ \hat{A}x = \hat{b} \\ x \geq 0 \end{cases}$ où :

$\hat{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{25}{4} \end{pmatrix}$; $\hat{Z} = C_B B^{-1} b = C_B \hat{b}$ où C_B est le vecteur ligne constitué des coefficients des éléments de base dans la fonction objectif. Donc $C_B = (4\ 6\ 2)$.

Ainsi, $\hat{Z} = (4\ 6\ 2)\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{25}{4} \end{pmatrix} = 30$; $\hat{Z} = 30$

On a $\hat{A} = B^{-1}A$ où A est la matrice des vraies contraintes

c'est à dire $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

On a $\hat{C} = C - C_B B^{-1} A = C - C_B \hat{A}$ où C est le vecteur ligne de la fonction objectif. C'est à dire $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $C_B \hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Ainsi, $\hat{C} = C - C_B \hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

La forme canonique par rapport à la base réalisable $I = \{x_1, x_2, x_3\}$ est :

$$\begin{cases} Max\, Z = Z^* = 30 - 2x_4 - 2x_5 - 2x_6 \\ x_1 + \frac{3}{10}x_4 + \frac{1}{5}x_5 = \frac{5}{2} \\ x_2 + \frac{1}{20}x_4 + \frac{1}{5}x_5 = \frac{4}{5} \\ x_3 + \frac{1}{4}x_4 + x_6 = \frac{25}{4} \\ x_i \geq 0, i \in [1,6] \end{cases}$$

On a $\hat{C} \leq 0$, donc $I = \{x_1, x_2, x_3\}$ est une base réalisable optimale. Une solution optimale est $x^* = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}, & \frac{4}{5}, & \frac{25}{4} \end{pmatrix}^T$ et la valeur optimale est $Z^* = 30$

EXERCICE 3

Resolution par la methode simplexe le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} max\, Z = 2x_2 - 5x_3 \\ x_1 + x_3 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_i \geq 0, i \in [1;3] \end{cases}$$

La forme standard du programme est :

$$\begin{cases} max\, Z = 2x_2 - 5x_3 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 + x_5 = 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_i \geq 0, i \in [1;5] \end{cases}$$

Nous n'avons pas de base réalisable évidente. Utilisons la phase 1 de l'algorithme du simplexe

Scanné avec CamScanner

Considerons le programme auxiliaire : $\begin{cases} min\,\zeta = x_6 + x_7 \\ x_1 + x_3 - x_4 + x_6 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 + x_5 = 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_7 = 0 \\ x_i \geq 0, i \in [1;7] \end{cases}$

$I = \{x_6, x_7, x_8\}$ est une base réalisable évidente et on a :
$x_6 = 2 - x_1 - x_3 + x_4$, $x_7 = -x_1 + x_2 - 3x_3$, d'où la forme canonique par rapport à cette base s'écrit :

$$\begin{cases} min\,\zeta = 2 - 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 - x_4 + x_6 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 + x_5 = 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_7 = 0 \\ x_i \geq 0, i \in [1;7] \end{cases}$$

Soient les tableaux simplexes suivants :

	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_6	1	0	1	-1	2	
x_5	2	1	6	0	6	
x_7	1	-1	3*	0	0	←
	-2	1	-4	1	-2	
			↑			

⇒

	x_1	x_2	x_7	x_4		
x_6	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	·	-1	2	
x_5	0	3	·	0	6	
x_3	$\frac{1}{3}$*	$-\frac{1}{3}$	·	0	0	←
	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	·	1	-2	
	↑					

⇒

	x_3	x_2	x_4		
x_6	-2	1*	-1	2	←
x_5	0	3	0	6	
x_1	3	-1	0	0	
	2	-1	1	-2	
		↑			

⇒

	x_3	x_6	x_4	
x_2	-2	·	-1	2
x_5	6	·	3	0
x_1	1	·	-1	2
	0	0	0	0

$I = \{x_2, x_5, x_1\}$ est une base réalisable du problème initial. La forme canonique par rapport à cette base est :
On a : $x_2 = 2x_3 + x_4 + 2$, En remplaçant x_2 dans la fonction-objectif, on obtient :

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} max\, Z = 4 - x_3 + 2x_4 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_5 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i \in [1;5] \end{cases}$$

On a alors les tableaux simplexes suivants :

	x_3	x_4		
x_2	-2	-1	2	
x_5	6	3*	0	←
x_1	1	-1	2	
	-1	2	-4	
		↑		

⇒

	x_3	x_5		
x_2	0	$\frac{1}{3}$	2	
x_4	2	$\frac{1}{3}$	0	←
x_1	3	$\frac{1}{3}$	2	
	-5	$-\frac{2}{3}$	-4	
		↑		

La condition d'optimalité est verifiée. Une solution optimale est $x^* = (\ 2,\ \ 2,\ \ 0\ )^T$ et la valeur optimale est $Z^* = 4$

Scanné avec CamScanner

UFR-MI :L3 Année 2017-2018

CORRECTION RO2 1ERE SESSION

EXERCICE 1

Écrivons en fonction des d_1, d_2, d_3 les 3 types de machines et des prix P_1, P_2, P_3 des produits.

- Choix des variables
  Soient x_1, x_2, x_3 et x_4 les quantités respectives de production des produits 1, 2, 3 et 4.

- Contraintes de signe
  $x_i \geq 0$, pour $i \in \overline{1,4}$ car ce sont les quantités de matières de productions.

- Vraies contraintes
  Conttraintes sur :

- la machine 1 : $60x_1 + 30x_2 + 90x_3 + 45x_4 \leq d_1$
- la machine 2 : $60x_1 + 90x_2 + 60x_3 + 90x_4 \leq d_2$
- la machine 3 : $60x_1 + 60x_2 + 60x_3 + 75x_4 \leq d_3$

  La fonction-objectif : $Z = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4$
  Le problème étant un problème d'optimisation qui consiste à maximiser les recèttes, alors célà revient à maximiser la fonction objectif :

$$MaxZ = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4$$

$$SC \begin{cases} 60x_1 + 30x_2 + 90x_3 + 45x_4 \leq d_1 \\ 60x_1 + 90x_2 + 60x_3 + 90x_4 \leq d_2 \\ 60x_1 + 60x_2 + 60x_3 + 75x_4 \leq d_3 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \overline{1,4} \end{cases}$$

Le problème dual est :

Scanné avec CamScanner

$$MinW = d_1y_1 + d_2y_2 + d_3y_3$$

$$SC\begin{cases} 60y_1 + 60y_2 + 60y_3 \geq P_1 \\ 30y_1 + 90y_2 + 60y_3 \geq P_2 \\ 90y_1 + 60y_2 + 60y_3 \geq P_3 \\ 45y_1 + 90y_2 + 75y_3 \geq P_4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Interpretatioin économique de ce problème :
le problème dual consiste à minimisé le coût de production des produits tout en garantissant le bénéfice qu'on devrait obtenir dans le problème primal.

EXERCICE 2

$$minZ = 4x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$(P)\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \overline{1,3} \end{cases}$$

Resolvons (P) á l'aide de la méthode dual du simplexe.

- Ecrivons la forme standart

$$minZ = 4x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$(P)\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\ 2x_2 + x_3 - x_6 = 1 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \overline{1,6} \end{cases}$$

$B = (x_4, x_5, x_6)$ est une base évidente. $\hat{c} = (4, 5, 4) > 0$.
Donc B est une base duale réalisable
On a :

Scanné avec CamScanner

$$minZ = 4x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$(P)\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = -1 \\ -2x_2 - x_3 + x_6 = -1 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \overline{1,6} \end{cases}$$

On obtient $\dot{b} = (-1,-1,-1)^t < 0$, alors l'optimum n'est pas atteint. D'où les tableaux simplexes suivants :

$TS1$	x_1	x_2	x_3	
x_4	-1	-2^*	1	$-1 \leftarrow$
x_5	1	1	-2	-1
x_6	0	-2	-1	-1
	4	$5_\uparrow$	4	

$TS2$	x_1	x_4	x_3	
x_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}^*$	$-\frac{3}{2} \leftarrow$
x_6	1	-1	-2	0
	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{13}{2}_\uparrow$	$-\frac{5}{2}$

$TS3$	x_1	x_4	x_6	
x_2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
x_3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
x_6	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2
	$\frac{11}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{13}{3}$	-9

$\dot{b} = (1,1,2)^t$ et $Z^* = 9$. Donc les conditions d'optimalités sont verifiées. Doù la solution duale est $x^* = (0,1,1)^t$ et $Z^* = 9$

En considerant le tableau (P), deduisons le tableau dual (D') de (P) que l'on donnera.

		v_2			v_5	
(P)	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3
	$\updownarrow v_5$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow v_2$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
(D)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6

Scanné avec CamScanner

Tableau dual

	y_5	y_6	y_3	
y_4	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$
y_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$
y_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{25}{3}$
	-1	-1	-2	-9

EXERCICE 3

Tableau de niveaux

Code	*Durée*	*Précédant*
A	180	–
B	120	A
C	7	B
D	21	B
E	30	B
F	60	B
G	120	C, D
H	120	E, F, G
I	42	H, J
J	150	E, F, G
K	330	H, J
L	210	H, J

Niveaux :
$N_0 = \{A\}$,$N_1 = \{B\}$, $N_2 = \{C, D, E, F\}$, $N_3 = \{G\}$, $N_4 = \{H, J\}$, $N_5 = \{I, K, L\}$.

Scanné avec CamScanner

UFR-MI :L3 Année 2017-2018

CORRECTION RO1 1ERE SESSION

EXERCICE 1

Donnons le programme linéaire modelisant le problème.

- Choix des variables
  Soit x_i la quantité des differents produits respectivement Alpha 12 ,Bêta 51 et Bêta 52, $i = 1, 2, 3$.
- Determination des contraintes

- Contrainte de signe :
  Pou $i = 1, 2, 3$; $x_i \geq 0$ car x_i represente les quantités de matières.
- Vraie contraintes
- Matière M : $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 230$
- Main d'œvre qualifiée : $x_1 + x_3 \leq 25$
- Main d'œuvre non qualifiée : $3x_1 + 4x_2 \leq 35$
- Contraintes sur Alpha 12 : $x_1 \geq 290$
- Fonction-objectif
  $Z(x) = 200x_1 + 210x_2 + 120x_3$
  Le programme est :

$$maxZ(x) = 280x_1 + 210x_2 + 120x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_5 \geq 230 \\ x_1 + x_3 \leq 25 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 35 \\ x_1 \geq 290 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

EXERCICE 2

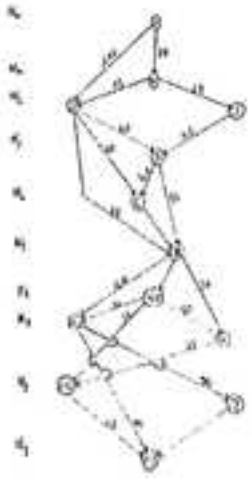
Tableau des précedents

Scanné avec CamScanner

Algo de Ford

tâche	*précedents*
1	–
2	1
3	2
4	8, 10
5	3, 9
6	5, 9
7	12
8	5, 6, 9
9	1, 2
10	8
11	4, 10
12	8, 10
13	7, 11, 12

$N_0 = \{1\}$. $N_1 = \{2\}$, $N_2 = \{3, 9\}$,$N_3 = \{5\}$,$N_4 = \{6\}$. $N_5 = \{8\}$,$N_6 = \{10\}$, $N_7 = \{4, 12\}$, $N_8 = \{7, 11\}$, $N_9 = \{13\}$
$\lambda(S) = 0$
$\lambda(S_i) = \max\{\lambda(S_j) + l(S_i, S_j)\}$, $j \in P(S_i)$



On a : $\lambda(1) = 0, \lambda(2) = 80, \lambda(3) = 105, \lambda(4) = 315$.

Scanné avec CamScanner

$$\lambda(5) = \max\{105 + 45; 100 + 60\} = 160, \lambda(6) = 200, \lambda(7) = 375,$$
$$\lambda(8) = 225, \lambda(9) = 100, \lambda(10) = 265, \lambda(11) = 340,$$
$$\lambda(12) = 285, \lambda(13) = 495$$

D'où le chemin le plus long est :



Scanné avec CamScanner

UFR MI :L3 2018-2019

CORRECTION : INTRODUCTION A LA RO SESSION 1

Exercice 1

	Douche	Baignoire
Chambre 1 lit	6000	8000
Chambre 2 lits	9000	11000

Proportion chambre à un lit supérieur à 60%
Proportion chambre à deux lits supérieur à 25%
Proportion chambre à deux lits inférieur à 75%
Le restaurant à exactement 120 places.
Maximiser la recette

Modélisation

Choix des variables

Soit la variable x_{ij} tel que $i, j \in \overline{1,2}$ où i est la chambre à i lit(s) et j est la chambre j-ème type de bain représentant le nombre de chambre.

Contraintes de signe

$\forall i, j \in \overline{1,2}, x_{ij} \geq 0$

Contraintes structurelles.

- La proportion de chambres à 1 lit donne :

$$\frac{x_{11} + x_{12}}{x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22}} \geq 0,6$$

$$x_{11} + x_{12} \geq 0,6\, x_{11} + 0,6\, x_{12} + 0,6\, x_{21} + 0,6\, x_{22}$$
$$-0,4\, x_{11} - 0,4\, x_{12} + 0,6\, x_{21} + 0,6\, x_{22} \leq 0$$

- La proposition de chambres à une douche donne :

Scanné avec CamScanner

$$0,25 \leq \frac{x_{11}+x_{21}}{x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}} \leq 0,75$$

- $x_{11}+x_{21} \geq 0,25\,x_{11}+0,25\,x_{12}+0,25\,x_{21}+0,25\,x_{22}$

$$-0,75\,x_{11}+0,25\,x_{12}-0,75\,x_{21}+0,25\,x_{22} \leq 0$$

- $x_{11}+x_{21} \leq 0,75\,x_{11}+0,75\,x_{12}+0,75\,x_{21}+0,75\,x_{12}$

$$0,25\,x_{11}-0,75\,x_{12}+0,25\,x_{21}-0,75\,x_{22} \leq 0$$

- Le restaurant à 120 places

$$x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}=120$$

Fonction objectif

$$Max\ Z = 6000\,x_{11}+8000\,x_{12}+9000\,x_{21}+11000\,x_{22}$$

Le programme linéaire associé à ce problème est :
$Max\ Z = 6000\,x_{11}+8000\,x_{12}+9000\,x_{21}+11000\,x_{22}$

$$\begin{cases} -0,4\,x_{11}-0,4\,x_{12}+0,6\,x_{21}+0,6\,x_{22} \leq 0 \\ -0,75\,x_{11}+0,25\,x_{12}-0,75\,x_{21}+0,25\,x_{22} \leq 0 \\ 0,25\,x_{11}-0,75\,x_{12}+0,25\,x_{21}-0,75\,x_{22} \leq 0 \\ x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}=120 \\ x_{ij} \geq 0 \ \ ,i,j \in \overline{1,2} \end{cases}$$

La forme canonique du problème est :

$$Max\ Z = 6000\,x_{11}+8000\,x_{12}+9000\,x_{21}+11000\,x_{22}$$

$$\begin{cases} -0,4\,x_{11}-0,4\,x_{12}+0,6\,x_{21}+0,6\,x_{22} \leq 0 \\ -0,75\,x_{11}+0,25\,x_{12}-0,75\,x_{21}+0,25\,x_{22} \leq 0 \\ 0,25\,x_{11}-0,75\,x_{12}+0,25\,x_{21}-0,75\,x_{22} \leq 0 \\ x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}=120 \\ -x_{11}-x_{12}-x_{21}-x_{22}=-120 \\ x_{ij} \geq 0 \ \ ,i,j \in \overline{1,2} \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 2

Tâches	Durée	Taches précédentes	tâches imm.Précedentes	Tâches suivantes
A	1	–	–	D,F,G
B	2	–	–	K
C	5	–	–	E,K
D	3	A	A	H,I,K
E	8	C	C	J
F	15	A	A	–
G	4	A	A	I
H	7	A,D	A	I
I	12	A,D,H,G,J	H,G,J	–
J	9	C,E,K	E,K	I
K	2	B,D	B,D	J

1. Graphe MPM associée au projet

Niveaux

$N_0 = \{A, B, C\}$
$N_1 = \{D, E, F, G\}$
$N_B = \{H, K\}$
$N_3 = \{J\}$
$N_4 = \{I\}$

Scanné avec CamScanner

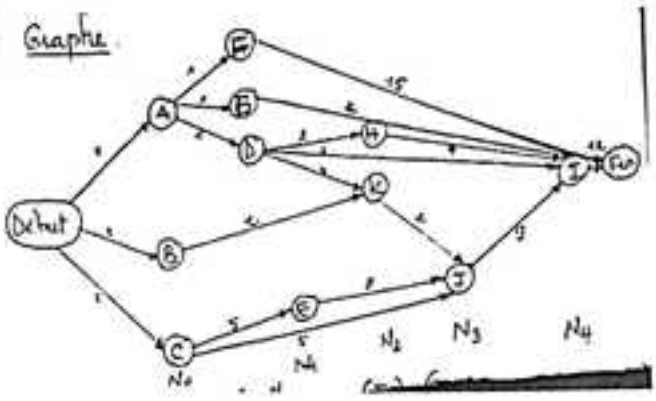


FIGURE 1 –

2. Tableau des calendriers $(T_i), (T_i^*), MT(i), ML((i)$

Tâches	Durées	T_i	T_i^*	$MT(i)$	$ML(i)$
A	1	0	7	7	0
B	2	0	9	9	0
C	5	0	0	0	0
D	3	1	8	7	0
E	8	5	5	0	0
F	15	1	19	18	18
G	4	1	18	17	17
H	7	4	15	11	11
I	12	22	22	0	0
J	9	13	13	0	0
K	2	4	11	9	7
Fin	0	34	34	0	0

Exercice 3

$$Max\ Z = 500\,x_1 + 300\,x_2 + 200\,x_3$$

$$(P)\begin{cases} 3\,x_1 + x_2 + x_3 \leq 400 \\ 4\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 \leq 5000 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 \leq 1200 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Forme standard

$$Max\ Z = 500\,x_1 + 300\,x_2 + 200\,x_3$$

$$\begin{cases} 3\,x_1 + x_2 + x_3 = 400 \\ 4\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 5000 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 = 1200 \\ x_i, \forall\ i = 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

Méthode des tableaux

$I = \{x_4, x_5, x_6\}$ est une base réalisable évidente.
Le programme est déjà sous forme canonique. On a les tableaux simplexes suivants :

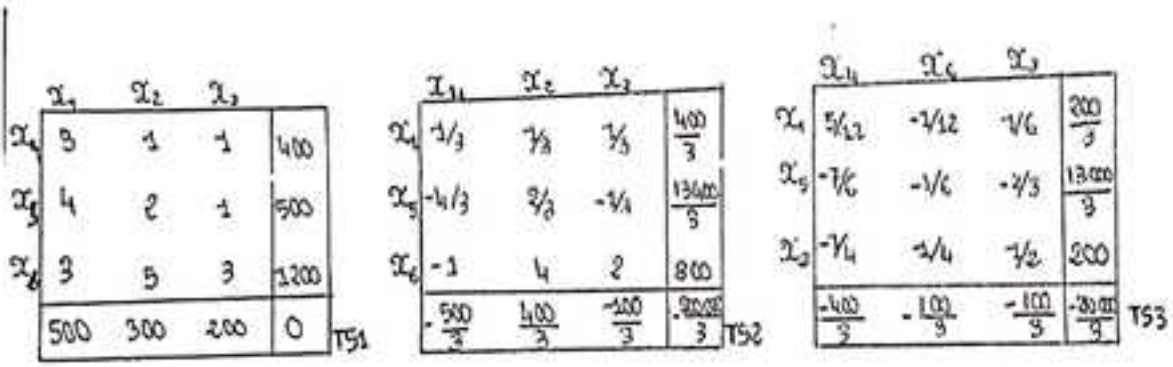


FIGURE 2 –

La condition d'arrêt est vérifiée. On est à l'optimum.
Une solution optimale du problème initial est :

$$x^* = \left(\frac{200}{3} \quad 200 \quad 0\right)^T$$

La valeur optimale est : $Z* = \dfrac{280000}{3}$

VALIDEUR LMD: Conseils - Examens & TD - Corrections

Scanné avec CamScanner

Méthode du simplexe

Forme standard

$$Max\ Z = 500\,x_1 + 300\,x_2 + 200\,x_3$$

$$\begin{cases} 3\,x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 400 \\ 4\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_5 = 5000 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 + x_6 = 1200 \\ x_i \geq 0,\ \ i = 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

- 1re Itération du simplexe

Base : $\{x_4, x_5, x_6\}$; Hors-base : $\{x_1, x_2, x_3\}$
Variable entrante : x_1 car dans $Max\ Z$, x_1 a le coefficient le plus élévé.
Variable entrante : x_4

$$\min\{\frac{b_i}{a_{ik}}; a_{ik} > 0\} = \min\{\frac{400}{3}, \frac{5000}{4}, \frac{1200}{3}\}$$

Base : $\{x_1, x_5, x_6\}$; Hors-base : $\{x_4, x_2, x_3\}$

$$x_1 = \frac{1}{3}(400 - x_2 - x_3 - x_4)$$

- $x_1 = \frac{400}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$

$$x_5 = 5000 - 4\,x_1 - 2\,x_2 - x_3$$

$$x_5 = 5000 - 4\left(\frac{400}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4\right) - 2\,x_2 - x_3$$

- $x_5 = \frac{13400}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$

$$x_6 = 1200 - 3\,x_1 - 5\,x_2 + 3\,x_3$$

$$x_6 = 1200 - 3\left(\frac{400}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4\right) - 5\,x_2 - 3\,x_3$$

- $x_6 = 800 - 4\,x_2 - 2\,x_3 + x_4$

Scanné avec CamScanner

$$Z = 500\,x_1 + 300\,x_2 + 200\,x_3$$

$$Z = 500\left(\frac{400}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4\right) + 300\,x_2 + 200\,x_3$$

$$Z = \frac{20000}{3} + \frac{400}{3}\,x_2 + \frac{100}{3}\,x_3 - \frac{500}{3}\,x_4$$

On obtient :

$$Z = -\frac{500}{3}\,x_4 + \frac{400}{3}\,x_2 + \frac{100}{3}\,x_3 + \frac{20000}{3}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}\,x_4 + \frac{1}{3}\,x_2 + \frac{1}{3}\,x_3 = \frac{400}{3} \\ x_5 - \frac{4}{3}\,x_4 + \frac{2}{3}\,x_2 - \frac{1}{3}\,x_3 = \frac{13400}{3} \\ x_6 - x_4 + 4\,x_2 + 2\,x_3 = 800 \\ x_4, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2e Itération du simplexe

Base : $\{x_1, x_5, x_6\}$; Hors-base : $\{x_1, x_2, x_3\}$
Variable entrante : x_2 car dans $Max\ Z$, x_1 il a le plus gros coefficient positif.
Variable entrante : x_6

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}; a_{ik} > 0\right\} = \min\{400, 6700, 200\}$$

Base : $\{x_1, x_5, x_2\}$; Hors-base : $\{x_4, x_6, x_3\}$

$$x_2 = \frac{1}{4}\,(800 + x_4 - x_6 - 2\,x_3)$$

$$x_2 = 200 + \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{1}{4}\,x_6 - \frac{1}{2}\,x_3$$

- $x_2 - \frac{1}{4}\,x_4 + \frac{1}{4}\,x_6 + \frac{1}{2}\,x_3 = 200$

$$x_5 - \frac{4}{3}\,x_4 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}(8^{(4)} + x_4 - x_6 - 2\,x_3) - \frac{1}{3}\,x_3 = \frac{13400}{3}$$

$$x_5 - \frac{4}{3}\,x_4 + \frac{800}{6} + \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{1}{6}\,x_6 - \frac{1}{3}) - \frac{1}{3}\,x_3 = \frac{13400}{3}$$

Scanné avec CamScanner

- $x_5 - \frac{7}{6}x_4 - \frac{1}{6}x_6 - \frac{2}{3}x_3 = \frac{13000}{3}$

  $x_1 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}(200 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6 - \frac{1}{2}x_3) + \frac{1}{3}x_3 = \frac{400}{3}$

  $x_1 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{12}x_4 - \frac{1}{12}x_6 - \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{400}{3} - \frac{200}{3}$

- $x_1 - \frac{15}{12}x_4 - \frac{1}{12}x_6 + \frac{1}{6}x_3 = \frac{200}{3}$

  $Z = -\frac{500}{3}x_4 + \frac{400}{3}(200 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6 - \frac{1}{2}x_3) + \frac{100}{3}x_3 + \frac{200000}{3}$

  $Z = -\frac{500}{3}x_4 + \frac{100}{3}x_4 - \frac{100}{3}x_6 - \frac{200}{3}x_3 + \frac{100}{3}x_3 + \frac{200000}{3} + \frac{50000}{3}$

  $Z = -\frac{400}{3}x_4 - \frac{100}{3}x_6 - \frac{100}{3}x_3 + \frac{280000}{3}$

On obtient :

$$Max\ Z = -\frac{400}{3}x_4 - \frac{100}{3}x_6 - \frac{100}{3}x_3 + \frac{280000}{3}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{12}x_4 - \frac{1}{12}x_6 + \frac{1}{6}x_3 = \frac{200}{3} \\ x_5 - \frac{7}{6}x_4 - \frac{1}{6}x_6 - \frac{2}{3}x_3 = \frac{13000}{3} \\ x_2 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_6 + \frac{1}{2}x_3 = 200 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

$\hat{C} = \left(-\frac{400}{3} \quad -\frac{100}{3} \quad -\frac{100}{3}\right) \leq 0$ la condition d'arrêt est vérifiée.

On est à l'optimum.

Une solution optimale du programme est : $\boxed{x^* = \left(\frac{200}{3},\ 200\ ,0\right)^T}$

La valeur optimale est : $\boxed{Z^* = \frac{280000}{3}}$

Scanné avec CamScanner

UFR MI

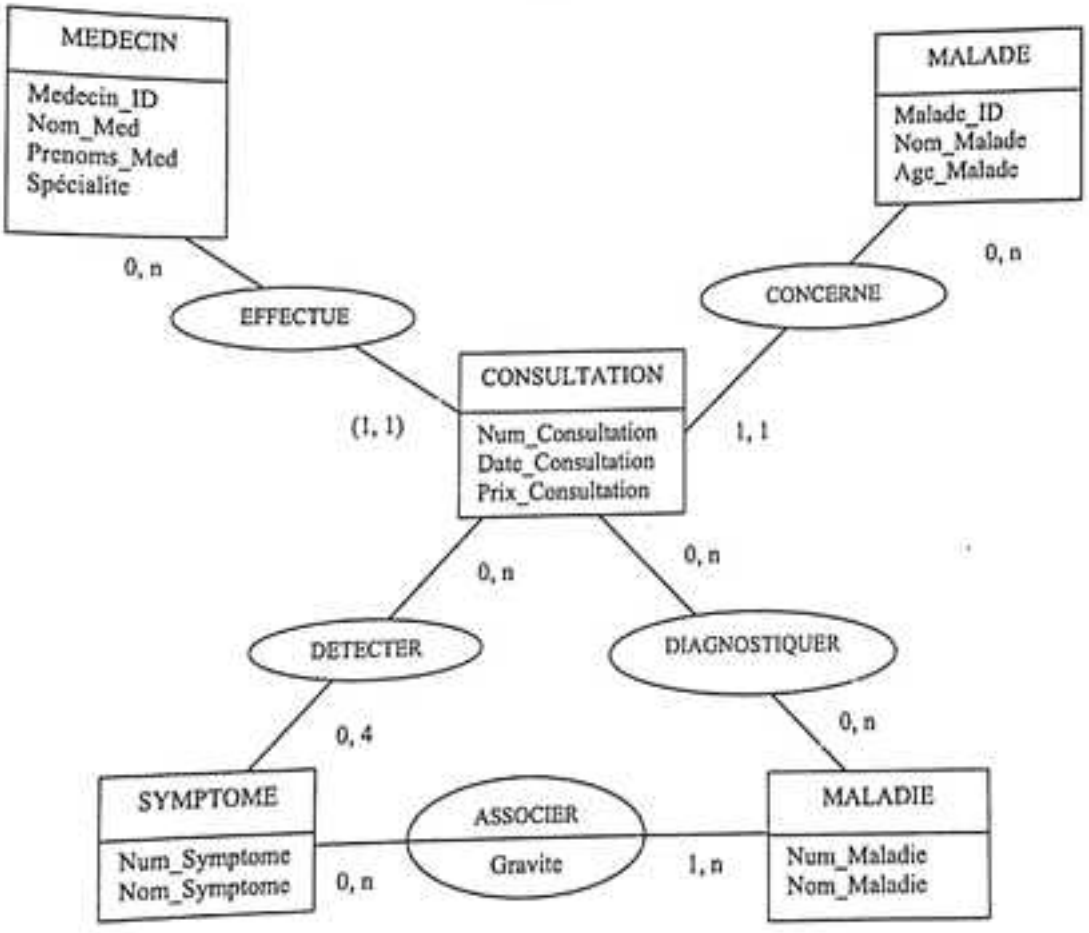
Année 2013 - 2014

Devoir L3

INITIATION AUX BASES DE DONNEES

Exercice 1 : Passage au relationnel

Enoncé : Soit le modèle entité association suivant :



Question : Transcrire le modèle Entité-Association ci-dessus dans le schéma relationnel.

NB : Vous préciserez les clés primaires des relations en les soulignant ainsi que les clés étrangères en les signalant par un #.

Scanné avec CamScanner

Dans votre schéma relationnel, chaque relation doit être spécifiée de la manière suivante : *Nom* (*att1*,...,*attn*) où *Nom* est le nom de la relation et *att1*, ..., *attn* sont des noms d'attributs.

Correction : Passage en relationnel

MEDECIN (Medecin_ID, Nom_Med, Prenoms_Med, Specialite)
MALADE (Malade_ID, Nom_Malade, Age_Malade)
CONSULTATION (Num_Consultation, #Medecin_ID, #Malade_ID, Date_Consultation, Prix_Consultation)
SYMPTOME (Num_Symptome, Nom_Symptome)
MALADIE (Num_Maladie, Nom_Maladie)
DETECTER (#Num_Consultation, #Medecin_ID, # Num_Symptome)
DIAGNOSTIQUER ((#Num_Consultation, #Medecin_ID, # Num_Maladie)
ASSOCIER (# Num_Symptome, # Num_Maladie)

Exercice 2 : Le langage SQL

Enoncé : Soit la base de données relationnelle de schéma suivant :

AGENCE (Num_Agence, Nom, Ville, Actif)
CLIENT (Num_Client, Nom, Ville)
COMPTE (Num_Compte, Num_Agence, Num_Client, Solde)
EMPRUNT (Num_Emprunt, Num_Agence, Num_Client, Montant)

Avec :

- Num_Agence (numérique) indiquant le Numéro de l'Agence
- Num_Client (numérique) indiquant le Numéro du Client
- Num_Compte (varchar2(25)) indiquant le Numéro de Compte

Exprimer en SQL :

1) Supprimez les comptes de "Dupont"

```
delete from COMPTE where Num_Client in (select Num_Client from CLIENT
where Nom = "Dupont");
```

2) Donnez la liste des noms des agences ayant des comptes-clients

```
select distinct Nom from AGENCE, COMPTE
where AGENCE.Num_Agence = COMPTE.Num_Agence;
```


Scanné avec CamScanner

3) Donnez les noms des Clients ayant un compte ainsi que le nom de la ville où ils habitent

Première solution :

```
select Nom, Ville from CLIENT, COMPTE
where CLIENT.Num_Client = COMPTE. Num_Client ;
```

Deuxième solution :

```
select Nom, Ville from CLIENT
where Num_Client in (
    select Num_Client from COMPTE):
```

4) Donnez les Nom des Clients ayant un compte à "La Rochelle"

```
select CLIENT.Nom from CLIENT, AGENCE, COMPTE
where AGENCE.Num_Agence = COMPTE.Num_Agence
and CLIENT.Num_Client = COMPTE.Num_Client
and AGENCE.Ville = "La Rochelle" ;
```

5) Donnez la liste des noms des Clients ayant un compte dans une agence où "Claude" a un compte

Première solution :

```
select Nom from CLIENT, COMPTE
where CLIENT.Num_Client = COMPTE.Num_Client and Num_Agence in (
    select Num_Agence from CLIENT, COMPTE
    where CLIENT.Num_Client = COMPTE.Num_Client and Nom = "Claude") ;
```

Deuxième solution :

```
select Nom from CLIENT where Num_Client in (
    select Num_Client from COMPTE where Num_Agence in (
        select Num_Agence from CLIENT, COMPTE
        where CLIENT.Num_Client = COMPTE.Num_Client and Nom = "Claude")) ;
```

6) Donnez la liste des noms des Emprunteurs de l'agence "Paris-Rambuteau" classés par ordre alphabétique

```
select Nom from CLIENT where Num_Client in (
    select Num_Client from EMPRUNT where Num_Agence in (
        select Num_Agence from AGENCE where Nom = "Paris-Rambuteau"))
order by Nom ;
```


Scanné avec CamScanner

7) Donnez le Solde moyen des comptes-clients de chaque agence

```
select Nom, avg(Solde) from AGENCE, COMPTE
where AGENCE.Num_Agence = COMPTE.Num_Agence
group by Nom ;
```

8) Diminuez l'emprunt de tous les clients habitant "Marseille" de "5%"

```
update EMPRUNT set Montant = Montant * 0.95
where Num_Client in (
        select Num_Client from CLIENT where Ville = "Marseille") ;
```

9) Donnez le nom des Clients ayant un compte dans au-moins une agence d'"Orsay"

Première solution:

```
select Nom from CLIENT where Num_Client in (
     select Num_Client from COMPTE where Num_Agence in (
          select Num_Agence from AGENCE where Vilie = "Orsay"));
```

Deuxième solution :

```
select CLIENT.Nom from CLIENT, COMPTE, AGENCE
where CLIENT.Num_Client = COMPTE.Num_Client
and COMPTE.Num_Agence = AGENCE.Num_Agence
and AGENCE.Ville = "Orsay" ;
```

Bonne Chance à tous

Scanné avec CamScanner

UFR MI

Année 2016 - 2017

COMPOSITION L3 - 2 heures

INITIATION AUX BASES DE DONNEES

Exercice 1 : Questions de cours (5 pts)

a. Qu'est-ce que la normalisation ?
Normaliser une relation consiste à extraire les Dépendances Fonctionnelles internes qui posent des problèmes, en les transférant dans de nouvelles relations

b. Dans un modèle Entité-Association, peut-on avoir des clés étrangères ?
Un MEA ne contient jamais de clé étrangère

c. Donnez la syntaxe d'ajout d'une colonne dans 1 table
ALTER TABLE nom_relation ADD nom_attribut type_attribut

d. Définissez les différents opérateurs relationnels de base
SELCTION : Extrait d'une table les lignes qui satisfont certains critères de comparaison ou d'appartenance
PROJECTION : Extrait des colonnes particulières d'une table
UNION ; Elle combine deux tables A et B pour donner une table T qui contient toutes les lignes appartenant à A ou à B
DIFFERENCE : La différence relationnelle A - B combine deux tables A et B pour donner une table T qui contient toutes les lignes de A non contenues dans B
PRODUIT CARTESIEN : Le produit cartésien de deux relations A et B (de schéma quelconque) est une relation T ayant pour attributs la concaténation de ceux de A et de B, et dont les n-uplets sont toutes les combinaisons possibles des n-uplets de A avec ceux de B

e. Quelles sont les instructions SQL du LMD (Langage de Manipulation de Données)
Insertion (INSERT), Suppression (DELETE), Modification (UPDATE)

Scanné avec CamScanner

Exercice 2 : Passage au relationnel (6 pts)

Enoncé : Soit le modèle entité association suivant :

SALARIE (Matricule, #code_etab, Nom_Salarie, Tranche_Impot) (0.75)
ETABLISSEMENT (Code_Etab, Nom_Etab, Adresse_Etab) (0.5)
ENFANT (Code_Enfant, #Matricule, #Id_Centre, #Code_Lieu, #Num_Bc, #Ref_Cadeau, Prenoms_enfant, Date_Naiss, Mois_vac) (1.25)
CENTRE (Id_Centre, #Code_Lieu, Nom_Centre, Capacite, Tranche_Age) (0.75)
LIEU (Code_Lieu) (0.25)
FOURNISSEUR (Code_Four, Nom_Four, Adresse_Four, Datcom) (0.5)
CADEAU (Ref_Cadeau, #Code_Four, Libelle_Cadeau, Photo_Cadeau, Prix) (0.75)
BR_CADEAU (Num_Bc, #Ref_Cadeau, #Code_Enfant) (1.25)

Exercice 3 : Le langage SQL (9 pts)

Enoncé : Soit la base de données relationnelle de schéma suivant :

AGENCE (Num_Agence, Nom, Ville, Actif)
CLIENT (Num_Client, Nom, Ville)
COMPTE (Num_Compte, #Num_Agence, #Num_Client, Solde)
EMPRUNT (Num_Emprunt, #Num_Agence, #Num_Client, Montant)

Exprimer en SQL :

1) Les noms des agences ayant des comptes-clients (0.75)

```
select distinct Nom from AGENCE, COMPTE
where AGENCE.Num_Agence = COMPTE.Num_Agence
```

2) Les noms des Clients ayant un compte à "YAMOUSSOUKRO" (0.75)

```
select CLIENT.Nom from CLIENT, AGENCE, COMPTE
where AGENCE.Num_Agence = COMPTE.Num_Agence
and CLIENT.Num_Client = COMPTE.Num_Client
and AGENCE.Ville = "YAMOUSSOUKRO"
```

3) Les noms des Clients ayant un compte à l'Agence "Prestige" et le nom de la ville où ils habitent (0.75)

Scanné avec CamScanner

Première solution :

```
select CLIENT.Nom, CLIENT.Ville from CLIENT, AGENCE, COMPTE
where CLIENT.Num_Client = COMPTE. Num_Client
and AGENCE.Num_Agence = COMPTE.Num_Agence
and AGENCE.Nom = "Prestige"
```

Deuxième solution :

```
select Nom, Ville from CLIENT
where Num_Client in (
   select Num_Client from COMPTE where Num_Agence in (
      select Num_Agence from AGENCE where Nom = "Prestige"))
```

4) Les noms des Clients ayant un compte dans une agence où "Claude" a un compte (1.0)

Première solution :

```
select Nom from CLIENT, COMPTE
where CLIENT.Num_Client = COMPTE.Num_Client and Num_Agence in (
    select Num_Agence from CLIENT, COMPTE
    where CLIENT.Num_Client = COMPTE.Num_Client and Nom = "Claude")
```

Deuxième solution :

```
select Nom from CLIENT where Num_Client in (
    select Num_Client from COMPTE where Num_Agence in (
       select Num_Agence from CLIENT, COMPTE
       where CLIENT.Num_Client = COMPTE.Num_Client and Nom = "Claude"))
```

5) Les noms des Agences ayant un actif plus élevé que toute agence d'"ABIDJAN" (1.0)

```
select Nom from AGENCE where Actif > all (
     select Actif from AGENCE where Ville = "ABIDJAN")
```

6) Les noms des Clients ayant un compte dans au-moins une agence d'"ABIDJAN" (1.0)

Première solution :

```
select Nom from CLIENT where Num_Client in (
    select Num_Client from COMPTE where Num_Agence in (
        select Num_Agence from AGENCE where Ville = "ABIDJAN"))
```

Deuxième solution :

```
select CLIENT.Nom from CLIENT, COMPTE, AGENCE
```


Scanné avec CamScanner

```
where CLIENT.Num_Client = COMPTE.Num_Client
and COMPTE.Num_Agence = AGENCE.Num_Agence
and AGENCE.Ville = "ABIDJAN"
```

7) Les noms des Emprunteurs de l'agence "Prestige" classés par ordre alphabétique (1.0)

```
select Nom from CLIENT where Num_Client in (
    select Num_Client from EMPRUNT where Num_Agence in (
        select Num_Agence from AGENCE where Nom = "Prestige"))
order by Nom
```

8) Donnez le Solde moyen des comptes-clients de chaque agence (1.0)

```
select Nom, avg(Solde) from AGENCE, COMPTE
where AGENCE.Num_Agence = COMPTE.Num_Agence
group by Nom
```

9) Insérer le n-uplet « 147202, "Houphouët", "YAMOUSSOUKRO" » dans la relation CLIENT (0.25)

```
insert into CLIENT values (147202, "Houphouët", "YAMOUSSOUKRO")
```

10) Diminuer l'emprunt de tous les clients habitant "ADZOPE" de "5%" (1.0)

```
update EMPRUNT set Montant = Montant * 0.95
where Num_Client in (
select Num_Client from CLIENT where Ville = "ADZOPE")
```

11) Fermer les comptes de "Coulibaly" (0.5)

Première solution :

```
delete from COMPTE where Num_Client in (
select Num_Client from CLIENT where Nom = "Coulibaly")
```

Deuxième solution :

```
delete from COMPTE
where COMPTE.Num_Client = CLIENT.Num_Client
and CLIENT.Nom = "Coulibaly")
```

Bonne Chance à tous

(scanné avec CamScanner)

CORRECTION DE INITIATION AUX BASES DE DONNEES Session 2 2016-2017

EXERCICE 1 : Questions de cours

a) Qu'est-ce que la normalisation ?

