Fomesoutra.com
ça soutra!

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET-BOIGNY DE COCODY

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union-Discipline-Travail

LE VALIDEUR LMD 2024

UFR DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE



LICENCE 2

SEMESTRE 1

- Intégrale généralisée
- Suite et Série de fonction
- Algèbre linéaire
- Algèbre bilinéaire
- Géométrie de l'espace
- Mécanique des systèmes
- Programmation Python

SEMESTRE 2

- Thermodynamique
- Probabilité Statistique
- Topologie
- Calcul différentiel
- Logiciel scientifique
- Anglais
- TP physique

Contact :
(+ 225) 05 75 05 70 52
(+ 225) 07 58 93 60 37

Nouvelle édition à avoir absolument
Collection Succès

Scanné avec CamScanner

Collection

Le VALIDEUR LMD

Sous la coordination de BOBET GOUALO VICTORIEN

Enseignant chercheur ESATIC Cote d'Ivoire Abidjan

VALIDEUR LMD 2024

L'équipe VALIDEUR LMD 2024 se dit heureuse de contribuer efficacement à la formation des futurs cadres de la nation. Nous remercions les enseignants de l'UFR mathématiques et informatique, ainsi que tous les membres du groupe renforcement VALIDEUR qui ont contribué à la mise en place du document.

EDITEUR
KOUASSI K DAVID

Scanné avec CamScanner

AVANT- PROPOS

Le VALIDEUR LMD est un recueil d'anciens sujets du système LMD, de propositions de corrections et des conseils absolument importants à savoir. Ce document a été confectionné dans le but d'aider les étudiants à valider efficacement leur crédit afin de passer en classe supérieur. L'avantage d'avoir ce document est qu'il vous servira de guide et qu'il vous permettra de rentrer dans la famille Valideur LMD.

La famille Valideur LMD prend en compte l'équipe Valideur et tous ceux qui ont acheté ce document. L'équipe Valideur est l'équipe qui est constituée d'aînés qui ont pour charge :

> De confectionner les documents (Valideur LMD) ;
> De coacher leurs cadets tant au niveau des stratégies de bosse que sur leurs projets professionnels ;
> La préparation de cours de renforcement pour améliorer davantage le niveau de chacun.

Sa mise à votre disposition vous permettra de vous imprégner du type de sujets auxquels vous pourriez être confrontés, des propositions de correction pour vous aider à avoir de très bonnes notes et d'un suivi de la part de vos ainés.

> La première partie de ce document présente quelques témoignages d'anciens et les opportunités qu'offre la filière.
> La seconde partie contient les sujets et propositions de corrections des années académiques antérieures.2018-2019-2020-2021-2022-2023

Vous avez des questions au sujet du VALIDEUR LMD ? Un point de cours qui vous résiste ? Une erreur que vous avez croisée dans l'ouvrage ? Voulez-vous intégrer l'équipe ? Ou vous voulez juste nous laisser un petit mot gentil ? Et bien n'hésitez pas à nous contacter. Nous nous ferons un plaisir de vous répondre dans les meilleurs délais : support@gvivaservices.com

L'ÉQUIPE VALIDEUR.

Scanné avec CamScanner

L'Univers Math Info

L'équipe Valideur LMD vous souhaite la bienvenue en Licence 2 de mathématique. Toutes nos Félicitations !

Rien de ci agréable de se voir admis en Licence 2. Pour ceux qui sont autorisés, ce n'est pas grave. Comme on le dit souvent mieux vaut avoir un peu que de ne rien avoir (mieux vaut être autorisé que de reprendre l'année).

Bref ; la venue en Licence 2 est une chose, une autre est de pouvoir y faire face à ce deuxième niveau du premier cycle Universitaire. Nous pouvons vous dire qu'avec la Licence 2, beaucoup de portes s'ouvre à vous. Pour pouvoir avoir des informations sur le comportement à avoir, sur les opportunités, Nous allons plus ou moins répondre à quelques questions.

♦♦♦ Quel est le niveau de difficulté de la Licence 2 ?

Evidemment le niveau de difficulté augmente par rapport à celui de la Licence 1. Certains ont tendance à penser que plus tu avances plus c'est facile. Ce n'est pas vraiment le cas. Seulement il faut savoir que pour celui qui a acquis le niveau Licence 1 en toute honnêteté n'a pas à se préoccuper. A vrai dire les cours deviennent de plus en plus volumineux.

♦♦♦ Comment surmonter ces difficultés ?

En premier lieux, il faut avoir confiance en soi. Ah oui !! Et recommander le reste à DIEU.
En deuxième lieux, apprendre ses cours au jour le jour puis ses travaux dirigés (vraiment important) et voir les anciennes compositions qui se trouvent dans ce document.
Lors des compositions, svp faite bien les exercices que vous choisissez. Même lorsque vous rencontrez un exercice que vous avez déjà traité, faite bien attention à la rédaction.
En troisième lieux travailler quelques fois en groupe *très important.* Attention ! Apprendre ses cours avant le travail en groupe ; sinon c'est inutile.

L'équipe VALIDEUR LMD 2024 se dit heureux de contribuer efficacement à la formation des futurs cadre de la nation.

L'équipe VALIDEUR LMD organise chaque année depuis 2015 des cours de soutien (autrement cours de renforcement de capacités) pour aider les étudiants de ladite UFR d'aborder sereinement l'année académique.

Scanné avec CamScanner

PREMIERE PARTIE

Bienvenu dans cette première partie innovante du document VALIDEUR LMD. Dans cette partie, il s'agira pour nous de vous donner cette propulsion à **votre projet professionnel**. Omniprésentes dans l'industrie – aérospatiale, imagerie, cryptographie..., ou dans les services-banques, assurances..., les mathématiques et l'informatique apparaissent aussi dans de nombreux autres secteurs : sondages, gestion des risques, protection des données...Elles interviennent dans notre vie quotidienne – télécommunication, transports, médecine, météorologie, musique...et contribuent à la résolution de problématiques actuelles : énergie, santé ; environnement, climatologie, développement durable...Pour renchérir de cette diversité des mathématiques informatiques auprès des étudiants de l'Université Félix Houphouët Boigny ; voici ci-après des témoignages d'anciens ayant effectués des études à l'UFR Math Info de ladite Université.

Bobet Goualo Victorien, Ingénicur de Conception en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication (STIC) de l'INP HB de Yamoussoukro après une L2 de l'UFR Math Info de l'UFHB et titulaire d'un Exécutive Master of Engineering Big Data & Data Science de ISAE ISM Paris. Actuellement Consultant Data auprès des entreprises et enseignant chercheur à l'Ecole Supérieure Africaine des TIC (ESATIC)

Votre orientation en mathématiques et informatique est l'un des meilleurs choix de filières. Alors n'oubliez pas d'avoir une idée de votre projet professionnel puis murir cette idée. Beaucoup de courage, ce n'est pas facile mais c'est possible car plusieurs ont pu le faire.

N'oubliez pas de vous approprier le **VALIDEUR LMD**, un document qui aide pour la validation des examens à travers des aperçus de la façon dont les profs composent. Le document VALIDEUR LMD qui est depuis 2015, un manuel très utile à la compréhension du système de l'enseignement supérieur est beaucoup apprécié des étudiants.

Je suis **DOUKOURE DAOUDA**, ingénieur statisticien économiste (ISE) de l'école nationale de statistique et économie appliquée (ENSEA). Apres l'obtention du BAC D au lycée moderne de Tiassale ; j'opte pour la filière de mathématique informatique (MATH INFO) à l'université Felix Houphouët Boigny, juste pour l'amour que je nourrissais pour les mathématiques.

Durant mon parcours en MATH INFO ; je fus fasciné par l'utilisation qui pouvait être faites des mathématiques : tant en mécanique, économie, comptabilité ... Ainsi en licence de mathématique, je présente plusieurs concours d'entré dans des écoles ingénieurs, ou j'opte pour la formation ISE.

Comme message à tous ceux qui suivent le parcours mathématique, j'aimerais les rassurer de la diversité des débouchés que cette filière leurs offres.
Quant à ceux qui aimeraient embrasser le métier ingénieur, comme premier conseil : aillez confiance en vous, en votre potentiel et ensuite mettez vous au travail. Faites votre possible pour comprendre les cours qui sont dispensés et de les approfondir.

Comme j'aime le dire **« Faire sa part des choses et implorer le tout puissant qu'il facilite ».**

Scanné avec CamScanner

Je suis **Koné Ziepe Seydou** actuellement étudiant en Licence Mathématique appliquée aux Finances bientôt Master de Monnaie, Banque, Finance et Assurance à université d' Orléans (France) titulaire d'un BAC D avec la mention Passable j'arrive à l'université en Maths info avec objectif de devenir un analyste financier très vite je rencontre des difficultés dans la compréhension de mes cours et aussi les réalités du campus après la 1ere session du semestre je valide une seule matière (technique d'expression).C'est là qu'un ami me montre un document appelé le Valideur qui appartenait à son grand-frère lors de son passage en MI un document volumineux, riche d'explications claire, d'exo, d'anciens sujets et pleins de correction ensemble nous avons commences le Kosso dans l'optique de traiter le maximum d'exercices pour mieux comprendre les cours, exo et la manière dont le prof compose ses sujets ce qui était difficile pour nous dans les débuts mais le travail et la persévérance finissent toujours par payer(le plus fort ce n'est pas celui qui valide tous à la 1ere session mais celui qui ne se détourne pas de ses objectifs même quand c'est dur) merci bonne continuation dans vos études.

Pour une vue globale des possibilités après des études en mathématiques informatique

Ftant en licence 1 math info	• Procédure CAMPUS France • Concours AS de l'ENSEA, TS de l'EAMAC • Des bourses pour les étudiants de L1
Etant en licence 2 math info	• Cycle ingénieur EAMAC sous réserve • ISFA, EURIA, ISUP...(BECEAS)
Etant en licence 3 math info	• Concours ENS • ISE de l'ENSEA sous réserve • Cycle ingénieur Centrale Casablanca
Une L3 math info validée	• Concours cycle ingénieur INPHB, ISE • Concours Master IFORD, IIA, Big Data, ESATIC, PSAV • Concours écoles de commerce HEC, ESSEC, ESCP...

Qui peut le plus, peut le moins. Cela dit que si vous être de niveau sup vous avez la possibilité de postuler à tous les opportunités de niveaux inférieurs.

Scanné avec CamScanner

Allez sur un navigateur (google, Microsoft Edge) puis saisissez :

Campus France Côte d'Ivoire :

- https://www.ivoire.campusfrance.org (site d'informations)

Concours Centrale Casablanca :

- http://www.centrale-casablanca.ma/fr/ (site info et concours cycle ingénieur)

Concours INPHB Yamoussoukro (Bourse du gouvernement après admission) :

- http://www.inphb.ci/2/vues/accueil/ (site info)
- https://inphb.ci/ConCours_Ing-INPHB-2022/ (site concours Ingénieurs)

Concours ENSEA Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :

- http://ensea.ed.ci/ (site info)
- http://capesa.ensai.fr (site concours cycle AS/cycle ingénieur)

Concours HEC Paris (Bourse du gouvernement après admission) :

- https://www.hec.edu/fr
- https://www.hec.edu/fr/grande-ecole-masters/programme-grande-ecole/admissions

Concours ENS Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :

- http://www.ensabidjan.ci/ (site de l'école)
- https://ens.laatech.com/ (site concours)

Concours IIA Yaoundé :

- http://www.iiayaounde.com/ (site de l'école)
- http://www.iiayaounde.com/linstitut/conditions-dadmission/ (admission)

Concours X polytechnique de Paris (Bourse du gouvernement après admission) :

- https://www.polytechnique.edu/ (site de l'école)
- https://www.polytechnique.edu/admission-cycle-ingenieur/fr/voie-universitaire-univ-filière-universitaire-internationale-fui (page admission)

Concours ESATIC Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :

- https://esatic.ci/presentation/ (site de l'école)
- https://esatic.ci/admission/ (page admission)

Concours ISFA Lyon (Actuariat) :

- https://isfa.univ-lyon1.fr/ (site de l'école)
- https://isfa.univ-lyon1.fr/formation/actuariat/admission-a-la-formation-d-actuaire-a-l-isfa-803812.kjsp (page admission)

Bourse Japon 2023 (Bourse du gouvernement Japonais après admission) :

- https://www.ci.emb-japan.go.jp/files/000475798.pdf (PDF d'information à télécharger)
- https://www.ci.emb-japan.go.jp/itpr_ja/11_000001_00848.html (site officiel de la bourse)
- https://www.studyinjapan.go.jp/en/planning/scholarship/application/examination/ (anciens sujets)

Bourse Russie (Bourse du gouvernement Russe après admission) :

- https://studyinrussia.ru/fr/study-in-russia/scholarships/

M2PSAV de l'UFR Math Info (Possibilité de Bourse du gouvernement après admission) :

- http://m2psav.master.edu-math.org/ (site officiel)
- http://m2psav.master.edu-math.org/?page_id=18 (page de candidature)

Concours IFORD Yaoundé (Bourse du gouvernement après admission) :

- http://www.iford-cm.org/
- http://www.iford-cm.org/index.php/formation/mpd

Concours EAMAC de Niamey (Bourse d'organisme Aéronautique(ANAC,SODEXAME ...) après admission) :

- http://www.eamac.ne/ (site officiel de l'EAMAC)

Scanné avec CamScanner

Sommaire

AVANT PROPOS 3

Première partie

Témoignages des aînés 5

Vue globale des possibilités après des études en mathématiques informatique..... 6

Quelques précieux liens absolus pour mieux vous orienter.....7

Deuxième partie

Résumé d'algèbre linéaire ***12***

Examens d'algèbre linéaire	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2019-2020	16	23
Examen session 1 2020-2021	17	26
Examen session 2 2020-2021	18	
Examen session 1 2021-2022	19	
Examen session 2 2021-2022	21	
Examen session 1 2022-2023	22	

Résumé d'algèbre bilinéaire ***31***

Examens d'algèbre bilinéaire	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2019-2020	33	39
Examen session 1 2020- 2021	34	
Examen session 2 2020-2021	35	
Examen session 1 2021-2022	36	41
Examen session 2 2021-2022	37	
Examen session 1 2022-2023	38	

Examens de suite et serie de fonctions ***Sujets*** ***44*** ***50 Propositions de correction***

Examens d'éléments d'intégrale généralisé	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2019-2020	53	59
Examen session 1 2020-2021	54	
Examen session 2 2020-2021	56	
Examen session 1 2021-2022	57	
Examen session 1 2022-2023	58	65

Examens de géométrie plane	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2019-2020	67	71
Examen session 1 2020-2021	68	73
Examen session 1 2021-2022	69	80
Examen session 1 2022-2023	70	83

Examens de géométrie de l'espace	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2019- 2020	85	90
Examen session 1 2020- 2021	86	92
Examen session 2 2020-2021	87	
Examen session 1 2021-2022	88	96
Examen session 1 2022-2023	89	97

Examens Electromagnétisme	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2019-2020	99	
Examen session 1 2020-2021	102	110
Examen session 1 2021-2022	104	117
Examen session 2 2021-2022	106	
Examen session 1 2022-2023	108	120

Scanné avec CamScanner

Examens de mécanisme des systèmes	Sujets	Propositions de correction
Examen session 1 2019-2020	124	
Examen session 1 2020-2021	126	136
Examen session 2 2020-2021	128	141
Examen session 1 2021-2022	130	146
Examen session 2 2021-2022	132	150
Examen session 1 2022-2023	134	160

Examens de programmation python	Sujets	Propositions de correction
Examen session 1 2019-2020	166	173
Examen session 1 2020-2021	167	177
Examen session 2 2020-2021	168	
Examen session 1 2021-2022	169	182
Examen session 2 2021-2022	170	185
Examen session 1 2022-2023	172	187

Résumé de thermodynamique 202

Examens de thermodynamique	Sujets	Propositions de correction
Examen session 1 2019-2020	204	212
Examen session 1 2020-2021	205	214
Examen session 2 2020-2021	206	218
Examen session 1 2021-2022	208	220
Examen session 2 2021-2022	209	224
Examen session 1 2022-2023	211	