Elle consiste à extraire les Dépendances Fonctionnelles internes qui posent des problèmes, en les transférant dans de nouvelles relations

b) Enumérons 4 rôles ou fonctions d'un SGBD

Ce sont :

- Indépendance des données
- Partage des données (gestion des accès concurrents + sécurité des données)
- Accès efficace aux données
- Intégrité et sécurité des données

c) Enumérons les différents types de SGBD qui existent

Ce sont : BD Relationnels, BD Orientés Objets, BD personnels

d) Donnons la définition de chacune des 3 premières formes normales

- Une relation est en 1ère Forme Normale si et seulement si elle n'a pas d'attributs multi-valués, en d'autres termes si les attributs ne contiennent que des "valeurs atomiques"

- Une relation est en 2ème Forme Normale si elle est :

• En 1ère forme normale

• Et que toutes les dépendances fonctionnelles entre la clé primaire et les autres attributs de la relation soient élémentaires. Autrement dit, les attributs doivent dépende de la totalité de la clé.

- Une relation est en 3ème forme normale, si et seulement si :

• Si elle satisfait les 1ère et 2ème formes normales,

• Et si tout attribut, autre que la clé, dépend directement de la clé (pas de transitivité)

e) Donnons la syntaxe d'ajout d'une colonne dans 1 table

ALTER TABLE nom_relation **ADD** nom_attribut type_attribut

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2 : Passage au relationnel

Transcrire le modèle Entité-Association dans le schéma relationnel.

CLIENT (Client_ID, Nom, Prenoms, Adresse, DateNaissance)

SEANCE_CODE (Séance_ID, Date_Seance, Heure_Seance, #Serie_ID)

ASSISTE_A (#Client_ID, #Seance_ID, Nombre_Faute)

AUTORISE_A_PASSER (#Client_ID, #PassageCode_ID, NB_Fautes)

EXAMEN_CODE (PassageCode_ID, Date_Passage, Heure_Passage, Lieu_Examen)

QUESTION (Question_ID, Intitule, Reponse, Niveau_Difficulte, Theme)

CONTIENT (#Question_ID, # Serie_ID, Numero)

SERIE (Serie_ID, #CdRom_ID)

CD_ROM (CdRom_ID, Editeur)

EXERCICE 3 : le langage SQL

1) Donnons la liste des employés ayant une commission supérieure à zéro et classé par commission décroissante

SELECT *FROM Emp WHERE Comm > 0 ORDER BY Comm DESC ;

2) Donnons le nom des personnes embauchées depuis le 01/09/2006

SELECT NomE FROM Emp WHERE Embauche > '01/09/2006' ;

3) Donnons la liste des employés (nom, date d'embauche et Numéro département) travaillant à Abidjan

SELECT NomE, Embauche, NumD FROM Dept, Emp WHERE (Dept.Lieu = "Abidjan") AND (Dept.NumD = Emp.NumD);

4) Donnons la liste des subordonnés (Numéro et nom) de "KASSI"

SELECT NumE, NomE FROM Emp WHERE NumS IS (SELECT NumE FROM Emp WHERE NomE = "KASSI") ;

5) Donnons la moyenne des salaires

Scanné avec CamScanner

SELECT AVG (Salaire) AS SalaireMoyen FROM Emp;

6) Donnons le nom des employés ayant 1 commission égale à zéro

SELECT NomE FROM Emp WHERE Comm = 0

7) Donnons la liste des employés (nom, fonction et salaire) gagnant plus que la moyenne des salaires de l'entreprise

SELECT NomE, Fonction, Salaire FROM Emp WHERE Salaire > (SELECT AVG (Salaire) From Emp) ;

Scanné avec CamScanner

UFR-MI :L3 Année 2017-2018

CORRECTION BASE DE DONNEES 1ERE SESSION

EXERCICE 1 : *Questions de cours*

1. Un **SGBD** est logiciel permettant de manupiler les bases de données (construction, maintenance, intérrogation et securité).
2. **Fonctions fondamentales d'un SGBD :**
   - Independance des données (logique et physique) ;
   - Partage des données ;
   - Accès efficace aux données ;
   - Itegrité et securité des données ;
   - Administration centralisée des données ;
   - recuperation sur crash.
3. **Les types de SGBD :**
   - BD relationnels : ORACLE
   - BD orientés objets : O_2
   - BD personnels : ACCESS
4. **Definitions**
   - $1^{ère}$ *forme normale* :
     Une relation est en prémière forme normale (FN1) ssi elle n'a pas d'attribut multi valués, en d'autres termes si les attributs ne contiennent que des valeurs atomiques.
   - $2^{ième}$ *forme normale* :
     Une relation est en deuxième forme normale (FN2) si elle est en FN1 et si tous les autres attributs autres que la clé primaire dependent de la totalité de la clé (transitivité possible)
   - $3^{ième}$ *forme normale (FN3) :*
     Une relation est en FN3 ssi elle est en FN1 et FN2 et si tout attribut autre que la clé dépend directement de la clé (pas de transitivité)
5. **SQL** : Structured Query Language
   Rôle : c'est le language de requête standard pour l'intérrogation des bases de données relationnelles.

VALIDEUR LMD: Conseils - Examens & TD - Corrections

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2 : *NORMALISATION*

(a) ' Un bureau peut contenir plusieurs poste telephonique'
Cette contrainte n'est pas verifiée car Fbureau contient la dependance fonctionnellle NumBureau→ NumTelephone, donc à un bureau est associé un et un seul numero de telephone. Pour que la contrainte soit verifiée il faudrait supprimer cette dependance fonctionnelle.

(b) ' Il y a une et une seule personne par bureau'
cette contrainte est verifiée car Foccupant contient la DF : NumBureau→ PersonneID , donc à un numero de bureau est associé une et une seule personne .

(c) ' Un bureau contient un seul ordinateur'
Cette contrainte n'est pas verifiée car il y a juste l'information qu'un ordinateur est dans un seul bureau d'après la DF : (NumPC→Numbureau) mais pas l'inverse. Pour que la contrainte soit verifiée il faudrait ajouter la DF : Numbureau→NumPC

EXERCICE 3

PERSONNE(Matricule, Nom, Adresse, Telephone, Salaire)
PILOTE(Matricule, Exam_Med)
TECHNICIEN(Matricule)
TYPE(Id_Type,Nom, Poids, Capacité, Rayon_action)
AVION(Numero_Immat, #Id_type, Localisation)
TEST(Num_Test, #Numero_Immat, Nom, Seuil, Date, Etat)
VOL(Num_vol, #Matricule, #Numero_Immat, Ville_dep, Ville_arr, Heure_dep, Heure_arr)
EXPERT(#Id_Type, #Matricule, Date_deb, Date_fin)

EXERCICE 4 : *SQL*

AGENCE(Num_Agence, Nom, Ville, Actif)
CLIENT(Num_Client, Nom, Ville)
COMPTE(Num_Compte, Num_Agence, Num_Client, Solde)
EMPRUNT(Num_Emprunt, Num_Agence, Num_Client, Montant)

1. DELETE FROM COMPTE WHERE Num_Client IN(SELECT Num_Client

Scanné avec CamScanner

FROM COMPTE WHERE Nom='Coulibaly');

2. SELECT DISTINCT Nom FROM AGENCE, COMPTE WHERE AGENCE.Num_Agence = COMPTE.Num_Agence;
3. 1er : SELECT Nom, Ville FROM CLIENT, COMPTE WHERE CLIENT.Num_Client = COMPTE.Num_Client;
   2e : SELECT Nom, Ville FROM CLIENT WHERE Num_Client IN (SELECT Num_Client FROM COMPTE);
4. SELECT CLIENT.Nom FROM CLIENT, AGENCE, COMPTE WHERE AGENCE.Num_Agence = COMPTE.Num_Agence AND CLIENT.Num_Client = COMPTE.Num_Client AND AGENCE.Ville = 'le Rochelle';

   OU

   SELECT Nom FROM CLIENT WHERE Num_Client IN(SELECT Num_Client FROM COMPTE WHERE Num_Agence IN(SELECT Num_Agence FROM AGENCE WHERE Ville = 'le Rochelle'));
5. SELECT Nom FROM CLIENT, COMPTE WHERE CLIENT.Num_Client = COMPTE.Num_Client AND Num_Agence IN(SELECT Num_Agence FROM CLIENT, COMPTE WHERE CLIENT.Num_Client = COMPTE.Num_Client AND Nom='Claude');

   OU

   SELECT Nom FROM CLIENT WHERE Num_Client IN(SELECT Num_Client FROM COMPTE WHERE Num_Agence IN(SELECT Num_Agence FROM CLIENT ,COMPTE WHERE CLIENT.Num_Client = COMPTE.Num_Client AND Nom = 'Claude'));
6. SELECT Nom FROM CLIENT WHERE Num_Client IN(SELECT Num_Client FROM EMPRUNT WHERE Num_Agence IN(SELECT Num_Agence FROM AGENCE WHERE Nom = 'Paris_Ranbuteau')) ORDER BY Nom;
7. SELECT Nom, AVG(Solde) FROM AGENCE, COMPTE WHERE AGENCE.Num_Agence = COMPTE.Num_Agence GROUP BY Nom;
8. UPDATE EMPRUNT SET Montant = Montant*0.95 WHERE Num_Client IN(SELECT Num_Client WHERE Ville = 'Bouaké');
9. SELECT Nom FROM CLIENT WHERE Num_Client IN(SELECT Num_Client FROM COMPTE WHERE Num_Agence IN(SELECT Num_Agence FROM AGENCE WHERE Ville = 'Abidjan'));

Scanné avec CamScanner

TD Corrigés Topologie

Exercice 2

(1) Montrons que

> f uniformément continue
> ⇓
> f conserve les suites de Cauchy.

Supposons f uniformément continue.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de cauchy de (X,d)

~~i-e $\forall \varepsilon>0\ \exists x_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $p,q>x_\varepsilon \Rightarrow d(x_p,x_q)$~~

i-e : $\forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $p,q>N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p,x_q)<\varepsilon$ (1)

Comme f est uniformément continue alors on a:

$\forall \delta>0, \exists \alpha>0$ tel que $\forall (x,y)\in X^2, d(x,y)<\alpha$

$\Downarrow$

$d'(f(x),f(y))<\delta$

Posons $\varepsilon=\alpha$ alors $\exists N_\alpha \in \mathbb{N}$ tel que :

$p,q>N_\alpha \Rightarrow d(x_p,x_q)<\alpha \Rightarrow d'(f(x_p),f(x_q))<\delta$

Alors : $\forall \delta>0, \exists N_\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $p,q>N_\alpha \Rightarrow d'(f(x_p),f(x_q))<\delta$

donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

D'où f conserve les suites de cauchy.

Scanné avec CamScanner

(2) Montrons que : **Y complet ⇓ X complet.**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de cauchy de X
Comme f est uniformement continue et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy de X alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy de Y (d'après précédent).
Puisque Y est complet, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans Y.
Posons $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b \in Y$ et $f(x_n) = y_n \ \forall n\in\mathbb{N}$
On a: $\lim_{+\infty} f(x_n) = \lim_{+\infty} y_n = b$
Puisque f^{-1} est continue et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente alors $\lim_{+\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(\lim_{+\infty} y_n) = f^{-1}(b) \in X$

$\Rightarrow \lim_{+\infty} x_n = f^{-1}(b)$ car $f^{-1}(y_n) = x_n$

Ainsi X est complet.

Scanné avec CamScanner

Exercice 4

On donne $A = \{x \in X / f(x) = g(x)\}$, $A = E$

(1) Montrons que A est un fermé

Soit $\bar{A}$ l'adhérence de A. Par définition on a $A \subset \bar{A}$.

* Montrons que $\bar{A} \subset A$

Soit $x \in \bar{A}$. Alors il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$

On $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in A \Rightarrow f(x_n) = g(x_n)$

Par passage à la limite on trouve :

$$f(x) = f(\lim_{n \to +\infty} x_n) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} g(x_n) = g(x)$$

$\Rightarrow f(x) = g(x)$

donc $x \in A$

D'où $\bar{A} \subset A$

finalement $\bar{A} = A$. donc A est fermé.

(2) Montrons que f et g sont égales

A est dense dans $X_1 \Rightarrow \bar{A} = X_1$

Or $\bar{A} = A$

$\Rightarrow A = X_1$

$\Rightarrow \forall x \in X_1$ $f(x) = g(x)$

Or $f, g : X_1 \longrightarrow X_2$ Alors $f = g$.

Scanné avec CamScanner

10.08.2020

$d(x_1, x_i) \leq \text{Max}\{ d(x_1, x_j) \mid 1 \leq j \leq m \}$

$\Rightarrow d(x_1, x) \leq r$

D'où $\forall x \in K_1 \; ; x \in B(x_1, r)$

(4) On suppose que (X_1, d_1) est connexe et compacte $X_2 = \mathbb{R}$ et A est non vide. Démontrons que $f(X_1) \cap g(X_1)$ est un intervalle fermé et borné

On sait que f et g sont continues et de plus X_1 est compact alors $f(X_1)$ et $g(X_1)$ sont compacts. Ainsi $f(X_1) \cap g(X_1)$ est compact.

Comme (X_1, d_1) est connexe et f, g sont continues alors $f(X_1)$ et $g(X_1)$ sont des ~~intervalles~~ Connexes de $\mathbb{R}$.

Donc $f(X_1)$ et $g(X_1)$ sont des intervalles

Comme ~~A~~ $\neq \phi$ alors $f(X_1) \cap g(X_1) \neq \phi$ et on a : $f(X_1) \cap g(X_1)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$ qui n'est pas vide.

Autrement dit $f(X_1) \cap g(X_1)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. $f(X_1) \cap g(X_1)$ est un compacte de $\mathbb{R}$ donc fermé borné de $\mathbb{R}$.

Scanné avec CamScanner

Exercice 5

Soit $X = \{ f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : x \mapsto (1+x^2) f(x) \text{ est bornée} \}$

Pour tout $f \in X$, on pose $N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)|$

a) Montrons que l'application $f \in X \to N(f)$ est une norme

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2) f(x) \geq 0$, alors on a :

$N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)| \in \mathbb{R}^+$ Car $x \mapsto (1+x^2) f(x)$ est bornée.

. On a $N(f) = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)| = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)|f(x)| = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = 0$ Car $1+x^2 > 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

$N(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$

. Soit $f \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $N(\lambda f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)|(\lambda f)(x)|$

$= \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)|\lambda f(x)|$

$= \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)|\lambda|\,|f(x)|$

$N(\lambda f) = |\lambda| \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)| = |\lambda| N(f)$

Scanné avec CamScanner

• soient $f, g \in X$.

On a $N(f+g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)\,|(f+g)(x)|$

$= \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)\,|f(x)+g(x)|$

(comme $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$, alors on a :

$(1+x^2)\,|f(x)+g(x)| \leq (1+x^2)(|f(x)|+|g(x)|)$

$(1+x^2)\,|f(x)+g(x)| \leq (1+x^2)|f(x)| + (1+x^2)|g(x)|$

$\forall x\in\mathbb{R},\ (1+x^2)|f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)|g(x)|$

$\forall x\in\mathbb{R},\ (1+x^2)|f(x)+g(x)| \leq N(f) + N(g)$.

Ainsi $\{x\in\mathbb{R} \mid (1+x^2)|f(x)+g(x)|\}$ est non vide et majoré par $N(f)+N(g)$, donc il admet une borne supérieure.

D'où $\sup_{x\in\mathbb{R}} \{(1+x^2)|f(x)+g(x)| \leq N(f)+N(g)$ c'est-à-dire

$$N(f+g) \leq N(f)+N(g)$$

Conclusion : l'application $f\in X \to N(f)$ est une norme.

Scanné avec CamScanner

b) Montrons que la forme linéaire L définie sur X par $L(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ est continue.

$\forall f \in X$, $|L(f)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx$

On sait que $N(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left((1+x^2)|f(x)|\right)$.

Donc, $(1+x^2)|f(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

D'où, $|f(x)| \leq \dfrac{N(f)}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Or, $\int_{\mathbb{R}} \dfrac{1}{x^2+1}\,dx = \left[\text{Arctg}(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}$

$= \dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$

On en déduit que, $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx$ Converge.

Ainsi, $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} \dfrac{N(f)}{1+x^2}\,dx = N(f)\int_{\mathbb{R}} \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$

$= \pi N(f)$.

Par conséquent, $|L(f)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx \leq \pi N(f)$

Donc, $\forall f \in X$, $|L(f)| \leq \pi N(f)$.

Scanné avec CamScanner

En conclusion, L est continue car elle est une application linéaire.

c- Calculons la norme de L.

Par définition : $\|L\| = \sup_{f \in X \setminus \{0\}} \frac{|L(f)|}{N(f)}$.

D'après la question b) $\forall f \in X, |L(f)| \leq \pi N(f)$ et donc :

$\frac{|L(f)|}{N(f)} \leq \pi$, $\forall f \in X \setminus \{0\}$.

Alors $\sup_{f \in X \setminus \{0\}} \frac{|L(f)|}{N(f)} \leq \pi$ c'est-à-dire $\|L\| \leq \pi$.

Soit $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

f_0 est continue sur $\mathbb{R}$ et $(1+x^2)|f_0(x)| = (1+x^2)\times\frac{1}{1+x^2} = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Alors $(1+x^2)|f_0(x)|$ est bornée.

Ainsi $f_0 \in X$ et de plus $f_0 \neq 0$.

On a : $L(f_0) = \int_{\mathbb{R}} f_0(x)\,dx$

$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$

D'autre part, $N(f_0) = \sup (1+x^2)|f_0(x)| = \sup (1+x^2)\left|\frac{1}{1+x^2}\right|$

$= \sup 1 = 1$

Scanné avec CamScanner

où $\frac{|L(f_0)|}{N(f_0)} = M$.

Par conséquent $\|L\| = M$.

Exercice 6.

Soit $A > 0$, (E, δ).

a) Définition de δ

$\delta : E \times E \to \mathbb{R}$

$(f, g) \mapsto \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in [0, A]\}$

$\forall f, g \in E$, f et g sont continues et définies sur le compact $[0, A]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $|f - g|$ est continue sur le compact $[0, A]$ à valeur dans $\mathbb{R}$. Donc $|f - g|$ est bornée sur $[0, A]$.

Par conséquent, $\delta(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| / x \in [0, A]\}$ existe et appartient à $\mathbb{R}$

b) Montrons que l'on a bien $T(x) \in E$ pour tout $x \in E$.

Scanné avec CamScanner

$\forall x \in E$, $T(x)$ est l'application définie par $T(x) : [0,A] \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto T(x)(t) = 1 + \int_0^t x(s)\,ds.$$

Soit $\psi : [0,A] \to \mathbb{R}$

$t \mapsto 1$ est une application constante donc continue.

Soit $\varphi : [0,A] \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto \int_0^t x(s)\,ds$$

$\forall t \in [0,A]$, x est continue sur $[0,t]$ car $x \in E$ alors $\int_0^t x(s)\,ds$ existe.

De plus, $\forall t \in [0,A]$, $\varphi'(t) = x(t)$.

Ainsi φ est dérivable et $\varphi' = x$. Alors φ est continue.

$T(x) = \psi + \varphi$ est alors continue sur $[0,A]$.

Donc $T(x) \in E$, $\forall x \in E$.

Ainsi, $T : E \to E$

$x \mapsto T(x)$

Scanné avec CamScanner

c) Montrons que $\tilde{T}$ est lipschitzienne ie

$\exists k>0$ tel que $\forall (x,y)\in E\times E$, $\delta(\tilde{T}(x),\tilde{T}(y)) \leq k\,\delta(x,y)$.

$$\delta(\tilde{T}(x),\tilde{T}(y)) = \sup_{t\in[0,A]} |\tilde{T}(x)(t)-\tilde{T}(y)(t)|$$

Or, $\tilde{T}(x)(t)-\tilde{T}(y)(t) = 1+\int_0^t x(s)\,ds - \left(1+\int_0^t y(s)\,ds\right)$

$$= \int_0^t x(s)\,ds - \int_0^t y(s)\,ds$$

$$\tilde{T}(x)(t)-\tilde{T}(y)(t) = \int_0^t (x(s)-y(s))\,ds$$

Donc, $|\tilde{T}(x)(t)-\tilde{T}(y)(t)| = \left|\int_0^t (x(s)-y(s))\,ds\right|$

$$\leq \int_0^t |x(s)-y(s)|\,ds$$

Mais, $\forall s\in[0,t]$, $|x(s)-y(s)| \leq \sup_{s'\in[0,t]} |x(s')-y(s')|$

D'où $|\tilde{T}(x)(t)-\tilde{T}(y)(t)| \leq \int_0^t \sup_{s'\in[0,t]} |x(s')-y(s')|\,ds$

$$\leq \sup_{s'\in[0,t]} |x(s')-y(s')| \int_0^t ds$$

Scanné avec CamScanner

$|T(x)(t) - T(y)(t)| \leq t \sup_{s' \in [0,t]} |x(s') - y(s')|$

$\leq A \sup_{s' \in [0,T]} |x(s') - y(s')|$ car $t \in [0,A]$

$|T(x)(t) - T(y)(t)| \leq A\, D(x,y)$, $\forall\, t \in [0,A]$

Ainsi, $\sup_{t \in [0,A]} |T(x)(t) - T(y)(t)| \leq A\, D(x,y)$

Donc $D(T(x), T(y)) \leq A\, D(x,y)$, $\forall\, x, y \in E$.

Alors T est lipschitzienne de rapport A

d) Montrons que T admet un point fixe.

D'après c) T est A-lipschitzienne.

De plus, $0 < A < 1$ alors T est une contraction et (E, D) est complet car $\mathbb{R}$ est complet. Alors d'après le théorème du point fixe, T admet un point fixe et ce point fixe est unique.

e) Soit x l'unique point fixe de T.

Montrons que ce point fixe de T est l'unique solution du problème de Cauchy :

$u'(t) - u(t) = 0$, $t \in [0,A]$, $u(0) = 1$ $(\mathcal{E})$

VALIDEUR LMD: Conseils - Examens & TD - Corrections

Scanné avec CamScanner

10.08.2020

On sait que $T(x)=x$, donc $\forall t\in[0,A]$, $T(x)(t)=x(t)$.

Alors $x(t)=1+\int_0^t x(s)ds$, $\forall t\in[0,A]$.

On a $x(0)=1+\int_0^0 x(s)ds=1$

$x=T(x)=1+F$, donc x est dérivable et

$x'(t)=(1+F)'(t)=F'(t)=x(t)$.

Alors $x'(t)-x(t)=0$

Ainsi, $\forall t\in[0,A]$, $x'(t)-x(t)=0$ et $x(0)=1$.

Donc x est solution du problème de Cauchy $(\mathcal{E})$

Soit y une solution du problème de Cauchy $(\mathcal{E})$

Montrons que y est un point fixe de T.

Comme y est solution de $(\mathcal{E})$ alors :

$y'(t)-y(t)=0$, $\forall t\in[0,A]$ et $y(0)=1$.

D'où $y'(t)=y(t)$, $\forall t\in[0,A]$ et $y(0)=1$.

Il vient $\int_0^t y'(s)ds=\int_0^t y(s)ds$, $\forall t\in[0,A]$ et $y(0)=1$

$y(t)-y(0)=\int_0^t y(s)ds$, $\forall t\in[0,A]$ et $y(0)=1$

$y(t)=y(0)+\int_0^t y(s)ds$, $\forall t\in[0,A]$ et $y(0)=1$

Scanné avec CamScanner

$y(t) = 1 + \int_0^t y(s)\,ds$, $\forall t \in [0,A]$ et $y(0)=1$

$g(t) = T(y)(t)$, $\forall t \in [0,A]$ et $y = T(y)$.

Donc y est un point fixe de T.

Par l'unicité du point fixe on en déduit que $y=x$.

Par conséquent, x est l'unique point fixe de T qui est solution du problème de Cauchy (E).

Exercice 7

Soit (X,d) un espace métrique compact et f une application continue de X dans X. On suppose que $\forall x \in X$, $f^2(x) \neq x$ où $f^2 = f \circ f$.

a) Montrons que l'application $g : X \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = d(x, f^2(x))$ est continue.

f étant continue, alors $f^2 = f \circ f$ est continue.

De plus l'application $Id_X : X \to X$, $x \mapsto x$ est ~~constante~~ continue

Par suite l'application $\Delta : X \to X \times X$, $x \mapsto (x, f^2(x))$ est continue car toutes ses composantes sont continues.

Scanné avec CamScanner

On sait que l'application $d : X \times X \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto d(x,y)$

est continue.

On remarque $g = d \circ U$. Alors g est continue sur X

b) g admet-elle une borne sup ? une borne inf ? si oui, sont-elle atteintes ?

g est une application de X dans $\mathbb{R}$ qui est continue et X est compact. Alors g est bornée sur X et ses bornes sont atteintes. Donc g admet une borne inférieure et une borne supérieure et celles-ci sont atteintes.

c) Montrons qu'il existe un réel $k > 0$ tel que

$\forall x \in X : d(x, f^2(x)) \geq k$.

Comme g admet une borne inférieure, alors il existe $k = \inf_{x \in X} g(x)$. Alors $\forall x \in X$, $g(x) \geq k$.

De plus, g atteint ses bornes, alors il existe $\alpha \in X$ tel que $g(\alpha) = k$.

Donc $k = d(\alpha, f^2(\alpha))$

Scanné avec CamScanner

On $\forall x \in X$, $f^2(x) \neq x$ alors $f^2(\alpha) \neq \alpha$ donc

$k = d(\alpha, f^2(\alpha)) > 0$.

Conclusion: Il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in X$, $d(x, f^2(x)) \geq k$.

Exercice 8

Soient (X, d) et (Y, δ) des espaces métriques et $f : X \to Y$ une application.

1- Montrons que si f est Continue, son graphe

$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$.

$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = y\}$

$G(f)$ est fermé ssi $G(f) = \overline{G(f)}$

Par définition, on a : $G(f) \in \overline{G(f)}$

Montrons que $\overline{G(f)} \subset G(f)$.

Soit $(x, y) \in \overline{G(f)}$.

Alors il existe (x_n, y_n) une suite de point de $G(f)$ tel que $\lim_{n \to +\infty} (x_n, y_n) = (x, y)$. Donc $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$ et $\lim_{n \to +\infty} y_n = y$..

Scanné avec CamScanner

On a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x_n, y_n) \in G(f)$; et donc $f(x_n) = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n)$ car f est continue

Alors, $y = f(x)$ d'où $(x, y) \in G(f)$.

Par suite $\overline{G(f)} \subset G(f)$.

On en déduit que $\overline{G(f)} = G(f)$. A fortiori $G(f)$ est fermé.

2) Montrons que si le graphe $G(f)$ de f est fermé et que $\overline{f(X)}$ est compact alors f est continue.

Soit $x \in X$.

Montrons que f est continue au point x

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X tels que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$

On veut montrer que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$.

Posons $y_n = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de point de $f(X)$. On a $f(X) \subset \overline{f(X)}$ et $\overline{f(X)}$ est compact donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur

Scanné avec CamScanner

d'adhérence y. Alors il existe une sous-suite $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers y.
Considérons la sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x$ et $(x,y) = \lim_{n\to+\infty} (x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$

$$= \lim_{n\to+\infty} (x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)}))$$

On, $(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)})) \in G(f)$ et $(x,y) \in \overline{G(f)}$. Comme $G(f)$ est fermé, $G(f) = \overline{G(f)}$ donc $(x,y) \in G(f)$.
Donc $y = f(x)$.
Comme $\lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = y$, alors supposons que $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une autre valeur d'adhérence y'.
Ainsi, il existe une sous-suite $(y_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers y' et $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} x_{\phi(n)} = x$.

$$(x,y') = \lim_{n\to+\infty} (x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)}) = \lim_{n\to+\infty} (x_{\phi(n)}, f(x_{\phi(n)}))$$

VALIDEUR LMD: Conseils - Examens & TD - Corrections

Scanné avec CamScanner

On a $(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)})) \in G(f)$. Alors $(x,y) \in G(\overline{f})$

$G(\overline{f}) = G(f)$. Donc $y' = f(x) = y$, alors $y' = y$

Par conséquent $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence y. Comme $f(x)$ est compact alors $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y. Donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$.

On en déduit que f est continue en x.

Exercice 9

(1) Démontrons que f est un homéomorphisme

. Notons d'abord qu'un homéomorphisme est une application bijective continue de réciproque continue.

f est une isométrie $\Leftrightarrow \forall (x,y) \in X^2 \; d(f(x),f(y)) = d(x,y)$

Ainsi f est 1-lipschitzienne donc continue.

f injective ?

Soient $(x,y) \in X^2$ tels que $f(x) = f(y)$ alors $d(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

- Par conséquent f est injective.

f surjective ?

Scanné avec CamScanner

Supposons f non surjective et raisonnons par l'absurde.

f non surjective $\Leftrightarrow f(X) \neq X$

Alors $\exists x_1 \in X \mid x_1 \notin f(X)$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de point de X tel que $x_{n+1} = f(x_n)$.

On a: $\forall p,q \in \mathbb{N}$ $d(x_p, x_q) = d(f(x_{p-1}), f(x_{q-1}))$

$= d(x_{p-1}, x_{q-1})$

$= d(f(x_{p-2}), f(x_{q-2}))$

$= d(x_{p-2}, x_{q-2})$

$\vdots$

$= d(x_i, x_j) \neq 0$

Car $p \neq q \Rightarrow x_i \neq x_j$

Ainsi $d(x_p, x_q) \geq \alpha$ avec $\alpha > 0$

Donc $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall p,q \in \mathbb{N}$ $p \neq q$ on a: $d(x_p, x_q) \geq \alpha$ Alors (x_n) n'admet pas de valeur d'adhérence. Ce qui est absurde car X étant compact

Ainsi $f(X) = X$

Donc f est surjective.

D'où f est bijective donc f^{-1} existe.

Scanné avec CamScanner

f^{-1} continue ?

Soient $x, y \in \mathbb{Q}^n$

On a : $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y)))$

$= d(x, y)$

Donc f^{-1} est 1-lipschitzienne par suite continue.

On en déduit finalement que f est un homéomorphisme.

Exercice 11

On munit E de la norme :

$$\|x\| = |x(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |x'(t)|$$

(1) On vérifie aisément que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

(2) Démontrons que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de cauchy de E.

Alors : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall p, q > N \quad \|x_p - x_q\| < \varepsilon$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \mid \forall p,q>N \ |x_p(0)-x_q(0)|+\sup|x_p'(t)-x_q'(t)|<\varepsilon$

$\Rightarrow |x_p(0)-x_q(0)|<\varepsilon$ car $\sup|x_p'(t)-x_q'(t)|\geq 0$ ①

et $\sup|x_p'(t)-x_q'(t)|<\varepsilon$ car $|x_p(0)-x_q(0)|\geq 0$. ②

On a :

① $\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \mid \forall p,q>N \ |x_p(0)-x_q(0)|<\varepsilon$

Donc la suite $(x_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est de cauchy.