Examens de probabilité	Sujets	Propositions de correction
Examen session 1 2018-2019	225	234
Examen session 2 2018-2019	226	
Examen session 1 2019-2020	227	
Examen session 2 2020-2021	229	237
Examen session 1 2021-2022	231	244
Examen session 2 2021-2022	233	246
Examen session 2 2022-2023	248	248

Examens de Statistique inférentielles	Sujets	Propositions de correction
Examen session 1 2018-2019	252	268
Examen session 2 2018-2019	254	
Examen session 1 2019-2020	256	
Examen session 1 2020-2021	257	
Examen session 2 2020-2021	259	
Examen session 1 2021-2022	260	
Examen session 2 2021-2022	265	270
Examen session 1 2022-2023	267	

Examens de Topologie et Calcul différentiel	Sujets	Propositions de correction
Examen session 1 2016-2017	274	288
Examen session 2 2016-2017	276	296
Examen session 2 2017-2018	277	
Examen session 1 2017-2018 (ACTUARIAT)	278	
Examen session 2 2017-2018 (ACTUARIAT)	279	
CORRECTION SESSION 1 2018-2019		304
Examen session 2 2018-2019	280	311
Examen session 2019-2020	282	315

Scanné avec CamScanner

Examen session 1 2020-2021 283
Examen session 2 2020-2021 284
Examen session 1 2021-2022 285
Examen session 2 2021-2022 286
Examen session 1 2022-2023 287

Examens de Calcul Integral	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 2 2018-2019	318	325
Examen session 1 2019-2020	319	327
Examen session 1 2020-2021	320	
Examen session 2 2020-2021	321	
Examen session 1 2021-2022	322	
Examen session 2 2021-2022	323	
Examen session 1 2022-2023	324	332

Examens de Mécanique quantique	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 2 2018-2019	340	347
Examen session 1 2019-2020	342	
Examen session 1 2020-2021	343	351
Examen session 1 2021-2022	344	356
Examen session 2 2021-2022	345	356
Examen session 1 2022-2023	346	

Examens de scilab et Latex	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 2 2018-2019	359	
Examen session 1 2019-2020	362	
Examen session 1 2021-2022	364	
Examen session 2 2021-2022	367	
Examen session 1 2022-2023	370	

Examens de statistique avec R	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2018-2019	372	388
Examen session 2 2018-2019	374	389
Examen session 1 2019-2020	376	394
Examen session 1 2020-2021	378	
Examen session 2 2020-2021	380	
Examen session 1 2021-2022	382	
Examen session 2 2021-2022	384	
Examen session 1 2022-2023	386	

Examens TP Physique	***Sujets 406***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2014-2015	396	
Examen session 2 2026-2017	397	

Examens Calcul numérique	***Sujets 408***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2017-2018	399	408
Examen session 2 2017-2018	400	
Examen session 2 2018-2019	401	
Examen session 1 2019-2020	402	
Examen session 1 2020-2021	403	
Examen session 1 2021-2022	404	
Examen session 2 2021-2022	405	
Examen session 1 2022-2023	407	

Bibliographie

Scanné avec CamScanner

DEUXIEME PARTIE

SEMESTRE 1

www.gvivaservices.com

Scanné avec CamScanner

RESUME ALGEBRE LINEAIRE (Important pour les concours)

• Valeur propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

Soit $u \in L(E)$. L ' ensemble des application linéaires de E dans E . Un scalaire $\lambda \in K$ est une valeur propre de u lorsqu'il existe un vecteur $x \neq 0_E$ de E tel que $u(x) = \lambda x$. Ce vecteur x est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ .

NB : Le vecteur nul n'est pas un vecteur propre de u .

• L'ensemble des valeurs propres de *u* est appelé le **spectre** de *u*, on le note $Sp(u)$.
Pour tout $\lambda \in K$, on note $E_\lambda(u) = Ker(u - \lambda\ IdE)$. *Si* $\lambda \in Sp(u)$, *alors* $E_\lambda(u)$ est constitué du vecteur nul et des vecteurs propres de valeur propre λ. On l'appelle **sous-espace propre associé à** λ . Si $\lambda \notin Sp(u)$, alors $E_\lambda(u) = \{0_E\}$.

• Le scalaire λ appartient à $Sp(u)$ si et seulement si $u - \lambda\, IdE$ est non injectif. En particulier 0 est valeur propre de *u* si et seulement si *u* est non injectif.

• Les vecteurs propres et les valeurs propres sont souvent appelés les **éléments propres de** *u*.
• **Propriété importante** : si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont *p* valeurs propres distinctes de *u*, alors la somme $E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_p}$ est directe. Ainsi des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants. En particulier, dans un espace de dimension *n*, il ne peut y avoir plus de *n* valeurs propres distinctes.

• Elément propre d'une matrice

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$.
• On dit que $\lambda \in K$, est valeur propre de *M* lorsqu'il existe $X \in \mathcal{M}n, 1(\mathbb{R})$ non nul tel que $MX = \lambda X$. Ce vecteur *X* est appelé vecteur propre de *M* associé à la valeur propre λ.
• Soient *E* un *K*-espace vectoriel de dimension finie, *B* une base de E, u un endomorphisme de *E* et $M = Mat(u, B)$. Les valeurs propres de u et de *M* sont identiques, et x est vecteur propre de u pour la valeur propre **l** ssi $\boldsymbol{X = Mat(x, B)}$ est vecteur propre de *M* pour la valeur propre λ. On peut donc appliquer à la matrice *M* les définitions et les propriétés concernant l'endomorphisme u.

• Polynôme caractéristique

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ et u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .
• La fonction $\chi_M : \begin{cases} K \longrightarrow K \\ \lambda \mapsto \det(M - \lambda I_n) \end{cases}$, est polynomiale .Son polynôme associé , que l'on notera également χ_M , est appelé polynôme caractéristique de M .Il est de degré n et s'écrit :

$$\chi_M = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(tr\ M)X^{n-1} + \cdots + \det M$$

• Les racines dans *K* du polynôme caractéristique χ_M sont exactement les valeurs propres de *M*.

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

Lorsque le polynôme χ_M est scindé dans K[X] , avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pour racines , on a $\det M = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $tr\, M = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.
On appelle **ordre de multiplicité** d'une valeur propre λ de *M*, et on note $m(\lambda)$, l'ordre de multiplicité de la racine λ du polynôme χ_M .
Une matrice à coefficients réels **d'ordre impair** admet au moins une valeur propre dans R. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. La réciproque est fausse.

- **Endomorphismes et matrices diagonalisables**

Soit *E* un K-espace vectoriel de **dimension finie** et *u* un endomorphisme de *E*. L'endomorphisme *u* est dit **diagonalisable** lorsque l'une des propositions équivalentes suivantes est vérifiée :
- il existe une base de *E* formée de vecteurs propres de *u*,
- On a $E = \oplus_{\lambda \in sp(u)} E_\lambda(u)$

Caractérisation des endomorphismes diagonalisables : l'endomorphisme *u* est diagonalisable si, et seulement si, il vérifie l'une des propositions équivalentes suivantes :
- $\sum_{\lambda \in sp(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$
- Le polynôme χ_M est scindé sur K et pour toute valeur propre λ , on a $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$

Cas particulier important : si χ_M est scindé sur K et à racines simples, alors l'endomorphisme *u* est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

Remarque pratique

Pour détermine $\dim E_\lambda(u)$,on étudie suivant les cas $Ker\,(u - \lambda IdE)$ (système linéaire) ou bien $rg(u - \lambda IdE)$ car, d'après le théorème du rang, on a :
$\dim E_\lambda(u) = \dim E - rg(u - \lambda IdE)$.

- **Exemples d'endomorphismes diagonalisables** : les **homothéties** sont les endomorphismes diagonalisables possédant une seule valeur propre, les **projecteurs** (resp. **les symétries**) sont les endomorphismes diagonalisables dont le spectre est inclus dans $\{0, 1\}$ $(resp.\, dans\ \{-1, 1\})$.

Remarque

- Lorsque *u* est diagonalisable, on a $tr\, u = \sum_{\lambda \in sp(u)} m(\lambda)\, \lambda$ et $det u = \prod_{\lambda \in sp(u)} \lambda^{m(\lambda)}$.
- On dit qu'une matrice *M* de $Mn(K)$ est **diagonalisable** lorsqu'elle est **semblable** à une matrice **diagonale**. Cela équivaut à l'existence d'une matrice *P* , inversible, dont les colonnes sont des vecteurs propres de *M*, telle que $P^{-1}MP$ est diagonale.

Il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs pour $P^{-1}MP$. En effet, cette matrice est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à *M* dans la nouvelle base formée des vecteurs propres. Les valeurs propres apparaissent sur la diagonale dans le même ordre que les vecteurs propres dans la matrice de passage *P*.

- **Polynômes d'endomorphismes, polynômes annulateurs**

Polynômes annulateurs

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

• On dit que le polynôme *P* est un **polynôme annulateur** de u lorsque $P(u)$ est l'endomorphisme nul de *E*, ce qu'on notera abusivement *P*(*u*) = 0 .
• Si $P(u) = 0$, alors toute valeur propre de *u* est un zéro de *P* ;
• Lorsque *E* est de dimension finie, tout endomorphisme u de *E* admet au moins un polynôme annulateur. Ce n'est pas vrai lorsque *E* n'est pas de dimension finie.
• **Résultat important:**
Si *P* est un polynôme annulateur de *u*, alors toute valeur propre de *u* est racine de *P*. La réciproque est fausse.

Polynôme minimal

• En dimension finie, il existe un polynôme non nul de degré minimal π_u (que l'on pourra choisir unitaire) On l'appelle le **polynôme minimal** de *u*. Les racines de π_u sont **exactement** les valeurs propres de *u*.

Le théorème de Cayley-Hamilton

Soit *u* un endomorphisme d'un espace vectoriel *E* de dimension finie. Alors $\chi_M = 0$ ou de manière équivalente : $\pi_u \mid \chi_M$. **Il en résulte que** $deg\ (\pi_u) \leq dim\ E$.
Remarque *: si le polynôme minimal de A est scindé simple alors A est diagonalisable.*

- **Endomorphismes trigonalisables**

Soit *E* un espace vectoriel **de dimension finie égale à** n ***sur*** K. Un endomorphisme u de *E* est dit **trigonalisable** lorsqu'il existe une base dans laquelle la matrice de *u* est triangulaire.

Remarque

Si dans une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ la matrice de *u* est triangulaire supérieure, alors dans la base $(e_n, \ldots, e_1)$, elle est triangulaire inférieure. Une matrice $M \in Mn(K)$ est dite trigonalisable dans $Mn(K)$ lorsqu'il existe une matrice $P \in GLn(K)$ telle que la matrice $P^{-1}MP$ soit triangulaire

- **Diagonalisation, trigonalisation et polynôme annulateur**

Soit *E* un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$.

• Critères de diagonalisation

• L'endomorphisme *u* est diagonalisable si et seulement si *u* admet un polynôme annulateur **non nul, scindé dans** $K[X]$ **et à racines simples.**
• L'endomorphisme *u* est diagonalisable si et seulement si son **polynôme minimal** est **scindé dans** $K[X]$ **et à racines simples.**

• Critères de trigonalisation

• L'endomorphisme *u* est trigonalisable si et seulement si *u* admet un polynôme annulateur **non nul, scindé dans** $K[X]$.
• L'endomorphisme *u* est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé $dans\ K[X]$.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

- **Quelques applications de la réduction des matrices**

Calcul des puissances de A : soit $A \in Mp(K)$.

• Lorsqu'on dispose d'un polynôme P annulateur de A, on effectue la division euclidienne de X^n par P. Il existe $(Q, R) \in K[X]^2$ tels que $X^n = PQ + R$ avec $deg\ R \leq n - 1$. On en déduit que

$$A^n = P(A)Q(A) + R(A) = R(A) .$$

En particulier, en notant p le degré de P, A^n est combinaison linéaire de $(I, A, \ldots, A^{p-1})$.

• Lorsque A est diagonalisable, il existe $P \in GLp(K)$ et D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P^{-1}A^nP = D^n$ et donc $A^n = PD^nP^{-1}$.

• Lorsque A est seulement trigonalisable, on essaie d'écrire $A = PTP^{-1}$ avec $P \in GLp(K)$, T triangulaire supérieure telle que $T = D + N$ avec D diagonale, N triangulaire strictement supérieure et $DN = ND$. Ainsi on peut utiliser la formule du binôme de Newton, et on obtient $T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$, N étant nilpotente, le calcul est alors plus simple.

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD-2024

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2019-2020
UFRMI L2 TOUTES LES FILIERES

1ère SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée: 2 heures

Exercice 1 (10*pts*)

Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1° a) f est-il un automorphisme de E ?

b) Déterminer le noyau et l'image de f

2° Soit $B = (u, v, w)$ avec $u = (3, 1, 0)$; $v = (1, -1, 1)$; $w = (2, -1, 1)$ une famille de vecteurs de E.

a) B est-il une base de E?

b) Déterminer la matrice A' de f dans la base B

3° a) Calculer A^2

b) En déduire la nature de f et donner ses éléments caractéristiques

Exercice 2 (10*pts*)

Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), \text{ où } a \text{ est un réel donné.}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de M et montrer que M est trigonalisable.

2) Montrer que si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, alors M est diagonalisable.

3) Montrer que si $a = 1$ ou $a = 0$, alors M n'est pas diagonalisable.

4) On suppose $a = 0$. trigonaliser M

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2020-2021
UFRMI L2 TOUTES LES FILIERES

1ère SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée: 2 heures

Exercice 1 (8*pts*)

1- Donner une matrice de format $(4,5)$ échelonnée réduite par lignes de rang 3.

2- Soit $H \in M_4(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est $m_H(X) = (X+5)^2$

a) H est-elle inversible?

b) H est-elle diagonalisable?

c) H est-elle jordanisable?

(Seules les justifications aux questions a),b) et c) sont notées)

d) On suppose que le sous espace propre de H associé à -5 est de dimension 2. Donner la réduite de Jordan J de H (Justifier entre trois et cinq lignes)

3- Dire si les assertions suivantes sont vraies (V) ou fausses (F). Pour chaque assertion fausse, proposer une assertion vraie qui la corrige:

a) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $det(\lambda A) = \lambda\, det(A)$.

b) Le rang d'une matrice est égal au nombre de ses lignes non nulles

c) Toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est diagonalisable.

d) Toute matrice est produit fini de matrices d'opération élémentaire.

Exercice 2 (12*pts*)

Pour tout nombre réel m, on considère l'endomorphisme f_m de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1-m & m-1 & m+1 \end{pmatrix}$$

1- Déterminer les valeurs propres de f_m et discuter le nombre et les multiplicités suivant les valeurs de m.

2- Pour quelles valeurs de m, f_m est-il diagonalisable?

3- Déterminer le polynôme minimal de f_m suivant les valeurs de m.

4- Calculer $(A_1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD-2024

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2020-2021
UFRMI L2 SM

2ème SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée: 2 heures

Exercice 1 (11*pts*)
Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1- f est-il un automorphisme de E?
2- a) calculer M^2
b) En déduire la nature de f et donner ses éléments caractéristiques.
3- Pourquoi f est-il diagonalisable?
4- Soient respectivement P et D la base et la direction de f.
a) Dire pourquoi on a $E = P \oplus D$ et donner la définition d'une base $B' = (u, v, w)$ de E adaptée à cette somme directe.
b) Soit $B' = (u, v, w)$ une base de E adaptée à la somme directe $E = P \oplus D$. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 2 (9*pts*)
Soit la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

1-a) Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de A.
b) A est-elle diagonalisable? trigonalisable?
2- Trouver une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible P telles que $A = PTP^{-1}$.

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD-2024

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2021-2022
UFRMI L2 TOUTES LES FILIERES

1ère SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée: 2 heures

Exercice 1 (*4pts*)

1° répondre par vrai (V) ou faux (F) Dans le cas où la réponse est fausse, donner l'affirmation correcte:

a) Le rang d'une matrice est égal au nombre de ses lignes non nulles

b) Toute matrice symétrique est diagonalisable

c) Toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est diagonalisable

d) le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des blocs de la diagonale

2° Donner quatre critères (c.à.d conditions nécessaires et suffisantes) de diagonalisation

Exercice 2 (*8pts*)

Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 11 \\ 1 & -4 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1° a) f est-il un automorphisme de E ?

b) Déterminer le noyau et l'image de f

2° Soit $B = (u, v, w)$ avec: $u = (3, 1, 0)$; $v = (1, -1, 1)$; $w = (2, -1, 1)$ une famille de vecteurs de E.

a) B est-il une base de E?

b) Déterminer la matrice A' de f dans la base B

3° Calculer A^2, A^3. Quelle est la nature de f?

Exercice 3 (*8pts*)

Soit la matrice

Scanné avec CamScanner

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, où a est un réel donné.

1) Calculer le polynôme caractéristique de M et montrer que M est trigonalisable.

2) Montrer que si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, alors M est diagonalisable.

3) Montrer que si $a = 1$ ou $a = 0$, alors M n'est pas diagonalisable.

4) On suppose $a = 0$. trigonaliser M

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY | ANNEE 2021-2022
UFRMI L2 TOUTES LES FILIERES

2ème SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée: 2 heures

Exercice 1 (*4pts*)

1° répondre par vrai (V) ou faux (F) Dans le cas où la réponse est fausse, donner l'affirmation correcte:

a) Le rang d'une matrice est égal au nombre de ses lignes non nulles

b) Toute matrice symétrique est diagonalisable

c) Toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est diagonalisable

d) le determinant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des blocs de la diagonale

2° Donner quatre critères (c.à.d conditions nécessaires et suffisantes) de diagonalisation

Exercice 2 (*7pts*)

Donner une forme échelonnée par lignes, le rang et la forme ligne canonique de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

2° Résoudre le système:

$$\begin{cases} x + 2y - z - 3t = 1 \\ 2x + 4y + z - 2t = 3 \\ 3x + 6y + 2z - 6t = 2 \end{cases}$$

Exercice 3 (*9pts*)

Soit la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1° a) Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de A.

b) Sur $\mathbb{R}$, A t-elle trigonalisable? diagonalisable?

2°.a) calculer A^2, et A^3 et en déduire A^n en fonction de A et n, $\forall n \geq 2$

b) Calculer $e^A = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A^n$ en fonction de I_3, A et A^2

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2022-2023
UFRMI L2 TOUTES LES FILIERES

1ère SESSION D'EVALUATION

EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE

Durée: 2 heures

Exercice 1 (8*pts*)

Soit $n \geq 1$ et $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$

Le but de cet exercice est de montrer que A est nilpotent.

1° Montrer que $\forall k \geq 1$, $A^k B - BA^k = kA^k$

2° On considère

$$f_B : \begin{array}{c} M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto MB - BM \end{array}$$

a) Vérifier que f_B est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$

b) Montrer que si $A^k \neq 0$, alors k est une valeur propre de f_B

c) En déduire qu'il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$

Exercice 2 (12*pts*)

Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), \text{ où } m \text{ est un réel donné.}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de M et montrer que M est trigonalisable.

2) Montrer que si $m \neq 0$ et $m \neq 1$, alors M est diagonalisable.

3) Montrer que si $m = 1$ ou $m = 0$, alors M n'est pas diagonalisable.

4) On suppose $m = 0$. trigonaliser M

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Proposition de correction de la licence 2

Algèbre Linéaire : 2019-2020

Exercice 1

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 8\\ 1 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

1) a) Vérifions si f est un automorphisme de E ou non :

f est un automorphisme de E si $det(A)\neq 0$

On a : $detA=\begin{vmatrix}-1 & 6 & 8\\ 1 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 5\end{vmatrix} \Leftrightarrow det(A)=0$

Donc f n'est pas un automorphisme de E.

b) Déterminons le noyau et l'image de f.

Noyau de f : $\left(ker(f)=<\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}>\right)$

Image de f :

on a : $\dim(ker(f))+\dim(Im(f))=\dim(\mathbb{R}^3)$

alors : $\dim(Im(f))=2$. D'où $Im(f)$ est engendré par 2 vecteurs. Soient v_1 et v_2 ces deux vecteurs et e_1 et e_2 deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a : $v_1=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 8\\ 1 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$

$v_2=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 8\\ 1 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$

2) a) B est-il une base de E ?
B est une base de E si
B est libre et génératrice.

On a : $\det(B)=\det(u,v,w)=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$

$\det(B)=3\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(1-2)=1\neq 0$

Donc, B est une famille libre.

On a : $card(B)=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ alors B est génératrice par conséquent, B est une base de E.

b) Déterminons la matrice A' de f dans la base B.

$$A'=\begin{matrix}\\ u\\ v\\ w\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}f(u) & f(v) & f(w)\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\end{matrix}$$

Déterminons a_{11}, a_{21} et a_{31}.

On a : $f(v)=a_{11}u+a_{21}v+a_{31}w$

Or : $f(v)=AV=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$

Alors $\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+a_{21}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}+a_{31}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}a_{11}=1\\ a_{21}=0\\ a_{31}=0\end{cases}$ De même, on montre que $A'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

3) a) Calculons A^2

On a : $A^2=A\times A=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 8\\ 1 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1 & 6 & 8\\ 1 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 8\\ 1 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$

Donc $A^2=A$

b) Déduisons-en la nature de f et donnons ses éléments caractéristiques.

$inv(f)=\{X\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\ /f(X)=X\}$

On a : $f(X)=X\Leftrightarrow AX=X\Rightarrow\begin{cases}-x+6y+8z=x\ (E_1)\\ x-2y-4z=y\ (E_2)\\ -x+3y+5z=z\ (E_3)\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}-2x+6y+8z=0\ (E_1)\\ x-3y-4z=0\ (E_2)\\ -x+3y+4z=0\ (E_3)\end{cases}$

Les trois équations $(E_1), (E_2)$ et (E_3) sont proportionnelles alors, on a :

$x=3y+4z$

D'où $inv(f)=\{(3y+4z,y,z)\ /\ y,z\in\mathbb{R}\}$

$inv(f)=\{\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\}\neq\emptyset$ et $A^2=A$ donc,

f est une projection P.

Eléments caractéristique.

$inv(f)=<\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\ 0\\ 1\end{pmatrix}>$ c'est la base de P.

$Ker(f)=<\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}>$ c'est la direction de P.

Exercice 2

$$M=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & a & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

1) Polynôme caractéristique de M

Soit $P_M(X)$ le polynôme caractéristique de M.

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & -2 \\ 1 & a-X & -1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{vmatrix}$$

$$= (2-X)\begin{vmatrix} a-X & -1 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ a-X & -1 \end{vmatrix}$$

$$P_M(X) = -X(X-a)(X-1)$$

2) Montrons que si a≠ 0 et a≠ 1 alors M est diagonalisable.

On a : $P_M(X) = -X(X-a)(X-1)$.

Si a≠ 0 et a≠ 1 alors :

$m(X) = X(X-a)(X-1)$ où

$m(X)$ est le polynôme minimal de M.

Comme $m(X)$ est scindé simple sur $\mathbb{R}$ alors M est diagonalisable.

3) Montrons que si a= 1 ou a= 0, alors M n'est pas diagonalisable.

Supposons que a= 1 alors :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P_M(X) = -X(X-1)^2$$

$\Rightarrow S_p(M) = \{0; 1\}$ où $m_{(0)} = 1$ et $m_{(1)} = 2$.

Sous-espace propre

$$E_G = \{X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ MX = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

On a : $MX = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ x+y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=0 \ (E_1') \\ x+y-z=0 \ (E_2') \end{cases}$$

$(E_2') \Rightarrow x = z - y \ (*)$

$(*)$ dans $(E_1') \Rightarrow 2z - 2y + y - 2z = 0$

$\Rightarrow y = 0$

Alors $x = z$.

D'où $E_0 = \{(z, 0, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\}$.

$$E_0 = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \Rightarrow \dim(E_0) = 1 = m_{(0)}$$

Autre méthode

On a : $1 \leq dim E_{(\lambda)} \leq m_\lambda$

Pour λ=0, $1 \leq dim E_{(0)} \leq m_{(0)} = 1$

$\Rightarrow dim E_{(0)} = 1 = m_0$

$$E_{(1)} = \{X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \ (M - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

On a : $(M - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ x-z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases}$

Alors $E_{(1)} = \{(z, z, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\}$.

$$E_{(1)} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > \Rightarrow \dim(E_{(1)}) = 1 \neq m_{(1)} = 2$$

Par conséquent, M n'est pas diagonalisable.

Conclusion

Si $a = 1$, M n'est pas diagonalisable.

Supposons que $a = 0$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P_M(X) = -X^2(X-1)$$

$\Rightarrow S_p(M) = \{0; 1\}$ où $m_{(0)} = 2$ et $m_{(1)} = 1$.

Sous-espace propre

$$E_{(1)} = \{X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \ (M - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

On a : $(M - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \ (1) \\ x-y-z=0 \ (2) \\ x+y-2z=0 \ (3) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \ (1) \\ x-y-z=0 \ (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x = z + y \ (*)$

$(*)$ dans $(1) \Rightarrow y + z + y - 2z = 0$

$\Rightarrow z = 2y$

Alors $x = 3y$.

D'où $E_{(1)} = \{(3y, y, 2y) \ / \ y \in \mathbb{R}\}$.

$$E_{(1)} = < \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} > \Rightarrow \dim(E_{(1)}) = 1 = m_{(1)}$$

$$E_{(0)} = \{X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ MX = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$MX = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=0 \ (1) \\ x-z=0 \quad (2) \\ x+y-z=0 \quad (3) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x = z$

Dans (1) on a : $y = 0$.

$E_{(0)} = \{(z, 0, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\}$

$$E_{(0)} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \Rightarrow \dim(E_{(0)}) = 1 \neq m_{(1)} = 2.$$

Donc, M n'est pas diagonalisable.

Conclusion : *si* $a = 0$, M n'est pas diagonalisable.

4) On suppose $a = 0$.

Trigonalisons M

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$dont la matrice de la base canonique est M.

T la matrice trigonaliser de M dans la $B' = (u, v, w)$

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

Avec $u = (3,1,2)$, $v = (1,0,1)$.

P la matrice de passage inversible $P_{BB'}$ telle que :

$$M = PTP^{-1} \text{ avec } T = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminons a, b et c

Prenons $w = e_1 = (1,0,0)$

On a : $f(u) = u$ (1)

$f(v) = au + 0 \times v$ (2)

$f(e_1) = bu + cv$ (3)

(2) $\Rightarrow f(v) = av$ alors $a = 0$.

(3) $\Rightarrow f(e_1) = bu + cv$

Or : $f(e_1) = M \times e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3b + c = 2 \\ b = 1 \\ 2b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Donc $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD-2024

Université FHB Année 2020-2021
MATHS-INFO L2

CORRECTION ALGEBRE LINEAIRE
Session 1

Exercice 1

1) Une matrice de format $(4,5)$ échelonnée réduite par ligne de rang 3 est :

Soit A cette matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2)a- VRAI car $0 \in Sp(H)$
b- FAUX car le polynôme minimal de H n'est pas scindé simple dans $\mathbb{R}$.
c- VRAI car le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$.
d- Comme -5 est la seule valeur propre de H alors H contient un seul élémentaire de Jordan. On a $E_{-5} = 2$ donc il y a 2 sous blocs de Jordan dans la matrice élémentaire de Jordan. Par ailleurs $m_H(X) = (X+S)^2$ donc l'ordre maximal des sous blocs de Jordan est 2.

Donc $J = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

3) a- FAUX car $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$
b- FAUX car c'est le nombre de lignes ou de colonnes non nuls.
c- VRAI
d- VRAI

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1-m & m-1 & m+1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminons les valeurs propres de f_m

* Déterminons le polynôme caractéristique

Scanné avec CamScanner

$$P_{A_m}(A) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1-m & m-1 & m+1-X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 1-X & 2-X & 1 \\ 0 & m-1 & m+1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 0 & m-1 & m+1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-X & 1 \\ X-(m+1) & m-1 & m+1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)(X-m-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-X & 1 \\ 1 & m-1 & m+1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)(X-m-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2-X & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)(X-m-1)(2-X)$$

$$= -(X-1)(X-m-1)(X-2)$$

$P_{A_m}(X) = -(X-1)(X-m-1)(X-2)$.

On a: $Sp(A_n) = \{m+1, 2, 1\}$
Soit l_i le nombre de multiplicité.
Si $m = 0$, on a: $P_{A_0}(X) = -(X-1)^2(X-2)$
Alors $l_1 = 2$ et $l_2 = 1$

Si $m = 1$, on a: $P_{A_1}(X) = -(X-1)(X-2)^2$
Alors $l_1 = 1$ et $l_2 = 2$

Si $m \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ alors P_{A_m} est scindé simple. D'où chaque valeur propre a pour multiplicité 1.

2) Si $m \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $P_{A_m}(X)$ est scindé simple donc f_m est diagonalisable.

Si $m = 0$ on a: $P_{A_0}(X) = -(X-1)^2(X-2)$

* Déterminons les sous espaces propres E_1 et E_2

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow (A_0 - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$(x, y, z) = (y, y, 0) = (1, 1, 0)y \Rightarrow \boxed{E_1 =< (1, 1, 0) >}$

On a $dim E_1 = 1 \neq m_1 = 2$ (la multiplicité de 1) donc A_0 n'est pas diagonalisable d'où f_m n'est pas diagonalisable.

- Si $m = 1$ on a $P_{A_1}(X) = -(X-1)(X-2)^2$

  * Déterminons E_2

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow (A_1 - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow -x + z = 0 \Leftrightarrow x = z$

$(x, y, z) = (z, y, z) = (0, 1, 0)y + (1, 0, 1)z \Leftrightarrow E_2 =< (0, 1, 0); (1, 0, 1) >$

On a $dim E_2 = 2 = m_2 = 2$ et $dim E_1 = 1$ donc f_m est diagonalisable.

Conclusion

- Si $m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, f_m est diagonalisable.
- Si $m = 0$, f_m n'est pas diagonalisable.

3) Déterminons le polynôme minimal de f_m suivant les valeurs de m.

Soit $m_{A_m}(X)$ le polynôme minimal de f_m.

Pour $m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ f_m est diagonalisable donc $m_{A_m}(X)$ est scindé simple. Par conséquent $m_{A_m}(X) = (X-1)(X-2)(X-(m+1))$

$\boxed{m_{A_m}(X) = (X-1)(X-2)(X-(m+1))}$

Pour $m = 0$ ou $P(X) = -(X-1)^2(X-2)$ le polynôme minimal est soit $(X-1)^2(X-1)$, soit $(X-1)(X-2)$

On a : $(A_0 - I)(A_0 - 2I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$(A_0 - I)(A_0 - 2I) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A_0 - I)(A_0 - 2I) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$$

Donc nous pouvons dire que: $m_{A_0}(X) = (X-1)^2(X-2)$

Conclusion

- Si $m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $m_{A_m}(X) = (X-1)(X-2)(X-(m+1))$
- Si $m = 0$, $m_{A_0}(X) = (X-1)^2(X-2)$

4) Calculons $(A_1)^m$, $\forall n \in \mathbb{N}$

On a: $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Comme A_1 est diagonalisable, il existe une matrice D diagonale et P une matrice inversible telle que $A_1 = PDP^{-1}$

On a $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

* Déterminons E_1 pour $m = 1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow (A_1 - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$E_1 = <(1,1,0)>$

On a: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(À vous de déterminer l'inverse de P)

On a: $A_1 = PDP^{-1}$

$\Rightarrow A_1 \times A_1 = PDP^{-1}(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1}$

$A_1^2 = PD^2P^{-1}$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$A_1^n = P\,D^n\,P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$A_1^n = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2^n - 1\\ 1-2^n & 2^n & 2^n - 1\\ 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}$$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

RESUME ALGEBRE BILINEAIRE

Soit E un espace vectoriel réel.

✓ Forme bilinéaire sur symétrique

-On appelle **forme bilinéaire symétrique** sur E toute application φdéfinie sur $E \times E$ à valeurs réelles telle que :

- pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire (linéarité à droite)
- pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x,y)$est linéaire (linéarité à gauche)
- pour tout $(x, y) \in E \times E$ $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ (symétrie).

◦ L'ensemble des formes bilineaires symétriques sur E est un $\mathbb{R} - espace\ vectoriel$ ..