Comme $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet alors la suite $(x_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ va converger vers un élément a $a\in\mathbb{R}$.

② $\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \mid \forall p,q>N \ \sup_{t\in I}|x_p'(t)-x_q'(t)|\leq\varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \mid \forall p,q>N \ |x_p'-x_q'|\leq\varepsilon \ \forall t\in I$

Alors la suite $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de points de l'espace $(C^0([0,2],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ car x_n étant de classe C^1 sur $[0,2]$, x_n' est Continue sur $[0,2]$ à valeur dans $\mathbb{R}$. Or $(C^0([0,2],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet et les applications Continues sur le compact sont bornées. Donc la suite $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ va converger vers f dans $(C^0([0,2],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Scanné avec CamScanner

Soit F telle que $\forall t \in [0,1]$, $F(t) = \int_0^t f(s)ds + a$

Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers F.

F est dérivable sur I et $F' = f$ et f étant continue sur I alors F est de classe C^1 sur I. Donc $F \in E$.

On a : $\|x_n - F\| = |x_n(0) - F(0)| + \sup_{t\in I} |x_n'(t) - F'(t)|$

$= |x_n(0) - a| + \sup_{t\in I} |x_n'(t) - f(t)|$

$= |x_n(0) - a| + \|x_n' - f\|_\infty \quad \forall t \in I$

Or $\lim_{+\infty} x_n' = f$ et $\lim_{+\infty} x_n(0) = a$

D'où $\lim_{+\infty} x_n = F \in E$

Finalement $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E

En conclusion l'espace $(E, \|.\|)$ est complet.

Scanné avec CamScanner

Correction TD Mesure
2018-2019

Exercice 1

Soient X un ensemble non vide $\mathcal{C}$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}(X)$ et $M \in \mathcal{P}(X)$.

$$\mathcal{C}_M = \{ M \cap E \,/\, E \in \mathcal{C} \}$$

(1) Montrons que [$\mathcal{C}$ une tribu sur X] ⇓ [$\mathcal{C}_M$ est une tribu M]

Soit $E \in \mathcal{C}$

On a : $M \cap E \in \mathcal{C}_M$

Comme $M \supset M \cap E$

Alors $M \cap E \in \mathcal{P}(M)$

D'où $\mathcal{C}_M \subset \mathcal{P}(M)$

i- On a : $X \in \mathcal{C}$ car $\mathcal{C}$ tribu sur X

De plus $M \in \mathcal{P}(X)$

Donc $M = M \cap X \in \mathcal{C}_M$

$\rightarrow \mathcal{C}_M \neq \emptyset$.

Scanné avec CamScanner

ii- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_M^{\mathbb{N}}$. Alors ~~$\exists (E_n)_{n\in\mathbb{N}}$~~ LMD/CSC

Alors $\exists (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ tel que

$A_n = M \cap E_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ona: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (M \cap E_n) = M \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)$

Comme $\mathcal{C}$ est une tribu alors

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}$.

D'où $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}_M$. (stabilité par réunion dénombrable).

iii) Soit $A \in \mathcal{C}_M$.

Alors $\exists E \in \mathcal{C} \mid A = M \cap E$.

Ona: $M \setminus A = M \setminus (M \cap E) = M \setminus E = M \cap (X \setminus E)$

$\mathcal{C}$ étant une tribu, alors $X \setminus E \in \mathcal{C}$

Donc $M \setminus A \in \mathcal{C}_M$ (stabilité par complémentaire)

On conclut que $\mathcal{C}_M$ est une tribu sur M

(2) On suppose $\mathcal{C}$ tribu sur X et $M \in \mathcal{C}$

Montrons que $\mathcal{B} = \{A \subset M \mid A \in \mathcal{C}\}$ est une tribu sur M

Scanné avec CamScanner

10.08.2020

Montrons l'égalité $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$

$\subset$ Soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$

ii - Soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$x \in A_n$ et $x \in A_0$ car $0 \in \mathbb{N}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

iii - Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$ et $A_{n+1} \subset A_0$

$\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$

$\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$

Conclusion : On a bien l'égalité sur $\mathbb{N}$

• Comparons $A \cap C_n$

Soit $x \in A \cap C_n$

Alors $x \in A$ et $x \in C_n$

$\Rightarrow x \in A \cap [0;n]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow x \in A \cap [0;n]$ dans $\mathcal{M}_{n\in\mathbb{N}^*}([0;n])$ (1)

Soit $x \in A \cap C_n$

Alors $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in [0;n]$ avec $x \in \mathbb{N}$

Scanné avec CamScanner

Montrons d'abord que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(M)$

i- On a : $M \subseteq M$ et $M \in \mathcal{C}$ donc $M \in \mathcal{A}$

Alors $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

ii- Soit $A \in \mathcal{A}$

On a : $A \subseteq M$ et $A \in \mathcal{C}$.

$\Rightarrow M \setminus A \subseteq M$ et $M \setminus A \in \mathcal{C}$ car $\mathcal{C}$ tribu sur M.

D'où $M \setminus A \in \mathcal{A}$.

iii- Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subseteq M$ et $A_n \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq M$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$.

$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Conclusion : $\mathcal{A}$ est une tribu sur M

- Comparons $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}_M$

Soit $A \in \mathcal{A}$

On a donc $A \subseteq M$ et $A \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow A = A \cap M$ avec $M \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow A = A \cap M \in \mathcal{C}_M$ donc $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_M$ (1)

Soit $A \in \mathcal{C}_M$

Alors $\exists E \in \mathcal{C}$ tel que $A = M \cap E$ avec $A \subset M$

Scanné avec CamScanner

Il a : $M \in \mathcal{C}$ et $E \in \mathcal{C}$ d'où $M \cap E \in \mathcal{C}$
Car $\mathcal{C}$ est une tribu et donc $A \in \mathcal{A}$
Alors $\mathcal{C}_M \subset \mathcal{A}$ (2)
de (1) et (2) il en ressort que $\mathcal{A} = \mathcal{C}_M$.

(3) Montrons que $\mathcal{C}_M = \sigma\text{-}\mathcal{A}(\mathcal{E}_M)$.

On a : $\mathcal{C}_M = \{ M \cap E \mid E \in \sigma\text{-}\mathcal{A}(\mathcal{E}) \}$

$\mathcal{E}_M = \{ M \cap E \mid E \in \mathcal{E} \}$

Soit $B \in \mathcal{E}_M$
Alors $\exists E \in \mathcal{E} \mid B = M \cap E$

Comme $\mathcal{E} \subset \sigma\text{-}\mathcal{A}(\mathcal{E})$
Alors $E \in \sigma\text{-}\mathcal{A}(\mathcal{E})$
D'où $B \in \mathcal{C}_M$
Ainsi $\mathcal{E}_M \subset \mathcal{C}_M$
Alors $\sigma\text{-}\mathcal{A}(\mathcal{E}_M) \subset \mathcal{C}_M$ (*)

- Posons $\mathcal{G} = \{ E \subseteq X \mid M \cap E \in \sigma\text{-}\mathcal{A}(\mathcal{E}_M) \}$

On montre aisément que $\mathcal{G}$ est une tribu sur X (À faire en exo).

Scanné avec CamScanner

Donc $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$ Donc $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{G}$

Ie $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$ Ainsi $\forall E \in \mathcal{E}$

$M \cap E \in \sigma(\mathcal{E}_M)$

Alors $\mathcal{C}_M \subset \sigma(\mathcal{E}_M)$ (**)

(*) et (**) nous donne

$$\mathcal{C}_M = \sigma(\mathcal{E}_M)$$

(4)

Montrons que $B(M) = B(X)_M$

Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts de X

Alors l'ensemble des ouverts de M est

$$\mathcal{O}_M = \{ M \cap E \mid E \in \mathcal{O} \}$$

$B(X) = \sigma(\mathcal{O})$ et $B(M) = \sigma(\mathcal{O}_M)$

Donc : $B(X)_M = [\sigma(\mathcal{O})]_M = \sigma(\mathcal{O}_M)$

D'après 3)

Donc $B(X)_M = B(M)$.

Scanné avec CamScanner

Exercice 2

(1)

$X = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,5\}$, $B = \{2,3\}$ et $C = \{1,2,6\}$.

Déterminons l'algèbre de partie engendré par $\{A,B,C\}$.

fabriquons une partition de X à partir de A, B et C.

On a: $A \cap B = \phi$, $C \setminus (A \cup B) = \{6\}$

posons $D = \{6\}$

$A \cup B \cup C = \{1,2,3,5,6\}$ $X \setminus (A \cup B \cup C) = \{4\}$

posons $E = \{4\}$

On a: la famille $\{A,B,D,E\}$ constitue une partition de X

Alors $\sigma\text{-}\mathcal{A}(\{A,B,C\}) = \sigma\text{-}\mathcal{A}(\{A,B,D,E\})$

$= \{\phi, X, A, B, D, E, A \cup B, A \cup D, A \cup E, B \cup D, B \cup E, D \cup E, A \cup B \cup D, A \cup B \cup E, B \cup D \cup E, A \cup D \cup E\}$

(2) Montrons que $\mathcal{A}$ est une tribu sur X

i- On a: $\phi \subset X$ et $\text{Card}(\phi) = 0$ donc $\phi \in \mathcal{A}$

ii- Soit $A \in \mathcal{A}$

* A dénombrable

On a: $X \setminus (X \setminus A) = A$ est dénombrable alors

VALIDEUR LMD: Conseils - Examens & TD - Corrections

X 10.06.2020 $\mathcal{A}$.

a) A n'est pas dénombrable

Comme $A \in \mathcal{A}$ alors $X \setminus A$ est dénombrable

Donc $X \setminus A \in \mathcal{A}$

Ainsi dans tous les cas $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

iii- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$

* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments dénombrable.

Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X = X$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dénombrable Donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

* $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid A_{n_0}$ n'est pas dénombrable

$X \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus A_n) \subset X \setminus A_{n_0}$

Comme $A_{n_0} \in \mathcal{A}$ alors $X \setminus A_{n_0}$ est dénombrable.

Donc $X \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ est dénombrable

D'où $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Ainsi dans tout les cas on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Scanné avec CamScanner

(3) $I := \{]a,b[/ a,b \in \mathbb{R} \text{ et } a \leq b \}$

On a: $\sigma\text{-}\mathcal{U}(I) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Notons $\sigma\text{-}\mathcal{L}(I)$ la classe σ-additive engendrée par I

D'après le cours $\sigma\text{-}\mathcal{U}(I)$ est une classe σ-additive qui contient I.

Donc $\sigma\text{-}\mathcal{L}(I) \subset \sigma\text{-}\mathcal{U}(I)$ (1)

D'après le cours, I est un π-système

Donc d'après le cours

$\sigma\text{-}\mathcal{U}(I) \subset \sigma\text{-}\mathcal{L}(I)$ (2)

De (1) et (2) il en resulte que

$\sigma\text{-}\mathcal{U}(I) = \sigma\text{-}\mathcal{L}(I)$.

Exercice 3

(1) Montrons que δ_{x_0} est une mesure positive sur $(X, \mathcal{U})$.

On a: δ_{x_0} est à valeur dans $\{0,1\} \subset \mathbb{R}_+$

Donc l'application est bien définie.

On a: $\phi \in \mathcal{U}$ car $\mathcal{U}$ tribu sur X

On a: $x_0 \notin \phi \Rightarrow \delta_{x_0}(\phi) = 0$

Scanné avec CamScanner

Exemple

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite deux à deux disjointe. a-t-on $\delta_{x_0}(\bigcup A_n) = \sum \delta_{x_0}(A_n)$?

1er Cas : $x_0 \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Comme $A_n \cap A_m = \phi \quad \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, n \neq m$

Alors $x_0 \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$x_0 \in A_{n_0}$ et $x_0 \notin A_n \quad \forall n \neq n_0$.

On a : $\delta_{x_0}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$ car $x_0 \in A_{n_0} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$\forall n \neq n_0$ on a : $\delta_{x_0}(A_n) = 0$ et $\delta_{x_0}(A_{n_0}) = 1$

On a : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{x_0}(A_n) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\neq n_0}} \delta_{x_0}(A_n) + \delta_{x_0}(A_{n_0})$

$= 0 + 1$

$= 1$

D'où $\delta_{x_0}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{x_0}(A_n) = 1$

Scanné avec CamScanner

2ème Cas

$x_0 \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$x_0 \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow x_0 \notin A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a : $\delta_{x_0}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 0$ car $x_0 \notin A_n \Rightarrow x_0 \notin \bigcup A_n$

et $\sum \delta_{x_0}(A_n) = \sum 0 = 0$

D'où le resultat.

(2-a) $A_n = \{a \in X / P(\{a\}) > \frac{1}{n}\}$

Montrons que $\text{card}(A_n) \leq n$. $\forall n \in \mathbb{N}$ *

Raisonnons par l'absurde.

Supposons que A_n contient au moins $n+1$ éléments alors $\exists\, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in A_n$ deux à deux distincts On a :

$$X \supset \bigcup_{i=1}^{n+1} \{a_i\}$$

Donc $P(X) \geq P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} \{a_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} P(\{a_i\})$

or $P(\{a_i\}) > \frac{1}{n} \quad \forall i$

Scanné avec CamScanner

D'où $\sum_{i=1}^{n+1} P(\{a_i\}) > \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} > 1$

$\Rightarrow P(X) > 1$ absurde

Donc $\text{Card}(A_n) \leq n$.

2-b)

Soit $A = \{a \in X \mid P(\{a\}) > 0\}$

Montrons que A est dénombrable.

On a : $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (à démontrer en exo)

Comme A_n est dénombrable ($\text{Card}(A_n) \leq n$)

alors A est dénombrable.

Scanné avec CamScanner

TD d'Intégration Fiche de TD n°1 Prof KOURUMA

EXERCICE 1

Soient $(X,\mathcal{A}),(Y,\mathcal{B})$ $f: X \to Y$ f est $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-mesurable

$\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une partition de Y formée d'éléments de $\mathcal{B}$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans Y.

$$\forall x \in X,\ g(x) := \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \in A_0 \\ x_n \text{ si } f(x) \in A_n, n \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in f^{-1}(A_0) \\ x_n \text{ si } x \in f^{-1}(A_n) \end{cases}$$

1| Montrons que g est $(\mathcal{A},\mathcal{B})$- mesurable.

Soit $x \in X$. $f(x) \in Y$

$$Y = \bigcup_{n\geq 0} A_n \text{ partition.}$$

Donc $\exists!\ n \in \mathbb{N} / f(x) \in A_n$.

Donc $g(x)$ est bien définie. Ainsi g est une application de X dans Y.

Soit $B \in \mathcal{B}$. $g^{-1}(B) = \{x \in X / g(x) \in B\}$

$$\forall x \in X, g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in f^{-1}(A_0) \\ x_n \text{ si } x \in f^{-1}(A_n), n \geq 1. \end{cases}$$

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-1}(A_n)$$

$$\forall m \neq n \in \mathbb{N},\ f^{-1}(A_m) \cap f^{-1}(A_n) = f^{-1}(A_m \cap A_n) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

Donc $(f^{-1}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de X.

$$g^{-1}(B) = \left\{x \in \bigcup_{n\geq 0} f^{-1}(A_n) \mid g(x) \in B\right\}$$

$$= \bigcup_{n\geq 0} \{x \in f^{-1}(A_n) \mid g(x) \in B\}$$

$$= \{x \in f^{-1}(A_0) \mid g(x) \in B\} \cup \left(\bigcup_{n\geq 1} \{x \in f^{-1}(A_n) / g(x) \in B\}\right)$$

$$g^{-1}(B) = \{x \in f^{-1}(A_0) / f(x) \in B\} \cup \left(\bigcup_{n\geq 1} \{x \in f^{-1}(A_n) / x_n \in B\}\right)$$

$$= \{x \in f^{-1}(A_0) / x \in f^{-1}(B)\} \cup \left(\bigcup_{n\geq 1, x_n \in B} f^{-1}(A_n)\right)$$

$$= f^{-1}(A_0) \cap f^{-1}(B) \cup \left(\bigcup_{x_n \in B} f^{-1}(A_n)\right)$$

VALIDEUR LMD: Conseils - Examens & TD - Corrections

Scanné avec CamScanner

10.08.2020

Comme f est $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-mesurable donc
$f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A}, \forall n \geq 0$ et $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A}$
donc $g^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Conclusion : g est $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-mesurable.

2) On suppose que $X = Y = \mathbb{R}$ muni de la tribu Borélienne, $f(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$, $A_0 =]-\infty, 0[$, $A_n = [n-1, n[, \forall n \geq 1$ et λ la mesure de Lebesgue.

Calcul de $\int_X |g| \, d\lambda$.

Montrons l'existance de l'integrale.

f est continue sur $\mathbb{R}$. donc f est borélienne (i.e f est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable).

On a $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ où $\begin{cases} A_0 =]-\infty, 0[\\ A_n = [n-1, n[, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, D'après "le cours de mesure".

En outre, A_0 est ouvert de $\mathbb{R}$, donc $A_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ainsi $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$

D'après 1g, on a donc que g est Borel-mesurable.

Par conséquent $\int_{\mathbb{R}} |g| \, d\lambda$ existe et appartient à $\overline{\mathbb{R}}_+$

$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc $\mathbb{R} = f^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-1}(A_n)$

$$\chi_{\mathbb{R}} = \chi_{\bigcup_{n \geq 0} f^{-1}(A_n)} = \sum_{n \geq 0} \chi_{f^{-1}(A_n)}$$

D'où $|g| = |g| \chi_{\mathbb{R}} = |g| \sum_{n \geq 0} \chi_{f^{-1}(A_n)} = \sum_{n \geq 0} |g| \chi_{f^{-1}(A_n)}$

$$\int_{\mathbb{R}} |g| \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n \geq 0} |g| \chi_{f^{-1}(A_n)} \right) d\lambda$$

Comme g borelienne, alors $|g|$ borelienne.

Comme $\mathbb{R}$ borelienne et $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Scanné avec CamScanner

19.08.2020

$f^{-1}(A_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\chi_{f^{-1}(A_n)}$ est borelienne.

Les lvs $|g| \chi_{f^{-1}(A_n)}$ est Borelienne, $\forall n \in \mathbb{N}$.

D'après un corollaire du TCM (Theoreme de la Convergence Monotone), on a:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n \geq 0} |g| \chi_{f^{-1}(A_n)} \right) d\lambda = \sum_{n \geq 0} \left(\int_{\mathbb{R}} |g| \chi_{f^{-1}(A_n)} \, d\lambda \right)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \int_{f^{-1}(A_n)} |g| \, d\lambda$$

$\forall x \in f^{-1}(A_0)$, $g(x) = f(x)$. Donc $\int_{f^{-1}(A_0)} |g| \, d\lambda = \int_{f^{-1}(A_0)} |f| \, d\lambda$

$$f^{-1}(A_0) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in A_0 \} = \{ x \in \mathbb{R} / |x| \in]-\infty, 0[\} = \phi$$

D'où $\int_{f^{-1}(A_0)} |g| \, d\lambda = \int_{\phi} |f| \, d\lambda = 0$ ($\chi_\phi = 0$)

Soit $n \geq 1$

$\forall x \in f^{-1}(A_n)$, $g(x) = x_n \in \mathbb{R}$

Donc $\int_{f^{-1}(A_n)} |g| \, d\lambda = \int_{f^{-1}(A_n)} |x_n| \, d\lambda = |x_n| \, \lambda(f^{-1}(A_n))$

$$f^{-1}(A_n) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in A_n \}$$

$$f^{-1}(A_n) = \{ x \in \mathbb{R} / |x| \in [n-1, n[\}$$

$$=]-n, -(n-1)] \cup [n-1, n[$$

Supposons $n \geq 2$

$$\lambda(f^{-1}(A_n)) = \lambda(]-n, -(n-1)] \cup [n-1, n[)$$

$$= \lambda(]-n, -(n-1)]) + \lambda([n-1, n[)$$

$\lambda(f^{-1}(A_n)) = 1 + 1 = 2$.

$f^{-1}(A_1) =]-1, 0] \cup [0, 1[=]-1, 1[$

$\lambda(f^{-1}(A_1)) = 2$

Donc dans tous les cas $\lambda(f^{-1}(A_n)) = 2$

Scanné avec CamScanner

Or $\int_{g^{-1}(A_n)} |g|\,d\lambda = 2|x_n|$

Conclusion : $\int_{\mathbb{R}} |g|\,d\lambda = \sum_{n\geq 1} 2|x_n| = 2\sum_{n\geq 1}|x_n|$

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} |g|\,d\lambda = 2\sum_{n\geq 1}|x_n|}$$

Exercice 2

On a $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une application $\mathcal{A}$-mesurable.
λ une mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Montrons que

1- Montrons que $\int_X x_A\,d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{x_A \geq t\})\,d\lambda(t)$, $\forall A \in \mathcal{A}$

Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors x_A est $\mathcal{A}$-mesurable et positive donc $\int_X x_A\,d\mu$ existe et on a : $\mu(A) = \int_X x_A\,d\mu$.

Soit $t \in [0,+\infty]$, $\{x_A \geq t\} = x_A^{-1}([t,+\infty])$

$= \{x \in X \mid x_A \geq t\}$

$= \{x \in X \mid x_A(x) \in [t,+\infty]\} \in \mathcal{A}$

Car x_A est $\mathcal{A}$-mesurable.

De plus on a : $[t,+\infty] \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Donc $\mu(\{x_A \geq t\})$ existe et appartient à $\overline{\mathbb{R}}_+$. Posons $g(t) = \mu(\{x_A \geq t\})$, $t \in [0,+\infty]$.

Soit $t \in [0,+\infty]$. $\{x_A \geq t\} = \{x \in X \mid x_A \geq t\}$

$= \{x \in A \mid 1 \geq t\} \cup \{x \notin A \mid 0 \geq t\}$

1er cas : $t = 0$ Alors

$\{x_A \geq t\} = A \cup (X \setminus A) = X$, donc $g(t) = \mu(X)$.

2ème cas : $t \in]0,1]$

$\{x_A \geq t\} = A \cup \emptyset = A$, donc $g(t) = \mu(A)$.

Scanné avec CamScanner

10.08.2020

3ème cas : $t > 1$

$\{\chi_A \geq t\} = \phi \cup \phi = \phi$, donc $g(t) = \mu(\phi) = 0$

Donc $g(t) = 0\,\chi_{]1,+\infty]}(t) + \mu(A)\,\chi_{]0,1]}(t) + \mu(X)\,\chi_{\{0\}}(t)$

$]1,+\infty] \in \mathcal{B}([0,+\infty])$ donc $\chi_{]1,+\infty]}$ est $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$-mesurable

$]0,1] \in \mathcal{B}([0,+\infty])$ donc $\chi_{]0,1]}$ est $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$-mesurable

$\{0\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ donc $\chi_{\{0\}}$ est $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$-mesurable.

Par suite g est $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$-mesurable. comme $g \geq 0$ alors $\int_{[0,+\infty]} g(t)\,d\lambda(t)$ existe et appartient à $\overline{\mathbb{R}}_+$.

g étant une fonction $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$-étagée car combinaison linéaire de fonction indicatrices.

$g = \mu(A)\,\chi_{]0,1]} + \mu(X)\chi_{\{0\}}$ qui est l'écriture standard

donc $\int_{[0,+\infty]} g(t)\,d\lambda(t) = \mu(A)\,\lambda(]0,1]) + \mu(X)\lambda(\{0\}) = \mu(A)$.

Ainsi on a : $\boxed{\int_X \chi_A\,d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{\chi_A \geq t\})\,d\lambda(t)}$

car $\int_X \chi_A\,d\mu = \mu(A)$

(Scanné avec CamScanner)

2) $\int_X f\,d\mu \overset{?}{=} \int_0^{+\infty} \mu(\{f \geq t\})\,d\lambda(t)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, s_n est $\mathcal{A}$-étagée, $0 \leq s_n \leq s_{n+1} \leq f$ et $\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = f(x)$, $\forall x \in X$.

On a vu que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_X s_n\,d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{s_n \geq t\})\,d\lambda(t)$

$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mu(\{s_n \geq t\})\,d\lambda(t) = \int_0^{+\infty} \mu(\{f \geq t\})\,d\lambda(t)$?

$\forall x \in X$, $s_n(x) \geq t \Rightarrow s_{n+1}(x) \geq t$, donc $\{s_n \geq t\} \subset \{s_{n+1} \geq t\}$ d'où $\mu(\{s_n \geq t\}) \leq \mu(\{s_{n+1} \geq t\})$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ⓐ Après le TCM, on a : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mu(\{s_n \geq t\})\,d\lambda(t) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} \mu(\{s_n \geq t\})\right) d\lambda(t)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\{s_n \geq t\} \subset \{f \geq t\}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \mu(\{s_n \geq t\}) \leq \mu(\{f \geq t\})$. D'où $\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \mu(\{s_n \geq t\})\,d\lambda(t) \leq \int_0^{+\infty} \mu(\{f \geq t\})\,d\lambda(t)$.

Soit $\alpha > 1$. Soit $t > 0$. Soit $x \in X$ tel que $f(x) \geq \alpha t > t$.

Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geq n_0$ on a : $s_n(x) > t$.

Donc $\{f \geq \alpha t\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{s_n > t\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{s_n \geq t\}$. D'où

$\mu(\{f \geq \alpha t\}) \leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{s_n \geq t\}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(\{s_n \geq t\})$.

D'où $\int_0^{+\infty} \mu(\{f \geq \alpha t\})\,d\lambda(t) \leq \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} \mu(\{s_n \geq t\})\right) d\lambda(t)$. Co-area formula

$$\int_0^{+\infty} \mu(\{f \geq \alpha t\})\,d\lambda(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \mu(\{f \geq \alpha t\})\,d\lambda(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \mu(\{f \geq s\})\,d\lambda(s).$$

Ainsi $\frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \mu(\{f \geq s\})\,d\lambda(s) \leq \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} \mu(\{s_n \geq t\})\right) d\lambda(t)$, $\forall \alpha > 1$.

En prenant la limite quand α tend vers 1 on obtient

(En effet $\alpha > 1$, $1 < \alpha_k = \frac{1}{k} + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$)

$\int_0^{+\infty} \mu(\{f \geq s\})\,d\lambda(s) \leq \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} \mu(\{s_n \geq t\})\right) d\lambda(t)$

Donc d'après (*) on a : $\int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} \mu(\{s_n \geq t\})\right) d\lambda(t) = \int_0^{+\infty} \mu(\{f \geq t\})\,d\lambda(t)$

Conclusion $\int_X f\,d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{f \geq t\})\,d\lambda(t)$.

Scanné avec CamScanner

TD d'integration Fiche TD n°1 Prof N'ZI MODESTE

EXERCICE 1

1) $B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

Soit $B \in \mathcal{B}$, Il faudra montrer que $g^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

on a : $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \in A_0 \\ x_n \text{ si } f(x) \in A_n, n \geq 1 \end{cases}$

$g^{-1}(B) = \{x \in X \mid g(x) \in B\}$

$= \{x \in X : g(x) \in B \text{ et } f(x) \in A_0\} \cup \{x \in X : g(x) \in B \text{ et } f(x) \notin A_0\}$

$\{x \in X : g(x) \in B \text{ et } f(x) \in A_0\} = \{x \in X : f(x) \in B \text{ et } f(x) \in A_0\}$

$= f^{-1}(B \cap A_0) \in \mathcal{A}$ car f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$- mesurable et $A_0 \cap B \in \mathcal{B}$

$\{x \in X : g(x) \in B \text{ et } f(x) \notin A_0\} = \{x \in X : g(x) \in B \text{ et } f(x) \in \bigcup_{n \geq 1} A_n\}$

$= \bigcup_{n \geq 1} \{x \in X : g(x) \in B \text{ et } f(x) \in A_n\}$

$\{x \in X : g(x) \in B \text{ et } f(x) \in A_n\} = \begin{cases} \phi \text{ si } x_n \notin B \\ f^{-1}(A_n) \text{ si } x_n \in B \end{cases}$

$\phi \in \mathcal{A}$ et $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A}$. car f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$- mesurable et $A_n \in \mathcal{B}$.

conclusion : $\{x \in X : g(x) \in B \text{ et } f(x) \in A_n\} \in \mathcal{A}$

Donc $\{x \in X : g(x) \in B \text{ et } f(x) \notin A_0\} \in \mathcal{A}$.

2/ calculer $\int_X |g| \, d\lambda$

on a : $f(x) = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$

f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc f est borélienne.

$g = f \mathbb{1}_{f^{-1}(A_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathbb{1}_{f^{-1}(A_n)}$ $\quad g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$

Scanné avec CamScanner

$f(x) = f(x)\mathbb{1}_{f^{-1}(A_0)}(x) + \sum_{n=1} x_n \mathbb{1}_{f^{-1}(A_n)}(x)$

$|f| = |f|\mathbb{1}_{f^{-1}(A_0)} + \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \mathbb{1}_{f^{-1}(A_n)}$

$|f| = |f|\mathbb{1}_{f^{-1}(A_0)} + \sum_{n=1} |x_n| \mathbb{1}_{f^{-1}(A_n)}$

$|f| = |f|\mathbb{1}_{f^{-1}(A_0)} + \sum_{n=1} |x_n| \mathbb{1}_{f^{-1}(A_n)}$

$$\int_X |f|\,d\lambda = \int_X |f|\mathbb{1}_{f^{-1}(A_0)}\,d\lambda + \sum_{n\geq 1} \int_X |x_n| \mathbb{1}_{f^{-1}(A_n)}\,d\lambda$$

$$= \int_{f^{-1}(A_0)} |f|\mathbb{1}_{f^{-1}(A_0)}\,d\lambda + \sum_{n\geq 1} \int_X |x_n| \mathbb{1}_{f^{-1}(A_n)}\,d\lambda$$

$$= \int_{f^{-1}(A_0)} |f|\,d\lambda + \sum_{n\geq 1} |x_n| \lambda(f^{-1}(A_n))$$

On a : $f(x) = |x|$ $A_0 =]-\infty, 0[$, $A_n = [n-1, n[$

$f^{-1}(A_0) = \emptyset$ $f^{-1}(A_n) = \{x \in X : n-1 \leq |x| < n\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : n-1 \leq x < n \text{ ou } -n < x \leq 1-n\}$

$\lambda(f^{-1}(A_n)) = 2$ conclusion $\int_X |f|\,d\lambda = 2\sum |x_n|$

Exercice 2 :

$\mu(\mathbb{1}_A \geq t) = \mu(\{x \in X : \mathbb{1}_A(x) > t\})$

$= \int_X \mathbb{1}_{\{\mathbb{1}_A \geq t\}}\,d\mu$

$\int_{X\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_B(x,t)\,d\mu(x)\,d\lambda(t)$ où $B = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+ : \mathbb{1}_A(x) \geq t\}$

$$= \int_X \left(\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_B(x,t)\,d\lambda(t)\right) d\mu(x)$$

$$= \int_X \left(\int_{[0,\mathbb{1}_A(x)]} d\lambda(t)\right) d\mu(x)$$

$$= \int_X \left(\mathbb{1}_A(x)\right) d\mu(x) = \int_X \mathbb{1}_A\,d\mu = \mu(A)$$

$\int_X \mathbb{1}_B(x,t)\,d\mu(x)\,d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_X \mathbb{1}_B(x,t)\,d\mu(x)\right) d\lambda(t)$

Scanné avec CamScanner

10.06.2020

1) $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$

$\forall x \in]a,b[$, $f'(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{1/n}$

$f_n = \dfrac{f(\cdot + \frac{1}{n}) - f}{1/n}$ est mesurable

$f' = \lim f_n$ donc f' est mesurable.

2) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda^{f^{-1}}(A) = \lambda\left[(f^{-1})^{-1}(A)\right] = \lambda(f(A))$

$\lambda^{f^{-1}}(A) = \lambda(f[a,b[)$ or f est croissante.

$= \lambda([f(a), f(b)[)$

$= f(b) - f(a)$

car $x \in [a,b[$ signifie que $a \leq x < b$

$f(a) \leq f(x) < f(b)$

Puisque f croissante et est une bijection

alors f strictement croissante.

$\lambda^{f^{-1}}(A) = f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$ d'après les hypothèses

$= \int_{[a,b[} f'(t)\,d\lambda(t)$

$\|$ f est croissante $\Leftrightarrow \forall x,y \in [a,b[\,/\, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

où $f : [a,b[\to B$.

Scanné avec CamScanner

Exercice 4

On a $h \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(t_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^*$ est strictement croissante $\forall n \in \mathbb{N}^*$ telle que $\lim_{n\to+\infty} t_{k,n} = -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} t_{k,n} = +\infty$ et $\sup_{k\in\mathbb{Z}} (t_{k+1,n} - t_{k,n}) \leq \frac{1}{n}$.

$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ on a: $A_{k,n} = \{x \in X / t_{k,n} \leq h(x) < t_{k+1,n}\}$

et $\varepsilon_{k,n} \in [t_{k,n}, t_{k+1,n}[$

1°) Montrons que : $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ on a :

$|\varepsilon_{k,n}| \mu(A_{k,n}) \leq \frac{1}{n} \mu(A_{k,n}) + \int_X |h(x)| \chi_{A_{k,n}}(x) \, d\mu$

On a: $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, $t_{k,n} \leq \varepsilon_{k,n} < t_{k+1,n}$ ①

$\Rightarrow -t_{k+1,n} < -\varepsilon_{k,n} \leq -t_{k,n}$ soit $x \in A_{k,n}$

alors on a: $t_{k,n} \leq h(x) < t_{k+1,n}$ ②

② - ① donne $t_{k,n} - t_{k+1,n} \leq h(x) - \varepsilon_{k,n} \leq t_{k+1,n} - t_{k,n}$

$-(t_{k+1,n} - t_{k,n}) \leq h(x) - \varepsilon_{k,n} < t_{k+1,n} - t_{k,n}$

$\Leftrightarrow |h(x) - \varepsilon_{k,n}| \leq t_{k+1,n} - t_{k,n}$

$\Rightarrow ||h(x)| - |\varepsilon_{k,n}|| \leq t_{k+1,n} - t_{k,n}$

$\Rightarrow |h(x)| - |\varepsilon_{k,n}| \leq t_{k+1,n} - t_{k,n} < \sup_{k\in\mathbb{Z}} (t_{k+1,n} - t_{k,n})$

$\Rightarrow |h(x)| - |\varepsilon_{k,n}| \leq \sup (t_{k+1,n} - t_{k,n})$

$\Rightarrow |h(x)| - |\varepsilon_{k,n}| \leq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow |\varepsilon_{k,n}| \leq \frac{1}{n} + |h(x)|$

$\int_{A_{k,n}} |\varepsilon_{k,n}| \, d\mu \leq \int_{A_{k,n}} |h(x)| \, d\mu + \int_{A_{k,n}} \frac{1}{n} \, d\mu$

Scanné avec CamScanner

$|\varepsilon_{k,n}|\,\mu(A_{k,n}) \leq \int_X |f_n(x)|\,\chi_{A_{k,n}}(x)\,d\mu + \frac{1}{n}\mu(A_{k,n})$

Tous d'abord montrons l'existence de cette intégrale

$A_{k,n} = f_n^{-1}([t_{k,n}, t_{k+1,n}[) \in \mathcal{A}$ car $[t_{k,n}, t_{k+1,n}[$ est un Borelien de $\mathbb{R}$ et f_n est $\mathcal{A}$-mesurable

D'où $\chi_{A_{k,n}}$ est $\mathcal{A}$-mesurable positive. Par suite $|f_n|\chi_{A_{k,n}}$ est $\mathcal{A}$-mesurable positive par la règle du produit donc

$\int_X f_n(x)\chi_{A_{k,n}}(x)\,d\mu$ existe.