◦ On dit que la forme bilinéaire symétrique est **positive** lorsque, pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x,x) \geq 0$. On dit qu'elle est **définie positive**, lorsque de plus, l'égalité $\varphi(x,x) = 0$ implique $x = 0_E$ (la réciproque étant toujours vraie).

✓ Formes quadratiques

◦ Si φ est une forme bilinéaire symétrique, on appelle forme quadratique associée à φ, l'application q définie sur E à valeurs réelles, telle que, pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$ On dit qu'elle est **positive** lorsque, pour tout $x \in E$, $q(x) \geq 0$, et **définie positive** lorsque, pour tout $x \in E \setminus \{0\}, q(x) > 0$.

◦ **Formules de polarisation :** si q est la forme quadratique associée à φ, alors pour tout $(x,y) \in E \times E$, on a · $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) - \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$

◦ **Inégalité de Cauchy-Schwarz :** si φ est une forme bilinéaire symétrique positive et si q est sa forme quadratique associée, alors pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $\varphi(x,y)^2 \leq q(x)q(y)$.

• **Matrice d'une forme bilinéaire symétrique**

Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur E, et $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. On pose $a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$ pour i et j compris entre 1 et n. La matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est appelée matrice de la forme bilinéaire symétrique φ (ou de sa forme quadratique associée q) dans la base B. Cette matrice est symétrique.

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, on note X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans la base B . Alors $\varphi(x,y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i y_j = {}'XAY$. En particulier ,

$q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j = {}'XAX$

✓ Endomorphismes orthogonaux

Un endomorphisme u de E est dit **orthogonal** lorsqu'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire $\forall (x,y) \in E^2, (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.

• L'endomorphisme u est orthogonal si et seulement si $u \circ u^* = Id_E$ (c'est-à-dire que u est inversible et $u^* = u^{-1}$.

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

• L'endomorphisme u est orthogonal si et seulement si l'image par u d'une base orthonormale est une base orthonormale.

• On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux. Muni de la loi $\circ$, $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$, appelé groupe orthogonal.

• Si $u \in \mathcal{O}(E)$, $\boldsymbol{alors\ det\ u = \pm 1}$. On note $S\mathcal{O}(E)$ le sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ formé des éléments de déterminant égal à 1, appelé groupe spécial orthogonal.

• Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque l'endomorphisme de $\mathbb{R}n$ canoniquement associé à M est orthogonal. Cela est équivalent à l'une des propositions suivantes :

- ✓ (i) les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}_n$.
- ✓ (ii) la matrice vérifie la relation $'MM = M'M = I_n$.

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathbb{R}^n$ est noté $O_n(\mathbb{R})$. C'est un groupe multiplicatif, appelé **groupe orthogonal**.

• **Caractérisation matricielle des endomorphismes orthogonaux:** l'endomorphisme u est orthogonal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale quelconque de E est orthogonale.

• **Changement de bases orthonormales :** si B et B' sont deux bases orthonormales de E, alors la matrice de passage de la base B à la base B' est une matrice orthogonale.

✓ **Endomorphismes orthogonaux particuliers:**

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle :

• **symétrie orthogonale** par rapport à F, la symétrie par rapport à F dans la direction $F^{\perp}$

• **réflexion** toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan (son déterminant vaut alors -1).

◦ Lorsque **dim E = 2**, une rotation de E est un endomorphisme orthogonal de déterminant 1. Sa matrice dans toute base orthonormale s'écrit

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{COS\,\theta} & \boldsymbol{-Sin\theta} \\ \boldsymbol{Sin\theta} & \boldsymbol{COS\theta} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{ou\ \theta}$ ($\boldsymbol{l'angle\ de\ rotation}$) $\in \mathbb{R}$.

◦◦ Lorsque **dim E = 3,** une rotation de E *est un endomorphisme orthogonal u de déterminant 1. Dans une base orthogonale dont le premier vecteur est dans* $Ker\ (u - Id_E)$. *Sa matrice s'écrit*

$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{Cos\theta} & \boldsymbol{-Sin\theta} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{Sin\theta} & \boldsymbol{Cos\theta} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{ou\ \theta} \in \mathbb{R}$.

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

Université FHB
MATHS-INFO.

Année 2019-2020

Examen d'algèbre bilinéaire
L2 ; durée : 1 H 30

Exercice

Répondez par **VRAI** ou **FAUX** avec justification dans l'ordre des questions

On note E l'espace vectoriel des matrices réelles de taille 2×2.

Pour toute matrice $A \in E$ on pose $q(A) = tr(A^2)$.

1) q est une forme quadratique

2) Sa forme polaire est : $b(A, B) = tr(AB) = tr(BA)$.

3)L'exprission de q dans la base canonique de E,

pour $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est : $q(A) = a^2 + 2bc + d^2$.

4) Une décomposition de Gauss de q est : $q(A) = a^2 + \frac{1}{2}(b+c)^2 - \frac{1}{2}(b-c)^2 + d^2$.

5) La signature de q est : $(3, 1)$.

6) Pour tout $A \in E$, on a : $A^2 = (trA)A - (detA)I_2$. I_2 matrice identité d'ordre 2.

On considère maintenant le sous-espace $F \subset E$ des matrices de trace nulle.

7) Pour tout $A \in F$ on a $q(A) = -2det(A)$.

8) La signature de la restriction de q à F est : $(2, 1)$.

9) Une base orthogonale pour la restriction $q|F$ est :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

10) Pour que $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$, pour tout choix de sous-espace $F \subset E$,
il est nécessaire et suffiant que q soit non dégénérée

11) Pour que $F \oplus F^{\perp} = E$, pour tout choix de sous-espace $F \subset E$,
il est nécessaire et suffiant que $q|F$ soit non dégénérée.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD-2024

Université FHB
MATHS-INFO.

Année 2020-2021

EXAMEN D'ALGEBRE BILINEAIRE
Session 1 ;L2; durée:1H30

EXERCICE

1) Décomposer en carés la forme quadratique $q(x, y, z) = xy + yz + xz$ sur $\mathbb{R}^3$.
Quelle est sa signature ? Quel est son rang ? Est-elle dégénérée ?

2) Ecrire une base orthogonale pour cette forme quadratique.

3) On désigne par (D) l'axe des x.

   a) Déterminer $(D^{\perp})$ pour cette forme quadratique.

   b) Déterminer $(D) \cap (D^{\perp})$

   c) Est-ce que (D) et $(D^{\perp})$ sont supplémentaires ?

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD-2024

UNIVERSITE FHB 2020-2021
Maths-Info

EXAMEN ALGEBRE BILINEAIRE

L2

2ème Session, Durée: 01h30'

Exercice 1 (06 points)

Soit a et b deux nombres réels et $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$\beta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + ax_2y_2$.
Donnez, lorsqu'il y en a, les valeurs de a et b pour lesquelles β est
a) linéaire en la première variable,
b) linéaire en la deuxième,
c) symétriques,
d) positives,
e) non dégénérée,
f) un produit scalaire.

Exercice 2 (14 points)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et f une forme bilinéaire sur E dont la matrice par rapport à β est

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

1) Calculer $f(x, y), f(x, x), f(y, y)$ dans les deux cas suivants:
   a) $x = e_1 + e_2 - e_3$ et $y = e_1 - e_2$.
   b) $x = e_1 + 2e_2$ et $y = e_2 + 7e_3$.
2) Trouver une nouvelle base de E par rapport à laquelle la matrice f est la matrice $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{91}{3} \end{pmatrix}$. En déduire une matrice inversible P telle que $({}^tP)MP = D$, où ${}^tP$ est la transposée de P.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB
Maths-Info

2021-2022

EXAMEN ALGEBRE BILINEAIRE

L2

1ère Session, durée : 01h00

Exercice

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et f une forme bilinéaire sur E dont la matrice par rapport à β est

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1) Calculer $f(x,y)$, $f(x,x)$, $f(y,y)$ dans les deux cas suivants :

a) $x = e_1 + e_2 - 2e_3$ et $y = e_1 - e_2 + 2e_3$.

b) $x = e_1 - 2e_2$ et $y = e_2 - 7e_3$.

2) Trouver une nouvelle base de E par rapport à laquelle la matrice de f est la matrice $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{76}{3} \end{bmatrix}$. En déduire une matrice inversible P telle que $({}^tP)\,MP = D$, où $({}^tP)$ est la transposée de P.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

UFHB
Maths-Info

Année 2021-2022

EXAMEN D'ALGEBRE BILINEAIRE

2e session

Durée : 1 H 30

EXERCICE 1

Soit a un nombre réel. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par
$q(v) = x^2 + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 + 2xy - 2ayz$
pour $v = (x, y, z)$. Soit f la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1. Déterminer une décomposition de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
2. Donner le rang et la signature de q suivant les valeurs de a.
3. Pour quelles valeurs de a, f définit-elle un produit scalaire ?

EXERCICE 2

Soit $E = \mathbb{R}^3$ considéré comme espace vectoriel euclidien orienté muni de la base orthonormée directe canonique (i, j, k).

Dans E le produit scalaire est noté $< x, y >$, le produit vectoriel $x \wedge y$ pour $x, y \in E$.

Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire de E. Soit D l'axe orienté par u.

Pour tout réel λ non nul on note f_λ l'endomorphisme de E qui à x associe

$$f_\lambda(x) = x + \lambda < x, u > u.$$

1.1 a) Justifier l'existence d'une base orthonormée directe (u, v, w) et donner la matrice A_λ de f_λ dans cette base.

(Si vous ne pouvez justifier de l'existence d'une base orthonormée directe (u, v, w), supposer qu'elle existe et continuer)

b) Déterminer le noyau et l'image de f_λ.

c) Pour quelle valeur de λ, f_λ est-elle une projection orthogonale non triviale.

1.2 a) Pour quelle valeur de λ, f_λ est-elle un endomorphisme orthogonal ?

Cette valeur de λ est désormais notée λ_0.

b) Déterminer la nature de f_{λ_0}.

c) Donner la matrice de f_{λ_0} dans la base (i, j, k).

Courage, ça peut aller maintenant !

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD-2024

UNIVERSITE FHB
Maths-Info

2022-2023

EXAMEN ALGEBRE BILINEAIRE

L2

1ère Session, durée : 01h30

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de base $B = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère la forme quadratique q sur E définie par :

$$x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i \longmapsto q(x) = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 6x_3^2 + 3x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

1. Déterminer la matrice A de q dans la base B.
   La forme quadratique q est-elle dégénerée ?
2. Déterminer la forme polaire f associée à
   q dans la base B.
3. Décomposer q en somme de carrés indépendants.
   Préciser la signature et le rang de q.
4. Déterminer une base B' de E orthogonale pour f (ou q),
   et préciser l'expression de q dans cette base.
5. Déterminer la matrice de f dans la base B'.

Exercice 2

Soient $a \in \mathbb{R}$ et q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par,

$q_a(x, y, z) = x^2 + (1 + a)y^2 + (1 + a + a^2)z^2 + 2xy - 2ayz$

1. Moyennant β_c la base canonique de $\mathbb{R}^3$, déterminer M_a la matrice
   associée à q_a.
2. pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, q_a est-elle dégénérée ou non
3. Décomposer q_a en carrés de Gauss, et donner suivant $a \in \mathbb{R}$,
   le rang et la signature de q_a.
4. Déterminer une base orthogonale de q_a si nécessaire suivant $a \in \mathbb{R}$.

Scanné avec CamScanner

Proposition de correction Algèbre bilinéaire : 2019-2020

Exercice

1) Vrai

Justification

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in E$,

On a : $q(\lambda A) = tr(\lambda^2 A^2) = \lambda^2 tr(A^2) = \lambda^2 q(A)$

Par conséquent, q est une forme quadratique.

2) Vrai

Justification

$b(A,B) = \frac{1}{2}[q(A+B) - q(A) - q(B)]$

$b(A,B) = \frac{1}{2}[tr(A^2 + 2AB + B^2) - tr(A^2) - tr(B^2)]$

$b(A,B) = \frac{1}{2}[tr(A^2) + 2tr(AB) + tr(B^2) - tr(A^2) - tr(B^2)]$

$b(A,B) = \frac{1}{2}[2tr(AB)] = tr(AB)$ $(*)$

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

On a : $AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$

Et $BA = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix}$

Alors $tr(AB) = aa' + bc' + cb' + dd'$

$tr(BA) = a'a + b'c + c'b + d'd$

$\Rightarrow tr(AB) = tr(BA)$ $(\#)$

De $(*)$ et de $(\#)$, on en déduit que :

$b(A,B) = tr(AB) = tr(BA)$.

3) Vrai

Justification

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$q(A) = tr(A^2)$ alors :

$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{bmatrix}$

D'où $tr(A^2) = a^2 + bc + cb + d^2$

$tr(A^2) = a^2 + 2cb + d^2$

Donc $q(A) = a^2 + 2cb + d^2$

4) Vrai

Justification

On a : $q(A) = a^2 + 2cb + d^2$

Or : $bc = \frac{1}{4}[(b+c)^2 - (b-c)^2]$

$\Rightarrow 2bc = \frac{1}{2}(b+c)^2 - \frac{1}{2}(b-c)^2$

d'où : $q(A) = a^2 + \frac{1}{2}(b+c)^2 - \frac{1}{2}(b-c)^2 + d^2$.

5) Vrai

Justification

On a : $sign(q) = (r,s)$ où

$\begin{cases} r: le\ nombre\ de\ terme\ positif \\ s: le\ nombre\ de\ terme\ négatif \end{cases}$

Alors $sign(q) = (3,1)$

6) Vrai

$\forall A \in E, A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{bmatrix}$ (1)

On a : $tr(A)A = (a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ca + dc & ad + d^2 \end{bmatrix}$ et

$detAI_2 = (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$detAI_2 = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}$

D'où :

$tr(A)A - detAI_2 = \begin{bmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ca + dc & ad + d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}$ (2)

De (1) et (2), on déduit que :

$$A^2 = tr(A)A - (detA)I_2.$$

7) Vrai

Justification

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$Tr(A) = 0 \Leftrightarrow a + d = 0 \Leftrightarrow a = -d$

Prenons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

Alors $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix}$

$q(A) = tr(A^2) = 2a^2 + 2bc$ or :

$\det(A) = -a^2 - bc \Rightarrow -2detA = 2a^2 + 2bc$ d'où

$q(A) = -2\det(A)$

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

8) Vrai

Justification

On a : $q(A) = 2a^2 + 2bc$ or :

$$bc = \frac{1}{4}[(b+c)^2 - (b-c)^2]$$

$$\Rightarrow q(A) = 2a^2 + \frac{1}{2}(b+c)^2 - \frac{1}{2}(b-c)^2$$

d'où $sign(q|F) = (2,1)$

9) Vrai

Justification

Soit b' la forme polaire de $q|F$.

Alors $b'(A,B) = tr(AB) = tr(BA)$

Avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix}$

D'après 2).

$b'(A,B) = 2aa' + bc' + cb'$

Posons $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

La base $\{E_1, E_2, E_3\}$ est orthogonale si

$b'(E_1, E_2) = 0$, $b'(E_1, E_3) = 0$ et
$b'(E_2, E_3) = 0$

On vérifie ça aisément.

10) Vrai

Justification

Par définition :

$dimF + dimF^{\perp} = dimE + dimKer(F \cap F^{\perp})$

Si q est non dégénérée alors :

$$Ker(F \cap F^{\perp}) \Rightarrow dimKer(F \cap F^{\perp}) = 0$$

D'où $dimF + dimF^{\perp} = dimE$

11) Vrai

Justification

(Voir cours)

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Proposition de correction

EXAMEN ALGEBRE BILINEAIRE

L2.Session 1_2021-2022

Correction de l'exo

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et f une forme bilinéaire sur E dont la matrice par rapport à β est

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1) Calculons $f(x,y)$, $f(x,x)$, $f(y,y)$ dans les deux cas suivants :

a) $x = e_1 + e_2 - 2e_3$ et $y = e_1 - e_2 + 2e_3$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \; y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$$

$$f(x,x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -20$$

$$f(y,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -4$$

b) $x = e_1 - 2e_2$ et $y = e_2 - 7e_3$.

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \; y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} = 9$$

$$f(x,x) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -37$$

$$f(y,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} = -21$$

2) La forme quadratique associe à f avec $x = (x_1, x_2, x_3)$ est :

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$q(x) = x_2(2x_1 - 7x_2 + x_3) + x_3(3x_1 + x_2) + x_1(2x_2 - x_1 + 3x_3)$$

$$q(x) = -x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_3x_1 - 7x_2^2 + 2x_3x_2$$

La décomposition en carré de Gauss de q est :

$$q(x) = -(x_1 - 2x_2 - 3x_3)^2 - 3\left(x_2 - \frac{7}{3}x_3\right)^2 + \frac{76}{3}x_3^2$$

Soit β' la nouvelle base de E, par rapport à laquelle la matrice de f est la matrice $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{91}{3} \end{pmatrix}$.

Avec $x = (x'_1, x'_2, x'_3)$ dans β', ainsi

$q(x) = -(x'_1)^2 - 3(x'_2)^2 - \frac{76}{3}(x'_3)^2$ dans la base β' et

$q(x) = -(x_1 - 2x_2 - 3x_3)^2 - 3\left(x_2 - \frac{7}{3}x_3\right)^2 + \frac{76}{3}x_3^2$ dans β,

par identification on a : $\begin{cases} x'_1 = x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ x'_2 = x_2 - \frac{7}{3}x_3 \\ x'_3 = x_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x'_1 + 2x'_2 + \frac{23}{3}x'_3 \\ x_2 = x'_2 + \frac{7}{3}x'_3 \\ x_3 = x'_3 \end{cases}$$

alors

$$P = P_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{23}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow ({}^tP) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{23}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

et ainsi $\beta' = \left\{(1,0,0)\ ;\ (2,1,0)\ ;\ \left(\frac{23}{3}, \frac{7}{3}, 1\right)\right\}$ dans la base β

et le calcul de :

$$D = ({}^tP)MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{23}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{23}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{76}{3} \end{pmatrix}.$$

Commentaire

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P_M(X) = -X^3 - 8X^2 + 7X + 76$$

et $P_M(-1) = -(-1)^3 - 8(-1)^2 + 7(-1) + 76 = 62 \neq 0$, donc les éléments diagonaux de D, ne sont pas les valeurs propres de M.

D'ailleurs les valeurs propres de M qui ne sont pas facilement

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

déterminables analytiquement.

Une autre méthode pour répondre à la question 2,
au moyen des opérations élémentaires sur les matrices

$$\left[\frac{I_3}{M}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ L_2 + 2L_1 \\ L_3 + 3L_1 \end{array} \simeq \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 7 & 9 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 + 2C_1 & C_3 + 3C_1 \end{array}$$

$$\simeq \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 7 & 9 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 76 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ L_2 \\ 3L_3 + 7L_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & C_2 \quad 3C_3 + 7C_2 & \\ & & -\frac{1}{3}C_3 \end{array}$$

$$\simeq \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 76 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \frac{23}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{76}{3} \end{array}\right] = \left[\frac{P}{D}\right]$$

Ainsi

$$P_{\beta\beta'} = P = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \frac{23}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow ({}^tP) = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{23}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{array}\right]$$

et alors $\beta' = \left\{(1,0,0)\ ;\ (2,1,0)\ ;\ \left(\frac{23}{3}, \frac{7}{3}, 1\right)\right\}$ dans la base β

Aussi, évaluons $({}^tP)\,MP$

$$({}^tP)\,MP = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{23}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \frac{23}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$({}^tP)\,MP = \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{76}{3} \end{array}\right] = D$$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD-2024

EXAMEN SUITES ET SERIES
DUREE: 2H

Exercice 1

a) Soit f une fonction, positive et croissante sur $[0, +\infty[$.
Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a:

$$\int_0^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx.$$

b) Trouver un équivalent pour $n \to +\infty$ de $S_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}$.
En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{S_n}$.

Exercice 2

On considère la série de fonctions de terme général:
$u_n(z) = \frac{z}{(nz+1)[(n-1)z+1]}$, $z \in \mathbb{C}$ et $n \geq 1$.
a) Etudier la convergence simple et calculer sa somme $S(z)$.
b) Etudier la convergence uniforme et la convergence normale sur $\mathbb{C}$ puis sur l'ensemble $D = \{z \in \mathbb{C}/Rez > 0\}$.

Exercice 3

On considère la série de fonction de terme général $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$, $x \in \mathbb{R}^+$.
1) Montrer que la somme de cette série est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer que $\forall a > 0$, la somme de cette série est dérivable sur $[a, +\infty[$.
3) La somme de cette série est-elle dérivable au point $x = 0$?

Exercice 4

1) Développer en série entière la fonction $f(x) = \frac{1}{2+x}$ au voisinage de $x = 0$.
2) Montrer que si p est un entier ≥ 0, on a:

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{2^n(n+p+1)}$$

3) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 5

Soit f la fonction paire, de période 2π, égale à $f(x) = (\pi - x)^2$ pour $0 \leq x \leq \pi$

1) Calculer les coefficients de Fourrier de f.

2) Montrer que la serie de Fourrier de f est convergente de somme $f(x)$.

En déduire que: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD-2024

EXAMEN SUITES ET SERIES
DUREE: 2H30 SESSION 1 2021-2022

Exercice 1

Soit la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} tg\frac{1}{2^n}$

1) Démontrer qu'elle est convergente. On désigne par S sa somme.

2) a) Démontrer que $cotgx - 2cotg2x = tgx, \quad x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

b) En déduire un calcul de S.

Exercice 2

a) Etudier la nature et la somme des séries de terme général:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \; ; \; v_n = (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

b) Soit la série de terme général:

$$u_n = Ln(n) + aLn(n+2) + bLn(n+3) \; , \; n \geq 1.$$

Trouver les valeurs de a et b pour lesquelles la série $\sum u_n$ converge et, dans ce cas, calculer sa somme.

c) Soit S_n la somme des n premiers termes de la série $\sum_1^\infty u_n \quad (u_n > 0)$.

Montrer que l'on a:

$$\sum_1^\infty \frac{u_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \begin{cases} u_1^{-1} & \text{si } \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty \\ u_1^{-1} - S^{-1} & \text{si } \lim_{n\to+\infty} S_n = S. \end{cases}$$

En déduire la somme des séries suivantes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

Exercice 3

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}^+$.

1)Montrer que la somme de cette série est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2)Montrer que $\forall a > 0$, la somme de cette série est dérivable sur $[a, +\infty[$.
3)La somme de cette série est-elle dérivable au point $x = 0$?

Exercice 4

1) Développer en série entière la fonction $f(x) = \frac{1}{2+x}$ au voisinage de $x = 0$.

2) Montrer que si p est un entier ≥ 0, on a:

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{2^n(n+p+1)}$$

Scanné avec CamScanner

3) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)}$$

Exercice 5

Soit f la fonction paire, de période 2π, égale à $f(x) = (\pi - x)^2$ pour $0 \leq x \leq \pi$

1) Calculer les coefficients de Fourrier de f.

2) Montrer que la série de Fourrier de f est convergente de somme $f(x)$.
En déduire que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Examen SUITES ET SERIES
DUREE: 2H
SESSION 2 2021-2022

Exercice 1

a) Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[0, +\infty[$.

Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a:

$$\int_0^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx.$$

b) Trouver un équivalent pour $n \to +\infty$ de $S_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}$.

En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{S_n}$.

Exercice 2

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(z) = \frac{z}{(nz+1)[(n-1)z+1]}$, $z \in \mathbb{C}$ et $n \geq 1$.

a) Etudier la convergence simple et calculer sa somme $S(z)$.

b) Etudier la convergence uniforme et la convergence normale sur $\mathbf{C}$ puis sur l'ensemble $D = \{z \in \mathbb{C}/Rez > 0\}$.

Exercice 3

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

1) Montrer que la somme de cette série est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer que $\forall a > 0$, la somme de cette série est dérivable sur $[a, +\infty[$.
3) La somme de cette série est-elle dérivable au point $x = 0$?

Exercice 4

1) Développer en série entière la fonction $f(x) = \frac{1}{2+x}$ au voisinage de $x = 0$.

2) Montrer que si p est un entier ≥ 0, on a:

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{2^n(n+p+1)}$$

3) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}$$

Exercice 5

Soit f la fonction paire, de période 2π, égale à $f(x) = (\pi - x)^2$ pour $0 \leq x \leq \pi$

1) Calculer les coefficients de Fourrier de f.

2) Montrer que la série de Fourrier de f est convergente de somme $f(x)$.
En déduire que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Établissement :
UFR MI
LICENCE 2

Année
2022-2023

EXAMEN
SÉRIES
Première Session
Durée : 02H30

EXERCICE 1 :

Énoncer et démontrer la règle de Cauchy pour les séries numériques.

EXERCICE 2 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0; 2\pi[$. Posons

$$\begin{cases} a_n(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{n} + \cos(x)}, \\ S_n(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \sin(px). \end{cases}$$

$u_n(x) = \dfrac{x \sin nx}{2\sqrt{n} + nx}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0; 2\pi[,\ |S_n(x)| \leq \dfrac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$.
2. En déduire que la série de terme général défini par $u_0(x) = 0$ et $u_n(x)$ si $n \in \mathbb{N}^*$ est simplement convergente sur $]0; 2\pi[$.
3. Montrer que le reste $R_n(x)$ d'ordre n de la série de terme général $u_n(x)$ peut s'écrire sous la forme :
$$R_n(x) = -a_{n+1}(x)S_n(x) + \sum_{p=n+1}^{\infty}(a_p(x) - a_{p+1}(x))S_p(x).$$
4. En déduire que la suite de fonctions $(R_n(x))_n$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle fermé de $]0; 2\pi[$.
5. Que peut-on alors conclure pour la série de terme général $u_n(x)$? Justifier votre réponse.

EXERCICE 3 :

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique définie par $f(x) = \sinh(x)$, pour $|x| \leq \pi$.

1) Tracer sommairement le graphe de f sur $[-3\pi; 3\pi]$.
2) Montrer sans calcul que la série de Fourier de f converge sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g à déterminer.
3) Déterminer le développement en série de Fourier de f.
4) En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p(2p+1)}{2p^2+2p+1}$.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

CORRECTION SESSION 1 2022-2023 EXAMEN SERIE

EXERCICE 1

(VOIR COURS)

EXERCICE 2

$$S_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \sin(px)$$

$$= \sum_{p=1}^{n} im(e^{ix})^p$$

$$S_n(x) = im\left(\sum_{p=1}^{n} (e^{ix})^p\right)$$

$$Ainsi, |S_n(x)| \leq \left|\left(\sum_{p=1}^{n} (e^{ix})^p\right)\right|$$

$$\leq |e^{ix}| \left|\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}\right|$$

$$\leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|}$$

$$\leq \frac{2}{\left|e^{i\frac{x}{2}}\right| |e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}|}$$

$$|S_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$$

2)

$$on\ a\ U_n(x) = \frac{xsin(px)}{2\sqrt{n} + \cos(x)}$$

$$soit\ x \in]0,2\pi[\ , on\ a\ U_n(x) = a_n(x)\sin(nx))\ .$$

La suite $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est positive car pour tout* $n \in \mathbb{N}^*, 2\sqrt{n} + \cos(x) > 0,$

$\lim a_n(x) = 0$ *et pour tout n dans* $\mathbb{N}^*$, *on a*

$2\sqrt{n+1} + \cos(x) \geq 2\sqrt{n} + \cos(x)$ *d'où* $a_{n+1}(x) \leq a_n(x)$;

ce qui montre que la suite $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante de limite 0. Aussi d'après la question*

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$précedente, |S_n(x)| \leq M \; avec \; M = \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$. *D'après les règles d'Abel, la serie*

numérique de terme genérale $U_n(x)$ *converge . on en deduis que la serie de fonction converge simplement dans* $]0,2\pi[$.

3

On a $R_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_n(x)\sin(nx)$ .Aussi ,$\sin(nx) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$.

Puis,$R_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_n(x)[(S_p(x) - S_{p-1}(x)]$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$

$\sum_{p=n+1}^{N} a_n(x)[(S_p(x) - S_{p-1}(x)] = \sum_{p=n+1}^{N} a_p(x)(S_p(x)) - \sum_{p=n+1}^{N} a_p(x)\, S_{p-1}(x)$

On a $\sum_{p=n+1}^{N} a_p(x)(S_{p-1}(x) = \sum_{p=n}^{N-1} a_{p+1}(x)\, S_p(x)$ *(par un changement de variable).*

D'où

$\sum_{p=n+1}^{N} a_n(x)[(S_p(x) - S_{p-1}(x)] = \sum_{p=n+1}^{N} a_p(x)(S_p(x) - a_{n+1}(x)S_n(x) +$

$- \sum_{p=n+1}^{N-1} a_{p+1}(x)\, S_p(x)$

En faisant tendre N à l'infinie, on a :

$$R_n(x) = -a_{n+1}(x)S_n(x) + \sum_{p=n+1}^{+\infty} ((a_p(x) - a_{p+1}(x))\, S_p(x)$$

4)

La suite $(R_n(x))$ *converge uniformement vers* 0 *ssi* $||R_n(x)||_\infty$ *tend vers* 0.

Soit $n \epsilon \mathbb{N}$

$|R_n(x)| \leq |-a_{n+1}(x)|S_n(x)| + \sum_{p=n+1}^{+\infty} |((a_p(x) - a_{p+1}(x))\, ||S_p(x)|$. *or la suite* $(S_n(x))$

Est bornée. Ainsi

$$|R_n(x)| \leq M|-a_{n+1}(x)| + M \sum_{p=n+1}^{+\infty} |((a_p(x) - a_{p+1}(x))| .$$

$|R_n(x)| \leq M|-a_{n+1}(x)| + M|a_{n+1}(x)| \leq 2M|a_{n+1}(x)|.$

la suite de terme generale $a_{n+1}(x)$ *converge vers* 0:

Soit $\varepsilon > 0$.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |a_{n+1}(x)| \leq \varepsilon$$
$$\Rightarrow |R_n(x)| \leq 2M\varepsilon$$
$$\Rightarrow \left||R_n(x)|\right|_\infty \leq 2M\varepsilon$$

Ce qui montre que la suite $\left||R_n(x)|\right|_\infty$ *tend vers* 0 .Par conséquent ,la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniforment vers* 0

5)

Une serie de fonction converge uniforment ssi $\left||R_n(x)|\right|_\infty$ *tend vers* 0 . Ainsi *d'après la question precedente , on en deduis que la serie de fonction de terme general* $U_n(x)$ *converge uniforment.*

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

EXAMEN D'INTEGRALES GENERALISEES session 2019-2020
DUREE: 02H

VALIDEUR LMD-2024

Exercice 1

Soit f une fonction définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

1) Etudier la convergence de l'intégrale impropre

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}dx,\ n > 0$$

2) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ et que $\lim_{n\to+\infty} nI_n = f(0)$

Exercice 2

1) Soit l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

a) Pour quelles valeurs reelles de x, $\Gamma(x)$ est-elle convergente?
b) Evaluer $\Gamma(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(\frac{1}{2})$.

On admettra l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

2) Application: Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 x^m(\ln x)^n dx$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $m > -1$.

Exercice 3

a) Etudier la nature des intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx,$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{Arctgx}{x}dx,$$

$$I_3 = \int_1^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$I_4 = \int_{-1}^1 \frac{e^{Arctgx}}{x\sqrt{|x|}}dx.$$

b) Soit $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3}dx$

Vérifier que cette intégrale est divergente. Trouver une fonction g sur $[1,+\infty[$ telle que:

$\int_1^{+\infty} [\frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} - g(x)]dx$ soit convergente.

BONNE CHANCE

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD-2024

EXAMEN D'INTEGRALES GENERALISEES
DUREE: 2H

Exercice 1

Soit f une fonction définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

1) Etudier la convergence de l'intégrale impropre.

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}\,dx,\ n > 0$$

2) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ et que $\lim_{n\to+\infty} nI_n = f(0)$.

Exercice 2

1) Soit l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

a) Pour quelles valeurs réelles de x, $\Gamma(x)$ est-elle convergente?

b) Evaluer $\Gamma(n), n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(\frac{1}{2})$.

On admettra l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2) Application: Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 x^m(\ln x)^n\,dx$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $m > -1$.