Soit $x \in A_{k,n}$ $\varepsilon_{k,n} f_n(x) \in [t_{k,n}; t_{k+1,n}[$

$|f_n(x) - \varepsilon_{k,n}| \leq t_{k+1,n} - t_{k,n} \leq \frac{1}{n}$ donc

$|f_n(x) - \varepsilon_{k,n}| \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow |f_n(x)| + \frac{1}{n} \geq |\varepsilon_{k,n}|$

D'où $|\varepsilon_{k,n}|\,\chi_{A_{k,n}}(x) \leq |f_n(x)|\,\chi_{A_{k,n}}(x) + \frac{1}{n}\chi_{A_{k,n}}(x)$, $x \in X$

Par suite $\int_X |\varepsilon_{k,n}|\,\chi_{A_{k,n}}(x)\,d\mu \leq \int_X |f_n(x)|\,\chi_{A_{k,n}}(x)\,d\mu + \int_X \frac{1}{n}\chi_{A_{k,n}}(x)$, $x \in$

$$\boxed{|\varepsilon_{k,n}|\,\mu(A_{k,n}) \leq \int_X |f_n(x)|\,\chi_{A_{k,n}}(x)\,d\mu(x) + \frac{1}{n}\mu(A_{k,n})}$$

Scanné avec CamScanner

10.08.2020

⊙ $|\xi_{k,n}|\,\mu(A_{k,n}) \leq \frac{1}{n}\mu(A_{k,n}) + \int_X |h(x)|\,\chi_{A_{k,n}}(x)\,d\mu$ (inégalité)

$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$

Déduisons $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{k,n}\mu(A_{k,n})$ est convergente $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

D'après ⊙ $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\xi_{k,n}|\,\mu(A_{k,n}) \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{1}{n}\mu(A_{k,n}) + \int_X |h(x)|\,\chi_{A_{k,n}}(x)\,d\mu\right]$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\xi_{k,n}|\,\mu(A_{k,n}) \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n}\mu(A_{k,n}) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_X |h(x)|\,\chi_{A_{k,n}}(x)\,d\mu\right)$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n}\mu(A_{k,n}) = \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(A_{k,n})$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_X |h(x)|\,\chi_{A_{k,n}}(x)\,d\mu\right) = \int_X \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |h(x)|\,\chi_{A_{k,n}}(x)\right) d\mu$$

d'après un corolaire du T.C.M.

Puisque $x \mapsto |h(x)|\,\chi_{A_{k,n}}(x)$ est $\mathcal{A}$-mesurable positive, étant donné que $|h|$ et $\chi_{A_{k,n}}$ sont $\mathcal{A}$-mesurable positives $\forall k \in \mathbb{Z}$.

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_X |h(x)|\,\chi_{A_{k,n}}(x)\,d\mu = \int_X |h(x)| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_{A_{k,n}}(x)\right) d\mu$$

Soient $k, l \in \mathbb{Z}$ tel que $k < l$. Alors $k+1 \leq l$ et $t_{k+1,n} \leq t_{l,n}$

$$\begin{aligned} A_{k,n} \cap A_{l,n} &= h^{-1}([t_{k,n}, t_{k+1,n}[) \cap h^{-1}([t_{l,n}, t_{l+1,n}[) \\ &= h^{-1}([t_{k,n}, t_{k+1,n}[\cap [t_{l,n}, t_{l+1,n}[) \\ &= h^{-1}(\phi) \text{ car } [t_{k,n}, t_{k+1,n}[\cap [t_{l,n}, t_{l+1,n}[= \phi \\ &= \phi \end{aligned}$$

Donc $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(A_{k,n}) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_{k,n}\right) < +\infty$ car μ est finie

$\forall x \in X$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_{A_{k,n}}(x) = \chi_{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_{k,n}}(x)$.

Donc $\int_X |h(x)| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_{A_{k,n}}(x)\right) d\mu = \int_X |h(x)|\,\chi_{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_{k,n}}(x)\,d\mu$

VALIDEUR Lpp: Consulter Examens & TD / Corrections

Scanné avec CamScanner

$\forall x \in X$, $\chi_{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_{k,n}}(x) \leq 1$, donc $|h(x)|\,\chi_{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_{k,n}}(x) \leq |h(x)|$

D'où $\int_X |h(x)|\,\chi_{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_{k,n}}(x)\,d\mu \leq \int_X |h(x)|\,d\mu < +\infty$ car $|h|$ est μ-intégrable.

D'après tout ce qui précède, on a :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\xi_{k,n}|\,\mu(A_{k,n}) \leq \frac{1}{n}\,\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_{k,n}\Big) + \int_X |h(x)|\,d\mu < +\infty$$

Donc $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{k,n}\,\mu(A_{k,n})$ est absolument convergente.

2) Montrons que $\int_X h\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{k,n}\,\mu(A_{k,n})$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{k,n}\,\mu(A_{k,n}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{k,n} \int_X \chi_{A_{k,n}}(x)\,d\mu(x)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\int_X \xi_{k,n}\,\chi_{A}(x)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Big|\int_X h\,d\mu - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{k,n}\,\mu(A_{k,n})\Big| \leq \,?$$

D'après les hypothèses, on a :

* $t_{k,n} < t_{k+1,n}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$;
* $\lim_{k\to-\infty} t_{k,n} = -\infty$ et $\lim_{k\to+\infty} t_{k,n} = +\infty$

Donc $\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [t_{k,n}, t_{k+1,n}[$ réunion disjointe.

En effet :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Supposons que $x \notin \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [t_{k,n}, t_{k+1,n}[$

Alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, $x \notin [t_{k,n}, t_{k+1,n}[$ i.e que

$x < t_{k,n}$ ou $x \geq t_{k+1,n}$

Scanné avec CamScanner

 Supposons que $\{k\in\mathbb{Z} \mid x \geqslant t_{k+1,n}\}$ est infini LMD/CSC

Alors $x \geqslant \lim_{k\to+\infty} t_{k+1,n} = +\infty$, absurde

De même si $\{k\in\mathbb{Z} \mid x < t_{k,n}\}$ est infini alors

$x \leqslant \lim_{k\to+\infty} t_{k,n} = -\infty$, absurde.

Donc $\{k\in\mathbb{Z} \mid x \geqslant t_{k+1,n}\}$ et $\{k\in\mathbb{Z} \mid x < t_{k,n}\}$ sont finis. Absurde car $\{k\in\mathbb{Z} \mid x \geqslant t_{k+1,n}\} \cup \{k\in\mathbb{Z} \mid x < t_{k,n}\} = \mathbb{Z}$

Conclusion : $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [t_{k,n}, t_{k+1,n}[$. Ainsi $\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [t_{k,n}, t_{k+1,n}[$

$$X = h^{-1}(\mathbb{R}) = h^{-1}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [t_{k,n}, t_{k+1,n}[\right)$$
$$= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} h^{-1}\left([t_{k,n}, t_{k+1,n}[\right)$$

$X = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_{k,n}$ partition de X.

$$1 = \chi_X = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_{A_{k,n}}$$

D'où $h = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h\chi_{A_{k,n}}$ et $|h| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |h|\chi_{A_{k,n}}$

$$\int_X h\,d\mu = \int_X \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} h\chi_{A_{k,n}}\right) d\mu \overset{?}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_X (h\chi_{A_{k,n}})\,d\mu$$

$h = h^+ - h^-$ avec h^+ et $h^- \in \mathcal{L}^1$, donc

$$\int_X h\,d\mu = \int_X h^+ d\mu - \int_X h^- d\mu = \int_X \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} h^+\chi_{A_{k,n}}\right) d\mu$$
$$- \int_X \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} h^-\chi_{A_{k,n}}\right) d\mu$$

car $h^+ = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h^+\chi_{A_{k,n}}$

$$\int_X h\,d\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_X h^+\chi_{A_{k,n}}\,d\mu\right) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_X h^-\chi_{A_{k,n}}\,d\mu\right)$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_X h^+\chi_{A_{k,n}}\,d\mu - \int_X h^-\chi_{A_{k,n}}\,d\mu\right)$$

Scanné avec CamScanner

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_X (f^+ - f^-)\chi_{A_{k,n}} \, d\mu \right)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_X f \chi_{A_{k,n}} \, d\mu .$$

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_X f \chi_{A_{k,n}} \, d\mu$$

$$\left| \int_X f \, d\mu - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{k,n} \mu(A_{k,n}) \right| = \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_X (f \chi_{A_{k,n}}) \, d\mu - \int_X \xi_{k,n} \chi_{A_{k,n}} \, d\mu \right|$$

$$\left| \int_X f \, d\mu - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{k,n} \mu(A_{k,n}) \right| = \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_X (f - \xi_{k,n}) \chi_{A_{k,n}} \, d\mu \right|$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_X (f - \xi_{k,n}) \chi_{A_{k,n}} \, d\mu \right|$$

Annales Mathématiques Africaines

R. une classe d'equivalence d'une suite de cauchy de $\mathbb{Q}$

$$\left| \int_X f \, d\mu - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{k,n} \mu(A_{k,n}) \right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_X |f - \xi_{k,n}| \chi_{A_{k,n}} \, d\mu$$

$\forall x \in A_{k,n}$, $|f(x) - \xi_{k,n}| \leq \frac{1}{n}$, donc : $\forall x \in X$

$$|f(x) - \xi_{k,n}| \chi_{A_{k,n}}(x) \leq \frac{1}{n} \chi_{A_{k,n}}(x) .$$

D'où $\left| \int_X f \, d\mu - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{k,n} \mu(A_{k,n}) \right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_X \frac{1}{n} \chi_{A_{k,n}}(x) \, d\mu$

$$= \frac{1}{n} \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_{k,n} \right)$$

$$\left| \int_X f \, d\mu - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{k,n} \mu(A_{k,n}) \right| \leq \frac{1}{n} \mu(X)$$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \mu(X) = 0$, donc $\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{k,n} \mu(A_{k,n})$

Scanné avec CamScanner

On a: $f_n(x) = \frac{1}{n} x^2 \chi_{[-n^3,-n]}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$

1.) Etudions la $\mathcal{B}(\mathbb{R})$- mesurabilité de f_n

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a: $h_n(x) = \frac{1}{n} x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$[-n^3,-n] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car c'est un fermé de $\mathbb{R}$ d'où $\chi_{[-n^3,n]}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$- mesurable. De plus h_n est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme donc h_n est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$- mesurable donc

d'où $h_n \chi_{[-n^3,n]}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$- mesurable. Par conséquent

f_n est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$- mesurable.

b- Etudions la λ- intégrabilité de f_n

h_n est continue sur $[-n^3, n]$ donc h_n est Riemann intégrable sur $[-n^3, n]$ d'où $f_n = h_n \chi_{[-n^3,n]}$ est λ- intégrable et $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \int_{-n^3}^{-n} \frac{1}{n} x^2 dx = \frac{1}{3n} [x]_{-n^3}^{-n}$

$= \frac{1}{3n} [(-n)^3 - (-n^3)^3]$

$= \frac{1}{3n}(-n^3 + n^9) = \frac{n^2}{3}(n^6 - 1)$

methode 2.

$\forall x \in [-n^3, n]$, $\frac{1}{n} x^2 \leq \frac{1}{n}(-n^3)^2 = n^5$. Donc $0 \leq f_n(x) \leq n^5 \chi_{[-n^3,n]}$

$\forall x \in \mathbb{R}$. f_n est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$- mesurable positif. donc $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ existe.

$0 \leq \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} n^5 \chi_{[-n^3,-n]} d\lambda = n^5 \lambda[-n^3,-n] = -n^6 + n^3 < +\infty$

Donc f_n est λ- intégrable.

2) Etudions la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On a: $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} x^2 \text{ si } x \in [-n^3, n] \\ 0 \text{ si } x \notin [-n^3, -n] \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

Soit $x \in \mathbb{R}$

on a : $\lim_{n\to+\infty}(-n) = -\infty$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0$ on a :

d'où $\forall n \geq n_0$, $x \notin [-n^3, -n]$ et donc $f_n(x) = 0$. Par conséquent

$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. En conclusion la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

simplement vers 0.

3. Etudions la monotonie ainsi que la convergence dans $\mathcal{L}^p$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall p \in [1, +\infty[$

• Monotonie de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^2\left(\frac{1}{n+1}\chi_{[-(n+1)^3, -(n+1)]} - \frac{1}{n}\chi_{[-n^3, -n]}\right)$

$-n^3 > -n+1 \Leftrightarrow n^3 - n - 1 < 0 \Leftrightarrow n(n^2-1) < 1 \searrow \forall n \geq 2$

$-n < -(n+1)^3 \Rightarrow (n+1)^3 - n < 0 \Leftrightarrow (n+1)^3 < n \searrow \forall n \geq 0$

$-(n+1) \in [-n^3, -n]$, $\forall n \geq 2$.

Donc $\forall n \geq 2$ $[-(n+1)^3, -(n+1)] \cap [-n^3, -n] = [-n^3, -(n+1)^3]$

Soit $x \in [-\infty, +\infty[$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}x^2 \text{ si } x \in [-n^3, -n] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{n}x^2 \text{ si } x \in]-(n+1), -n[\\ \frac{1}{n}x^2 \text{ si } x \in [-n^3, -(n+1)] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \text{ si } x \in [-(n+1)^3, -(n+1)] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \text{ si } x \in [-(n+1)^3, -n^3[\\ \frac{1}{n+1} \text{ si } x \in [-n^3, -(n+1)] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour $x \in [-n^3, -(n+1)[$, $f_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}x^2 < \frac{1}{n}x^2 = f_n(x)$ décroissante

Pour $x \in [-(n+1)^3, -n^3[$, $f_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}x^2 > 0 = f_n(x)$, décroissante

Donc la $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante ni décroissante.

convergence dans $\mathcal{L}^p$: $p \in [1, +\infty]$

Scanné avec CamScanner

Exercice 3

b)

$h = \mathbb{1}_A$

$$\int_{\mathbb{R}} h \, d\lambda^{g-1} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \, d\lambda^{g-1} = \lambda^{g-1}(A)$$

$$= \int_A g'(t) \, d\lambda(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t) \, g'(t) \, d\lambda(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(t) \, g'(t) \, d\lambda(t)$$

$$\int_{\mathbb{R}} h(t) \, d\lambda^{g-1}(t)$$

$h = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_A$

comme l'intégrale est linéaire et que le produit de fonction est distributive par rapport à la somme de fonction

$$\int_{\mathbb{R}} h \, d\lambda^{g-1} = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i} \right) d\lambda^{g-1}$$

Scanné avec CamScanner

$$= \sum_{i=1} c_i \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_i}(t)\, f'(t)\, d\lambda(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i}(t)\, f'(t)\, d\lambda(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i}(t) \right) f'(A)\, d\lambda(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(t)\, f'(t)\, d\lambda(t)$$

Cas où h mesurable et positive

$\exists (h_n)$ une suite croissante de fonction étagée positive telle que $h_n \xrightarrow[+\infty]{} h$

$$\int h\, d\lambda^{f-1} = \lim_{n \to +\infty} \int h_n\, d\lambda^{f-1} \quad \text{T.C.M}$$

$\forall n$ $\int_{\mathbb{R}} h_n\, d\lambda^{f-1} = \int_{\mathbb{R}} h_n f'\, d\lambda$

$\lim \int_{\mathbb{R}} h_n\, d\lambda^{f-1} = \int_{\mathbb{R}} h\, d\lambda^{f-1}$?

$h_n f'$ est une fonction mesurable et positive car $h_n \geq 0$ et f croissante et derivable alors $f \geq 0$ d'où

on a: $(h_n f')$ croissante car $f' \geq 0$ et (h_n) croissante

donc: $\lim \int_{\mathbb{R}} h_n\, d\lambda^{f-1} = \int_{\mathbb{R}} \lim (h_n f')\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} h f'\, d\lambda$

Scanné avec CamScanner

Exercice 4

Montrons que $\forall \xi_{n,k}$, $|\xi_{n,k}|\,\mu(A_{n,k}) \leq \frac{1}{n}\mu(A_{n,k}) + \int |f_n| \chi_{A_{n,k}} d\mu$

Mq (I) $\xi_{n,k}\,\mu(A_{n,k}) \leq \frac{1}{n}\mu(A_{n,k}) + \int_X |f_n| \chi_{A_{n,k}} d\mu$

1er cas : $\xi_{n,k} \leq 0$ (non evident)

2e cas : $\xi_{n,k} > 0$

a) 

$a_1)$ $0 \leq t_{n,k} \leq \xi_{n,k}$

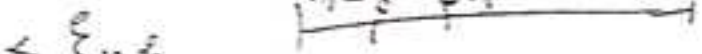


$\xi_{n,k} = (\xi_{n,k} - t_{n,k}) + t_{n,k} \leq \frac{1}{n} + t_{n,k}$

$\xi_{n,k}\,\mu(A_{n,k}) \leq \frac{1}{n}\mu(A_{n,k}) + t_{n,k}\,\mu(A_{n,k})$

$t_{n,k}\,\chi_{A_{n,k}} \leq f_n \chi_{A_{n,k}} = |f_n| \chi_{A_{n,k}}$

Donc $t_{n,k}\,\mu(A_{n,k}) \leq \int_X |f_n| \chi_{A_{n,k}} d\mu$



$a_2)$ $t_{n,k} \leq 0 < \xi_{n,k}$

$\xi_{n,k} \leq \frac{1}{n}$ car $\xi_{n,k} \leq t_{n,k+1} - t_{n,k} \leq \frac{1}{n}$

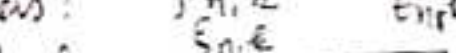
$\xi_{n,k}\,\mu(A_{n,k}) \leq \frac{1}{n}\mu(A_{n,k})$

$-\frac{1}{n}\mu(A_{n,k}) - \int_X |f_n| \chi_{A_{n,k}} d\mu \leq \xi_{n,k}\,\mu(A_{n,k})$

(II)

1er cas : $\xi_{n,k} \geq 0$ (evident)

2e cas : $\xi_{n,k} < 0$



b1) $t_{n,k} \leq \xi_{n,k} < 0 \leq t_{n,k+1}$

Scanné avec CamScanner

$-\xi_{n,k} \leq \frac{1}{n}$ i.e $\xi_{n,k} \geq -\frac{1}{n}$

D'où $\xi_{n,k}\,\mu(A_{n,k}) \geq -\frac{1}{n}\,\mu(A_{n,k})$

b2) $t_{n,k}$ $\xi_{n,k}$ $t_{n,k+1}$ $\quad \xi_{n,k} \leq t_{n,k+1} \leq 0$

$-\xi_{n,k} = (t_{n,k+1} - \xi_{n,k}) - t_{n,k+1} \leq \frac{1}{n} - t_{n,k+1}$

Il suffit juste de montrer $\left(|\xi_{n,k}| - \frac{1}{n}\right)\chi_{A_{n,k}} \leq |h|\,\chi_{A_{n,k}}$

$$\big|\,|\xi_{n,k}| - |h|\,\big| \leq |\xi_{n,k} - h| \leq \frac{1}{n}$$

$$\sum_k |\xi_{n,k}|\,\mu(A_{n,k}) \leq \frac{1}{n}\sum_k \mu(A_{n,k}) + \sum_k \int_X |h|\,\chi_{A_{n,k}}\,d\mu$$

$\forall n$ fixé $(t_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ une subdivision de $\mathbb{R}$ (partition de $\mathbb{R}$)

Donc les $(A_{n,k})$ forme une subdivision de X (partition de X)

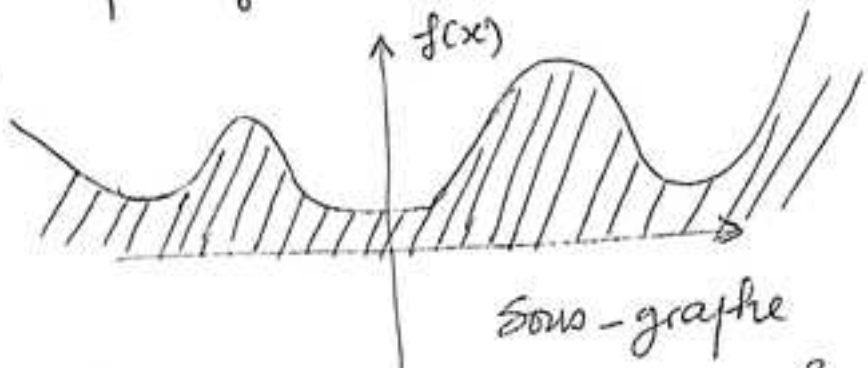
$\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} A_{n,k} = X$.

Scanné avec CamScanner

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une application $\mathcal{A}$-mesurable

on pose $G_f := \{(x,y) \in X \times [0,+\infty] \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$

1/ Montrons que G_f est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-mesurable



$$G_f = \{(x,y) \in X \times [0,+\infty[\mid 0 \leq y \leq f(x)\} \cup \{(x,y) \in X \times \{+\infty\} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$$= \{(x,y) \in X \times [0,+\infty[\mid y \geq 0 \text{ et } f(x) - y \geq 0\} \cup \cancel{\{(x,y) \in X \times [0,+\infty[\mid y \geq 0 \text{ et } f(x) - y \geq 0\}}$$

$$\{(x,+\infty) \mid x \in X \text{ et } f(x) = +\infty\}$$

$$= \{(x,y) \in X \times [0,+\infty[\mid y \geq 0\} \cap \{(x,y) \in X \times [0,+\infty[\mid f(x) - y \geq 0\}$$

$$= \{(x,y) \in X \times [0,+\infty[\mid f \circ Pr_1(x,y) - Pr_2(x,y) \geq 0\}$$

$\cup f^{-1}(\{+\infty\}) \times \{+\infty\}$ où

$$Pr_1 : \begin{array}{ccc} X \times \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & X \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad Pr_2 : \begin{array}{ccc} X \times \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

Posons $g(x,y) = f \circ Pr_1(x,y) - Pr_2(x,y)$

Pr_1 est $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}), \mathcal{A})$-mesurable

Pr_2 est $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}), \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable.

Donc $f \circ Pr_1$ est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-mesurable.

D'où $g = f \circ Pr_1 - Pr_2$ est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-mesurable

Scanné avec CamScanner

10.08.2020
$[0,+\infty] \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ donc car fermé $f^{-1}([0,+\infty]) \times$

$\{+\infty\}$ est un fermé de $\overline{\mathbb{R}}$, donc $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$

d'où $f^{-1}(\{+\infty\}) \times \{+\infty\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

$X \in \mathcal{A}$ et $[0,+\infty[\in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, donc $X \times [0,+\infty[\in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

D'où $\tilde{g}^{-1}([0,+\infty[) \cap (X \times [0,+\infty[) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

$G_f = g^{-1}([0,+\infty[) \cap (X \times [0,+\infty[) \cup (f^{-1}(\{+\infty\}) \times \{+\infty\})$

Donc $G_f \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

2/ Montrons que $(\mu \otimes \lambda)(G_f) = \int_X f \, d\mu$

f est $\mathcal{A}$-mesurable positive, donc $\int_X f \, d\mu$ existe

$G_f \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc $(\mu \otimes \lambda)(G_f) \in \overline{\mathbb{R}}_+$

1ère étape : $f = \chi_A$ avec $A \in \mathcal{A}$

Alors $\int_X f \, d\mu = \int_X \chi_A \, d\mu = \mu(A)$ (X)

$$G_f = \{(x,y) \in X \times [0,+\infty] \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$$= \{(x,y) \in A \times [0,+\infty] \mid 0 \leq y \leq f(x)\} \cup \{(x,y) \in (X \setminus A) \times [0,+\infty] \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$$= \{(x,y) \in A \times [0,+\infty] \mid 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,y) \in (X \setminus A) \times [0,+\infty] \mid 0 \leq y \leq 0\}$$

$$G_f = (A \times [0,1]) \cup ((X \setminus A) \times \{0\})$$ réunion disjointe

Donc $(\mu \otimes \lambda)(G_f) = (\mu \otimes \lambda)(A \times [0,1]) + (\mu \otimes \lambda)[(X \setminus A) \times \{0\}]$

$= \mu(A) \lambda([0,1]) + \mu(X \setminus A) \lambda(\{0\})$

$= \mu(A)$

Scanné avec CamScanner

Fin avec (X), on obtient que $(\mu\otimes\lambda)(G_f) = \int_X f\,d\mu$

2e (cas) : f est une fonction $\mathcal{A}$-étagée

$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ représentation standard

Alors $\int_X f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$ $\quad X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A$ où $A = f^{-1}(\{0\})$

Partition

$$G_f = \left\{(x,y) \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A\right) \times [0,+\infty] \mid 0 \le y \le f(x)\right\}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} \left\{(x,y) \in A_i \times [0,+\infty] \mid 0 \le y \le f(x)\right\} \cup \left\{(x,y) \in A \times [0,+\infty] \mid 0 \le y \le f(x)\right\}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} \left\{(x,y) \in A_i \times [0,+\infty] / 0 \le y \le a_i\right\} \cup \left\{(x,y) \in A \times [0,+\infty] \mid 0 \le y \le f(x)\right\}$$

$$G_f = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times [0,a_i]) \cup (A \times \{0\})$$ réunion disjointe d'éléments de $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Donc $(\mu\otimes\lambda)(G_f) = \sum_{i=1}^{n} (\mu\otimes\lambda)(A_i \times [0,a_i]) + (\mu\otimes\lambda)(A\times\{0\})$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\lambda([0,a_i]) + \mu(A)\lambda(\{0\})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) \qquad 0 \le y < f(x)$$

Ainsi $(\mu\otimes\lambda)(G_f) = \int_X f\,d\mu$

3e (cas) : Cas général

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonction $\mathcal{A}$-étagée $\mathcal{A}$-positive qui converge simplement vers f.

$$G_f = \left\{(x,y) \in X \times [0,+\infty] \mid 0 \le y \le \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right\}$$

$\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) \le f(x)$, donc si $(x,y) \in G_{f_n}$ alors $(x,y) \in G_f$

Scanned with CamScanner

Donc $G_{f_n} \subset G_{f_{n+1}} \subset G_f$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Par conséquent $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_{f_n} \subset G_f$

Posons $G_0 = \{(x,y) \in X \times [0,+\infty] \mid 0 \leq y = f(x)\}$

et $G_1 = \{(x,y) \in X \times [0,+\infty] / 0 \leq y < f(x)\}$

Alors $G_0 \cup G_1 = G_f$

en effet : soit $(x,y) \in G_1$

Alors $0 \leq y < f(x)$, donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq

$f_{n_0}(x) \geqslant y$; d'où $(x,y) \in G_{f_{n_0}} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_{f_n}$ □

Posons $G(k) = \{(x,y) \in X \times [0,+\infty[\mid f(x) \in [y-\frac{1}{k}, y+\frac{1}{k}] \ \forall k \in \mathbb{N}^*\}$

$$\mu\otimes\lambda(G(k)) = \int_{G(k)} 1 \, d(\mu\otimes\lambda)$$

$$= \int \left(\int_{y\in[f(x)-\frac{1}{k},\, f(x)+\frac{1}{k}]} 1 \, d\lambda(y) \right) d\mu(x)$$

$\Uparrow$ $f(x) \in [y-\frac{1}{k}, y+\frac{1}{k}]$

$$= \int_X \frac{2}{k} \, d\mu(x)$$

$$= \frac{2}{k}\mu(X)$$

$$\lim_{k\to+\infty} (\mu\otimes\lambda)(G(k)) = \lim_{k\to+\infty} \frac{2}{k}\mu(X) = 0$$

$G(k) \searrow G_0$ donc $(\mu\otimes\lambda)(G_0) = \lim_{k\to+\infty} (\mu\otimes\lambda)(G(k)) =$

Par conséquent $(\mu\otimes\lambda)(G_f) = (\mu\otimes\lambda)(G_1)$

$$\leq (\mu\otimes\lambda)\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_{f_n}\right)$$

Donc $\mu\otimes\lambda(G_f) = \mu\otimes\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_{f_n}\right)$

Comme (G_{f_n}) est croissante

$\mu\otimes\lambda(\bigcup G_{f_n}) = \lim \mu\otimes\lambda(G_{f_n})$

Scanné avec CamScanner

$$= \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu \quad \text{D'après le 2e cas}$$

$$= \int_X f \, d\mu \quad \text{D'après le T.C.M}$$

D'où $\mu \otimes \lambda (G_f) = \int_X f \, d\mu$

Ainsi dans tous les cas : $(\mu \otimes \lambda)(G_f) = \int_X f \, d\mu$

Scanné avec CamScanner

Corrigé de l'exercice 5

$f_n(x) = \frac{1}{n} x^2 \chi_{[-n^3,-n]}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$

$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda) = \{ g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ tq g - $B(\mathbb{R})$ mesurable et $\|g\|_p < +\infty \}$

où $\|g\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^p \, d\lambda \right)^{1/p} & \text{si } p \in [1, +\infty[\\ \inf \{ M \in \overline{\mathbb{R}}_+ \mid \lambda(\{x \in \mathbb{R} / |g(x)| \geq M\}) = 0 \} & \text{si } p = +\infty \end{cases}$

1er cas : $p \in [1, +\infty[$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)|^p = f_n^p(x) = \frac{1}{n^p} x^{2p} \chi_{[-n^3,-n]}(x)$

$x \mapsto \frac{1}{n^p} x^{2p}$ est continue sur $[-n^3, -n]$ donc $|f_n|^p$ est λ-intégrable. D'où $f_n \in \mathcal{L}^p$.

Rappel : supposons qu'il existe $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ tq $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$. Alors d'après le théorème de Riesz, il existe $(f_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ une sous suite de $(f_n)_{n \geq 0}$ qui converge λ-p.p vers f.

D'après 2) $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers 0.

Donc $(f_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers 0.

D'où $f = 0$ λ-p.p. (Attention vraie pour $p \in [1, +\infty[$)

$\|f_n - 0\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \, d\lambda$

comme $x \mapsto \frac{1}{n^p} x^{2p}$ est continue sur $[-n^3, -n]$ on a d'après le cours que :

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \, d\lambda = \int_{-n^3}^{-n} \frac{1}{n^p} x^{2p} \, dx = \frac{1}{n^p} \left[\frac{1}{2p+1} x^{2p+1} \right]_{-n^3}^{-n}$$

$$= \frac{1}{n^p} \times \frac{1}{2^{p+1}} \left[(-n)^{2p+1} - (-n^3)^{2p+1} \right]$$

$$= \frac{1}{n^p} \times \frac{1}{2^{p+1}} \left[n^{3(2p+1)} - n^{2p+1} \right]$$

$$= \frac{1}{2^{p+1}} \left[n^{5p+3} - n^{p+1} \right]$$

Scanné avec CamScanner

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p d\lambda = \frac{n^{5p+3}}{2p+1}\left(1 - n^{-4p+2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 dans $\mathcal{L}^p$

Par conséquent $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite dans $\mathcal{L}^p$.

2ème cas : $p = +\infty$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq $n \geq 2$

$$\|f_n\|_\infty = \inf\left\{ M \in \overline{\mathbb{R}}_+^* \mid \lambda(\{x \in \mathbb{R} \text{ tq } |f_n(x)| \geq M\}) = 0 \right\}$$

Soit $M \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$

$$|f_n(x)| \geq M \Leftrightarrow \frac{1}{n} x^2 \chi_{[-n^3, n]}(x) \geq M$$
$$\Leftrightarrow x \in [-n^3, -n] \text{ et } \frac{1}{n}x^2 \geq M$$
$$\Leftrightarrow x \in [-n^3, -n] \text{ et } x^2 \geq nM$$
$$\Leftrightarrow x \in [-n^3, -n] \text{ et } |x| \geq \sqrt{nM}$$
$$\Leftrightarrow x \in [-n^3, -n] \text{ et } x \in]-\infty, -\sqrt{nM}] \cup [\sqrt{nM}, +\infty[$$
$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{nM}] \cap [-n^3, -n]$$

on a : $n \geq \sqrt{nM} = \sqrt{n} \times \sqrt{M} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \sqrt{M} \Leftrightarrow n \geq M$

Supposons que $n \geq M$

$|f_n(x)| \geq M \Leftrightarrow x \in [-n^3, -n]$

Donc $\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| \geq M\} = [-n^3, -n]$

Donc $\lambda(\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| \geq M\}) = \lambda([-n^3, -n]) = n^3 - n \neq 0$

D'où $\lambda(\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| \geq M\}) = 0\} \subseteq]n, +\infty]$

Donc $\{M \in \overline{\mathbb{R}}_+^* \mid \lambda(\{x \in \mathbb{R} / |f_n(x)| \geq M\}) = 0\} \subseteq]n, +\infty]$

D'où $\|f_n\|_\infty \geq n$. Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = +\infty \neq 0$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite dans $\mathcal{L}^\infty$.

4) convergence en λ-mesure de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en λ-mesure vers f $\Leftrightarrow$

$\forall a \in \mathbb{R}^*$: $\lim_{n\to+\infty} \lambda(\{x \in \mathbb{R} / |f_n(x) - f(x)| \geq a\}) = 0$

Scanné avec CamScanner

Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable
tel que $(f_n)_{n>0}$ converge en λ-mesure vers f.
Alors d'après le théorème de Riez, il existe une sous-suite
$(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge en ~~mesure~~ λ-P.P.
vers f.
D'après 2), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers 0.
Donc $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0.
Par conséquent $f = 0$ λ-P.P.
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$
D'après les calculs de 3), on a pour $n \geq a$
$\lambda(\{x\in\mathbb{R} / |f_n(x)| \geq a\}) = n^3 - n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \neq 0$
conclusion ! $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en λ-mesure
vers 0.
Par conséquent $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite
en λ-mesure.

Scanné avec CamScanner

Correction TD Théorie des groupe 2018-2019.

Exercice 1

Montrons que $H \cup K$ est sous groupe de $(G, *)$ ssi $H \subset K$ ou $K \subset H$

($\Leftarrow$) Supposons $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$ et montrons que $H \cup K < G$

On a: $H \subseteq K \Rightarrow H \cup K = K < G$

$K \subseteq H \Rightarrow H \cup K = H < G$

En somme $(H \subseteq K$ ou $K \subseteq H) \Rightarrow H \cup K < G$.

($\Rightarrow$) Par contraposition il s'agit de montrer que $H \not\subseteq K$ et $K \not\subseteq H \Rightarrow H \cup K$ n'est pas un sous groupe de G.

Supposons $H \not\subseteq K$ et $K \not\subseteq H$

On a: $H \not\subseteq K \Rightarrow \exists x \in H \mid x \notin K$

$K \not\subseteq H \Rightarrow \exists y \in K \mid y \notin H$

$x \in H \Rightarrow x \in H \cup K$, $y \in K \Rightarrow y \in H \cup K$

$x \notin K \Rightarrow x.K \cap K = \phi$

$y \in K \Rightarrow x.y \in x.K \Rightarrow x.y \notin K$ (1)

$y \notin H \Rightarrow H.y \cap H = \phi$

$x \in H \Rightarrow x.y \in Hy \Rightarrow x.y \notin H$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow x.y \notin H \cup K$

Donc $H \cup K$ n'est pas stable par $\cdot$

Scanné avec CamScanner

Par conséquent $H \cup K$ n'est pas un sous-groupe de G.

Conclusion : $H \cup K < G \iff H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$

Exercice 2

Soit $(G, *)$ un groupe et H une partie finie non vide de G.

Montrons que $H < G$ ssi H stable par $*$.

($\Rightarrow$) Supposons $H < G$

Alors par définition d'un sous-groupe, H est stable par $*$.

($\Leftarrow$) Supposons H stable et Montrons que H est un sous groupe de G.

A-t-on $e \in H$? (e le neutre)

On a : H stable $\iff \forall x, y \in H$, $x * y \in H$

Soit $x \in H$ (H non vide) alors $\forall h \in H$

$x * h \in H$

Posons $f : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H \\ h & \longmapsto & x * h \end{array}$

f est-elle injective ?

Soit $h, \ell \in H$. On a : $f(h) = f(\ell) \Rightarrow x * h = x * \ell$

$\Rightarrow h = \ell$

Donc f est injective. Comme H est fini alors f est bijective. En particulier f est surjective, alors :

Scanné avec CamScanner

$k \in H \mid f(k) = x$

$f(k) = k \Rightarrow x * k = x$

Soit $x * e = x$ avec $k = e$

Comme $k \in H$ alors $e \in H$

Soit $x \in H$

A-t-on $x^{-1} \in H$?