Exercice 3

a) Indiquer pour quelles valeurs du paramètre réel a l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax}\sqrt{1+x}}{x^2}\,dx$ converge.

b) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ est convergente et qu'elle est nulle.

c) Etudier la nature des intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx,$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}dx,$$

$$I_3 = \int_1^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}dx,$$

$$I_4 = \int_{-1}^1 \frac{e^{\arctan x}}{x\sqrt{|x|}}dx.$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 4

a) Soit $\int_1^{+\infty} \frac{x^4+1}{x+3}\,dx$
Vérifier que cette intégrale est divergente. Trouver une solution g sur $[1,+\infty[$ telle que:
$\int_1^{+\infty} [\frac{x^4+1}{x+3} - g(x)]\,dx$ soit convergente.

b) Soient f et g deux fonctions réelles localement intégrables sur $[a,+\infty[$
Si f est décroissante et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et s'il existe une constante M telle que $|\int_a^x g(t)\,dt| \leq M, \forall x \geq a$, alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,g(t)dt$ est convergente.

Montrer ce résultat dans l'hypothèse supplémentaire très souvent réalisée en pratique, que f et g soient de classe C^1.

BONNE CHANCE

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

EXAMEN D'INTEGRALES GENERALISEES
DUREE: 2H

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales suivantes:

a- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$

b- $\int_1^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} dx$

c- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}$

d- $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x\sqrt{x}} dx$

e- $\int_1^{+\infty} x^x dx$

f- $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)} dx$

Exercice 2

1) Démontrer que $\forall X \in [1,+\infty[$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$2n\pi > n\pi > X \text{ et } \left| \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \right| \geq \frac{1}{4},\ 0 < \alpha \leq 1.$$

Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx,\ 0 < \alpha \leq 1.$

2) Démontrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente.

3) Vérifier que les deux fonctions définies sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = f(x) + \frac{sin^2 x}{x}$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Les intégrales $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ sont-elles de même nature? conclusion?

Exercice 3

a) Etudier la nature des intégrales suivantes:

$$\int_1^{+\infty} (e^{-\frac{1}{t}} - \cos\frac{1}{t})\frac{dt}{t},\ \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt;\ \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$$

b) Soit $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} dx$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD-2024

EXAMEN D'INTEGRALES GENERALISEES
DUREE: 01H

SESSION 1 2021-2022

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales suivantes:

a- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$

b- $\int_1^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} dx$

c- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx$

d- $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x\sqrt{x}} dx$

e- $\int_1^{+\infty} x^x dx$

f- $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)} dx$

Exercice 2

1) Démontrer que: $\forall X \in [1,+\infty[, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$2n\pi > n\pi > X$ et $|\int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx| \geq \frac{1}{4}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$

Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx, \quad 0 < \alpha \leq 1$?

2) Démontrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente.

3) Vérifier que les deux fonctions définies sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = f(x) + \frac{\sin^2 x}{x}$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Les intégrales $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ sont-elles de même nature? conclusion?

Exercice 3

a) Etudier la nature des intégrales suivantes:

$\int_1^{+\infty} (e^{-\frac{1}{t}} - cos\frac{1}{t})\frac{dt}{t}; \int_1^{+\infty} \frac{e^{sint}}{t} dt; \int_1^{+\infty} \frac{Arctgx}{x} dx$

b) Soit $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} dx$

Vérifier que cette intégrale est divergente. Trouver une fonction g sur $[1,+\infty[$ telle que $\int_1^{+\infty} [\frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} - g(x)]dx$ soit convergente.

BONNE CHANCE

Scanné avec CamScanner

Etablissement :
UFR MI
LICENCE 2

Année
2022-2023

EXAMEN
INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES
Première Session
Durée : 01H00

EXERCICE 1 :

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des couples (a, b) de nombres réels tels que l'intégrale
$$K(a;b) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^b(1-x^2)^{2a}} \text{ converge.}$$
2. Montrer, en effectuant un changement de variables, que pour tout $(a;b) \in \mathcal{D}$ on a : $K(a;b) = K(a; 2-b-4a)$.

EXERCICE 2 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la fonction suivante : $I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_I$ de $I(x)$.
2. Montrer que la fonction I est décroissante sur $\mathcal{D}_I$.
3. Calculer $\lim_{x \to +\infty} (I(x))$.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

EXAMEN D'INTEGRALITES GENERALISEES

Exercice 1 (voir précédent)

Exercice 2

1- a) Soit l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$f:]0;+\infty] \to \mathbb{R}$

$t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est positive et continue sur $]0,+\infty]$ et donc localement Intégrable sur $]0,+\infty]$.

*Etude de la convergence en 0

$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ donc f est intégrable sur $]0;1[$ si et seulement si $x > 0$ (d'après les Critère de Riemann)

*Etude en $+\infty$

On a: $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} t^2e^{-t}t^{x-1} = 0$

c'est-à-dire $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} o(\frac{1}{t^2})$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les intégrables $\int_0^1 f(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ convergent toutes les deux pour tout $x \in]0,+\infty[$.

Par conséquent, en utilisant la relation de Charles, $\Gamma(x)$ converge si et seulement si $x \in]0,+\infty[$.

1- b) Evaluons $\Gamma(x), \forall x \in \mathbb{N}^*$.

Soit $x \in]0,+\infty[$. Soient a et A deux réels tels que $0 < a < A$.

Les fonctions $t \longmapsto t^x$ et $t \longmapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[a,A]$.

En effectuant une intégration par parties, on obtient :

En posant $\begin{cases} u = t^x \\ v' = -e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = xt^{x-1} \\ v = e^{-t} \end{cases}$

$\int_a^A t^x e^{-t}dt = [-t^x e^{-t}]_a^A + x\int_a^A t^{x-1}e^{-t}dt$

$\int_a^A t^x e^{-t}dt = -A^x e^{-A} + a^x e^{-a} + x\int_a^A t^{x-1}e^{-t}dt$

Puisque $x > 0$ et donc $x + 1 > 0$, quand $a \to 0$ et $A \longrightarrow +\infty$, on obtient :

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

$$\Gamma(x+1) = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ a\to 0}} \int_a^A t^2 e^{-t} dt = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ a\to 0}} \left(-A^x e^{-A} + a^x e^{-a} + x\int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt\right)$$

$$\Gamma(x+1) = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ a\to 0}} x\int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

$$\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)$

De plus $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^t dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$,

Par récurrence, on obtient alors

$\forall n \in \mathbb{N}^*,$ $\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$

$$* \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

On pose $u = \sqrt{t}$ et $t = u^2$ et $dt = 2u\,du$

et on obtient:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} \times 2u du$$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$$

2) Application,

Calculons $I = \int_0^1 x^m (lnx)^n dx$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $m > -1$.

$Soit\ f:]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$x \longmapsto x^m (lnx)^n$$

f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $m > -1$. Par conséquent I est bien défini.

Posons $u = lnx \Longrightarrow x = e^u, du = \frac{1}{x} dx$

$$\Longrightarrow xdu = dx \Longrightarrow e^u du = dx$$

quand $x \longrightarrow 0, u \longrightarrow -\infty$ et quand $x \longrightarrow 1, u \longrightarrow 0$.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$I = \int_0^1 x^m (lnx)^n dx = \int_{-\infty}^0 e^{mu}\, u^n e^u du$$

$$I = \int_{-\infty}^0 u^n\, e^{(m+1)u} du \quad \text{posons} \quad I = In$$

$$I_{n+1} = \int_{-\infty}^0 u^{n+1}\, e^{(m+1)n} du$$

Posons $x = u^{n+1} = 0 \implies x' = (n+1)u^n$

$$v' = e^{(m+1)u} \implies v = \frac{1}{m+1} e^{(m+1)u}$$

$$I_{n+1} = \left[\frac{n^{n+1}}{m+1} e^{(m+1)u}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{n^{n+1}}{m+1} \int_{-\infty}^0 u^n e^{(m+1)u} du$$

$$I_{m+1} = -\frac{n+1}{m+1} \int_{-\infty}^0 u^n e^{(m+1)u} du$$

$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{m+1} In$$

On a: $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = -\frac{n+1}{m+1} I_n$

On montre par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, I_n = -\frac{n}{m+1} I_{n-1}$$

$$\forall \in \mathbb{N}^*, I_n = -\frac{1}{m+1}(u\, I_{n-1})$$

On a: $I_o = \int_0^1 x^m dx = \int_{-\infty}^0 e^{(m+1)u} du = \frac{1}{m+1}$

$$I_1 = -\frac{1}{m+1} I_0 = -\frac{1}{(m+1)^2}$$

$$I_2 = -\frac{1}{m+1}(2\, I_1)$$

$$I_2 = -\frac{2}{m+1} I_1 = -\left(-\frac{2}{(m+1)}\right)\left(-\frac{2}{(m+1)^u}\right)$$

$$I_2 = -\frac{2}{(m+1)^3}$$

$$I_n = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}} = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 3

a) Etude de la nature d'intégrales :

- $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{sin\,(x)}{x} dx$

Posons $f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$$

f est continue sur $-]0;+\infty[$, donc localement intégrable sur $]0;+\infty[$.

*Etude en 0

Soit $C \in]0,+\infty[$

On a: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin\,(x)}{x} = 1$

Alors $\int_0^c f(x)dx$ est une fausse intégrale généralisée en zero. Par conséquent, elle converge en 0.

*Etude en +∞

Posons $\forall\, x \in [c,+\infty[,\ f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \sin(x)$

$f \in C^{\infty}([c,+\infty[)$. De plus $\forall\, x \in]c,+\infty[$,

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Alors f est strictement décroissante sur $[c,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Aussi, $\forall x \in [c,+\infty[$, $\left|\int_c^x g(t)\,dt\right| = \left|\int_c^x \sin t\,dt\right|$

$$= |-[\cos t]_c^x| = |\cos(c) - \cos(x)|$$
$$= |\cos(c) - \cos(x)| \leq |\cos x| + |\cos(c)|$$
$$\leq 1 + 1 = 2$$

$$\left|\int_c^x g(t)\,dt\right| = 2$$

D'après la règle d'Abel, $\int_c^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_c^{+\infty} \frac{\sin\,(x)}{x} dx$ converge.

Comme les intégrales $\int_0^c \frac{\sin\,(x)}{x} dx$ et $\int_c^{+\infty} \frac{\sin\,(x)}{x} dx$ convergent, on conclut en utilisant la rélation que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\,(x)}{x} dx$ converge.

- $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{Arctg\,x}{x} dx$

Posons $f : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{Arctg\,x}{x}$$

f est continue sur $[1;+\infty[$, donc localement intégrable sur $[1;+\infty[$.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

*Etude en $+\infty$

$f(x) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$ donc les intégrales $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x}\,dx$ sont de même nature.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x}\,dx$ est Riemann divergente.

b) Vérifions que $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3}\,dx$ diverge.

Posons $f : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3}$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{x^4+1}}{x+3}$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x} = +\infty$$

Alors $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3}\,dx$ diverge (Règle de Riemann au voisinage de l'infini).

*Trouvons g sur $[1;+\infty[$ telle que $\int_1^{+\infty} [\frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} - g(x)]dx$ converge.

Posons $h : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} - g(x)$$

$h(x) \underset{t\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} - g(x)\right) = x - g(x).$

Comme $\int_1^{+\infty} h(x)\,dx$ converge, alors $\int_1^{+\infty} (x - g(x))\,dx$ converge.

La fonction $g : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x - \frac{1}{x^2}$ est suffisante. Par conséquent $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

- $I_3 = \int_1^3 \frac{dx}{(3-x)(\sqrt{x^2+1})}$

Posons $f : [1;3[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{(3-x)(\sqrt{x^2+1})}$$

f est continue sur $[1;3[$, donc localement intégrable sur $[1;3[$.

*<u>Etude en 3</u>

On a : $\lim\limits_{x\to 3^-}(-3+x)f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{\sqrt{10}} \neq 0$

Alors $\int_1^3 f(x)\,dx$ diverge (Règle de Riemann au voisinage d'un point).

- $I_4 = \int_{-1}^1 \frac{e^{Arctg\,x}}{x\sqrt{|x|}}\,dx$

Posons $f : [-1;0[\cup]0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{e^{Arctg\,x}}{x\sqrt{|x|}}$$

f est continue sur $[-1;0[\cup]0;1]$, donc elle est localement intégrable sur $[-1;0[\cup]0;1]$.

On a : $\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{Arctg\,x}}{\sqrt{|x|}} = +\infty$

Donc $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ diverge (Règle de Riemann au voisinage d'un point).

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

UFR-MI Année 2022-2023

INTEGRALES GENERALISEES

SESSION 1

EXERCICE 2

Soit x$\epsilon\mathbb{R}$;on considère la fonction suivante :I(x) =$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$

1)Déterminons le domaine de définition de I(x)

Pour x$\epsilon\mathbb{R}$;la fonction t$\mapsto \frac{1}{1+t^x}$ est définie et continue sur [1 ;+∞[donc localement intégrable sur [1 ;+∞[

Traitons juste le problème au voisinage de +∞

- Si x<0 ; $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+t^x}$ =1 car $\lim_{t\to+\infty} t^{\lambda}$=0

Donc I(x) ne converge pas au voisinage de +∞

- Si x=0 alors la fonction est constante et son intégral ne converge pas au voisinage de +∞
- Si x>0 alors on :$\frac{1}{1+t^x} \sim \frac{1}{t^x}$ en +∞

Puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$ est une intégrale de Riemann convergente au voisinage de +∞ si x>1 alors d'après le critère d'équivalence I(x) converge si x>1

Ainsi $\mathcal{D}_I$ =]1 ;+∞[

2)Montrons que la fonction I est décroissante sur $\mathcal{D}_I$

Soient X ,Yϵ $\mathcal{D}_I$ tels que 1<x<y

Soit la fonction z$\mapsto t^z$ $avec$ $t \geq 1$, croissante alors :

$t^x < t^y \Longrightarrow 1 + t^x < 1 + t^y$

$\Rightarrow \frac{1}{1+t^y} < \frac{1}{1+t^x}$

$\Rightarrow I(y) < I(x)$

Donc I est décroissante

3)Calculons la $\lim_{x\to+\infty} (I(x))$

VALIDFUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Pour x>1 et t≥1, on a :

$0\leq \frac{1}{1+t^x} \leq \frac{1}{t^x} \Rightarrow 0\leq I(x)\leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}=\frac{1}{x-1}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1}=0$

D'après le théorème de comparaison , $\lim_{x\to+\infty}(I(x))=0$

EXERCICE 1

1)Déterminons le domaine $\mathcal{D}$ des couples (a , b) de nombres réels tels que l'intégrale K(a , b)=$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^b(1-x^2)^{2a}}$ converge

Soit f la fonction : x↦ $\frac{1}{x^b(1-x^2)^{2a}}$; f est définie et continue sur]1, +∞[donc localement intégrable sur]1, +∞[

1 et +∞ sont les bornes impropres

- Etude en 1

f (x)= $\frac{1}{x^b(1-x^2)^{2a}}=\frac{1}{x^b(1-x)^{2a}(1+x)^{2a}} \sim \frac{1}{4^a(1-x)^{2a}}$

Soit c > 1 ;on a $\int_1^c \frac{dx}{(1-x)^{2a}}$ est une intégrale de Riemann au voisinage de 1 qui converge si et seulement si 2a< 1 de meme pour $\int_1^c \frac{dx}{4^a(1-x)^{2a}}$

D'après le critère d'équivalence ; $\int_1^c \frac{dx}{x^b(1-x^2)^{2a}}$ converge pour a< $\frac{1}{2}$

- Etude en +∞

f(x)$\sim_{+\infty} \frac{1}{x^{4a+b}}$et $\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^{4a+b}}$ est une intégrale de Riemann au voisinage de +∞ qi converge si et seulement si 4a+b> 1 donc a> $\frac{1-b}{4}$

D'après le critère d'équivalence $\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^b(1-x^2)^{2a}}$ converge si et seulement si a> $\frac{1-b}{4}$

On a :

a< $\frac{1}{2}$ et 4a+b> 1 ⇒ b>-1

Ainsi $\mathcal{D}=\left\{(a,b)\epsilon\right]-\infty;\frac{1}{2}\left[X\right]-1;+\infty[/\frac{1-b}{4}<a<\frac{1}{2}\right\}$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFRMI L2 2019- 2020

EXAMEN DE GEOMETRIE 1 (ou GEOMETRIE Plane) : Durée 2 h

Exercice 1

Faire une étude et construire les courbes paramétrées suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = sin(2t) \\ y(t) = sin(t) \end{cases}$$

On précisera les tangentes aux points particuliers

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de ses structures euclidienne et affine et de son repère cartésien canonique, $R = (O, e_1, e_2, e_3)$. On considère la droite affine $\mathcal{D}$ d'équation : $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y - z - 1 = 0$.

1- Déterminer la position relative de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{P}$.
2- Déterminer l'expression analytique de :
   a- La symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$.
   b- L'affinité de base $\mathcal{P}$, de rapport (-2), de direction la droite vectorielle $\vec{\mathcal{D}}$ associée à $\mathcal{D}$.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFR L2 2020-2021

EXAMEN DE GEOMETRIE 1(ou GEOMETRIE Plane)
Durée: 2H

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de ses structures euclidienne et affine et de son repère cartésien canonique, $R = (O, e_1, e_2, e_3)$, on considère la droite affine $\mathcal{D}$ d'équation : $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation: $x+y-z-2=0$.

1- Déterminer la position relative de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{P}$.

2- Déterminer l'expression analytique de:

a- La symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$.

b- L'affinité de base $\mathcal{P}$, de rapport (-3), de direction la droite vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ associée à $\mathcal{D}$.

Exercice 2

Etudier et représenter graphiquement la courbe paramétrée (Γ) définie par:

$$M(t) = (x(t), y(t)) = (-\cos t; \sin 2t)$$

On précisera les tangentes aux points particuliers.

Exercice 3

Etudier et construire la courbe d'équation polaire: $r = 1 - \sin(2\theta)$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFRMI I.2 2021- 2022 SESSION 1

EXAMEN DE GEOMETRIE 1 (ou GEOMETRIE Plane) : Durée 1 h 30'

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de ses structures euclidienne et affine et de son repère cartésien canonique, $R = (O, e_1, e_2, e_3)$, on considère la droite affine $\mathcal{D}$ d'équation : $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$ $A(1; 0; 1)$ un point de l'espace et le plan $\mathcal{P}$ passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

1- Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
2- Déterminer l'expression analytique de :
l'affinité de base $\mathcal{P}$, de rapport (-2), de direction la droite vectorielle $\vec{\mathcal{D}}$ associée à $\mathcal{D}$.

Exercice 2

Etudier et représenter graphiquement la courbe paramétrée (Γ) définie par :

$$M(t) = (x(t), y(t)) \quad \begin{cases} x(t) = (t+1)e^{\frac{1}{t}} \\ y(t) = (t-1)e^{\frac{1}{t}} \end{cases}$$

On précisera les tangentes aux points particuliers

Exercice 3

Etudier et construire la courbe d'équation polaire : $r(\theta) = \sqrt{\cos(\theta)}$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFRMI L2 2022- 2023 Session 1

EXAMEN DE GEOMETRIE 1 (ou GEOMETRIE Plane) : Durée 1 h 30'

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de ses structures euclidienne et affine et de son repère cartésien canonique, $R = (O, e_1, e_2, e_3)$, on considère le plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1; 0; 1)$ tel que : $\mathcal{D}_1 // \mathcal{P}$, $\mathcal{D}_2 // \mathcal{P}$ avec $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = t - 2 \end{cases}$ $\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$

1- Déterminer la position relative des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
2- Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
3- Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 2

Etudier et représenter graphiquement la courbe paramétrée (Γ) définie par :

$$M(t) = (x(t), y(t)) \ : \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$$

On précisera les tangentes aux points particuliers

Exercice 3

Etudier et construire la courbe d'équation polaire : $r(\theta) = -cos\theta$

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

Géométrie 1 : 2019-2020

Exercice 1

Soit $\Gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$

Faire une étude et construire la courbe paramétrée.

- **Domaine de définition D**

$D_x = \mathbb{R}$ et $D_y = \mathbb{R}$

$\Rightarrow D = D_x \cap D_y = \mathbb{R}$

- **Réduction du domaine D**

$\forall t \in \mathbb{R}, t + 2\pi \in \mathbb{R},$

$\Gamma(t + 2\pi) = \begin{cases} x(t + 2\pi) = \sin(2t) \\ y(t + 2\pi) = \sin(t) \end{cases}$

$\Gamma(t + 2\pi) = \Gamma(t)$

Donc, on réduit D sur un intervalle de longueur 2π

Prenons $D_1 = [-\pi; \pi]$

On obtient la courbe complète quand t décrit D_1

$\forall t \in D_1, -t_1 \in D_1,$

$\Gamma(-t) = \begin{cases} x(-t) = sin(-2t) \\ y(-t) = sin(-t) \end{cases}$

$\Gamma(-t) = \begin{cases} x(-t) = -\sin(2t) \\ y(-t) = -\sin(t) \end{cases}$

$\Gamma(-t) = \begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$

$\Rightarrow \Gamma(-t) = S_0\Gamma(t)$

Donc, on réduit le domaine de définition sur $D_2 = [0; \pi]$, puis on obtient la courbe complète par la symétrie centrale de centre O.

$\forall t \in [0; \pi],$

$\Gamma(\pi - t) = \begin{cases} x(\pi - t) = -sin(2t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = sin(t) = y(t) \end{cases}$

$\Gamma(\pi - t) = S_0 y\Gamma(t)$

On étudie et on construit la courbe sur $D_3 = [0; \frac{\pi}{2}]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy), puis par symétrie centrale de centre O.

- **Dérivée et sens de variation**
- **Dérivée**

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], x'(t) = 2\cos(2t)$

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], y'(t) = \cos(t)$

- **Sens de variation**

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], x'(t) \geq 0$

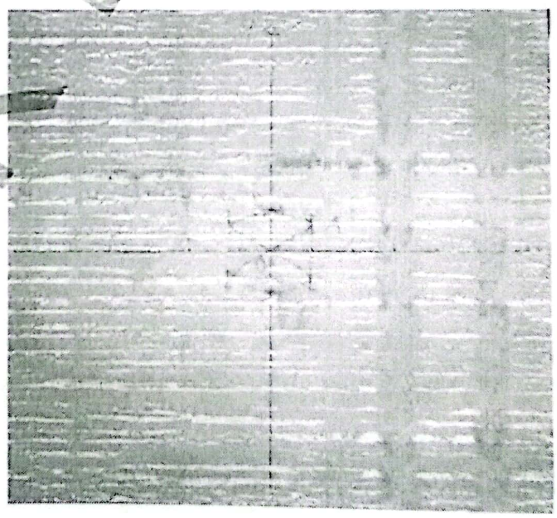
$\forall t \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right], x'(t) < 0$

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], y'(t) > 0$

Tableau de variation

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		+	0	-	
$x(t)$	0	↗	1	↘	0
$y(t)$	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	1
$y'(t)$		+		+	
Points particuliers	$O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$		$A\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\1\end{pmatrix}$		$B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
Vecteurs tangents	$\overrightarrow{T_0}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$		$\overrightarrow{T_A}\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$		$\overrightarrow{T_B}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

Construction



Exercice 2

1) Position relative de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{P}$.

Déterminons l'intersection de $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{P}$.

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$M \in P \cap D \Leftrightarrow M \subset P \text{ et } M \subset D$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$M \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z-1 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z-1 \\ y=-z \end{cases}$

$M \in P \Leftrightarrow x+y-z-1=0$

Alors $M \in P \cap D \Leftrightarrow z-1-z-z-1=0$

$\Leftrightarrow -z-2=0 \Leftrightarrow z=-2$

D'où $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \\ z=-2 \end{cases}$

Donc, $P \cap D = M\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

La droite D est sécante au plan P en $M\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2) Expression analytique de :

a) La symétrie orthogonale par rapport à D

Déterminons l'expression analytique de la projection orthogonale à D.

Soient $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

M' est la projection orthogonale de M sur D.

$P(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in D \\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{n} \text{ où} \end{cases}$

$\vec{n}$ est un vecteur normal à D.

Avec $\vec{n}$ est un vecteur normal à D.

Avec $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a : $\overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x=\lambda \\ y'-y=\lambda \\ z'-z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (S): \begin{cases} x'=x+\lambda \\ y'=y+\lambda \\ z'=z \end{cases}$

Déterminons λ

$M' \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x'+y'+1=0 \\ x'-z'+1=0 \end{cases}$

$M' \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2\lambda-y-1 \\ -\lambda=y+z \end{cases} \Rightarrow \lambda=-(y+z)$

D'où $\begin{cases} x'=x-y-z \\ y'=-z \\ z'=z \end{cases}$ est l'expression analytique de la projection orthogonale sur D.

Expression analytique de la symétrie orthogonale.

Soit S la symétrie orthogonale

$S(M)=M'+\overrightarrow{MM'}$

$= 2M'-M$

$S(M)=2P(M)-M$

B) Soit a l'affinité de rapport (-2), de base $\mathcal{P}$ et de direction $\vec{D}$.

$a(M)=M'-2\overrightarrow{M'M}$

$a(M)=3M'-2M$

Posons $P(M)=M'$

La projection de M sur $\mathcal{P}$ de direction $\vec{D}$.

Déterminons l'expression analytique de la projection de base $\mathcal{P}$ et de direction $\vec{D}$.

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur directeur de $\vec{D}$.

Alors $\vec{D} = <\vec{v}>$

Soient $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$P(M)=M' \Rightarrow \begin{cases} M' \in \mathcal{P} \\ \exists \alpha \in \mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{MM'} = \alpha \vec{v} \end{cases}$

On a : $\overrightarrow{MM'} = \alpha \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x=\alpha \\ y'-y=-\alpha \\ z'-z=\alpha \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+\alpha \\ y'=y-\alpha \\ z'=z+\alpha \end{cases}$

Déterminons α

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow x+y-z-1=0$

$M' \in \mathcal{P} \Leftrightarrow x'+y'-z'-1=0$

$\Rightarrow \alpha = x+y-z-1$

Alors

$\begin{cases} x'=2x+y-z-1 \\ y'=-y+z+1 \\ z'=x+y-1 \end{cases}$ est l'expression analytique de la projection sur $\mathcal{P}$ de direction $\vec{D}$.

Posons $a(M)=M''$

Alors $a(M)=M''=3P(M)-2M \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x''=4x+3y-3z-3 \\ y''=3z-5y+3 \\ z''=3x+3y-3-2z \end{cases}$ est l'expression analytique de l'affinité de base $\mathcal{P}$ de rapport (-2) et de direction $\vec{D}$.

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

Correction de Géométrie 1

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de scs structures cuclidiennes et affines et de son repère cartésien canonique. $\mathcal{R} = (0, e_1, e_2, e_3)$, on considère la droite affine $\mathcal{D}$ d'équation $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y-z-2=0$

1) Déterminons la position relative de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \begin{cases} x+y+1=0 \\ x-z+1=0 \\ x+y-z-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ z=x+1 \\ x+y-z-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ z=x+1 \\ x+(-x-1)-(x+1)-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ z=x+1 \\ -x-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ z=x+1 \\ x=-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ z=-3 \\ x=-4 \end{cases}$$

D'où $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = I(-4,3,-3)$

Donc $\mathcal{D}$ coupe le plan au point $I(-4,3,-3)$

1. Déterminons l'expression analytique de :

On a : $\mathcal{D} = \begin{cases} x+y+1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$

$$\mathcal{D} = \begin{cases} y=-x-1 \\ z=x+1 \\ x=x \end{cases}$$

Posons $t = x$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D} = \begin{cases} y=-t-1 \\ z=t+1 \\ x=t \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{D} = A + \vec{D}$$

Avec $A = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si M' est symétrie orthogonale de M par rapport à la droite $\mathcal{D}$ alors :

$$S(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ \overrightarrow{MM'}.\vec{D} = 0 \\ ii)\ \frac{1}{2}(M+M') \in D \end{cases}$$

Posons $I = \frac{1}{2}(M+M')$ et $A \in D$.

D'où $I \in D, \overrightarrow{AI} = \lambda \vec{D}$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x'+x) \\ \frac{1}{2}(y+y')+1 \\ \frac{1}{2}(z+z')-1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'+x = 2\lambda \\ y+y'+2 = -2\lambda \\ z+z'-2 = 2\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2\lambda - x \\ y' = -2\lambda - y - 2 \ (E_1) \\ z' = 2\lambda - z + 2 \end{cases}$$

$i)\ \overrightarrow{MM'}.\vec{D} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x' - x - y' + y + z' - z = 0 \ (E_2)$

En remplaçant (E_1) dans (E_2) on a :

$2\lambda - x - x + 2\lambda + y + 2 + y + 2\lambda - z + 2 - z = 0$

$\Leftrightarrow 6\lambda - 2x + 2y - 2z + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 3\lambda - x + y - z + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 3\lambda = x - y + z - 2$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}(x - y + z - 2)$

En remplaçant λ dans (E_1) on a :

$$\Leftrightarrow S(M) = \begin{cases} x' = \frac{2}{3}(x-y+z-2) - x \\ y' = \frac{-2}{3}(x-y+z-2) - y - 2 \\ z' = \frac{2}{3}(x-y+z-2) - z + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow S(M) = \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x-2y+2z-4) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x+5y-2z-2) \\ z' = \frac{1}{3}(2x-2y-z+4) \end{cases}$$

b) l'affinité de base $\mathcal{P}$, de rapport (-3) de direction la droite vectorielle $\vec{D}$ associé à $\mathcal{D}$.

Soit $P(M)$ la projection associée à l'affinité $a(M)$ et λ le rapport de l'affinité.

On a : $a(M) = p(M) + \lambda\overrightarrow{p(M)M}$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$a(M) = p(M) - \lambda\big(M - p(M)\big)$$

$$a(M) = p(M) + (1-\lambda)p(M)$$

- Déterminons $p(M)$

$$p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ M' \in \mathcal{P} \\ ii)\overrightarrow{MM'} = \lambda\vec{D} \end{cases}$$

On a : $\mathcal{P} = x + y - z - 2 = 0\ (E_1)$ et $D = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{D} = A + \vec{D}$$

$$i)\ M' \in \mathcal{P} \Leftrightarrow x' + y' - z' - 2 = 0$$

$$ii)\overrightarrow{MM'} = \lambda\vec{D} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = \lambda \\ y'-y = -\lambda \\ z'-z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \lambda + x \\ y' = -\lambda + y\ (E_2) \\ z' = \lambda + z \end{cases}$$

En remplaçant (E_2) dans (E_1) on a :

$$\lambda + x - \lambda + y - \lambda - z - 2 = 0$$

$$-\lambda + x + y - z - 2 = 0$$

$$\lambda = x + y - z - 2$$

En remplaçant λ dans (E_1)

$$\text{On a : } p(M) = M' = \begin{cases} x' = x + y - z - 2 + x \\ y' = -(x + y - z - 2) + y\ (E_2) \\ z' = x + y - z - 2 + z \end{cases}$$

$$p(M) = \begin{cases} x' = 2x + y - z - 2 \\ y' = -x + z + 2\ (E_2) \\ z' = x + y - 2 \end{cases}$$

Comme $a(M) = \lambda M + (1-\lambda)p(M)$

$$a(M) = \begin{cases} x'' = -3x + 4x' \\ y'' = -3y + 4y' \\ z'' = -3z + 4z' \end{cases}$$

$$a(M) = \begin{cases} x'' = -3x + 8x + 4y - 4z - 8 \\ y'' = -3y - 4x + 4z + 8 \\ z'' = -3z + 4x + 4y - 8 \end{cases}$$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$a(M) = \begin{cases} x'' = 5x + 4y - 4z - 8 \\ y'' = -4x - 3y + 4z + 8 \\ z'' = 4x + 4y - 3z - 8 \end{cases}$$

Exercice 2

$M(t) = \big(x(t); y(t)\big) = (-cost\,; sin2t)$

$$M(t) = \begin{cases} x(t) = -cost \\ y(t) = sin2t \end{cases}$$

Soit $f(t) = \big(x(t); y(t)\big)$

Ensemble de définition

$D_f = \mathbb{R}$

Domaine de définition

$\forall t \in D_f, t + 2\pi \in D_f$ et $f(t + 2\pi) = f(t)$. D'où f est périodique de période 2π. On prend l'intervalle $D_1 = [-\pi; \pi]$ et obtient toutes les courbes par une rotation de centre O et d'angle π. $\forall t \in [0, \pi], -t \in [-\pi, 0]$ et $f(-t) = \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$

Nous allons restreindre le domaine à $D_2 = [0, \pi]$ et obtenir la courbe r_1 par symétrie d'axe O_x, $r_1 = S_{O_X}(M) \cup r_2$

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \pi - t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et $f(\pi - t) = (cost, -sin2t)$ soit $f(\pi - t) = -f(t)$.