Considérons la même application f qui est surjective. Comme $e \in H$ $\exists h \in H$ /

$f(h) = e \Rightarrow x * h = e$

$\Rightarrow h = x^{-1}$

Comme $h \in H$ alors $x^{-1} \in H$.

Conclusion : H est un sous groupe de $(G, *)$ ssi H est stable par $*$.

Exercice 3.

Soit $(G, *)$ un groupe tel qu'on ait la propriété (P) : $\forall x \in G, x^2 = e_G$

(a) Montrons que G est alors abelien.

On a : $(P) \Leftrightarrow \forall x \in G, x * x = e_G \Rightarrow x = x^{-1}$

G étant un groupe on a :

Soit $x, y \in G$ / $y * x \in G$

D'après (P) on a : $x = x^{-1}$, $y = y^{-1}$ et $(y * x) = (y * x)^{-1}$

Scanné avec CamScanner

Il s'ensuit donc que :

$$x * y = x^{-1} * y^{-1} = (y * x)^{-1} = y * x$$

D'où G est abelien.

(b) Montrons que si G est fini alors l'ordre de G est une puissance de 2.

Soit $n = O(G)$

Il s'agit donc de montrer que 2 est le seul diviseur premier de n.

D'après (P) $\forall x \in G, x^2 = e_G$ alors $\forall x \in G$ avec $x \neq e_G$, $O(x) = 2$.

Soit q un diviseur premier de n; Alors d'après le lemme de cauchy il existe un element de G d'ordre q. Or tout élément de G est d'ordre 2. Alors $q = 2$

On vient de montrer que 2 est le seul diviseur premier de n alors n est une puissance de 2.

Exercice 4

Soient $(G, \cdot)$ un groupe et $Z(G)$ son centre.

(a) Montrons que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

Scanné avec CamScanner

On a : $Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G, x \cdot y = y \cdot x\}$

• A-t-on $e_G \in Z(G)$

$\forall y \in G$ on a $e_G \cdot y = y \cdot e_G$ donc $e_G \in Z(G)$

Soit $x, y \in Z(G)$

$\forall g \in G$ on a : $(x \cdot y) \cdot g = x \cdot (y \cdot g)$

$= x \cdot (g \cdot y)$

$= g \cdot (x \cdot y)$

Donc $x \cdot y \in Z(G)$.

• Soit $x \in Z(G)$ a-t-on $x^{-1} \in Z(G)$?

Soit $g \in G$ on a : $x^{-1} \cdot g = x^{-1} \cdot (g^{-1})^{-1}$

$= (g^{-1} \cdot x)^{-1}$

Comme x commute avec tout les éléments

Car dans $Z(G)$

Alors $x^{-1} \cdot g = (x \cdot g^{-1})^{-1} = g \cdot x^{-1}$

Donc $x^{-1} \in Z(G)$

En somme $Z(G) < G$.

• Soit $g \in G$ a-t-on $g \cdot Z(G) = Z(G) \cdot g$?

Soit $x \in Z(G)$ on a : $g \cdot x = x \cdot g$

donc $g \cdot Z(G) = Z(G) \cdot g$

Alors $Z(G)$ est distingué.

Scanné avec CamScanner

(b) Montrons que $\frac{G}{H}$ monogène $\Rightarrow G$ abelien

Ona: G/H monogène $\Rightarrow \exists a \in G / \frac{G}{H} = \langle aH \rangle$

$\langle aH \rangle = \{ a^k H \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

Soient $x, y \in G$, il s'agit de montrer que $x \cdot y = y \cdot x$

Ona: $x \in G \Rightarrow \bar{x} = xH \in G/H$ Donc

$\exists k \in \mathbb{Z} \mid xH = a^k H$

Alors $\exists h \in H / x = a^k h$

De même $y \in G \Rightarrow \bar{y} = yH \in G/H$

alors $\exists h' \in H \mid y = a^{k'} h'$

Ona: $x \cdot y = (a^k h)(a^{k'} h')$ (hypo de départ)

$= a^{k'} a^k h' h$

$= (a^{k'} h')(a^k h) = y \cdot x$

Donc G est abelien

Exercice 8

(1) Montrons que $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$ est cyclique

ssi $\text{pgcd}(n, m) = 1$

Scanné avec CamScanner

($\Rightarrow$) Supposons $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$ est cyclique et montrons que $pgcd(n,m) = 1$.

i-e $ppcm(n,m) = nm$.

Posons $p = ppcm(n,m)$. $\Rightarrow p$ divise nm (1)

Il suffit de montrer que nm divise p.

$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$ etant cyclique alors il possède un element $(\bar{a}, \dot{b})$ d'ordre nm. On a.

$p*(\bar{a}, \dot{b}) = (p\bar{a}, p\dot{b}) = (\bar{0}, \dot{0})$ car

$p\bar{a} = \bar{0}$ car p est un multiple de n et $n\bar{a} = \bar{0}$; même raisonnement pour $p\dot{b} = \dot{0}$

Donc l'ordre de $(\bar{a}, \dot{b})$ divise p.

Alors nm divise p (2)

(1) et (2) $\Rightarrow nm = p$ donc $pgcd(n,m) = 1$

($\Leftarrow$) Supposons que $pgcd(n,m) = 1$ et montrons que $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$ est cyclique.

Il s'agit de montrer que $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$ possède un element d'ordre nm en occurence $(\bar{1}, \dot{1})$

Soit q l'ordre de $(\bar{1}, \dot{1})$ Montrons que $q = nm$

On sait que l'ordre d'un element divise l'ordre du groupe. donc q divise nm (1)

d'autre part on a $q(\bar{1}, \dot{1}) = (\bar{0}, \dot{0})$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow (q\cdot\bar{1}, q\cdot\dot{1}) = (\bar{0}, \dot{0})$

$\Rightarrow q\cdot\bar{1} = \bar{0}$ et $q\cdot\dot{1} = \dot{0}$

$q\cdot\bar{1} = \bar{0} \Rightarrow$ ordre de $\bar{1}$ divise q

$\dot{1} \simeq n$ divise q.

$q\cdot\dot{1} = \dot{0} \Rightarrow$ ordre de $\dot{1}$ divise q

$\dot{1} \simeq m$ divise q.

$\left.\begin{array}{l} n \text{ divise } q \\ m \text{ divise } q \end{array}\right\} \Rightarrow ppcm(n,m)$ divise q

Comme $pgcd(n,m) = 1$ alors $ppcm(n,m) = nm$

alors nm divise q (2)

(1) et (2) $\Rightarrow q = nm$.

Donc l'ordre de $(\bar{1}, \dot{1})$ est égal à nm.

D'où $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$ est cyclique.

Conclusion $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{nm\mathbb{Z}}$ est cyclique ssi

$pgcd(n,m) = 1$

(2) Comme $pgcd(2,2) = 2 \neq 1$ Alors d'après précédent $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ n'est pas cyclique. En revanche $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ est cyclique

Alors $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ n'est donc pas isomorphe à $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$

Scanné avec CamScanner

Exercice 13

Soient G un groupe d'ordre 33.

(1) Montrons que $V_3 = 1$

On sait que V_p = nombre de p sous-groupes de Sylow.

On a : $\begin{cases} V_p \equiv 1[p] \\ V_p \mid 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_p = pq+1 \text{ avec } q \in \mathbb{Z} \\ 33 = \ell V_p \text{ , } \ell \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Pour $p=3$ on a : $\begin{cases} 33 = \ell V_3 \\ V_3 = 3q+1 \end{cases}$

$\Rightarrow V_3 \mid 33$ et $V_3 \wedge 3 = 1$ Donc $V_3 \mid 11$

$\Rightarrow V_3 = 1$ ou $V_3 = 11$

Comme $11 \not\equiv 1[3]$ on déduit $V_3 = 1$

De plus comme $33 = 3 \times 11$ alors les 3-sylow sont d'ordre 3

$V_3 = 1$ signifie qu'il y a un seul sous-groupe d'ordre 3.

(2) Montrons que $V_{11} = 1$

On a : $\begin{cases} 33 = \ell V_{11} \\ V_{11} = 11q+1 \end{cases}$

On a : $V_{11} \mid 33$ et $V_{11} \wedge 11 = 1$

$\Rightarrow V_{11} \mid 3$ car $33 = 3 \times 11$

$V_{11} = 1$ car $3 \not\equiv 1[11]$.

Scanné avec CamScanner

On a : $33 = 3 \times 11$ alors 11-sylow sont 11
$V_{11} = 1$ signifie qu'il y a un seul sous-groupe d'ordre 11 dans G.

(3)

* Montrons que G est abelien.

Soit H l'unique 3-sylow et K l'unique 11-sylow de G.

$\begin{cases} V_3 = 1 \\ V_{11} = 1 \end{cases} \Rightarrow H \lhd G$ et $K \lhd G$

On a : $H \cap K = \langle e \rangle$ Car $\text{pgcd}(o(H), o(K)) = \text{pgcd}(3, 11) = 1$

$H.K \simeq H \times K$

$\text{Card}(HK) = 33 = o(G) \Rightarrow HK = G$

Alors $G \simeq H \times K$ ($\simeq$ signifie isomorphe)

$o(H) = 3$ premier et $o(K) = 11$ premier

Donc H et K sont cycliques alors abeliens

D'où $H \times K$ est donc abelien

Or $H \times K \simeq G$ D'où G est abelien car $H \times K$ et G ont les mêmes propriétés.

* Montrons que G est cyclique

On a : H cyclique d'ordre 3 alors $H \simeq \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$

K cyclique d'ordre 3 alors $K \simeq \frac{\mathbb{Z}}{11\mathbb{Z}}$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow H \times K \simeq \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{11\mathbb{Z}} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{33\mathbb{Z}}$

Alors $H \times K$ est cyclique.

Or $H \times K \simeq G$, donc G est cyclique.

Corrections de TD Anneaux.

Exercice 1

(a) Trivial

(b) Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'idéaux de $\mathbb{Z}$. Alors d'après (a) $\exists (\ell_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tel que

$I_n = \ell_n \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Soit $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

I est bien un idéal de $\mathbb{Z}$ en effet :

$0 \in I$ car $0 \in I_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $x, y \in I$ et $a \in \mathbb{Z}$ alors $\exists i \leq j \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in I_i$ et $y \in I_j$. Comme $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante on a : $I_i \subset I_j$ par suite $x, y \in I_j$ et comme I_j est un idéal de $\mathbb{Z}$, $x+y \in I_j$ et $ax \in I_j$

$\Rightarrow x+y \in I$ et $ax \in I$ d'où I est un idéal de $\mathbb{Z}$. Alors d'après (a) $\exists p \in \mathbb{Z} \mid I = p\mathbb{Z}$

Scanné avec CamScanner

$p \in I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}^* \mid p \in I_n$

Comme I_n est un idéal alors $p\mathbb{Z} \subset I_n$

c-à-d $I \subset I_n$ (1)

$I = \cup I_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ I_n \subset I$

Alors $\forall n \geq m$ on a : $I \subset I_m \subset I_n \subset I \Rightarrow I_m = I$

Donc la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

Exercice 3

(1) Montrons que les idéaux de $A \times B$ sont de la forme $I \times J$.

Soit K un idéal de $A \times B$.

Soit $I = \{a \in A, \exists b \in B \mid (a,b) \in K\}$

et $J = \{b \in B, \exists b \in A \mid (a,b) \in K\}$

Ainsi $\forall a \in A, b \in B\ (a,b) \in K$.

$\Leftrightarrow a \in I \Leftrightarrow b \in J$

• Montrons que I est un idéal de A.

On a : $(0_A, 0_B) \in K \Rightarrow 0_A \in I$ (1)

Soit $x, y \in I$ et $a \in A$

Alors $\exists (b,c) \in B^2 \mid (x,b) \in K, (y,c) \in K$. Comme K est un idéal.

$(x,b) + (y,c) = (x+y, b+c) \in K$

$\Rightarrow x+y \in I$ (2)

de même $a(x,b) = (ax, ab) \in K \Rightarrow ax \in I$ (3)

Scanné avec CamScanner

(1), (2) et (3) $\Rightarrow$ I est un idéal de A

On montre de même que J est un idéal de B

* Montrons que $K = I \times J$

$\forall a \in I, b \in J, (a,b) \in K$.

Alors $I \times J \subset K$ (*)

Réciproquement, soit $(x,y) \in K$.

On a $x \in I$ et $y \in J$ et donc $K \subset I \times J$ (**)

De (*) et (**) On en déduit que $K = I \times J$.

2) Déterminons les idéaux maximaux de $A \times B$.

Les idéaux maximaux de $A \times B$ sont de la forme $A \times J$ et $I \times B$ où I est un idéal maximal de A et J est un idéal maximal de B. En effet, d'après la forme des idéaux de $A \times B$, $A \times B$ est le seul idéal contenant strictement $A \times J$ et $I \times B$.

3) Montrons que $U(A \times B) = U(A) \times U(B)$

$\forall (a,b) \in A \times B$, $(a,b) \in U(A \times B) \Leftrightarrow \exists (x,y) \in A \times B$ tel que $(a,b)(x,y) = (1_A, 1_B)$

$\Leftrightarrow \exists (x,y) \in A \times B$ tel que $(ax, by) = (1_A, 1_B)$

$\Leftrightarrow ax = 1_A$ et $by = 1_B$

$\Leftrightarrow a \in U(A)$ et $b \in U(B)$

Scanné avec CamScanner

$\forall (a,b) \in A \times B,\ (a,b) \in U(A \times B) \Leftrightarrow (a,b) \in U(A) \times U(B)$

Donc $U(A \times B) = U(A) \times U(B)$

Exercice 4

1- Montrons que p est premier $\Leftrightarrow \frac{A}{p}$ est intègre.

($\Rightarrow$) Supposons p premier et montrons que l'anneau $\frac{A}{p}$ est intègre.

Soient $\alpha, \beta \in \frac{A}{p}$ tels que $\alpha\beta = \bar{0}$.

Alors il existe $a, b \in A$ tels que $\alpha = \bar{a}$ et $\beta = \bar{b}$.

$\alpha\beta = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a}\bar{b} = \overline{ab} = 0$

$\Leftrightarrow ab \in p$

$\Leftrightarrow a \in p$ ou $b \in p$ car p est premier

$\Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$ ou $\bar{b} = \bar{0}$

$\alpha\beta = \bar{0} \Leftrightarrow \alpha = \bar{0}$ ou $\beta = \bar{0}$.

Donc $\frac{A}{p}$ est un anneau intègre.

($\Leftarrow$) On montre de la même manière dans le sens contraire.

Scanné avec CamScanner

10.08.2020

2) Montrons que p est maximal $\Leftrightarrow$ $\frac{A}{P}$ est un Corps.

($\Rightarrow$) Supposons p maximal et montrons $\frac{A}{P}$ est un Corps.

Soit $\bar{x} \in \frac{A}{P}$, avec $x \in A$ et $\bar{x} \neq \bar{0}$

Montrons que ~~l'inverse de~~ $\bar{x}$ est inversible dans $\frac{A}{P}$.

Comme $\bar{x} \neq 0$, alors $x \notin P$, d'où $P \subsetneq P + xA$

De plus, P étant maximal, alors $P + xA = A$ et

donc, il existe $p \in P$ et $y \in A$ tels que $p + xy = 1_A$.

Par conséquent, $\overline{p + xy} = \bar{1}_A$ soit $\bar{x}\bar{y} = 1_A$.

Alors $\bar{x}$ est inversible, par suite $\frac{A}{P}$ est un Corps

($\Leftarrow$) Supposons que $\frac{A}{P}$ est un Corps et montrons que

P est un idéal maximal.

Soit I un idéal de A tel que $P \subsetneq I$.

Alors $\frac{I}{P}$ est un idéal de $\frac{A}{P}$. En effet, si J est un idéal de A, les idéaux de $\frac{A}{J}$ sont les ensembles de la forme $\frac{K}{J}$ où K est un idéal de A contenant J.

Ainsi, $P \subsetneq I$ entraine que $\frac{I}{P} \neq \{\bar{0}\}$.

Comme $\frac{A}{P}$ est un Corps, les seuls idéaux de $\frac{A}{P}$ sont

Scanné avec CamScanner

$\frac{A}{P}$ est $\{\bar{0}\}$. Alors $\frac{I}{P} = \frac{A}{P}$ et donc $I = A$.

Par conséquent, P est maximal

Scanné avec CamScanner

1 Fiche 1 Divisibilité, division euclidienne

Exercice 1: Combien 19! admet-il de diviseurs ?

Exercice 2 Trouver le reste de la division par 19 du nombre 100^{1000}.

Exercice 3 Sachant que l'on a $94268 = 354 \times 265 + 458$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 94268 par chacun des nombres 265 et 354.

Exercice 4 Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Exercice 5 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par } 24,$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \text{ est divisible par } 120.$$

Exercice 6 Montrer que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Exercice 7

1. Pour tout couple de nombres réels (x, y) montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a la relation
$$(*)\ x^n - y^n = (x-y).\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$
2. Soit (a, b, p) des entiers éléments de $\mathbb{N}$. Montrer que s'il existe un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que $b = a + pl$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $b^n = a^n + pm$.
3. Soient a, b, p des entiers éléments de $\mathbb{N}$, en utilisant la question 2, montrer que si $a - b$ est divisible par p,
$$\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k-1}$$
est aussi divisible par p. En déduire, à l'aide de la question 2 et de la formule $(*)$, que si $a - b$ est divisible par p^n i.e. il existe un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que $a - b = l.p^n$, alors $a^p - b^p$ est divisible par p^{n+1}.

Exercice 8

1. Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.
2. Montrer de même que tout nombre pair vérifie $x^2 = 0[8]$ ou $x^2 = 4[8]$.

Scanné avec CamScanner

3. Soient a, b, c trois entiers impairs. Déterminer le reste modulo 8 de $a^2+b^2+c^2$ et celui de $2(ab+bc+ca)$.

4. En déduire que ces deux nombres ne sont pas des carrés puis que $ab+bc+ca$ non plus.

Indications

Exercice 1 Il ne faut surtout pas chercher à calculer $19! = 1\times2\times3\times4\times\cdots\times16\times17\times18\times19$, mais profiter du fait qu'il est déjà "presque" factorisé.

Exercice 2 Il faut travailler modulo 19, tout d'abord réduire 100 modulo 19. Se souvenir que si $a \equiv b[n]$ alors $a^k \equiv b^k[n]$. Enfin calculer ce que cela donne pour les exposants $k = 1, 2, 3, \cdots$ en essayant de trouver une règle générale.

Exercice 3 Le reste d'une division euclidienne est plus petit que le quotient !

Exercice 4 Utiliser les modulos (ici modulo 8), un entier est divisible par 8 si et seulement si il est équivalent à 0 modulo 8. Ici vous pouvez commencer par calculer $7^n[8]$.

Exercice 5 Constater que pour 4 nombres consécutifs il y a nécessairement des diviseurs de2, ... (tous distincts).

Exercice 6 Ecrire $n = p^2 + q^2$ et étudier les différents cas de parité de p et q.

Exercice 7

1. On pourra écrire de deux manières différentes la quantité $y(x^n - y^n) + (x - y)x^n$.
2. Utiliser la formule $(*)$.
3. Utiliser la question 2 et la formule $(*)$

Exercice 8

1. Écrire $n = 2p + 1$.
2. Écrire $n = 2p$ et discuter selon que p est pair ou impair.
3. Utiliser la première question.
4. Par l'absurde supposer que cela s'écrive comme un carré, par exemple $a^2 + b^2 + c^2 = n^2$ puis discuter selon que n est pair ou non.

Scanné avec CamScanner

Exercice 1: Combien 19! admet-il de diviseurs ?

Indication

Il ne faut surtout pas chercher à calculer $19! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 16 \times 17 \times 18 \times 19$, mais profiter du fait qu'il est déjà "presque" factorisé.

Correction Écrivons la décomposition de $19! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots 19$ en facteurs premiers. $19! = 2^{16} \times 3^8 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$.

Un diviseur de 19! s'écrit $d = 2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma \times 7^\delta \times 11^\epsilon \times 13^\eta \times 17^\mu \times 19^\theta$ avec $0 \leq \alpha \leq 16$, $0 \leq \beta \leq 8$, $0 \leq \gamma \leq 3$, $0 \leq \delta \leq 2$, $0 \leq \epsilon \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \mu \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 1$. De plus tout nombre d de cette forme est un diviseur de 19!. Le nombre de diviseurs est donc $(16+1)(8+1)(3+1)(2+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 29\,376$.

Exercice 2 Trouver le reste de la division par 19 du nombre 100^{1000}.

Indication Il faut travailler modulo 19, tout d'abord réduire 100 modulo 19. Se souvenir que si $a \equiv b[19]$ alors $a^k \equiv b^k[17]$. Enfin calculer ce que cela donne pour les exposants $k = 1, 2, 3, \ldots$ en essayant de trouver une règle générale.

$100^{1000} \bmod 19 = 5$

Correction Il sagit de calculer 100^{1000} modulo 19. Tout d'abord $100 \equiv 5 \bmod 19$ on écrit $100 \equiv 5[19]$ donc $100^{1000} \equiv 5^{1000}[19]$.

Or $5^2 \equiv 6[19]$, $5^4 \equiv 6^2[19] \equiv -2[19]$; $5^8 \equiv 4[19]$ et $5^9 \equiv 1[19]$

$5^{9n} \equiv 1[19]$

$1000 = 900 + 90 + 9 + 1$

$5^{1000} \equiv 5^{900} \times 5^{90} \times 5^9 \times 5[19]$

$5^{1000} \equiv 1 \times 1 \times 1 \times 5[19]$

$100^{1000} \equiv 5[19]$

$4^5 \bmod 19 = 17$. Donc $5^{1000} \equiv 5^{4\times 250} \equiv (-2)^{250} \equiv 1[17]$.

$100^{1000} \bmod 17 = 1$.

Exercice 3 Sachant que l'on a $94268 = 354 \times 265 + 458$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 94268 par chacun des nombres 265 et 354.

Indication Attention le reste d'une division euclidienne est plus petit que le quotient !

Correction La seule chose à voir est que pour une division euclidienne le reste doit être plus petit que le quotient. Donc les divisions euclidiennes s'écrivent : $94268 = 265 \times 354 + 458 \equiv 265 + 193 \equiv 193\,[265]$ on a $\boxed{193}$ et

$94268 = 265 \times 354 + 458 \equiv 354 + 104 \equiv 104\,[354]$ on a $\boxed{104}$.

Exercice 4 Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Indication Utiliser les modulos (ici modulo 8), un entier est divisible par 8 si et seulement si il est équivalent à 0 modulo 8. Ici vous pouvez commencer par calculer $7^n[8]$.

Correction Raisonnons modulo 8 :

$$7 \equiv -1 \bmod 8.$$

Scanné avec CamScanner

Donc

$$7^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \bmod 8.$$

Le reste de la division euclidienne de $7^n + 1$ par 8 est donc $(-1)^n + 1$ donc si n est impair alors $7^n + 1$ est divisible par 8. Et si n est pair $7^n + 1$ n'est pas divisible par 8.

Exercice 5 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par } 24,$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \text{ est divisible par } 120.$$

Correction Il suffit de constater que pour 4 nombres consécutifs il y a nécessairement : un diviseur de 2, un diviseur de 3, un diviseur de 4 (tous distincts). Donc le produit de 4 nombres consécutifs est divisible par $2 \times 3 \times 4 = 24$.

Exercice 6 Montrer que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Correction

Ecrire $n = p^2 + q^2$ et étudier le reste de la division euclidienne de n par 4 en distinguant les différents cas de parité de p et q.

Exercice 7

Correction

Pour 2 Si p divise $b - a$ alors p divise aussi $b^n - a^n$ d'après la formule $(*)$.

Pour 3 On utilise le résultat de la question précédente avec $n = p - k - 1$ pour écrire b^{p-k-1} en fonction de a^{p-k-1} modulo p dans $\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k-1}$. On peut alors conclure.

$b^m = a^m + (b-a)\sum_{i=0}^{m-1} a^i b^{m-i-1}$

$\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k \left(a^{n-k-1} + (b-a)\sum_{i_k=0}^{n-k-2} a^{i_k} b^{n-k-1-i_k-1} \right) =$

$\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k-1} = \sum_{k=0}^{p-1} a^k \left(a^{p-k-1} + (b-a)\sum_{i_k=0}^{p-k-2} a^{i_k} b^{p-k-1-i_k-1} \right) =$

$= \sum_{k=0}^{p-1} a^k a^{p-k-1} + \sum_{k=0}^{p-1} a^k (b-a)\sum_{i_k=0}^{p-k-2} a^{i_k} b^{p-k-1-i_k-1} = pa^{p-1} + (b-a)\sum_{k=0}^{p-1} a^k \sum_{i_k=0}^{p-k-2} a^{i_k} b^{p-k-1-}$

multiple de p.

Exercice 8

Soit n un nombre impair, alors il s'écrit $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Maintenant $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 4p(p+1) + 1$. Donc $n^2 \equiv 1[8]$.

1. Si n est pair alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. Et $n^2 = 4p^2$. Si p est pair alors p^2 est pair et donc $n^2 = 4p^2$ est divisible par 8, donc $n^2 \equiv 0[8]$. Si p est impair alors p^2 est impair et donc $n^2 = 4p^2$ est divisible par 4 mais pas par 8, donc $n^2 \equiv 4[8]$.

2. Comme a est impair alors d'après la première question $a^2 \equiv 1[8]$, et de même $c^2 \equiv 1[8]$, $c^2 \equiv 1[8]$. Donc $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3[8]$. Pour l'autre reste, écrivons $a = 2p + 1$ et $b = 2q + 1$, $c = 2r + 1$, alors $2ab = 2(2p+1)(2q+1) = 8pq + 4(p+q) + 2$. Alors $2(ab + bc + ca) = 8pq + 8qr + 8pr + 8(p + q + r) + 6$, donc $2(ab + bc + ca) \equiv 6[8]$

Scanné avec CamScanner

3. Montrons par l'absurde que le nombre $a^2+b^2+c^2$ n'est pas le carré d'un nombre entier. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^2+b^2+c^2 = n^2$. Nous savons que $a^2+b^2+c^2 \equiv 3[8]$. Si n est impair alors $n^2 \equiv 1[8]$ et si n est pair alors $n^2 \equiv 0[8]$ ou $n^2 \equiv 4[8]$. Dans tous les cas n^2 n'est pas congru à 3 modulo 8. Donc il y a une contradiction. La conclusion est que l'hypothèse de départ est fausse donc $a^2+b^2+c^2$ n'est pas un carré. Le même type de raisonnement est valide pour $2(ab+bc+ca)$.

   Pour $ab+bc+ca$ il faut rafiner un peut l'argument. Si $ab+bc+ca = n^2$ alors selon la parité de n nous avons $2(ab+bc+ca) \equiv 2n^2 \equiv 2[8]$ ou à $0[8]$. Nous remarquons enfin que ab, bc, ca sont trois nombres impairs, et donc leur somme est impaire. Par conséquent n est impair (sinon n^2 serait pair), donc $ab+bc+ca \equiv n^2 \equiv 1[8]$. Ce qui aboutit à une contradiction. Nous avons montrer que $ab+bc+ca$ n'est pas un carré.

Scanné avec CamScanner

2 Fiche 2 pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide

Exercice 1 Calculer le pgcd des nombres suivants :

1. 1026, 612.
2. 360, 780, 150.
3. 540, 9090, 2250.

Exercice 2
Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.

Exercice 3 Calculer par l'algorithme d'Euclide : $18480 \wedge 9828$. En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

Exercice 4 Notons $a = 1\,111\,111\,111$ et $b = 123\,456\,789$.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
2. Calculer $p = \text{pgcd}(a, b)$.
3. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = p$.

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{Z}$:
a) $1665x + 1035y = 45$ b) $1665x + 3735y = 45$
c) $148x + 332y = 12$.

Scanné avec CamScanner

3 Fiche 2 pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide

Exercice 1 Calculer le pgcd des nombres suivants :

1. 1026, 612.
2. 360, 780, 150.
3. 540, 9090, 2250.

Indication: Il s'agit ici d'utiliser la décomposition des nombres en facteurs premiers.

Correction

1. $1026 = 2 \times 3^3 \times 19$ et $612 = 2^2 \times 3^2 \times 17$
   donc le pgcd de 1026 et 612 est $2 \times 3^2 = 18$.
   $\text{pgcd}(1026, 612) = 18$
2. $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, $780 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$ et $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ et donc le pgcd de ces trois nombres est $2 \times 3 \times 5 = 30$.
   $\text{gcd}(360, 780, 150) = 30$
3. $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$; $9090 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 101$ et $2250 = 2 \times 3^2 \times 5^3$

$\text{pgcd}(540, 9090, 2250) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$.

Exercice 2

Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.

Correction

Soient a, b deux entiers de pgcd 18 et de somme 360. Soit a', b' tel que $a = 18a'$ et $b = 18b'$. Alors a' et b' sont premiers entre eux, et leur somme est $360/18 = 20$.

Nous pouvons facilement énumérer tous les couples d'entiers naturels (a', b') $(a' \leq b')$ qui vérifient cette condition, ce sont les couples :

$$(1, 19), (3, 17), (7, 13), (9, 11), (11, 9), (13, 7), (17, 3), (19, 1).$$

Pour obtenir les couples (a, b) recherchés ($a \leq b$, puis $b \leq a$) il suffit de multiplier les couples précédents par 18 :

$$(18, 342), (54, 306), (126, 234), (162, 198),$$
$$(198, 162), (234, 126), (306, 54), (342, 18)$$

$(a \wedge b)(a \vee b) = ab$

Scanné avec CamScanner

$a \vee b = \dfrac{6480}{18} = 360$
$18 = 2 \times 3^2$; $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
$a = 2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2} \times 5^{\alpha_3}$ et $b = 2^{\beta_1} \times 3^{\beta_2} \times 5^{\beta_3}$
avec $(\alpha_1;\beta_1) = (1;3)$ ou $(3;1)$, $(\alpha_2;\beta_2) = (2;2)$
et $(\alpha_3;\beta_3) = (0;1)$ ou $(1;0)$,
$(a,b) \in \{(2\times 3^2; 2^3\times 3^2\times 5), (2\times 3^2\times 5; 2^3\times 3^2), (2^3\times 3^2\times 5; 2\times 3^2), (2^3\times 3^2; 2\times 3^2\times 5),\}$

Exercice 3 Calculer par l'algorithme d'Euclide : $18480 \wedge 9828$. En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

Correction

$18480 - 9828 = 8652$
$9828 - 8652 = 1176$
$8652 - 7 \times 1176 = 420$
$1176 - 2 \times 420 = 336$
$420 - 336 = 84$
$336 - 4 \times 84 = 0$

pgcd $(18480, 9828) = 84$;
$25 \times 18480 + (-47) \times 9828 = 84$.

Exercice 4 Notons $a = 1\,111\,111\,111$ et $b = 123\,456\,789$.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
2. Calculer $p = \text{pgcd}(a, b)$.
3. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = p$.

Correction

1. $a = 9b + 10$.
2. Calculons le pgcd par l'algorithme d'Euclide. $a = 9b + 10$, $b = 12345678 \times 10 + 9$, $10 = 1 \times 9 + 1$, $10 = 1 \times 9 + 1$. Donc le pgcd vaut 1;
3. Nous reprenons les équations précédentes en partant de la fin: $1 = 10 - 9$, puis nous remplaçons 9 grâce à la deuxième équation de l'algorithme d'Euclide: $1 = 10 - (b - 12345678 \times 10) = -b + 1234679 \times 10$. Maintenant nous remplaçons 10 grâce à la première équation: $1 = -b + 12345679(a - 9b) = 1234579a - 1111111125b$.

Exercice 5 Résoudre dans Z:
a) $1665x + 1035y = 45$ b) $1665x + 3735y = 45$
c) $148x + 332y = 12$.

Correction

$3735/45 = 83$

Scanné avec CamScanner

$83 \bullet 45 = 3735$

$1665\,(83u + 9) + 3735\,(-37u - 4) = 45$

$37\,(83u + 9) + 83\,(-37u - 4) = 1$

En divisant par 45 nous obtenons l'équation équivalente : $37x + 83y = 1$. Comme le pgcd de 37 et 83 est 1, donc d'après le théorème de Bézout cette équation a des solutions. Par exemple une solution particulière est $(x_0, y_0) = (9, -4)$. Les solutions sont exactement les couples $(x, y) = (x_0 - 83k, y_0 + 37k)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

Scanné avec CamScanner

4 Fiche 3 Nombres premiers, nombres premiers entre eux

Exercice 1 Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :

1. $(2^a - 1)|(2^{ab} - 1)$;
2. $(2^a - 1) \wedge (2^b - 1) = (2^{a \wedge b} - 1)$;
3. $(2^a - 1$ premier $) \Rightarrow (a$ premier $)$.Réciproque?

Exercice 2 Démontrer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers $a + b$ et ab.

Exercice 3 Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}, 0 < i < p$ on a :

$$C_p^i \text{ est divisible par } p.$$

2. Montrer par récurence que :

$$\forall p \text{ premier}, \forall a \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } a^p - a \text{ est divisible par } p.$$

Exercice 4

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geq 1$ on a :

$$2^{2^{n+k}} - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1).$$

2. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.
3. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 5 Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k + 1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$.
   Soit $a = 4p_1p_2 \ldots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k + 3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Exercice 6 Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^N + 1$ soit premier, montrer que $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2^k$. Que penser de la conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1$ est premier ?

Scanné avec CamScanner

5 Fiche 3 Nombres premiers, nombres premiers entre eux

Indications

Exercice 1 Pour 1 et 3 utiliser l'égalité

$$x^b - 1 = (x-1)\left(x^{b-1} + \cdots + x + 1\right).$$

Exercice 2 Raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Gauss.

Exercice 3 Écrire

$$C_p^i = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-(i+1))}{i!}$$

et utiliser le théorème de Gauss. Raisonner avec les modulos, c'est-à-dire prouver $a^p \equiv a[p]$.

Exercice 4

1. Il faut être très soigneux : n est fixé une fois pour toute, la récurrence se fait sur $k \in \mathbb{N}$.
2. Utiliser la question précédente avec $m = n + k$.
3. Par l'absurde, supposer qu'il y a seulement n nombres premiers, considérer $n+1$ nombres du type F_i. Appliquer le "principe du tiroir" : *si vous avez $n+1$ chaussettes rangées dans n tiroirs alors il existe (au moins) un tiroir contenant (plus de) deux chaussettes.*

Exercice 5 Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k+1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$.
   Soit $a = 4p_1p_2\ldots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

1. X est non vide donner un exemple .
4. Par l'absurde

Exercice 6 Raisonner par contraposition (ou par l'absurde) : supposer que n n'est pas de la forme 2^k, alors n admet un facteur irréductible $p > 2$. Utiliser aussi $x^p + 1 = (x+1)(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{p-1})$ avec x bien choisi.

Scanné avec CamScanner

6 Fiche 3 Nombres premiers, nombres premiers entre eux

Corrigés

Exercice 1 Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :

1. $(2^a-1) \mid (2^{ab}-1)$;
2. $(2^a-1) \wedge (2^b-1) = (2^{a\wedge b}-1)$;
3. (2^a-1 premier) $\Rightarrow$ (a premier). Réciproque?

Correction

Pour 1. $2^{ab}-1 = (2^a)^b - 1 = (2^a-1)\left((2^a)^{b-1} + \cdots + 2^a + 1\right)$

Pour 2. $(2^a-1) \wedge (2^b-1) = (2^{a\wedge b}-1)$?
- comme a est un multiple de $a \wedge b$, d'après 1, $2^{a\wedge b}-1$ divise 2^a-1; idem pour 2^b-1.
Donc $2^{a\wedge b}-1$ divise $(2^a-1) \wedge (2^b-1)$

- Si d divise 2^a-1 et 2^b-1 alors d divise $(2^a-1) \wedge (2^b-1)$
soit $\delta = a \wedge b \qquad \exists x, y \in \mathbb{Z}$
$\delta = ax + by$
$2^\delta = 2^{ax+by} = 2^{ax}2^{by} = (2^a)^x (2^b)^y = (dq+1)^x (dt+1)^y = 1 + ds$
d divise $2^\delta - 1$
donc $(2^a-1) \wedge (2^b-1)$ divise $2^\delta - 1$

Pour 3. Montrons plutôt la contraposée. Soit $p = ab$ un entier avec $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrons que 2^p-1 n'est pas premier.

Nous savons que

$$x^b - 1 = (x-1)(x^{b-1} + \cdots + x + 1),$$

pour $x = 2^a$ nous obtenons :

$$2^p - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a-1)\left(2^{a(b-1)} + \cdots + 2^a + 1\right).$$

De plus 2^a-1 n'est ni 1 ni 2^{ab} donc nous avons décomposé 2^p-1 en produit d'entiers différents de 1. Donc 2^p-1 n'est pas premier.

Par contraposition nous obtenons que si 2^p-1 est premier alors p est premier.

$2^7 - 1 = 127$ est premier; 7 est premier
Réciproque? fausse en général car
11 est premier $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ n'est pas premier

Exercice 2 Démontrer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers $a+b$ et ab.

Correction

Soit a et b des entiers premiers entre eux. Raisonnons par l'absurde et supposons que ab et

Scanné avec CamScanner

$a+b$ ne sont pas premiers entre eux. Il existe alors δ un nombre premier divisant ab et $a+b$. L'entier δ ne peut diviser a et b car a et b sont premiers entre eux. Par exemple supposons que δ ne divise pas b cela implique que δ et b sont premiers entre eux.

D'après le théorème de Gauss, comme δ divise ab et δ premier avec b alors δ divise a.

Maintenant δ divise a et divise $a+b$ alors δ divise $a+b-a=b$. δ est un facteur premier de a et de b ce qui est absurde.

Exercice 3 Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}, 0 < i < p$ on a :

$$C_p^i \text{ est divisible par } p.$$

2. Montrer par récurence que :

$$\forall p \text{ premier}, \forall a \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } a^p - a \text{ est divisible par } p.$$

Indication
Écrire

$$C_p^i = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-(i+1))}{i!}$$

et utiliser le théorème de Gauss.

Raisonner avec les modulos, c'est-à-dire prouver $a^p \equiv a[p]$.

Correction

1. Étant donné $0 < i < p$, nous avons

$$C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-(i+1))}{i!}$$

Comme C_p^i est un entier alors $i!$ divise $p(p-1)\dots(p-(i+1))$. Mais $i!$ et p sont premiers entre eux (en utilisant l'hypothèse $0 < i < p$). Donc d'après le théorème de Gauss: $i!$ divise $(p-1)\dots(p-(i+1))$, autrement dit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \times i! = (p-1)\dots(p-(i+1))$. Maintenant nous avons $C_p^i = pk$ donc p divise C_p^i.

2. Il s'agit de montrer le petit théorème de Fermat: pour p premier et $a \in \mathbb{N}^*$, alors $a^p \equiv a[p]$. Fixons p. Soit l'assertion

$$(\mathcal{H}_a) \quad a^p \equiv a[p].$$

Pour $a = 1$ cette assertion est vraie ! Étant donné $a \leq 1$ supposons que $\mathcal{H}_a$ soit vraie. Alors

$$(a+1)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i a^i.$$

Scanné avec CamScanner

Mais d'après la question précédente pour $0 < i < p$, p divise C_p^i. En termes de modulo nous obtenons:

$$(a+1)^p \equiv C_p^0 a^0 + C_p^p a^p \equiv 1 + a^p [p].$$

Par l'hypothèse de récurrence nous savons que $a^p \equiv a[p]$, donc

$$(a+1)^p \equiv a + 1[p].$$

Nous venons de prouver que $\mathcal{H}_{a+1}$ est vraie. Par le principe de récurrence alors quelque soit $a \in \mathbb{N}^*$ nous avons: $a^p \equiv a[p]$

$a^{p-1} - 1 \equiv 0[p]$.
$a^{p-1} \equiv 1[p]$

Exercice 4

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geq 1$ on a :

$$2^{2^{n+k}} - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1).$$

2. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.
3. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Correction

1. Fixons n et montrons la récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. La formule est vraie pour $k = 0$. Supposons la formule vraie au rang k. Alors

$$\begin{aligned}(2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=0}^{k} (2^{2^{n+i}} + 1) &= (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1) \times (2^{2^{n+k}} + 1) \\ &= (2^{2^{n+k}} - 1) \times (2^{2^{n+k}} + 1) = (2^{2^{n+k}})^2 - 1 = 2^{2^{n+k+1}} - 1.\end{aligned}$$

Nous avons utiliser l'hypothèse de récurrence dans ces égalités. Nous avons ainsi montrer la formule au rang $k+1$. Et donc par le principe de récurrence elle est vraie.

2. Écrivons $m = n + k$, alors l'égalité précédente devient:

$$F_m + 2 = (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=n}^{m-1} F_i.$$

Scanné avec CamScanner

Soit encore :

$$F_n \times (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=n+1}^{m-1} F_i \quad - \quad F_m = 2.$$

Si d est un diviseur de F_n et F_m alors d divise 2 (ou alors on peut utiliser le théorème de Bézout). En conséquent $d = 1$ ou $d = 2$. Mais F_n est impair donc $d = 1$. Nous avons montrer que tous diviseurs de F_n et F_m est 1, cela signifie que F_n et F_m sont premiers entre eux.

3. Supposons qu'il y a un nombre fini de nombres premiers. Nous les notons alors $\{p_1, \ldots, p_n\}$. Prenons alors $n+1$ nombres de la famille F_i, par exemple $\{F_1, \ldots, F_{n+1}\}$. Chaque F_i, $i = 1, \ldots, n+1$ est divisible par (au moins) un facteur premier p_j, $j = 1, \ldots, n$. Nous avons $n+1$ nombres F_i et seulement n facteurs premiers p_j. Donc par le principe des tiroirs il existe deux nombres distincts F_k et $F_{k'}$ (avec $1 \leq k, k' \leq n+1$) qui ont un facteur premier en commun. En conséquent F_k et $F_{k'}$ ne sont pas premiers entre eux. Ce qui contredit la question précédente. Il existe donc une infinité de nombres premiers.

Exercice 5

Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k+1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$.
   Soit $a = 4p_1p_2 \ldots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Correction

1. X est non vide car, par exemple pour $k = 2$, $4k+3 = 11$ est premier.
2. $(4k+1)(4\ell+1) = 16k\ell + 4(k+\ell) + 1 = 4(4k\ell + k + \ell) + 1$. Si l'on note l'entier $k' = 4k\ell + k + \ell$ alors $(4k+1)(4\ell+1) = 4k' + 1$, ce qui est bien de la forme voulue.
3. Remarquons que 2 est le seul nombre premier pair, les autres sont de la forme $4k+1$ ou $4k+3$. Ici a n'est pas divisible par 2, supposons –par l'absurde– que a n'a pas de diviseur de la forme $4k+3$, alors tous les diviseurs de a sont de la forme $4k+1$. C'est-à-dire que a s'écrit comme produit de nombre de la forme $4k+1$, et par la question précédente a peut s'écrire $a = 4k'+1$. Donc $a \equiv 1[4]$. Mais comme $a = 4p_1p_2 \ldots p_n - 1$, $a \equiv -1 \equiv 3[4]$. Nous obtenons une contradiction. Donc a admet une diviseur premier p de la forme $p = 4\ell + 3$.

Scanné avec CamScanner

4. Dans l'ensemble $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$ il y a tous les nombres premiers de la formes $4k+3$. Le nombre p est premier et s'écrit $p = 4\ell + 3$ donc p est un élément de X, donc il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $p = p_i$. Raisonnons modulo $p = p_i$: $a \equiv 0[p]$ car p divise a. D'autre part $a = 4p_1 \ldots p_N - 1$ donc $a \equiv -1[p]$. (car p_i divise $p_1 \ldots p_n$). Nous obtenons une contradiction donc X est infini: il existe une infinité de nombre premier de la forme $4k+3$. Petite remarque, tous les nombres de la forme $4k+3$ ne sont pas des nombres premiers, par exemple pour $k = 3$, $4k + 3 = 15$ n'est pas premier.

Exercice 6 Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^N + 1$ soit premier, montrer que $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2^k$. Que penser de la conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1$ est premier ?

Correction

1. Supposons que $a^n + 1$ est premier. Nous allons montrer la contraposée. Supposons que n n'est pas de la forme 2^k, c'est-à-dire que $n = p \times q$ avec p un nombre premier > 2 et $q \in \mathbb{N}$. Nous utilisons la formule

$$x^p + 1 = (x+1)(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{p-1})$$

avec $x = a^q$:

$$a^n + 1 = a^{pq} + 1 = (a^q)^p + 1 = (a^q + 1)(1 - a^q + (a^q)^2 \ldots + (a^q)^{p-1}).$$

Ces deux derniers facteurs sont > 1. Et donc $a^n + 1$ n'est pas premier. Par contraposition si $a^n + 1$ est premier alor $N = 2^k$.

2. Cette conjecture est fausse, mais pas facile à vérifier sans une bonne calculette ! En effet pour $n = 5$ nous obtenons :

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417.$$

pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide

Exercice Calculer le pgcd des nombres suivants :

1. 126, 230.
2. 390, 720, 450.

3. 180, 606, 750.

Correction
Il s'agit ici d'utiliser la décomposition des nombres en facteurs premiers.

1. $126 = 2.3^2.7$ et $230 = 2.5.23$ donc le pgcd de 126 et 230 est 2.
2. $390 = 2.3.5.13$, $720 = 2^4.3^2.5$, $450 = 2.3^2.5^2$ et donc le pgcd de ces trois nombres est $2.3.5 = 30$.
3. $\text{pgcd}(180, 606, 750) = 6$.

Exercice Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.

Correction
Soient a, b deux entiers de pgcd 18 et de somme 360. Soit a', b' tel que $a = 18a'$ et $b = 18b'$. Alors a' et b' sont premiers entre eux, et leur somme est $360/18 = 20$.

Nous pouvons facilement énumérer tous les couples d'entiers naturels (a', b') $(a' \leq b')$ qui vérifient cette condition, ce sont les couples :

$$(1, 20), (3, 17), (7, 13), (9, 11).$$

Pour obtenir les couples (a, b) recherchés $(a \leq b)$, il suffit de multiplier les couples précédents par 18 :

$$(18, 360), (54, 306), (162, 198).$$

Exercice Calculer par l'algorithme d'Euclide : $18480 \wedge 9828$. En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

Correction

1. $\text{pgcd}(18480, 9828) = 84$;
2. $25 \times 18480 + (-47) \times 9828 = 84$.

Exercice Notons $a = 1\,111\,111\,111$ et $b = 123\,456\,789$.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
2. Calculer $p = \text{pgcd}(a, b)$.
3. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = p$.

Correction

1. $a = 9b + 10$.

Scanné avec CamScanner

2. Calculons le pgcd par l'algorithme d'Euclide. $a = 9b + 10$, $b = 12345678 \times 10 + 9$, $10 = 1 \times 9 + 1$. Donc le pgcd vaut 1;

3. Nous reprenons les équations précédentes en partant de la fin: $1 = 10 - 9$, puis nous remplaçons 9 grâce à la deuxième équation de l'algorithme d'Euclide: $1 = 10 - (b - 12345678 \times 10) = -b + 1234679 \times 10$. Maintenant nous remplaçons 10 grâce à la première équation: $1 = -b + 12345679(a - 9b) = 1234579a - 111111112b$.

Exercice Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$:
a) $1665x + 1035y = 45$.
Correction

En divisant par 45 nous obtenons l'équation équivalente : $37x + 23y = 1$. Comme le pgcd de 37 et 23 est 1, donc d'après le théorème de Bézout cette équation a des solutions.

$5 * 37 - 8 * 23 = 1$

Par exemple une solution particulière est $(x_0, y_0) = (5, -8)$. Les solutions sont exactement les couples $(x, y) = (5 - 23k, -8 + 37k)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

b) $1665x + 3735y = 45$.

En divisant par 45 nous obtenons l'équation équivalente : $37x + 23y = 1$. Comme le pgcd de 37 et 83 est 1, donc d'après le théorème de Bezout cette équation a des solutions. Par exemple une solution particulière est $(x_0, y_0) = (9, -4)$. Les solutions sont exactement les couples $(x, y) = (x_0 - 83k, y_0 + 37k)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

c) (E) $148x + 332y = 12$. En divisant par 4 nous obtenons l'équation équivalente : $37x + 83y = 3$.

Pour (E') $37x + 83y = 1$, comme le pgcd de 37 et 83 est 1, donc d'après le théorème de Bézout cette équation a des solutions. Par exemple une solution particulière est $(9, -4)$.

Une solution particulière de (E) est $(x_0, y_0) = (9 \times 3, -4 \times 3)$.

Les solutions sont exactement les couples $(x, y) = (27 - 83k, -12 + 37k)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

7 Nombres premiers, nombres premiers entre eux

Exercice Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :

1. $(2^a - 1) | (2^{ab} - 1)$;
2. $(2^a - 1) \wedge (2^b - 1) = (2^{a \wedge b} - 1)$;
3. $(2^a - 1$ premier $) \Rightarrow (a$ premier $)$.

Indication Pour 1. et 3. utiliser l'égalité

$$x^b - 1 = (x - 1)(x^{b-1} + \cdots + x + 1).$$

Scanné avec CamScanner

Correction

Pour 3. Montrons plutôt la contraposée. Soit $p = ab$ un entier avec $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $2^p - 1$ n'est pas premier.

Nous savons que

$$x^b - 1 = (x-1)(x^{b-1} + \cdots + x + 1),$$

pour $x = 2^a$ nous obtenons :

$$2^p - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)\left(2^{a(b-1)} + \cdots + 2^a + 1\right).$$

De plus $2^a - 1$ n'est ni 1 ni 2^{ab} donc nous avons décomposer $2^p - 1$ en produit d'entier différents de 1. Donc $2^p - 1$ n'est pas premier.

Par contraposition nous obtenons que si $2^p - 1$ est premier alors p est premier.

Exercice

Démontrer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers $a + b$ et ab.

Indication Raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Gauss.

Correction

Soit a et b des entiers premiers entre eux. Raisonnons par l'absurde et supposons que ab et $a + b$ ne sont pas premiers entre eux. Il existe alors δ un nombre premier divisant ab et $a + b$. L'entier δ ne peut diviser a et b car a et b sont premiers entre eux. Par exemple supposons que δ ne divise pas b cela implique que δ et b sont premiers entre eux.

D'après le théorème de Gauss, comme δ divise ab et δ premier avec b alors δ divise a.

Maintenant δ divise a et divise $a + b$ alors δ divise $a + b - a = b$. δ est un facteur premier de a et de b ce qui est absurde.

Exercice

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}, 0 < i < p$ on a :

$$C_p^i \text{ est divisible par } p.$$

2. Montrer par récurence que :

$$\forall p \text{ premier}, \forall a \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } a^p - a \text{ est divisible par } p.$$

Indication

1. Écrire

$$C_p^i = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-(i+1))}{i!}$$

et utiliser le théorème de Gauss.

(Scanné avec CamScanner)

2. Raisonner avec les modulos, c'est-à-dire prouver $a^p \equiv a[p]$.

Correction

1. Étant donné $0 < i < p$, nous avons

$$C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-(i+1))}{i!}$$

Comme C_p^i est un entier alors $i!$ divise $p(p-1)\dots(p-(i+1))$. Mais $i!$ et p sont premiers entre eux (en utilisant l'hypothèse $0 < i < p$). Donc d'après le théorème de Gauss: $i!$ divise $(p-1)\dots(p-(i+1))$, autrement dit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ki! = (p-1)\dots(p-(i+1))$. Maintenant nous avons $C_p^i = pk$ donc p divise C_p^i.

2. Il s'agit de montrer le petit théorème de Fermat: pour p premier et $a \in \mathbb{N}^*$, alors $a^p \equiv a[p]$. Fixons p. Soit l'assertion

$$(\mathcal{H}_a) \quad a^p \equiv a[p].$$

Pour $a = 1$ cette assertion est vraie ! Étant donné $a \leq 1$ supposons que $\mathcal{H}_a$ soit vraie. Alors

$$(a+1)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i a^i.$$

Mais d'après la question précédente pour $0 < i < p$, p divise C_p^i. En termes de modulo nous obtenons:

$$(a+1)^p \equiv C_p^0 a^0 + C_p^p a^p \equiv 1 + a^p[p].$$

Par l'hypothèse de récurrence nous savons que $a^p \equiv a[p]$, donc

$$(a+1)^p \equiv a + 1[p].$$

Nous venons de prouver que $\mathcal{H}_{a+1}$ est vraie. Par le principe de récurrence alors quelque soit $a \in \mathbb{N}^*$ nous avons:

$$a^p \equiv a[p].$$

Exercice

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geq 1$ on a :

$$2^{2^{n+k}} - 1 = (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1).$$

2. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.

Scanné avec CamScanner

3. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Indication

1. Il faut être très soigneux : n est fixé une fois pour toute, la récurrence se fait sur $k \in \mathbb{N}$.
2. Utiliser la question précédente avec $m = n + k$.
3. Par l'absurde, supposer qu'il y a seulement n nombres premiers, considérer $n + 1$ nombres du type F_i. Appliquer le "principe du tiroir" : *si vous avez $n+1$ chaussettes rangées dans n tiroirs alors il existe (au moins) un tiroir contenant (plus de) deux chaussettes.*

Correction

1. Fixons n et montrons la récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. La formule est vraie pour $k = 0$. Supposons la formule vraie au rang k. Alors

$$(2^{2^n}-1)\times\prod_{i=0}^{k}(2^{2^{n+i}}+1) = (2^{2^n}-1)\times\prod_{i=0}^{k-1}(2^{2^{n+i}}+1)\times(2^{2^{n+k}}+1)$$
$$= (2^{2^{n+k}}-1)\times(2^{2^{n+k}}+1) = (2^{2^{n+k}})^2-1 = 2^{2^{n+k+1}}-1.$$

Nous avons utiliser l'hypothèse de récurrence dans ces égalités. Nous avons ainsi montrer la formule au rang $k+1$. Et donc par le principe de récurrence elle est vraie.

2. Écrivons $m = n + k$, alors l'égalité précédente devient:

$$F_m + 2 = (2^{2^n}-1)\times\prod_{i=n}^{m-1}F_i.$$

Soit encore :

$$F_n\times(2^{2^n}-1)\times\prod_{i=n+1}^{m-1}F_i \quad - \quad F_m = 2.$$

Si d est un diviseur de F_n et F_m alors d divise 2 (ou alors on peut utiliser le théorème de Bézout). En conséquent $d = 1$ ou $d = 2$. Mais F_n est impair donc $d = 1$. Nous avons montrer que tous diviseurs de F_n et F_m est 1, cela signifie que F_n et F_m sont premiers entre eux.

3. Supposons qu'il y a un nombre fini de nombres premiers. Nous les notons alors $\{p_1,\ldots,p_n\}$. Prenons alors $n+1$ nombres de la famille F_i, par exemple $\{F_1,\ldots,F_{n+1}\}$. Chaque F_i, $i = 1,\ldots,n+1$ est divisible par (au moins) un facteur premier p_j, $j = 1,\ldots,n$. Nous avons $n+1$ nombres F_i et seulement n facteurs premiers p_j.

(scanné avec CamScanner)

Donc par le principe des tiroirs il existe deux nombres distincts F_k et $F_{k'}$ (avec $1 \leq k, k' \leq n+1$) qui ont un facteur premier en commun. En conséquent F_k et $F_{k'}$ ne sont pas premiers entre eux. Ce qui contredit la question précédente. Il existe donc une infinité de nombres premiers.

Exercice Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k+1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$.
   Soit $a = 4p_1p_2 \ldots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Correction

1. X est non vide car, par exemple pour $k=2$, $4k+3 = 11$ est premier.
2. $(4k+1)(4\ell+1) = 16k\ell + 4(k+\ell) + 1 = 4(4k\ell + k + \ell) + 1$. Si l'on note l'entier $k' = 4k\ell + k + \ell$ alors $(4k+1)(4\ell+1) = 4k'+1$, ce qui est bien de la forme voulue.
3. Remarquons que 2 est le seul nombre premier pair, les autres sont de la forme $4k+1$ ou $4k+3$. Ici a n'est pas divisible par 2, supposons -par l'absurde- que a n'a pas de diviseur de la forme $4k+3$, alors tous les diviseurs de a sont de la forme $4k+1$. C'est-à-dire que a s'écrit comme produit de nombre de la forme $4k+1$, et par la question précédente a peut s'écrire $a = 4k'+1$. Donc $a \equiv 1[4]$. Mais comme $a = 4p_1p_2 \ldots p_n - 1$, $a \equiv -1 \equiv 3[4]$. Nous obtenons une contradiction. Donc a admet une diviseur premier p de la forme $p = 4\ell + 3$.
4. Dans l'ensemble $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$ il y a tous les nombres premiers de la formes $4k+3$. Le nombre p est premier et s'écrit $p = 4\ell + 3$ donc p est un élément de X, donc il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $p = p_i$. Raisonnons modulo $p = p_i$: $a \equiv 0[p]$ car p divise a. D'autre part $a = 4p_1 \ldots p_n - 1$ donc $a \equiv -1[p]$. (car p_i divise $p_1 \ldots p_n$). Nous obtenons une contradiction donc X est infini: il existe une infinité de nombre premier de la forme $4k+3$. Petite remarque, tous les nombres de la forme $4k+3$ ne sont pas des nombres premiers, par exemple pour $k=3$, $4k+3 = 15$ n'est pas premier.

Exercice Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^n + 1$ soit premier, montrer que $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2^k$. Que penser de la conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1$ est premier ?

Indication Raisonner par contraposition (ou par l'absurde) : supposer que n n'est pas de la forme 2^k, alors n admet un facteur irréductible $p > 2$. Utiliser aussi $x^p + 1 =$

Scanné avec CamScanner

$(x+1)(1-x+x^2-x^3+\ldots+x^{p-1})$ avec x bien choisi.

Correction

1. Supposons que a^n+1 est premier. Nous allons montrer la contraposée. Supposons que n n'est pas de la forme 2^k, c'est-à-dire que $n = p \times q$ avec p un nombre premier > 2 et $q \in \mathbb{N}$. Nous utilisons la formule

$$x^p + 1 = (x+1)(1-x+x^2-x^3+\ldots+x^{p-1})$$

avec $x = a^q$:

$$a^n + 1 = a^{pq} + 1 = (a^q)^p + 1 = (a^q+1)(1-a^q+(a^q)^2\ldots+(a^q)^{p-1}).$$

Ces deux derniers facteurs sont > 1. Et donc a^n+1 n'est pas premier. Par contraposition si a^n+1 est premier alor $\mathbb{N} = 2^k$.

2. Cette conjecture est fausse, mais pas facile à vérifier sans une bonne calculette ! En effet pour $n = 5$ nous obtenons :

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417.$$

Exercice

1. Soit n un entier premier avec 10. Montrer qu'il admet un multiple dont l'écriture décimale ne comporte que des 1.
2. Montrer que les entiers de la forme $4 \times 14^k + 1$ (où k est au moins égal à 1) ne sont pas premiers (on pourra les regarder modulo 3 ou 5).

Scanné avec CamScanner

LICENCE DE MATHEMATIQUES
U.V.L2: ANALYSE NUMERIQUE I
TD $N°$ 2 (Indications de) correction

Indication pour l'exercice 1

a) - *On montre suelement le cas où la matrice est triangulaire supérieure. Soient* $A = (a_{ij})$ *et* $B = (b_{ij})$ *avec* $j < i \quad a_{ij} = 0, \quad b_{ij} = 0$
Soit $C = AB$. *On a:*

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

On a

$$\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} = 0 \quad car \quad k < i \quad et\ donc \quad a_{ik} = 0$$

$$\sum_{k=i}^{n} a_{ik} b_{kj} = 0 \quad car \quad j < k \quad et\ donc \quad b_{kj} = 0$$

et donc $c_{ij} = 0$ *si* $j < i$.

- *Soient* u *et* v *unitaires*

$$(uv)^* = v^* u^* = v^- u^{-1} = (uv)^{-1}$$

donc uv *est unitaire.*

- *Soit* σ *un element du groupe de permutation* $\mathcal{P}$ *de* $[1,....,n]$, *on appelle matrice de permutation une matrice* P *definie par*

$$P_{ij} = \delta_{i\sigma(j)} \qquad (\delta symbole\ de\ Kronecker)$$

et $\sigma \in \mathcal{P}$.
Soient P' *et* P *deux matrices de permutations,* σ *et* $\sigma' \in \mathcal{P}$
Soit $C = P.P'$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} P_{ik} P'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i\sigma(k)} \delta_{k\sigma'(j)}$$

$\delta_{i\sigma(k)}\delta_{k\sigma(j)}$ *n'est égal à* 1 *que lorsque*

$$i = \sigma(k) \quad et \quad = \sigma'(j)$$

donc quand $i = \sigma(\sigma'(j)) = \sigma o \sigma'(j)$
or $\sigma o \sigma'$ *est un élement de* $\mathcal{P}$ *(groupe de permutation) donc* C *est une matrice de permutation.*

b) - *Soit* $X \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} < A^{-1}X, X > &= < X, A^{-*} > \\ &= < AA^{-1}X, A^{-*}X > \\ &= < AY, Y >> 0 \end{aligned}$$

car A *est définie positive. Comme* A *est inversible,* A^{-1} *est définie positive.*

Scanné avec CamScanner

- $(U^{-1})^* = (U^*)^{-1} = U$ *donc* U^{-1} *est également unitaire.*
- *Supposons* A *triangulaire supérieure.*

$$j < i \Rightarrow a_{ij} = 0$$

on utilise par exemple

$$A^{-1} = \frac{1}{det}(com(A))^t$$

quand $i < j$ *tous les cofacteurs d'ordre* (i,j) *sont nuls donc la comatrice (* $com(A)$ *) est triangulaire inférieure donc* $A^{-1} = \frac{1}{detA}(com(A))^t$ *est triangulaire supérieure.*

c) *A est triangulaire (supposons supérieure) donc* A^{-1} *est également triangulaire supérieure* $A^t = A^{-1}$ *(*^{t} *est triangulaire inférieure et* A^{-1} *sup.) donc A est diagonale.*

d) *La matrice A est hermitienne alors* $< Ax,x >=< x,A^*x >=< x,Ax >$ *où x est un vect. prop. de A associé à sa val. prop.* λ.
On obtient

$$< \lambda x,x > =< x,\lambda x >$$
$$\lambda < x,x > = \bar{\lambda} < x,x >$$
$$\lambda \|x\|^2 = \bar{\lambda}\|x\|^2$$

$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Si A est unitaire alors $A^*A = I \Rightarrow A^*Ax = x \Rightarrow \lambda A^*x = x \Rightarrow A^*x = \frac{1}{\lambda}x$ *donc* $1/\lambda$ *est val. prop. de* A^* *si* λ *est val. prop. de A.*
On a

$$< Ax,x >=< x,A^*x > \Rightarrow \lambda < x,x > = \frac{1}{\lambda} < x,x > \Rightarrow \bar{\lambda}\lambda = 1 \Rightarrow |\lambda|^2 = 1$$

d'où $|\lambda| = 1$.

e) *Si* λ *est valeur propre de A associée au vect. prop. x alors* $Ax = \lambda x \Rightarrow A^k x = \lambda^k x$

Indication pour l'exercice 2

1) *On vérifie immédiatement que* $\|A\|$ *possède les trois propriétés caractéristiques d'une norme*

a) $\|A\| \geq 0$ *et* $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ *en effet,* $\|A\| = 0$ *entraine* $\psi(Ax) = 0, \quad \forall x$, *et comme* ψ *est une norme,* $Ax = 0, \quad \forall x$, *donc* $A = 0$.

b)

$$\|\lambda A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\psi(\lambda Ax)}{\varphi(x)} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\lambda|\psi(Ax)}{\varphi(x)} = |\lambda|\|A\|$$

b)

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

en effet

$$\psi[(A + B)x] \leq \psi(Ax) - \psi(Bx)$$

et $\sup_{x \neq 0} \frac{\psi(Ax)+\psi(Bx)}{\varphi(x)} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\psi(Ax)}{\varphi(x)} - \sup_{x \neq 0} \frac{\psi(Ax)}{\varphi(x)}$

Scanné avec CamScanner

2) $\|A^{-1}\| = S_{\varphi\varphi}(A^{-1}) = \sup_{x\neq 0}\frac{\varphi(A^{-1}x)}{\varphi(x)} = \sup_{x\neq 0}\frac{\varphi(y)}{\varphi(Ay)}$ *avec la correspondance bijective* $x = Ay$

$$\forall y \neq 0 \qquad \frac{\varphi(y)}{\varphi(Ay)} \leq \|A^{-1}\| \quad donc \quad 0 < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\varphi(Ax)}{\varphi(y)},$$

$\|A^{-1}\|$ *étant bornée ; de même, par définition*

$$\forall y \neq 0 \qquad \frac{\varphi(Ay)}{\varphi(y)} \leq \|A\|$$

d'où l'inégalité cherchée.

3) *Si A est inversible, il suffit de prendre $\alpha = \frac{1}{\|A\|}$.*
Réciproquement, supposons qu'étant donnée A, il existe α tel que

$$0 < \alpha \leq \frac{\varphi(Ay)}{\varphi(y)} \qquad \forall x \neq 0.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons A non inversible

$$\exists x_0 \neq 0 \quad tel\ que \quad Ax_0 = 0.$$

Puisque

$$\alpha\varphi(x) \leq \varphi(Ax) \quad \forall x$$
$$\alpha\varphi(x_0) \leq \varphi(Ax_0) = 0 \quad et \quad \varphi(x_0) = 0.$$

φ étant une norme, cela entraine $x_0 = 0$, contrairement l'hypothèse donc A est inversible.

4) *On remarque*

$$\frac{\varphi(ABx)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi(ABx)}{\varphi(Bx)}\frac{\varphi(Bx)}{\varphi(x)}$$

soit encore

$$\sup_{x\neq 0}\frac{\varphi(ABx)}{\varphi(x)} \leq \sup_{y=Bx\neq 0}\frac{\varphi(Ay)}{\varphi(y)}\sup_{x\neq 0}\frac{\varphi(Bx)}{\varphi(x)}$$

5) 5-1) *Soit x_j la (ou une s'il en existe plusieurs) composante de x telle que $|x_j| = \max_i |x_i|$*

$$|x_j|^p \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|^p \leq n|x_j|^p$$

Si a et b sont deux nombres positifs, $a > b \Leftrightarrow a^q > b^q$ dès que $q > 0$ donc

$$|x_j| \leq \varphi_p(x) \leq n^{\frac{1}{p}}|x_j|$$

Quand $p \to \infty$, $n^{1/p} \to 1$ et $\varphi_p(x) \to \varphi_\infty(x) = max_i|x_i|$

5-2) a)

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\max_{i=1,\ldots,n}|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j|}{max_{i=1,\ldots,n}|x_i|}$$

$$|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j| \leq \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j| \leq (max_k|x_k|)(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

(scanné avec CamScanner

donc

$$\|A\| \leq max_i[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|]$$

Montrons que cette borne supérieure donnée pour $\|A\|$ est atteinte pour un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$. Soit l l'indice de ligne défini par

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{lj}| = max_i[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|]$$

Considérons x de composantes $x_j = \begin{cases} +1 & si \quad a_{lj} \geq 0 \\ -1 & si \quad a_{lj} < 0 \end{cases}$

La borne supérieure écrite pour $\|A\|$ est atteinte en cet x donc

$$\|A\| = max_i[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|]$$

b)

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\sum_{i=1}^{n}|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j|}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$$

$$\sum_{i=1}^{n}|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n}|x_j|\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{n}|x_j|[\max_j \sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|]$$

donc

$$\|A\| \leq max_i[\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|]$$

Soit k l'indice de colonne défini par

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}| = \max_j[\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|].$$

On vérifie que la borne supérieure écrite pour $\|A\|$ est atteinte pour le vecteur x de composante $x_j = \begin{cases} 0 & si \quad j \neq k \\ 1 & si \quad j = k \end{cases}$

$$\|A\| = \max_j[\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|]$$

c) En remarquant que $\varphi_2(y) = \sqrt{y^T y}$,

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x^T A^T A x}}{\sqrt{x^T x}}$$

$A^T A$ est une matrice symétrique, définie non négative
$(A^T A)^T = A^T A$ et $< x, A^T A >= x^T A^T A x = \|Ax\|^2$, en notant $<\quad,\quad>$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.
Etant symétrique, $A^T A$ est diagonalisable par une matrice orthonormale

$$A^T A = P^T D P \quad avec \quad P^T P = I \quad et \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

(Scanné avec CamScanner)

si λ_i sont valeurs propres de A^TA, réelles (A^TA réelle symétrique) et ≥ 0 (A^TA définie non négative).

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x^T P^T D P x}}{\sqrt{x^T x}}. \qquad Posons \quad y = Px.$$

Quand x parcourt $\mathbb{R}^n$, y parcourt $\mathbb{R}^n$; $x^Tx = y^TPP^Ty = y^Ty$

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}} \leq max_i \sqrt{\lambda_i}$$

borne qui est atteinte pour y de composantes $y_i = \begin{vmatrix} 0 & si & i \neq M \\ 1 & si & i = M \end{vmatrix}$ où M est défini par $\lambda_M = max_{i=1,\ldots,n}\lambda_i$.
$\|A\| = \max_{i=1,\ldots,n} \sqrt{\lambda_i}$ où les λ_i sont les valeurs propres de A^TA.

Indication pour l'exercice 3

$AM(\mathbb{C})$ hermitienne positive.

1) A hermitienne positive, les valeurs propres sont réelles et positives. A est semblable à une matrice diagonale. il existe U unitaire telle que

$$A = U^*DU \qquad D = diag(\lambda_i) \quad \lambda_i \geq 0.$$

posons $D' = diag(\sqrt{\lambda_i})$ et posons

$$R = U^*D'U$$

$$R^2 = U^*D'D'U = U^*(D')^2U = U^*DU = A.$$

2) B^*B est hermitienne et positive, donc il existe U unitaire telle que

(1) $B^*B = U^*DU$ avec $D = diag(\lambda_i^2)$ $(\lambda_i \in \mathbb{R})$
(2) $R = U^*D'U$ avec $D' = diag(|\lambda_i|)$.

On a

$$B^*B = (D'U)^*(D'U) = (UR)^*(UR) \qquad d'après \quad (2)$$

donc UR est une decomposition de B.

3) Puisque R est unique U l'est également car $B = U_1R = U_2R \Rightarrow U_1 = U_2$ car R es inversible puisque B l'est.

$$B^*B = (D'U)^*(D'U) = (UR)^*(UR)$$

Indication pour l'exercice 4

1) AV est un vecteur dont le $i^{ième}$ terme est

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} = x_i$$

$$\Rightarrow AV = V$$

(scanné avec CamScanner)

2) Soit λ une valeur propre de A.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i$$

$$|\lambda||x_i| = |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j|$$

Soit k tel que $|x_k| = \max_i |x_i|$

$$|\lambda||x_k| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|xj| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{kj}|x_k| = |x_k|$$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq 1$$

3) Soit $J_k = \{j/a_{kj} \neq 0\}$
On sait

$$|\lambda||x_k| = |\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{kj}|x_k| = |x_k|$$

Si $|\lambda| = 1$ les termes extremes sont égaux donc l'inégalité intermediaire devient une égalité. Or le module d'une somme de compexe est égal à la somme des modules ssi il ont même argument.
Les sommes $a_{kj}x_j$ dont les indices j appartiennent à J_k ont donc même argument. Ce qui implique que x_j dont les indices $j \in J_k$ ont même argument car $a_{kj} > 0$.

$$\forall j \in J_k \qquad |x_j| = |x_k|$$

Les x_j d'indice $j \in J_k$ ont même module et même argument donc tous égaux.
Si $k_1 \in J_k$,

$$\lambda x_{k_1} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = \sum_{j \in J_k} a_{kj}x_j = \sum_{j \in J_k} a_{kj}x_{k_1}$$
$$= x_{k_1}$$

même étude $\exists k_2/\lambda x_{k_1} = x_{k_2}$
de proche en proche

$$\lambda x_{k_p} = x_{k_{p+1}}$$
$$\Rightarrow \forall q \qquad \lambda^q x_{k_p} = x_{k_{p+q}}$$

$1 \leq k_p \leq n$, on ne peut donc trouver une suite infinie d'indice k_p tous différents. Il existe des entiers r et s tels que $K_{r+s} = K_r$ $\quad (k_{r+s} = k_r)$ puisque x_k est non nul $\lambda^s x_{k_r} = x_{k_{r+s}} = x_{k_r} \Rightarrow \lambda^s = 1$.

Indication pour l'exercice 5

a) On remarque que $|x| \leq |x - y| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$.

Scanné avec CamScanner

b) Posons $\varphi(X) = \frac{\|AX\|}{\|X\|}$ *où* $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$

On a $\varphi(\lambda X) = \frac{\|A\lambda X\|}{\|\lambda X\|} = \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \varphi(X)$ $\quad \lambda \in Cset$. *Donc* $\forall X \in Cset^n \quad \exists \lambda \in Cset$ *tel que*

$$\|\lambda X\| \leq 1 \quad où \quad \|\lambda X\| = 1$$

Il suffit de prendre $|\lambda| \leq \frac{1}{\|X\|}$.

c) Soit λ *valeur propre de* A *et* X *un vecteur propre associé.*

$$(1) \qquad AX = \lambda X$$

$$|\lambda|\|X\| = \|AX\| \leq \|A\|\|X\| \Rightarrow |lambda| \leq \|A\|.$$

d'autre part, A *étant inversible, de* (1) *on a*

$$X = \lambda A^{-1}X \qquad \lambda^{-1}$$

$$\frac{1}{\lambda}X = A^{-1}X$$

donc $|\frac{1}{\lambda}|\|X\| \leq \|A^{-1}\|\|X\|$

$$|\frac{1}{\lambda}| \leq \|A^{-1}\| \Rightarrow \frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq |\lambda|.$$

d) Il suffit de prendre $\alpha < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

e) On a $0 < \frac{\|A^{-1}X\|}{\|X\|}$ *donc* $\sup_{X\neq 0} \frac{\|A^{-1}X\|}{\|X\|} = \inf_{X\neq 0} \frac{\|X\|}{\|A^{-1}X\|}$. *d'autre part,* A *est inversible*

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} = \frac{1}{\sup \frac{\|A^{-1}X\|}{\|X\|}} = \frac{1}{\sup_{Y\in\mathbb{C}} \frac{\|Y\|}{\|AY\|}} = \inf_{Y\in\mathbb{C}} \frac{\|AY\|}{\|Y\|}$$

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\|AY\|}{\|X\|} \leq \|A\| \quad évident$$

f) On pourra resoudre (1) *et* (3) *à la fois.*
(3) $\varphi(x,y) = (AX,Y)$ *est une forme sesquilineaire definie positive; donc la forme quadratique associé à* $\varphi(.)$ *est une norme. Donc* $[X]$ *est équivalente à* $\|X\|_2$ *car nous sommes en dimension finie.*

Indication pour l'exercice 6

Soit A *une matrice carré d'ordre* n *dont les valeurs propres sont* $\lambda_i (i = 1,...,n)$.

a) Il existe une matrice unitaire U *telle que*

$$A' = UAU^* \qquad (1)$$

soit une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A. *De* (1) *on déduit immédiatement que*

$$A'^p = UA^pU^*$$

donc

$$lim_{p\to\infty} A'^p = U(lim_{p\to\infty} A^pU^*;$$

si $lim_{p\to\infty} A^p = 0$ *on a nécessairement* $lim_{p\to\infty} A'^p = 0$
Les éléments diagonaux de A'^p *étant* $\lambda_i^p \quad i = 1,...,n$, *doit donc avoir*

$$lim_{p\to\infty} \lambda_i^p = 0 \qquad \forall i$$

soit

$$|\lambda_i| < 1 \qquad \forall i$$

(scanné avec CamScanner

b) *Si* $lim_{p\to\infty}A^p = 0$ *on a* $|\lambda_i| < 1$
donc la matrice $(I - A)$ *est inversible ayant toutes ses valeurs propres* $(1 - \lambda_i)$ *différentes de zéro.*
On considère la matrice

$$B = (I - A)(\sum_{k=0}^{p-1} A^k)$$

On obtient

$$B = \sum_{k=0}^{p-1} A^k - \sum_{k=0}^{p-1} A^{k+1} = I - A^p$$

puisque $(I - A)$ *est inversible*

$$(I - A)^{-1}B = \sum_{k=0}^{p-1} A^k = (I - A)^{-1}(I - A^p)$$

On en déduit immédiatement, comme $lim_{p\to\infty}A^p = 0$, *que*

$$lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p-1} A^k = (I - A)^{-1}.$$

c) $\|B_k\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|A^k\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$ *implique que* B_k *est convergente.*

$$lim_{p\to+\infty}\|A^p\| \leq lim_{p\to+\infty}\|A\|^p = 0$$

implique que $lim_{p\to+\infty}A^p = 0$;
d'après la question 2) $lim_{p\to+\infty}B_k = \sum_{p=0}^{k} A^k = (I - A)^{-1}$
On en conclut que

$$(B_k)_{k\geq 1} \quad où \quad B_k = I + A + A^2 + ... + A^k$$

est convergente et que $lim_{p\to\infty}B_k = (I - A)^{-1}$.

d) *On pose :*

$$\|C_k\| \leq \sum_{p=0}^{p=k} \frac{\|A\|^p}{p!} \to_{k\to\infty} e^{\|A\|}$$

montre que la suite C_k *est convergente. Notons* e^A *sa limite.*
Soient $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ *les valeurs propres de* A. $\forall i$ *si* λ_i *est associé au vecteur propre* x_i *de* A, *on a*

$$e^A x_i = (\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!})x_i = (\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_i^k}{k!})x_i = e^{\lambda_i}x_i$$

impliquant que e^{λ_i} *est valeur propre de* e^A. *Alors*

$$déte^A = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} = e^{tr(A)}$$

Scanné avec CamScanner

Indication pour l'exercice 7

La matrice $I+X$ étant symétrique définie positive, il existe une matrice orthogonale U (théorème de Schor) telle que

$$I+X=U^T\begin{bmatrix}1+x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1+x_n\end{bmatrix}U=U^TDU$$

(x_1 étant les valeurs propres de X).
On appelle D la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $1+x_i \quad (i=1,\ldots,n)$.
Puisque $(I+X)$ est définie $1+x_i>0, \quad \forall i$.
La matrice

$$C=U^T\begin{bmatrix}(1+x_1)^{1/q} & & \\ & \ddots & \\ & & (1+x_n)^{1/q}\end{bmatrix}U=U^T\Delta U$$

est alors une solution de

$$Y^q=I+X$$

En effet

$$q>0 \quad C^q=U^T\Delta UU^T\Delta U\ldots U^T\Delta U=U^T\Delta^qU=U^TDU=I+X$$

$$q>0 \quad q=-|q|$$

$$C^{-|q|}=(C^{-1})^{|q|}=(C^{|q|})^{-1}=[U^T\Delta U\ldots U^T\Delta U]^{-1}=[U^T\Delta^{|q|}U]^{-1}$$

$$\Delta^{|q|}=\begin{bmatrix}(1+x_1)^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & (1+x_n)^{1/q}\end{bmatrix}$$

puisque

$$[U^T\Delta^{|q|}U]^{-1}=U^{-1}(\Delta^{|q|})^{-1}U^{-T}=U^T(\Delta^{|q|})^{-1}U$$

$$C^{-|q|}=U^TDU=I+X$$

Donc C est bien une solution de (1).
Si $x_i<1 \quad \forall(1+x_i)^\alpha=1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)}{p!}x_i^p$

$$\Delta=\begin{bmatrix}1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)}{p!}x_1^p & & \\ & \ddots & \\ & & 1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)}{p!}x_n^p\end{bmatrix}$$

Soit

$$\Delta=I+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)}{p!}\begin{bmatrix}x_1^p & & \\ & \ddots & \\ & & x_n^p\end{bmatrix}$$

$$C=U^T\Delta U=I+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)}{p!}U^T\begin{bmatrix}x_1^p & & \\ & \ddots & \\ & & x_n^p\end{bmatrix}U$$

Scanné avec CamScanner

Puisque

$$U^T \begin{bmatrix} x_1^p & & \\ & \ddots & \\ & & x_1^p \end{bmatrix} U = X^p,$$

On obtient une solution de (1), *que nous écrivons sous la forme*

$$(I+X)^{1/q} = I + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{q}(\frac{1}{q}-1)\ldots(\frac{1}{q}-p+1)}{p!} X^p,$$

si $|x_i| < 1$ *ou ce qui est équivalent*

$$lim_{p\to\infty} X^p = 0$$

Scanné avec CamScanner

TD $N°$ 3 (Indications de) correction

Indication pour l'exercice 1

1. *Vérification évidente (Calcul matriciel).*
2. $det(A) = 2^n$.
3. *On peut faire un calcul matriciel par exemple.*
4. *Vérifier que*

$$(I - \frac{E}{2})(I + \frac{E}{2} + \frac{E^2}{2^2} + ... + \frac{E^{n-1}}{2^{n-1}}) = I - \frac{E^n}{2^n}.$$

avec $E^n = 0$.
En remarquant que

$$E^k = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & & & & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

En particuliers

$$E^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad et \quad E^n = 0$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{E^k}{2^k} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^0} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2^1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2^{n-1}} & \dots & \frac{1}{2^1} & \frac{1}{2^0} \end{bmatrix} \quad donc \quad \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{E^k}{2^k} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2^2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2^n} & \dots & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^1} \end{bmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

Or $A^{-1} = U^{-1}[2I - E]^{-1} = [I - E^T] \times \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{E^k}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} - \frac{1}{2}E^T \sum_{k=0}^{n-1} \frac{E^k}{2^k}$. *Donc*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2^2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2^n} & \dots & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2^1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2^2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2^n} & \dots & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2^1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2^2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2^n} & \dots & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} & \dots & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^2} & -\frac{1}{2^1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-2}} & \dots & \frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^2} & -\frac{1}{2^1} \\ \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} & \dots & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^1} \end{bmatrix}$$

Alors

$$\|A^{-1}\| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n$$

5.

$$Cond_\infty(A) = \|A\|.\|A^{-1}\|_\infty = 2^n(1 - \frac{1}{2^n})$$
$$= 2^n - 1.$$

$Cond_\infty(A) < det(A)$

Indication pour l'exercice 2

1. Si l'on pose $A^{(1)} = A$, *rappelons que l'algorithme de Gauss au* $k^{ième}$ *pas, permettant l'élimination de* x_k *s'écrit*

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} \quad pour \quad i,j = k+1,...,n \qquad (1)$$

Montrons que si A est symétrique, la sous-matrice de $A^{(k+1)}$, *formée des éléments* $a_{ij}^{(k+1)}$ *pour* $i,j = k+1,...,n$ *est symétrique. Raisonnons par récurrence : pour* $k = 1$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{1i}^{(1)} = a_{ji}^{(1)} - \frac{a_{j1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{1i}^{(1)} = a_{ji}^{(2)} \quad pour \quad i,j = 2,...,n$$

Scanné avec CamScanner

En supposant la propriété vraie au rang k, c'est-à-dire $a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}$ pour $i,j = k,\ldots,n$, il vient immédiatement, d'après les formules (1)

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ji}^{(k+1)} \quad pour \quad i,j = k+1,\ldots,n$$

Dans l'algorithme de Gauss, la symétrie de A se conserve à chaque pas, pour une sous-matrice de $A^{(k)}$. Au $k^{ième}$ pas, on fera donc le calcul de $a_{ij}^{(k+1)}$ seulement pour

$$\left|\begin{array}{lll} i,j & = & k+1,\ldots,n. \\ i & \leq & j \end{array}\right.$$

2. *2.a.* $A = RR^T$ *donne par identifiaction*

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} r_{ik} r_{jk} \quad pour \quad i \leq j$$

On remplit R colonne par colonne

$$r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ik}^2}$$

$$r_{ji} = \frac{1}{r_{ii}}\left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ik} r_{jk}\right]$$

2.b.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad et \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 2\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{21}{8}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{8}{21}} & \sqrt{\frac{55}{21}} \end{bmatrix}$$

Résoudre $Ax = b$ revient à résoudre

$$Ry = b$$

$$R^T x = y$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{6}}{12\sqrt{7}} \\ \frac{-1}{\sqrt{12\sqrt{55}}} \end{bmatrix} \quad et \quad x = \begin{bmatrix} \frac{21}{55} \\ -\frac{8}{55} \\ \frac{34}{55} \\ \frac{-55}{55} \end{bmatrix}$$

Indication pour l'exercice 3

1. *Partitionnons x et b en deux vecteurs avec $x^{(1)}$ et $b^{(1)} \in \mathbb{R}^p$. d'où*

$$\left|\begin{array}{lllll} A_1 x^{(1)} & + & A_2^{(2)} & = & b^{(1)} \\ A_3^{(1)} x^{(1)} & + & A_4^{(1)} x^{(2)} & = & b^{(2)} \end{array}\right.$$

En supposant A_1 régulière

$$x^{(1)} = A_1^{-1}(b^{(1)} - A_2 x^{(2)})$$

Le système d'ordre $n-p$ à résoudre est alors

$$(A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2) x^{(2)} = b^{(2)} - A_3 A_1^{-1} b^{(1)}$$

Scanné avec CamScanner

2. *Pour calculer A^{-2}, on peut utiliser les résultats précédents. Si l'on pose $M = A_4 - A_3A_1^{-1}A_2$ et si M est facilement inversible*

$$x^{(2)} = M^{-1}b^{(2)} - M^{-1}A_3A_1^{-1}b^{(1)}$$
$$x^{(1)} = A_1^{-1}b^{(1)} - A_1^{-1}A_2(M^{-1}b^{(2)} - M^{-1}A_3A_1^{-1}b^{(1)})$$

En supposant $A^{-1} = C$ partitionnée comme A, des calculs précédents et de $x = Cb$, il vient

$$C_1 = A_1 + A_1^{-1}A_2M^{-1}A_3A_1^{-1}$$
$$C_2 = -A_1^{-1}A_2M^{-1}$$
$$C_3 = -M^{-1}A_3A_1^{-1}$$
$$C_4 = M^{-1}$$

3. *On prend $p = 3$*

$$A_1 = I = A_1^{-1}$$

$$A_3A_1^{-1}A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_3A_1^{-1}b^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x_4 = \frac{5}{3}$ $x_5 = \frac{4}{3}$ *et le vecteur solution est* $x = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{7}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$

Indication pour l'exercice 4

1) *Si $M \in \mathcal{M}(n,n)$, la matrice $R_{kl}(\theta)M$ ne diffère de M que par les k^e et l^e lignes et a pour éléments*

$$m_{ij} \quad si \quad i \neq k,l$$
$$m_{kj} = m_{kj}cos\theta - m_{lj}sin\theta$$
$$m_{lj} = m_{kj}sin\theta + m_{lj}cos\theta$$

Etant donné A, cherchons une suite finie de matrices de rotations

$$R_{12}...R_{1n} = R_1$$

telles que R_1A ait tous ses éléments, situés dans la première colonne au-dessous de la diagonale, nuls. Il suffit de prendre $R_{12}(\theta_{12})$ où θ_{12} est défini par

$$(R_{12}A)_{21} = a_{11}sin\theta_{12} + a_{21}cos\theta_{12} = 0$$

On détermine ensuite successivement $R_{1k}(\theta_{1k}), k = 2,...,n$ par

$$b_{11}sin\theta_{1k} + a_{k1}cos\theta_{1k} = 0$$

Scanné avec CamScanner

si b_{11} est l'élément en position 1,1 de la matrice $R_{1,k-1},...,R_{12}A$.
Notant $A^{(1)} = A$, $A^{(k)} = R_{k-1}...R_1A$, au $(k-1)$ pas, on a donc pu obtenir $A^{(k)}$ matrice telle que

$$a_{ij}^{(k)} = 0 \quad si \quad i > j \quad et \quad j < k$$

Pour obtenir $A^{(k+1)}$, on détermine $R_{kj}(\theta_{kj}), j = k+1,...,n$ par

$$c_{kk}sin\theta_{kj} + c_{jk}cos\theta_{kj} = 0,$$

si C désigne la matrice $R_{kj-1}...R_{kk+1}A^{(k)}$.
(On vérifie bien que les éléments nuls des colonnes $1,..,k-1$ de $A^{(k)}$ restent nuls.)
Après $n-1$ transformations, on a bien obtenu une matrice $RA = T$ triansgulaire supérieure.

2) *La résolution de $Ax = b$ se ramène à la résolution du système triangulaire supérieur $Tx = Rb$.*
Toute matrice de rotation $R_{kl}(\theta)$ est orthonormale: on le vérifie immédiatement

$$R_{kl}^T R_{kl} = R_{kl}R_{kl}^T = I.$$

R_k est par suite orthogonale

$$R_kR_k^T = R_{kn}...R_{kk+1}(R_{kn}...R_{kk+1})^T = I$$

et R est orthonormale.
La norme euclidienne d'une matrice orthonormale Q est

$$S_{\varphi_2\varphi_2}(Q) = \|Q\| = \max_{x\neq 0}\frac{\varphi_2(Qx)}{\varphi_2(x)}$$

mais

$$\varphi_2(Qx) = \sqrt{x^TQ^TQx} = \varphi_2(x) \quad donc \quad \|Q\| = 1.$$

De

$$RA = T. \qquad il\ vient \quad \|T\| \leq \|R\|.\|A\| \leq \|A\|$$

De

$$A = R^TT, \qquad il\ vient \quad \|A\| \leq \|R^T\|.\|T\| \leq \|T\|$$

donc

$$\|T\| = \|A\|.$$

Indication pour l'exercice 5

1) *En notant $(Av_k)_i$ la i^e composante du vecteur Av_k*

$$(Av_k)_i = \sum_{j=1}^{i-1}(n+j-i+1)q_k^{-1} + \sum_{j=1}^{n}(1+j-i)q_k^{-1}$$

Or si

$$q_k \neq 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} q_k^{j-1} = \frac{1-q_k^n}{1-q_k} = 0$$

(scanné avec CamScanner)

et

$$(Av_k)_i = n\frac{1-q_k^{i-1}}{1-q_k} + \sum_{j=1}^{n} jq_k^{i-1}$$

$$(\sum_{j=1}^{n} jq_k^{j-1})(q_k - 1) = -\sum_{j=1}^{n} q_k^{j-1} + nq_k^n = n$$

$$(Av_k)_i = \frac{n}{q_k - 1}q_k^{i-1}$$

ou encore

$$(Av_k)_i = (\sum_{j=1}^{n} jq_k^{j-1}).q_k^{i-1} = (\sum_{j=1}^{n} jq_k^{j-1})(v_k)_i$$

Si $q_k = 1$,

$$(Av_0)_i = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}(v_0)_i.$$

On vérifie bien ainsi que les vecteurs $v_k, k = 0,...,n-1$, *sont vecteurs propres de* A, *la valeur propre* λ_k *associée à* v_k *étant*

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^{n} jq_k^{j-1} = \begin{vmatrix} \frac{n}{q_k-1} & si \quad k \neq 0 \\ \frac{n(n+1)}{2} & si \quad k = 0 \end{vmatrix}$$

2) *La méthode de Jacobi consiste à poser*

$$A_1 = diag(A + mI) = (1+m)I$$
$$A_2 = A + mI - A_1$$

et, à partir d'un vecteur initial x_0, *à réaliser l'itération*

$$x_{p+1} = -A_1^{-1}A_2x_p + x_1^{-1}b$$

Posant $M = -A_1^{-1}A_2$, *on sait que* (2) *converge vers la solution de* (1) *à la condition nécessaire et suffisante que, si* $\mu_i(M)$ *désignent les valeurs propres de* M, *on ait*

$$\max_{i=1,...,n} |\mu_i(M)| < 1$$

Or $M = -(1+m)^{-1}(A - I)$.
Les valeurs propres de A *étant* λ_i, $\mu_i = -\frac{\lambda_i - 1}{1+m} = \frac{1-\lambda_i}{1+m}$

$$\max_i |\mu_i| = \frac{1}{|1+m|}\max_i |1 - \lambda_i|$$

$$|1 - \lambda_i| = |\sum_{j=2}^{n} jq_k^{j-1}| \leq \sum_{j=2}^{n} j$$

Cette borne supérieure $\sum_{j=2}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ *est obtenue pour* λ_0 *donc*

$$\max_i |\mu_i| = \frac{1}{|1+m|}.\frac{n^2+n-2}{2}$$

La méthode de Jacobi, appliquée à (1), *converge donc pour les valeurs de* m *telles que*

$$|m+1| > \frac{n^2+n-2}{2}$$

Scanné avec CamScanner

3) a) *Prenons par exemple pour vecteur de départ* $x_0 = (0;0;0;0)$. *Si* R_0 *est le résudu associé à* $\varphi_\infty(R_0) = 1$.
On trouve successivement

x_1	R_1	x_2	R_2	x_3	R_3
0.05	0	0.05	0.0625	0.0531	−0.0225
0	−0.2	−0.01	0.03	−0.0085	−0.0265
0	−0.15	−0.007	0.05	−0.005	−0.0214
0	−0.1	−0.005	0.06	−0.002	−0.0275
$\varphi_\infty(R_1) = 0.2$		$\varphi_\infty(R_2) = 0.0625$		$\varphi_\infty(R_1) = 0.0265$	

x_3 *est donc le vecteur cherché.*

b) *Dans le cas où* $m = 0$, *si l'on prend toujours pour vecteur de départ le vecteur nul,* $\varphi_\infty(R_0) = 1$ *et on trouve*

x_1	R_1	x_2	R_2	x_3	R_3
1	0	1	26	26	−180
0	−4	−4	12	8	−212
0	−3	−3	20	17	−171
0	−2	−2	24	22	−166
$\varphi_\infty(R_1) = 4$		$\varphi_\infty(R_2) = 26$		$\varphi_\infty(R_1) = 212$	

On voit bien que le procédé diverge.

Indication pour l'exercice 6

1) a) *Les* v_i *forment une base de* $\mathbb{R}^n$ *car ils sont linéairement indépendants. En effet, s'ils ne l'étaient pas, il existerait des* λ_i, *non tous nuls, tels que*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i v_i = 0$$

soit

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A v_i = 0 \quad et \quad \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (A v_i, v_j) = 0 \Rightarrow \lambda_j (A v_j, v_j) = 0$$

donc $\lambda_j = 0, \forall j$, *ce qui est contraire à l'hypothèse.*
Comme les v_i *forment une base de* $\mathbb{R}^n$, *on peut écrire*

$$\omega = \sum_{i=0}^{n-1} a_i v_i$$

$$A\omega = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A v_i \quad et \quad (b, v_j) = a_j (A v_j, v_j)$$

$$a_j = \frac{(b, v_j)}{(v_j, A v_j)}$$

Scanné avec CamScanner

b) Tout point de $\mathbb{R}^*$ sur la droite parallèle à v_i, passant par x_i, s'écrit

$$x = x_i + \lambda v_i$$

$$\begin{aligned} H(x) &= (A(\omega - x),\omega - x) = (A(\omega - x_i - \lambda v_i),\omega - x_i - \lambda v_i) \\ &= H(x_i) - 2\lambda(v_i,A(\omega - x_i)) + \lambda^2(Av_i,v_i) \end{aligned}$$

$H(x_i)$ est un trinôme en λ; comme $(Av_i,v_i) > 0$, ce trinôme admet un minimum pour

$$\lambda = \frac{(v_i,A(\omega - x_i))}{(Av_i,v_i)}$$

Or on a

$$(v_i,A(\omega - x_i)) = (v_i,b) - (v_i,Ax_i)$$

Comme

$$(v_i,A(\omega - x_i)) = (v_i,b) - (v_i,Ax_i)$$

On a $(v_i,Ax_i) = 0$ et

$$\lambda = \frac{(b,v_i)}{(v_i,Av_i)} = a_i$$

2) a) Au rang k, on doit exprimer

$$(t_{k+1},At_l) = 0 \quad pour \quad l = 0,\ldots,k$$

et en utilisant (4)

$$\alpha_{k+1,l} = -\frac{(w_{k+1},At_l)}{(t_l,At_l)}$$

On remarquera que d'après (4), w_{k+1} est une combinaison linéaire des t_j de 0 à $k+1$. d'où

$$(w_k,At_i) = 0 \quad pour \quad i > k$$

b) De la même façon en exprimant

$$(\tilde{t}_{k+1},A\tilde{t}_l) = 0 \quad pour \quad l = 0,\ldots,k$$

$$\beta_{k+1,k} = -\frac{(\tilde{t}_k,A\tilde{t}_k)}{(w_{k+1},A\tilde{t}_k)}$$

$$\beta_{k+1,l} = -\beta_{k+1,k}\frac{(w_{k+1},A\tilde{t}_l)}{(\tilde{t}_l,A\tilde{t}_l)} \quad pour \quad l = 0,\ldots,k-1$$

w_{k+1} est une combinaison linéaire des $\tilde{t}_j$ de $j = 0$ à $k+1$ donc

$$(w_k,A\tilde{t}_i) \quad pour \quad i > k$$

3) D'après 2b)

$$r_{i+1} = r_i + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(r_i,r_i)}{(Av_i,r_i)} \cdot \frac{(Av_i,r_k)}{(r_k,r_k)} r_k - \frac{(r_i,r_i)}{(Av_i,r_i)} Av_i$$

Scanné avec CamScanner

Or les v_i étant une suite de vecteurs A-orthpgonaux formés à partir des $\{v_i\}$,

$$(r_k, Av_i) = 0 \quad pour \quad k < i$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i Av_i$$

pour le calcul de α_i, on remarque que $(Av_i, r_i) = (Av_i, v_i)$ car r_i est une combinaison linéaire des v_j de $j = 0$ à i, donc

$$\alpha_i = \frac{(r_i, r_i)}{(Av_i, v_i)}$$

D'après 2a)

$$v_{i+1} = r_{i+1} - \sum_{j=0}^{i} \frac{(r_{i+1}, Av_j)}{(v_j, Av_j)} v_j$$

Or les r_i étant une suite de vecteurs I-orthogonaux formés à partir de

$$r_0, Av_0, \ldots, Av_{n-2},$$

$$(Av_k, r_i) = 0 \quad pour \quad i > k+1$$

$$v_{i+1} = r_{i+1} + \beta_i v_i$$

$$\beta_i = -\frac{(r_{i+1}, Av_i)}{(v_i, Av_i)}$$

Par récurrence, montrons que r_{i+1} n'est autre que le vecteur résidu au $(i+1)^e$ pas :
En efftet : $r_0 = b - Ax_0$. Supposons la propriété vraie au i^e pas et formons

$$r_{i+1} = r_i + \alpha_i Av_i = b - Ax_i - \alpha_i Av_i = b - Ax_{i+1}$$

résultat est donc établi.
Les $r_i, i = 0, \ldots, n-1$, sont tous orthogonaux entre eux dans $Rset^n$.
Si l'on définit r_n par $r_n = b - Ax_n$

$$r_n = b - A(x_{n-1} + \alpha_{n-1} v_{n-1}) = r_{n-1} - \alpha_{n-1} Av_{n-1}$$

Pour $j < n$, on a

$$(r_n, r_j) = (r_{n-1}, r_j) - \alpha_{n-1}(Av_{n-1}, r_j) = 0 \quad si \quad j \neq n-1$$

et

$$(r_n, r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_{n-1}) - \frac{(r_{n-1}, r_{n-1})}{(v_{n-1}, Av_{n-1})}(Av_{n-1}, r_{n-1})$$
$$= 0 \quad car \quad (Av_i, r_i) = (Av_i, v_i)$$

r_n est orthogonal à tous les $r_i, i = 0, \ldots, n-1$; $\mathbb{R}^n$ étant de dimension n, il faut

$$r_n = 0$$

x_n est donc la solution de (1).

Scanné avec CamScanner

LICENCE DE MATHEMATIQUES
U.V.L2: ANALYSE NUMERIQUE I
TD $N°$ 4 (Indications de) correction

Indication pour l'exercice 1

1.

$$\tau(t,y,h) = \frac{y(t+h)-y(t)}{h} - \phi(t,y(t),h) = \textit{d'après lformule de Taylor}$$
$$= y'(t) + \frac{h}{2}y''(t) - \phi(t,y;0) - h\frac{\partial\phi}{\partial h}(t,y;0)$$
$$+O(h^2)$$

Or $y'(t) = f(t,y(t))$ *et* $y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + y'(t)\frac{\partial\partial\phi}{\partial t}$;

$$\phi(t,y;0) = f(t,y(t))$$

Or de plus $\frac{\partial\phi}{\partial h}(t,y;h)\frac{1}{2}\partial_t f(.) + f.\frac{1}{2}\partial_y f(.)$
et

$$\frac{\partial\phi}{\partial h}(t,y;0) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}.f.\frac{\partial f}{\partial y}$$

donc

$$\tau(t,y;h) = f + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{h}{2}f\frac{\partial f}{\partial y} - f - \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t}$$
$$-\frac{h}{2}f\frac{\partial f}{\partial y} + O(h^2) = O(h^2)$$

2. *La solution vaut* $y(t) = y_0 - a(t^2 - t_0^2)$.
Calculons la solution approchée; $f(t,y) = -aat$

$$\eta_{i+1} = \eta_i + h\phi(t_i,\eta_i;h)$$
$$= \eta_i + h(-2a(t_i + \frac{h}{2}))$$
$$\eta_i - 2ah(t_i + \frac{h}{2})$$

et $\eta_0 = y_0$.
Donc

$$\eta = \eta_0 - \sum_{k=0}^{i-1} 2ah(t_k + \frac{h}{2}) \quad or \quad \eta_0 = y_0 \quad et \quad t_k = t_0 + kh$$
$$= y_0 - \sum_{k=0}^{i-1} 2ah(t_0 + (k+\frac{1}{2})h)$$
$$= y_0 - 2ah(it_0 + \frac{ih}{2} + \frac{i(i-1)}{2}h)$$
$$= y_0 - 2ahi(t_0 + \frac{ih}{2})$$
$$= y_0 - a(i^2h^2 + 2iht_0)$$
$$= y_0 - a((t_0+ih)^2 - t_0^2) = y(t_i) \quad cat \quad t_i = t_0 + ih$$

On a bien calculé la solution exacte.

Scanné avec CamScanner

3. $y' = \lambda y$ *et* $y(0) = 1$. *La méthode d'Euler explicite donne avec* $f(t,y) = \lambda y$,

$$\eta_{n+1} = \eta_n + h\lambda(\eta_n + \frac{h}{2}\lambda\eta_n) = (1 + h\lambda + \frac{h^2}{2}\lambda^2)\eta_n$$

et $\eta_0 = 1$ *donc*

$$\eta_n = (1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2})^n$$

$$\eta_n \mapsto 0 \quad ssi \quad |1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2}| < 1$$

c-à-d ssi $-1 < 1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} < 1$
c-à-d. ssi $-2 < h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} < 0$
On pose $x = h\lambda$
On étudie la fonction $f(x) = x + \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2}(x+2)$. *On obtient donc* $-2 < f(x) < 0$ *ssi* $-2 < x < 0$
Donc

$$\eta_n \mapsto_{n\to\infty} 0 \quad ssi \quad -2 < h\lambda < 0$$

Indication pour l'exercice 2

A) *a) Les valeurs propres de A sont* $\lambda_1 = hL + \sqrt{1 + h^2L^2}$ *et* $\lambda_2 = hL - \sqrt{1 + h^2L^2}$ *donc le rayon spectrul est* $\rho(A) = hL + \sqrt{1 + h^2L^2}$.

$$\begin{aligned}\rho(A) &= hL + \sqrt{1 + h^2L^2} \\ &\leq hL + \sqrt{1 + h^2L^2 + \frac{h^4L^4}{4}} \\ &\leq \qquad\qquad\qquad\qquad + hL + \frac{h^2L^2}{2} \\ &\leq e^{hL}\end{aligned}$$

donc $\rho(A) \leq e^{hL}$.

b) L'inégalité de récurrence peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} \theta_{n+1} \\ \theta_n \end{pmatrix} \leq A \begin{pmatrix} \theta_n \\ \theta_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

A est symétrique $\|A\|_2 = \rho(A) \leq e^{hL}$ *donc on a:*

$$\sqrt{\theta_{n+1}^2 + \theta_n^2} \leq e^{hL}\sqrt{\theta_n^2 + \theta_{n-1}^2} + \alpha_n.$$

c) En posant $u_n = \sqrt{\theta_n^2 + \theta_{n+1}^2}$
on a: $u_{n+1} \leq e^{hL}u_n + \alpha_n$. *(Voir le cours)*

$$\theta_n \leq \sqrt{\theta_n^2 + \theta_{n-1}^2} \leq e^{(n-1)hL}\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k e^{(n-1-k)hL}.$$

(scanné avec CamScanner)

B) a) En appliquant lr théorème de Taylor avec reste de Mac-Laurin

$$y(t_1) = y(0) + hy'(0) + \frac{h^2}{2}y''(\theta h) \quad 0 < \theta < 1$$

$$|y(t_1) - y(0) - hy'(0)| < \frac{h^2}{2}M_2$$

et pour $x \geq 1$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(\theta h)$$
$$y(t_{n-1}) = y(t_n) - hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) - \frac{h^3}{3!}y'''(\theta_1 h)$$
$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + 2hy'(t_n) + \frac{2h^3}{3!}(y'''(\theta h) + y'''(\theta_1 h))$$
$$|\varepsilon_n = |y(t_{n+1}) - y(t_{n-1}) - 2hf(t_n, y(t_n))| \leq \frac{h^3}{3}M_3.$$

b) Pour $n \geq 1$ $y(t_{n+1}) = y(t_{n-1}) + 2hf(t_n, y(t_n)) + \varepsilon_n$ *et* $y_n + 1 = y_{n-1} + 2hf(t_n, y_n)$. *En posant* $V_n = |y(t_n) - y_n|$, *on en déduit la majoration* $V_{n+1} \leq V_{n-1} + 2hLV_n + |\varepsilon_n|$ *et donc, d'après la partie* $A - c$),

$$Pour \quad n \geq 2 \quad V_n \leq e^{(n-1)hL}\sqrt{V_1^2 + V_0^2} + \sum_{i=1}^{n-1}|\varepsilon_i|e^{(n-1-i)hL}.$$

En remarquant que

$$V_0 = y(0) - y_0 = 0$$
$$V_1 = y(t_1) - y_1 = \varepsilon_0$$

En utilisant la majorations obtenues en a) on obtient, pour tout $n \in \{0,1,2,....,N\}$

$$V_n \leq \frac{h^2}{2}M_2e^{(n-1)hL} + \frac{h^3}{3}M_3 \sum_{i=1}^{(n-1-i)hL}$$
$$V \leq \frac{h^2}{2}M_2e^{TL} + \frac{h^3}{2}M_3\frac{e^{TL} - 1}{e^{hL} - 1}.$$
$$V_n \leq h^2(\frac{M_2}{2}e^{TL} + \frac{M_3}{3}\frac{e^{TL} - 1}{L}) \quad car \quad \frac{1}{e^X - 1} \leq \frac{1}{X} \quad pour\ tout \quad X > 0$$

C'est à dire $\max_{0 \leq n \leq N}|y(t_n) - y_n| \leq Ch^2$ *avec* $C = \frac{M_2}{2}e^{TL}.\frac{M_3}{3}.\frac{e^{TL}-1}{L}$.

Indication pour l'exercice 3

1. *Pour avoir l'ordre le plus élevé possible il faut que la formule coïncide avec le développement de Taylor de* y_{i+1} *au voisinage de* t_i *le plus loin possible. Ecrivons ce développement*

$$y_{n+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2!}y_i'' + \frac{h^3}{3!}y_i''' + ... = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}(\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y})_i$$
$$+\frac{h^3}{3!}[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y})]_i + ...(2)$$

Scanné avec CamScanner

Développons k_1 au voisinage de (y_i,t_i)

$$k_1 = hf_i+2k_0h(\frac{\partial f}{\partial y})_i+\lambda h^2(\frac{\partial f}{\partial t})_i+\frac{\lambda^2k_0^2}{2}h(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})_i+\lambda^2k_0h^2(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial t})_i+\frac{\lambda^2h^3}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2})_i+O(h^4)$$

La formule (1) s'écrit donc

$$y_{n+1} = y_i + (\alpha_0+\alpha_1)hf_i+\alpha_1\lambda h^2(f\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t})_i + \alpha_1\frac{\lambda^2h^3}{3}(f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2f\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2})_i+O(h^4) \quad (3)$$

Commparons (2) et (3). Il vient

$$\left|\begin{array}{rcl}\alpha_0 + \alpha_1 &=& 1\\ \alpha_1\lambda &=& \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Soit

$$\left|\begin{array}{rcl}\alpha_0 &=& 1 - \frac{1}{2\lambda}\\ \alpha_1 &=& \frac{1}{2\lambda}\end{array}\right.$$

D'où

$$y_{i+1} = y_i + (1-\frac{1}{2\lambda})hf_i + \frac{h}{2\lambda}f(y_i+\lambda hf_i,t_i+\lambda h).$$

2. *D'après les expressions (2) et (3) de y_{i+1} l'erreur par pas ε s'écrit*

$$\varepsilon = \frac{h^3}{3!}[y_i''(1-\frac{3\lambda}{2})+\frac{3\lambda}{2}y_i''(\frac{\partial f}{\partial y})_i]+....$$

car

$$y_i'' = (f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2f\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial t}+f\frac{\partial f}{\partial y}))_i$$
$$= (f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2f\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2})+(\frac{\partial f}{\partial y})_iy_i''$$

3. *a)* $\lambda = \frac{1}{2}$

$$y_{i+1} = y_i + hf(y_i+\frac{hf_i}{2},t_i+\frac{h}{2}) \quad \textit{Méthode de la tangente améliorée}$$

$$\varepsilon = \frac{h^3}{24}[y_i''' + 3y_i''(\frac{\partial f}{\partial y})_i]+....$$

b) $\lambda = 1$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f_i+hf_i,t_i+h)] \quad \textit{Méthode d'Euler-Cauchy}$$

$$\varepsilon = \frac{h^3}{12}[-y_i''' + 3y_i''(\frac{\partial f}{\partial y})_i]+....$$

c) $\lambda = \frac{2}{3}$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}[f_i+3f(y_i+\frac{2}{3}hf_i,t_i+\frac{2}{3}h)] \quad \textit{Méthode de Heun}$$

$$\varepsilon = \frac{h^3}{6}y_i''(\frac{\partial f}{\partial y})_i+...$$

Scanné avec CamScanner

Indication pour l'exercice 4

1) Soit x solution du problème de Cauchy (1). Montrons par récurrence que

$$x^{(n+1)}(t) = f^{(m)}(x(t),t).$$

Pour $m = 0$, on a $x^{(1)}(t) = f(x(t),t) = f^{(0)}(x(t),t)$.
Supposons que

$$x^{(p+1)}(t) = f^{(p)}(x(t),t) \quad pour \quad p = 0,...,m$$

et calculons $x^{(m+2)}(t)$. On a

$$\begin{aligned} x^{(m+2)} &= \partial_1 f^{(m)}(x(t),t)x'(t) + \partial_2 f^{(m)}(x(t),t) \\ &= \partial_1 f^{(m)}(x(t),t)f(x(t),t) + \partial_2 f^{(m)}(x(t),t) \\ &= f^{(m+1)}(x(t),t) \end{aligned}$$

2) On a

$$f^{(1)} = \partial_2 f + (\partial_1 f)f \quad et \quad f^{(2)} = (\partial_1 f^{(1)})f + (\partial_1 f)(\partial_2 f).$$

3) Dans le cas $p = 1$, on a $\psi\psi_p(y,t,h) = f(y,t)$ et donc le schéma (3) s'écrit

$$\begin{cases} x_0 &= \bar{x}_0 \\ x_{k+1} &= x_k + hf(x_k,t_k), \quad pour \quad k = 0,...,n \end{cases}$$

On reconnaît le schéma d'Euler explicite.

4)-1 a/ Puisque $f(y,t) = y$, on a $f^{(k)} = f$ pour tout k, et donc

$$\psi_p(y,t,h) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{h^j}{(j+1)!} f(t,y)$$

4.b/ Par definition

$$\begin{aligned} x_1 = \bar{x}_0 + hf(\bar{x}_0,0) &= \bar{x}_0 + h\sum_{j=0}^{p-1} \frac{h^j}{(j+1)!}\bar{x}_0 \\ &= 1 + h\sum_{j=0}^{p-1} \frac{h^j}{(j+1)!} = \sum_{j=0}^{p} \frac{h^j}{(j+1)!} \end{aligned}$$

Supposons que

$$x_p = (\sum_{j=0}^{p} \frac{h^j}{j!})^k \quad pour \quad k = 1,...,l,$$

et montrons que cette relation est encore vérifiée au rang $l+1$. On a bien

$$x_{l+1} = x_l + h\sum_{j+0}^{p-1} \frac{h^j}{j!}x_l = \sum_{j=0}^{p} \frac{h^j}{j!}x_l,$$

Ce qui termine la récurrence.

Scanné avec CamScanner

4.c/ Comme x est solution de (1) pour $f(y,t) = y$ et $\bar{x}_0 = 1$, on a évidemment

$$x(t) = e^t, \quad \text{et donc} \quad x(t_k) = e^{hk}.$$

Le résultat de la question 4.b/ permet de déduire que

$$x_k = (\sum_{j=0}^{p} \frac{h^j}{j!})^k = (e^h - R(h))^k,$$

avec $0 < R(h) < e^h \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}$. On a donc

$$x_k = e^{kh}(1 - \frac{R(h)}{e^h})^k = e^{kh}(1-a)^k$$

avec $a = \frac{R(h)}{e^h} \in]0,1[$. On en déduit que

$$0 \leq \bar{x}_k - x_k \leq e^{kh}(1-(1-a)^k).$$

Comme $k \geq 1$ et $a \in]0,1[$ on en déduit (par récurrence sur k) qu $(1-a)^k \geq 1 - ka$.
On a donc

$$0 \leq \bar{x}_k - x_k \leq kae^{kh} \leq ke^{t_k} \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \leq t_k e^{t_k} \frac{h^p}{(p+1)!}$$

Indication pour l'exercice 5

1) Le système est dit stable si $\varphi(Y) \to 0$ lorsque $t \to \infty$, calculons Y.
Pour cela considérons la base des vecteurs propres de A (A diagonalisable) qui nous donne la matrice B.
Posons $Y = BZ$, alors $Y' = BZ$; le système (1) s'écrit alors

$$Z' = B^{-1}ABZ$$

où $B^{-1}AB$ est la matrice diagonale des valeurs propres de A. D'où

$$Z_k' = \lambda_k = Z_k$$

Soit

$$Z_k = C_k e^{\lambda_k t} \quad (C_k = \text{constante})$$

il vient donc

$$Y_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} C_k e^{\lambda_k t}$$

Une condition nécessaire et suffisante de stabilité est donc

$$\mathcal{R}(\lambda_k) < 0$$

Scanné avec CamScanner

2) *Si l'on cherche une solution de*

$$y_{n+1} = P(Ah)y_n.$$

de la forme

$$y_n = r^n v \qquad v \in \mathbb{R}^n$$

il vient

$$rv = P(Ah)v$$

r et v sont donc une valeur propre de $P(Ah)$ et le vecteur propre correspondant. Décomposons y_0 sur la base des vecteurs propres de $P(Ah)$ (Si $P(Ah)$ est diagonalisable à valeurs propres réelles)

$$y_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

$$y_1 = P(Ah)y_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i v_i$$

$$y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i^{n+1} v_i.$$

Si λ_i est valeur propre de A, $P(Ah)$ étant un polynôme en Ah

$$r_i = P(\lambda_i h)$$

Pour que la solution approchée soit stable lorsque $n \to \infty$ (h constant) il faut et il suffit que

$$|r_i| < 1 \quad soit \quad |P(\lambda_i h)| < 1 \quad pour \quad i = 1,...,n$$

C'est-à-dire

$$\rho(P(Ah)) = \max_{i=1,...,n} |P(\lambda_i h) < 1$$

Le rayon de stable est donc donné par la plus grande valeur de $|z_0| = |\lambda h_0|$ telle que

$$|P(z)| < 1 \quad \forall z \in]z_0,0]$$

(z_0 est négatif puisque les λ_i sont négatifs d'après (1)).

3) *Une forme de rang q et d'ordre 1 s'écrit*

$$y_{n+1} = P(Ah)y_n$$

avec

$$P(z) = 1 + z + a_2 z^2 + ... + a_q z^q$$

Il faut donc trouver un polybôme $P(z)$ de degré q tel que $|P(z)| < 1$ sur le plus grand intervalle possible $]z_0,0]$.
Une telle solution est fournie par les polynômes de Chebyshev $T_n(x)$: le polynôme $T_q(x)$ de degré q est tangent $q+1$ fois aux droites -1 et $\hat{1}$ sur l'intervalle $[-1,1]$.
Il faut donc ramener l'intervalle $[-1,1]$ à l'intervalle $[z_0,0]$.
Il vient

$$x = \frac{2z}{z_0} + 1$$

Scanné avec CamScanner

Donc

$$P(z) = T_q(\frac{2z}{z_0} + 1)$$

D'après la définition de $P(z) = 1 + z + a_2z^2 + ... + z_qz^q$ *nous devons avoir*

$$P(0) = 1$$
$$P'(0) = 1$$

C'est-à-dire

$$T_q(1) = 1 \quad (toujours\ réalisé)$$

et

$$P'(0) = T_q'(1)\frac{2}{z_0} = 1$$

Or les polynômes Chebyshev satisfont à l'équation différentielle [2.30]

$$(1 - x^2)T_q''(x) - xT_q'(x) + q^2T_q(x) = 0$$

Donc

$$T_q'(1) = q^2$$

Il vient donc

$$z_0 = 2q^2$$

Le rayon de stabilité est donc donné par $z = 2q^2$.
La formule qui a le plus grand rayon de stabilité est

$$y_{n+1} = T_q(-\frac{Ah}{q^2} + 1)y_n$$

Scanné avec CamScanner

TD Variable complexe :

Exercice 1 : Rayon de convergence.

(1) $A_n = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$ avec $a_n = \frac{n!}{n^n}$

On a: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e^{n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$

En appliquant d'Alembert on trouve:
le rayon est $R = e$.

(2) $B_n = \sum_{n\geq 0} U_n(z)$ avec $U_n(z) = n! z^{n^2}$

$$\left|\frac{U_{n+1}(z)}{U_n(z)}\right| = (n+1) e^{2n+1 \ln|z|}.$$

Si $|z| = 1$ alors $\ln|z| = 0$

$\Rightarrow \lim_{+\infty} \left|\frac{U_{n+1}(z)}{U_n(z)}\right| = +\infty$

si $0 < |z| < 1$ alors $\ln|z| < 0$

$\Rightarrow \lim_{+\infty} \left|\frac{U_{n+1}(z)}{U_n(z)}\right| = 0$

Si $|z| > 1$

Alors $\lim_{+\infty} \left|\frac{U_{n+1}(z)}{U_n(z)}\right| = +\infty$

On a: $\lim_{+\infty} \left|\frac{U_{n+1}(z)}{U_n(z)}\right| = 0 < 1$ pour $|z| < 1$

(Scanné avec CamScanner)

Alors le rayon de convergence de cette série est $R = 1$.

(3) Appliquer d'Alembert

(4) Appliquer Cauchy.

Exercice 2 : Soit la série $\sum a_n z^n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{5^n}{2} - 4n + 1$.

(1) Rayon de convergence.

* Montrons d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$.

Supposons $\exists i \in \mathbb{N} \mid a_i = 0$

$\Rightarrow \frac{5^i}{2} - 4i + 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{5^i}{2} + 1 = 4i$ (Chose absurde car $\frac{5^i}{2} + 1 \notin \mathbb{Z}$ mais $4i \in \mathbb{Z}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$.

Soit les série $B_n = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ et $C_n = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$

avec $b_n = \frac{5^n}{2}$ et $c_n = 1 - 4n$.

On a : $\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \frac{\frac{5^{n+1}}{2}}{\frac{5^n}{2}} = 5$

Ainsi $R_1 = 1/5$ est le rayon de convergence de la série B_n.

Scanné avec CamScanner

On a: $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1 + \frac{4}{1-4n} \xrightarrow[+\infty]{} 1$

Ainsi $R_2 = 1$ est le rayon de convergence la serie C_n.

Soit R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.

On a par definition $R = \min\{R_1, R_2\}$

$R = \min\{\frac{1}{5}, 1\} = \frac{1}{5}$

Soit $R = \frac{1}{5}$.

(2) la somme. S de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$

On a par definition:

~~$S = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k} a_k z^k$~~

$\forall |z| < R = \frac{1}{5}$, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{5^n}{2} - 4n + 1\right) z^n$

$\Rightarrow \sum a_n z^n = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(5z)^n - 4\sum_{n\geq 0} n z^n + \sum_{n\geq 0} z^n$

On a: $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(5z)^n - 4\sum_{n\geq 0}(n+1) z^n + 5\sum_{n\geq 0} z$

On a: $\sum_{n\geq 0}(5z)^n = \frac{1}{1-5z}$; $\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$

Scanné avec CamScanner

et $\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$

Ainsi : $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-5z}\right) - \frac{4}{(1-z)^2} + \frac{5}{1-z}$,

$$\sum a_n z^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-5z}\right) + \frac{1-5z}{(1-z)^2}.$$

Exercice 3.

(1) Rayon de convergence

Posons $A_n = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a_n = \frac{1}{n!}$

On a : $\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right| = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$ ($n \to +\infty$)

Donc le rayon de convergence est $+\infty$.

(2) On donne $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

et $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

On a : $|\cos^2 z| = |\cos z|^2 = \cos z \cdot \overline{\cos z}$

Ainsi $\forall z \in \mathbb{C}$,

$|\cos^2 z| + |\sin^2 z| = 1 \Leftrightarrow \cos z \cdot \overline{\cos z} + \sin z \cdot \overline{\sin z} = 1$ (E)

Posons $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \cos z = \frac{e^{ia-b} + e^{-ia+b}}{2} = \frac{e^{ia}.e^{-b} + e^{-ia}.e^{+b}}{2}$$

$$\rightarrow \overline{\cos z} = \frac{e^{-ia}.e^{-b} + e^{ia}.e^{+b}}{2}$$

Paroillement :

$$\sin z = \frac{e^{ia}e^{-b} - e^{-ai}.e^{b}}{2i} \quad \text{et} \quad \overline{\sin z} = \frac{e^{-ia}.e^{-b} - e^{ai}.e^{b}}{-2i}$$

Après remplacement et développement dans (I)
On trouve :

$$|\cos^2 z| + |\sin^2 z| = 1 \iff \frac{e^{-2b} + e^{2b}}{2} = 1$$

$$\iff \frac{1}{2} + \frac{(e^{2b})^2}{2} = e^{2b}$$

$$\iff (e^{2b})^2 - 2e^{2b} + 1 = 0$$

$$\iff X^2 - 2X + 1 = 0 \text{ avec } X = e^{2b}$$

$$\iff (X-1)^2 = 0$$

$$\iff X = 1$$

$$\iff e^{2b} = 1$$

$$\iff 2b = 0 \text{ d'où } b = 0$$

Donc $z = a + ib$ avec $b = 0$

D'où z est réel, □

Scanné avec CamScanner

Exercice 4

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0.

- Supposons qu'il existe une telle fonction f qui verifie $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$

Posons $g(z) = f(z) - z$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$

Comme f est analytique alors f est continue D'où $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = f(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}) = f(0)$

On a: $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Donc $f(0) = 0$ et $g(0) = f(0) = 0$

Ainsi $\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ est un ensemble de zeros de g.

g est analytique car les fonctions f et $z \mapsto z$ sont analytiques

$\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ est infini.

D'après le principe des zéros isolé $g \equiv 0$

or $g(-\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \neq 0$ ce qui est absurde.

Donc il n'existe pas de fonction telle que $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$.

Scanné avec CamScanner

Exercice 6

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto f(z)$ | $f \in \mathcal{H}(U)$

Posons $z = x + iy \in U \subset \mathbb{C}$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

tel que $f(z) = f(x+iy) \in \mathbb{C}$

alors $f(z) = Re(f(z)) + i\,Im(f(z))$

$\Rightarrow f(z) = Re\,f + i\,Im\,f$.

Posons $\begin{cases} P(x,y) = Re\,f \\ Q(x,y) = Im\,f \end{cases}$

tel que $Q(x,y) = P(x,y)^2$

Comme $f \in \mathcal{H}(U)$ alors elle vérifie les conditions de Cauchy.

i-e : $\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} & (1) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} & (2) \end{cases}$

Comme $Q = P^2$

(1) devient $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial P^2}{\partial y}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial x} = 2P \dfrac{\partial P}{\partial y}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial x} = -2P \dfrac{\partial P^2}{\partial x}$ car (2)

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = -4P^2 \frac{\partial P}{\partial x}$

Soit $\frac{\partial P}{\partial x}(1+4P^2) = 0$

Soit $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ car $1+4P^2 \geq 1$

Alors P est soit une constante, soit fonct° de y.

De plus comme $Q = P^2$

(2) devient : $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial P^2}{\partial x}$

On trouve : $\frac{\partial P}{\partial y}(1+4P^2) = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 0$

Ainsi $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = 0$

Donc $P = Re(f)$ est constant sur l'ouvert connexe U de $\mathbb{C}$.

On en déduit de là successivement que

- f est constante sur Ω
- $|f|$ est constante sur Ω
- $\overline{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$

grâce au théorème de l'ouvert connexe.

Scanné avec CamScanner

Ainsi on conclut que les applications f définie sur U un ouvert connexe à valeur dans $\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im} f = (\mathbb{R} \circ f)^2$ et $f \in \mathcal{H}(U)$ sont les applications Constante f définie par :

$$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f(z) = \alpha + i\alpha^2 \quad , \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7

Montrons que $\forall z \in U$,

$$f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \mid f(z) = cg(z)$$

* Supposons que $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ et posons $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$
$$z \longmapsto h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

On voit que $h \in \mathcal{H}(U)$ car par hypo $f, g \in \mathcal{H}(U)$

On a : $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)} \cdot \dfrac{\overline{g(z)}}{\overline{g(z)}}$ car $g(z) \neq 0$

Scanné avec CamScanner

Soit $h(z) = \dfrac{f(z)\cdot\overline{g(z)}}{g(z)\cdot\overline{g(z)}}$

On sait que par hypo. $f(z)\cdot\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$

et $g(z)\cdot\overline{g(z)} = |g(z)|^2 \in \mathbb{R}$

Ainsi $h(z) \in \mathbb{R}$

Donc $\mathrm{Im}(h) = 0$ cste

et Comme $h \in \mathcal{H}(U)$ et U est un ouvert connexe sur $\mathbb{C}$, alors h est Constante

i.e $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tel que $h(z) = c \;\forall z \in \mathbb{C}$

Ona! $c = h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$.

$\Rightarrow f(z) = c\, g(z) \;\forall\, z \in U.$

Scanné avec CamScanner

Exercice 8

Montrons que $\forall z \in U$

$f(z) : \overline{g(z)} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ tq $f(z) = c + g(z)$

Supposons $f, g \in \mathcal{H}(U)$ tq

$f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$

Alors l'application $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longmapsto h(z) = f(z) - g(z)$

est holomorphe sur U.

On a $h(z) = f(z) - g(z) - \overline{g(z)} + \overline{g(z)}$

$h(z) = \left(f(z) + \overline{g(z)}\right) - \left(g(z) + \overline{g(z)}\right)$

On a : $\begin{cases} f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R} & \text{par def} \\ g(z) + \overline{g(z)} = 2\,Re(g) \in \mathbb{R} \end{cases}$

Ainsi $h(z) \in \mathbb{R}$

Donc $Im\, h = 0 = const$.

Comme U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ alors h est constante

i.e $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tel que $h(z) = c \ \forall z$

$\Rightarrow f(z) = c + g(z) \ \forall z \in U$

Scanné avec CamScanner

Exercice 9

(Utiliser Cauchy car $f \in \mathcal{H}(U)$)

Exercice 10 : Voir examen corrigé 2018-2019

Exercice 11

⚠ Erreur dans l'énoncé : c'est plutôt $0 \notin \text{Im}\gamma_1 \cup \text{Im}\gamma_2$.

(1) Vérifions que γ est un chemin fermé et que $0 \in \text{Im}\gamma$

Puisque γ_1 et γ_2 sont des chemins donc de classe C^1 par morceaux sur $[0,1]$ Il vient alors que γ^m et γ^n soit C^1 par morceaux. Par conséquent $\gamma = \gamma_1^m \gamma_2^n$ est de classe C^1 par morceaux sur $[0,1]$. D'où γ est un chemin.

γ_2 fermé $\Rightarrow \gamma_2(0) = \gamma_2(1)$

de même $\gamma_2(0) = \gamma_2(1)$

Scanné avec CamScanner

Ainsi $\gamma(0) = [\gamma_1(0)]^m [\gamma_2(0)]^n$

$= [\gamma_1(1)]^m [\gamma_2(1)]^n = \gamma(1)$

D'où γ est fermé.

+ Supposons que $0 \in \mathrm{Im}\,\gamma$

Alors $\exists\, t_0 \in [0,1]$ tel que $\gamma(t_0) = 0$

$\gamma(t_0) = 0 \Rightarrow [\gamma_1(t_0)]^m [\gamma_2(t_0)]^n = 0$

$\Rightarrow \gamma_1(t_0) = 0$ ou $\gamma_2(t_0) = 0$

$\Rightarrow 0 \in \mathrm{Im}\,\gamma_1$ ou $0 \in \mathrm{Im}\,\gamma_2$

$\Rightarrow 0 \in \mathrm{Im}\,\gamma_1 \cup \mathrm{Im}\,\gamma_2$

Ce qui est contradictoire à notre hypothèse selon laquelle $0 \notin \mathrm{Im}\,\gamma_1 \cup \mathrm{Im}\,\gamma_2$

Ainsi $0 \notin \mathrm{Im}\,\gamma$.

(2) $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$ en fonction de $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0)$ et $\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0)$.

Comme $0 \notin \mathrm{Im}\,\gamma$, alors on a :

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt$$

Scanné avec CamScanner

Calculons $\dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$

Après calcul on trouve :

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = m\,\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)} + n\,\frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2i\pi}\int\left(m\,\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)} + n\,\frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)}\right)dt$$

$$= m\left(\frac{1}{2i\pi}\int\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)}dt\right) + n\left(\frac{1}{2i\pi}\int\frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)}dt\right)$$

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = m\,\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) + n\,\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0)$$

Scanné avec CamScanner

TD Bases de données

Dr Seka Louis-Paul LMD/CSC

Seance 05 juillet 2016

EXERCICE 1

a) Modèle conceptuel de données avec le formalisme entité - Association

En effet l'exercice est fait dans le cadre de la conception d'un modèle de données. Pour se faire parlons du dictionnaire de données.

une et une seule édition ; contrainte lié à la cardinalité

Dictionnaire de données

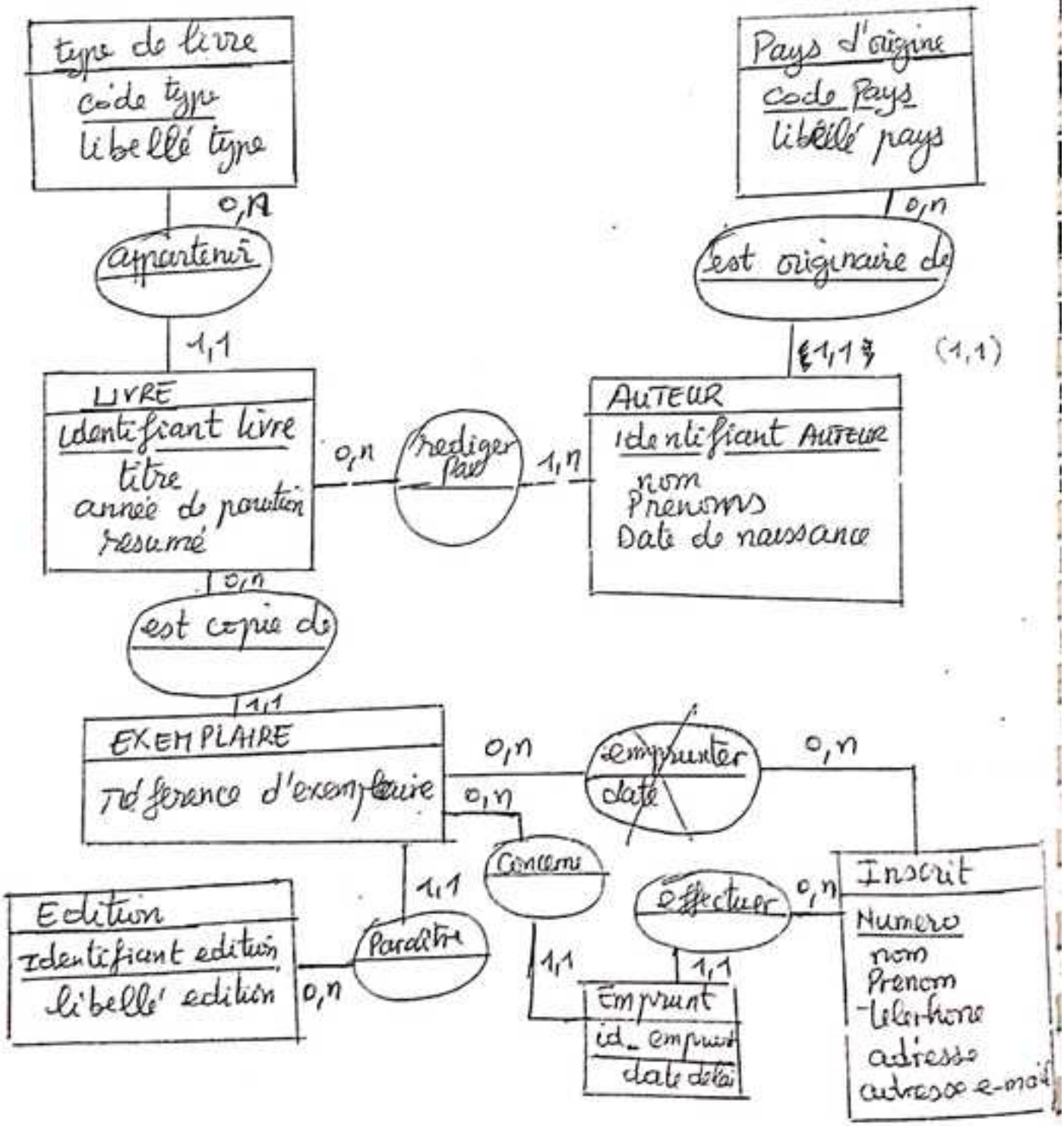
Information	code	type	contrainte
Titre du livre	LIV-TITRE	Chaine de caractère	
L'année de parution	LIV-ANNEE	ENTIER/DATE	
Resumé du livre	LIV-RESUME	TEXTE	
Type du livre		Chaîne de caractère	roman, Poesie ...
Nom de l'auteur	AUT-NOM	chaîne de caractère	
Prénom de l'auteur	AUT-PRNOM	chaîne de caractère	
Date de naissance de l'auteur		ENTIER/DATE	
Pays d'origine		chaîne de caractère	
Référence d'exemplaire		Chaîne de caractère	lettres + chiffres
edition		chaîne de caractère	
Numero de l'inscrit		Chaîne de caractère	
Nom de l'inscrit		"	
Prenom de l'inscrit		"	
Telephone de l'inscrit		ENTIER	
Adresse e-mail de l'inscrit		chaîne de caractère	
Adresse de l'inscrit		chaîne de caractère	
Date de l'emprunt		ENTIER/DATE	
Delai accordé		ENTIER	En jour

Scanné avec CamScanner

10.08.2020

Entité

- Auteur
- livre
- l'inscrit
- Edition
- Emprunt
- type de livre
- Pays d'origine



Scanné avec CamScanner

10.08.2016
12.07.2016

6/ Transcription du modèle Entité_Association obtenu en relationnel.

Pays d'origine (code pays , libelle Pays)
type du livre (code type , libellé)
Inscrit (Numero , ---)
~~Edition (Numero, ---)~~
Edition (Id_edition, ---)
Auteur (Id_auteur , # code_pays , nom, ---)
redigé par (# id_auteur , # identifiant livre, #) code_pays)
livre (identifiant livre , # code type, ---)
Exemplaire (reference , # identifiant livre , # id_edition, ---)
Emprunt (Id_emprunt, # reference , # Numero, - #Code

Exercice 2 : Langage SQL

U (Num U , Nom U, Ville U)
P (Num P , Nom P, Couleur, Poids)
F (Num F, Nom F, Statut , Ville F)
PUF (# Num P , # Num U, # Nom F, Quantité)

très important

Expressions en SQL

1/ Insert into F values (15, "YAPI", "sous_traitant", "Abidjan");
2/ Delete from P where couleur = "Noir", AND Num P >= 100
AND Num P <= 1999 ;
3/ Update F set Ville F = "Toulouse" Where Num F = 3;
4/ Select Num U , Nom U, Ville U, from U;
Select * from U;
5/ Select * from U where Ville U = "Paris";
6/ Select Num F from PUF Where Num U = 2 AND Num P = 100;

Scanné avec CamScanner

7/ 19.08.2020 Ici il faut faire une jointure en s'assurant qu'il n'y a pas de doublons des éléments en commun.

09/08/2016 on prend P et PUF pour avoir le nom et la couleur des produits

```
Select NomP, Couleur From P, PUF
  Where P.NumP = PUF.NumP AND NumF = 2;
```

une autre manière de le faire.

sous-requette

```
Select NomP, couleur From P where NumP in
(Select NumP From PUF where NumF = 2);
```

sous-requette

exemple d'application

P

NumP	NomP	couleur	Quantité
2	JAVEL	JAUNE	1
3	SUCRE	BLANC	2
7	LAIT	BLANC	5

PUF

NumP	NumU	NumF	Quantité
2	1	2	6
1	2	3	5
3	1	2	10

Pour la sous requette on obtient (2;3)

Le resultat final est 1/ JAVEL, JAUNE
2/ SUCRE, BLANC

8/
```
Select NumF From P, PUF Where P.NumP = PUF.NumP
  AND NumU = 2 AND couleur = 'rouge';
```

sous-requette

```
Select NumF From PUF where NumP in
(Select NumP From P where couleur = 'rouge') AND
NumU = 2;
```


Scanné avec CamScanner

jointure

```
Select Nom F From F, P, U, PUF Where
    P.Num P = PUF. Num P AND
    U.Num U = PUF. Num U AND
    F. Num F = PUF. Num F AND
  Couleur = 'Rouge' AND (Ville U = 'Paris' OR
   Ville U = 'Créteil' ;
```

on fait nulle U.Ville U mais comme unique on écrit Ville U.

`Ville U = 'Paris' OR Ville U = 'Créteil' peut être remplacer par`

```
Ville U in ('Paris', 'Créteil') ;
```

Sous requette

```
Select Nom F From F Where Num F
  in ( select Num F From PUF Where Num P
    in (Select Num P From P where couleur = 'Rouge') AND
  Num U in ( Select Num U From U where Ville in ('Paris', 'Créte
    ) ;
```

19 jointure

```
Select Num P From U, F, PUF Where
    F. Num F = PUF. Num F AND
      Ville U = Ville F ;
```

-M/

```
Select Num P From U, F, PUF Where
      F. Num F = PUF. Num F AND
      U. Num U = PUF. Num U AND
      Ville U = 'Paris' AND
      Ville F = 'Paris' ;
```

Sous requette

```
Select Num P From PUF Where Num U
  in (Select Num U From U Where Ville U = 'Paris')
AND Num F in (Select Num F From F Where Ville F = 'Paris'
```


Scanné avec CamScanner

12/ Exemple :

NumU	NomU	VILLEU	NumF	NomF
1	GEN	BOUAKE	4	TOTO
2	BLD	ABIDJAN	4	TOTO
1	GOD	BOUAKE	7	TATA
1	GOD	BOUAKE	8	BERY

Statut	VILLE F	NomP	Quant
	BOUAKE	1	
		2	
	BOUAKE		
	ABIDJAN	2	
	BOUAKE	3	

```
Select NumU FROM U, F, PUF Where
        F.NumF = PUF.NumF
        U.NumU = PUF.NumU
        Ville F != Ville U ;

Select distinct CONT x NumU FROM U, F, PUF Where
        F.NumF = PUF.NumF,
        U.NumU = PUF.NumU
        Ville F != Ville U
        AND CONT * < 3 ;

Select distinct NumU
        |
        |
        Ville F != Ville U
```

1 distinction de NumU
1

```
Select NumU,
        Group by NumU;
```

Sous requette :

```
Select NumU FROM PUF Where NumF. in (SELECT NumF
From F, U, PUF Where F.NumF = PUF.NumF AND U.NumU = PUF.NumU
  AND Ville != Ville U)
SELECT NUMU FROM U WHERE VILLEU not in (SELECT VILLE F FROM F);
```

13/

```
SELECT NumF From PUF Where Num 3 AND
        NumFIN
(SELECT VALDEURNO FROM PUF Where NumU = 8) AND NumU=3;
```


Scanné avec CamScanner

Select ;NumF From PUF Where NumU=3 AND NumF IN
DISTINCT (SELECT NumF FROM PUF Where NumU=2);

14) SELECT×NumU From PUF WHERE
NumP in (SELECT NumP FROM PUF WHERE NumF=3);

15) SELECT NumP FROM P WHERE Poids in (SELECT min(Poids)
FROM P);

16) SELECT NumF; avg(Quantité) FROM PUF group by
NumF;

17) SELECT NumU FROM U WHERE P.NumP = PUF
NumP AND F.NumF = PUF NumF AND
Couleur = "Rouge" AND VILLE = "Paris");

18) SELECT DISTINCT PUF.NumF FROM PUF, PUF PUF1,
PUF PUF2, P WHERE couleur = 'rouge' AND P.NumP = PUF2.N
NumF
AND PUF2.NumF = PUF1.NumF AND PUF1.NumP = PUF.NumF

Scanné avec CamScanner

19/02/2020 Description du modèle entité - Association en relationnel LMD/CSC

type de livre (code type, libellé type)
inscrit (numero inscrit, nom, prenom, téléphone, e-mail)
pays d'origine (code pays, libellé pays)
Edition (code edition, libellé edition)
exemplaire (référence, # code edition)
livre (code livre, # code type, titre, année de parution, resumé
compose (# code livre, # référence) # code edition
Auteur (code auteur, # code pays, nom, prenom, date de naissance
rediger (# code livre, # code auteur)
emprunt (code emprunt, # référence, # numero inscrit, date
delai) # code edition

PUF (# NumP, # NumU, # NumF, Quantité)
0010 1100 001C Pour le 14.
001C 1001 02AC

= ANY est la même chose que IN

Scanné avec CamScanner

Bibliography

[1] ENSEIGNANTS DE UFRMI, proposition de sujets d'examens ou de corrections

[2] LE VALIDEUR LMD LICENCE 3 EDITION 2019, *sur les anciens sujets de licence 3 de mathématique et Application*

[3] mathematiques-statistiques-et-probabilites

[4] algebre *SALIOU TOURE*

[5] analyse *edmond fedida*

[6] http://www.les-mathematiques.net

[7] http://www.sesamath.net

[8] Algebre et Geometrie PC-PSI-PT

[9] les grandes classques de mathématique -algebre et geometrie

[10] Precis MP complet

[11] Les LM360

[12] Klub prepa

[13] H-prepa Analyse pc

[14] H-PREPAS mathematiques-1re-annee-mpsi-tout-en-un

[15] LA PHYSIQUE EN FAC

[16] jean marie monier les-m-thodes-et-exercices-de-math-matiques-mpsi

Scanné avec CamScanner