D'où nous avons une symétrie centrale.

On se restreint à $D_3 = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et on complète à $[0; \pi]$ par symétrie centrale.

Variation

$$f'(t) = \begin{cases} x'(t) = sint \\ y'(t) = 2cos2t \end{cases}$$

$x'(t) = 0 \Leftrightarrow sint = 0$

$\Leftrightarrow t = 0$ ou $t = \pi$

$y'(t) = 0 \Leftrightarrow 2cos2t = 0$

$\Leftrightarrow cos2t = 0$

$\Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{2}$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$

Tableau de variation

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$+$		$+$	
$x(t)$	-1	↗	-0.707	↗	0
$y(t)$	0	↗	1	↘	0
$y'(t)$		$+$		$-$	
$M.I.C.I$	$A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$		$B\begin{pmatrix}-0,707\\1\end{pmatrix}$		$C\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Pas de boucle infinie

Pas de points stationnaires

<u>Tangente</u>

En $0, \vec{d} = 2\vec{j} \equiv \vec{j}$

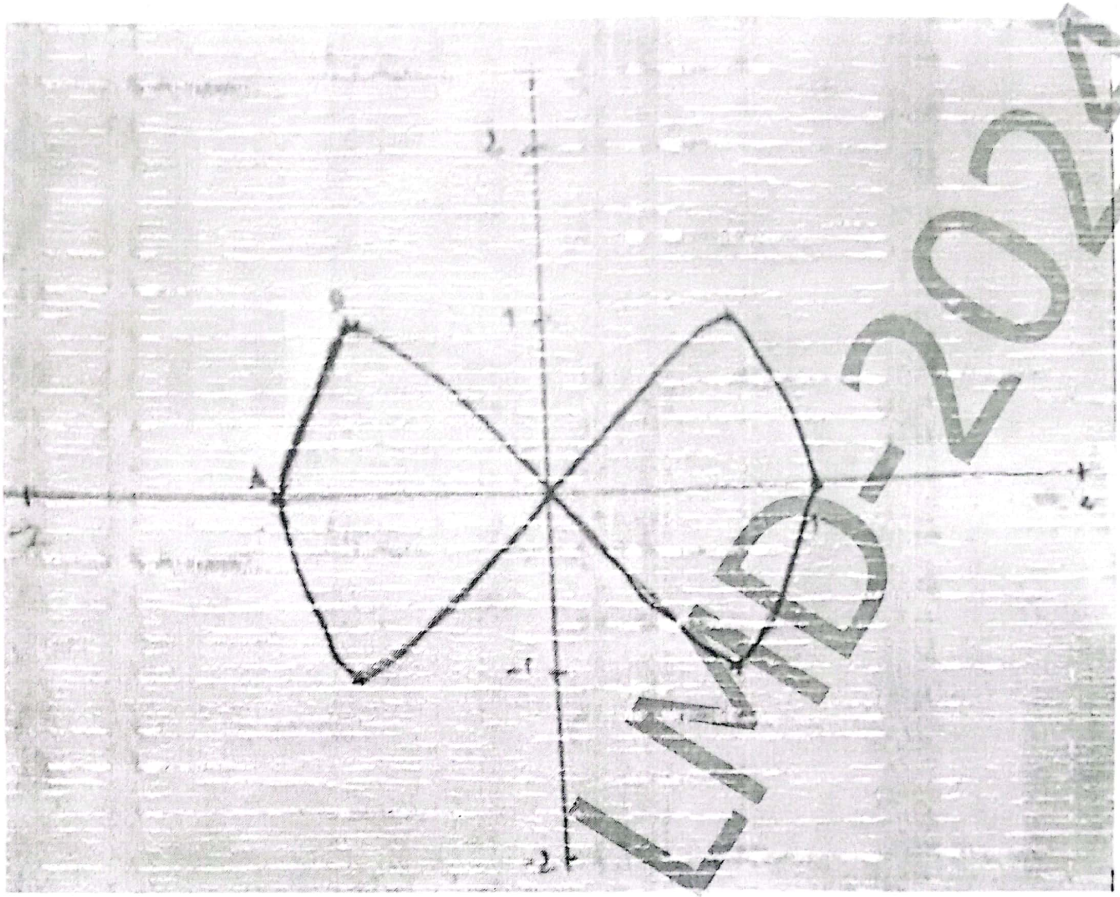
En $\frac{\pi}{4}, \vec{d} = -0,7\vec{\imath} \equiv -\vec{\imath}$

En $\frac{\pi}{2}, \vec{d} = \vec{\imath} - 2\vec{j}$

<u>Construction de la courbe</u>

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner



Exercice 3

$r = 1 - \sin(2\theta) = f(\theta)$

Ensemble de définition

$D_f = \mathbb{R}$

Domaine de définition

$f(\pi + \theta) = f(t)$. f est périodique de période π. Nous allons restreindre au domaine à

$D_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Plus de réduction possible.

Variation

$f'(\theta) = -2\cos(2\theta)$

$f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2cos2\theta = 0$

$\Leftrightarrow cos2\theta = 0$

$\Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

Tableau de variation

θ	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$	-		0	+	
$f(\theta)$	1	↘	0	↗	1
M.I.C.I	$r\begin{pmatrix}-\frac{\pi}{2}\\1\end{pmatrix}$		$B\begin{pmatrix}\frac{\pi}{4}\\0\end{pmatrix}$		$c\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\1\end{pmatrix}$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE GEOMETRIE 1 SESSION 1 ANNEE 2021-2022

EXERCICE 1

$(D)\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$ $A(1;0;1)$ *un point de l'espace et le plan* $\mathcal{P}$ passant par A et perpendiculaire à (D)

1-) Equation cartésienne de $\mathcal{P}$

$\begin{cases} x-y+1=0 \quad (1) \\ x+z+1=0 \quad (2) \end{cases}$ $(1)-(2) \Rightarrow \begin{cases} y=-z \\ x=-1-z \end{cases}$ En posant $t=z$, d'où $\begin{cases} x=-1-t \\ y=-t \\ z=t \end{cases}$

Alors $(D): B\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + IR_t \ avec \ \vec{t}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Comme (D) *est perpendiculaire au plan* $(\mathcal{P})$ alors le vecteur normal du plan est colinéaire à $\vec{t}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $\vec{n}$ le vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

L'équation du plan $(\mathcal{P})$ $ax+bx+cz+d=0$, $avec \ \vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathcal{P}): -x-y+z+d=0$

Comme $A \in (\mathcal{P})$ Alors $-x_A-y_A+z_A+d=0, \Rightarrow d=0$ d'où $(\mathcal{P})$: $-x-y+z=0$

2-) Soit $P: \varepsilon \to \epsilon$ La projection sur $(\mathcal{P})$ de direction $\vec{D}$,

$M \mapsto P(M)=M'$

- $M' \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{MM'} \in \vec{D}$ Soit $M(x',y',z'), \overrightarrow{MM'} \in \vec{D} \Leftrightarrow \exists \lambda \in IR, \ \overrightarrow{MM'} = \lambda\vec{t}$

$\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x'=-\lambda+x \\ y'=-\lambda+y \\ z'=\lambda+z \end{cases}$ $M' \in \mathcal{P}$ Alors M' vérifie l'équation du plan $\mathcal{P}$ d'où

$-x'-y'+z'=0, \Rightarrow -(-\lambda+x)-(-\lambda+y)+(\lambda+z)=0, \Rightarrow \lambda=\frac{1}{3}(x+y-z)$

$\begin{cases} x'=\frac{1}{3}(2x-y+z) \\ y'=\frac{1}{3}(-x+2y+z) \\ z'=\frac{1}{3}(x+y+2z) \end{cases}$ $\begin{cases} a: \varepsilon \to \epsilon \\ M \mapsto a(M)=M'' \end{cases} \Rightarrow a(M)=\lambda M+(1-\lambda)P(M)=-2M+3P(M)$

$a(M): \begin{cases} x''=-y+z \\ y''=-x+z \\ z''=x+y \end{cases}$

EXERCICE 2

$M(t)=\begin{cases} x(t)=(t+1)e^{\frac{1}{t}} & D_x=IR^* \\ y(t)=(t-1)e^{\frac{1}{t}} & D_y=IR^* \end{cases}$ $D_\Gamma=IR^* \ car \ D_\Gamma=D_x \cap D_y$

- Etude de $x(t)$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$\forall t \in IR^*, x'(t) = \left(\frac{t^2-t-1}{t^2}\right)e^{\frac{1}{t}}$ *Donc le signe de* $x'(t)$ *depend de* t^2-t-1

t	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$x'(t)$	$+$	$-$	‖	$-$	$+$

- Etude $y(t)$

$\forall t \in IR^*, y'(t) = \left(\frac{t^2-t+1}{t^2}\right)e^{\frac{1}{t}}$ *Donc le signe de* $y'(t)$ *depend de* t^2-t+1,

Or $t^2-t+1>0 \forall t \in IR$ *Donc* $y'(t)>0$

$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$, *car* $\lim_{t\to-\infty} \frac{1}{t} = 0$

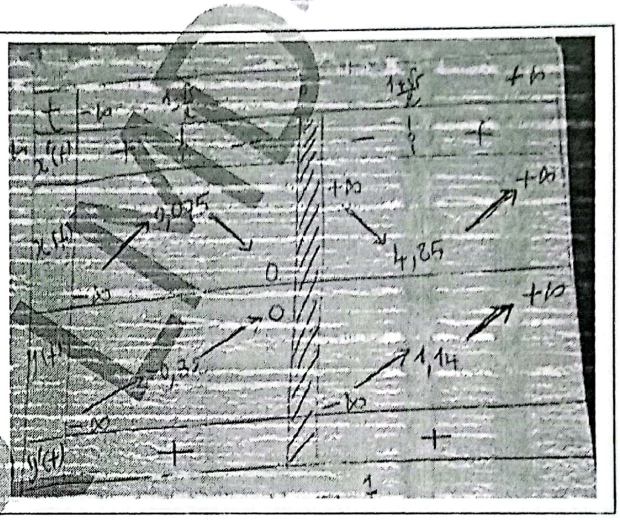
$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$, *car* $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$

$\lim_{t\to 0_<} x(t) = 0$, *car* $\lim_{t\to 0_<} \frac{1}{t} = -\infty$

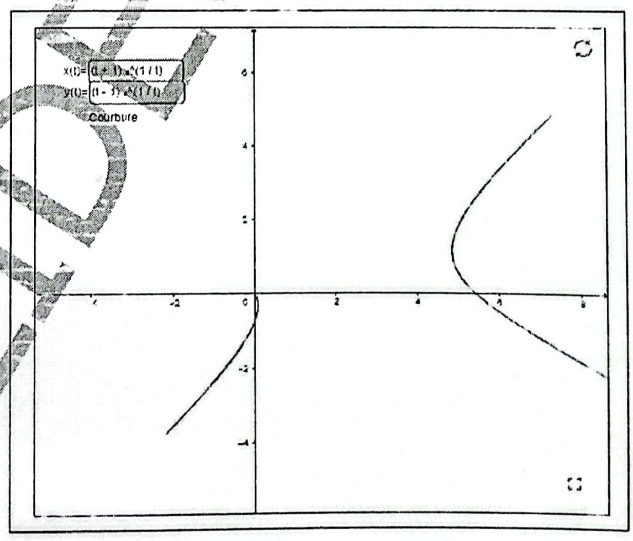
$\lim_{t\to 0_>} x(t) = +\infty$, *car* $\lim_{t\to 0_>} \frac{1}{t} = +\infty$

$\lim_{t\to 0_<} y(t) = 0$, *car* $\lim_{t\to 0_<} \frac{1}{t} = -\infty$

$\lim_{t\to 0_>} y(t) = -\infty$, *car* $\lim_{t\to 0_>} \frac{1}{t} = +\infty$



$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1$; $\lim_{t\to+\infty} y(t) - x(t) = -2$, *Donc la droite* $y = x-2$ *est une asymptote oblique en* $+\infty$ *et en* $-\infty$



VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 3

$r(\theta) = \sqrt{\cos(\theta)}$ $\theta \in D_r$ <=> $\cos(\theta) \geq 0$ <=> $\theta \in \bigcup_{k\in z}\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

$D_r = \bigcup_{k\in z}\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

Domaine d'étude

- Periodicity

$\forall\theta \in D_r, \theta + 2\pi \in D_r, r(\theta + 2\pi) = \sqrt{\cos(\theta + 2\pi)} = \sqrt{\cos(\theta)} = r(\theta)$

On réduit le domaine à un intervalle de longueur 2π, Soit I l'intervalle. $I = [-\pi;\pi] \cap D_r = \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Soit $D_1 = \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; (Γ_1) est la courbe de r sur D_1 et (Γ) est la courbe de r sur D_r

- Parité

$\theta \in D_1$ et $-\theta \in D_1$, $r(-\theta) = \sqrt{\cos(-\theta)} = \sqrt{\cos(\theta)} = r(\theta)$

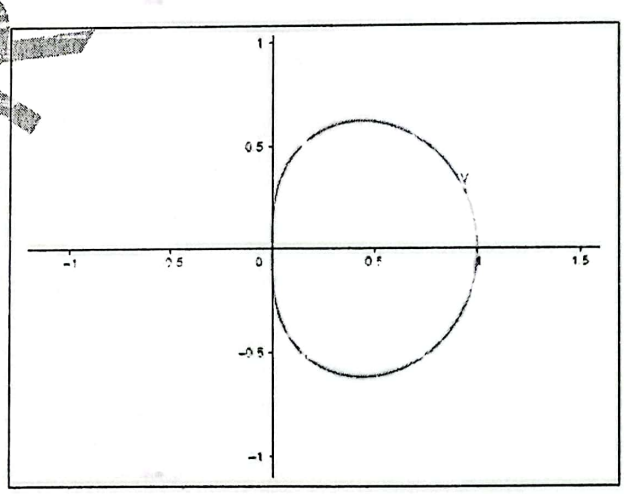
(Γ_1) Est symétrie par rapport à (ox) $D_{2=}\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et (Γ_2) est la courbe sur D_2

- *Etude sur* D_2

$$r(\theta) = \sqrt{\cos(\theta)}\ ;\quad r'(\theta) = -\frac{\sin(\theta)}{2\sqrt{\cos(\theta)}};\quad \theta \in D_2 <=> 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} <=> \sin(\theta)$$

≥ 0 *Alors* $r'(\theta) \leq 0$

θ	0 → $+\infty$
$r'(\theta)$	−
$r(\theta)$	1 ↘ 0



VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

EXAMEN GEOMETRIE 1 PREMIERE SESSION 2022-2023

EXERCICE 1

$$D_1:\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t \\ z = t-2 \end{cases} \quad donc\ D_1 = A_1(1;0;-2) + \mathbb{R}\overrightarrow{d_1}(1;-1;1)$$

$$D_2\begin{cases} x+y+1=0 \\ x+z-1=0 \end{cases} <=> \begin{cases} y=-x-1 \\ z=-x+1 \end{cases} <=$$

$$> \begin{cases} x = t \\ y = -t-1 \\ z = -t+1 \end{cases} \quad donc\ D_2 = A_2(0;-1;1) + \mathbb{R}\overrightarrow{d_2}(1;-1;-1)$$

$D_1 \,//\, \wp$ et $D_2 \,//\, \wp$ signifie que $\overrightarrow{d_1} \in \overrightarrow{\wp}$ *et* $\overrightarrow{d_2} \in \overrightarrow{\wp}$

1- $\overrightarrow{d_1}$ *et* $\overrightarrow{d_2}$ *ne sont pas colinéaire et* $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ *donc* D_1 *et* D_2 *ne se touche pas*

2- Soit $M(x,y,z) \in \wp \Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{d_1}\,;\overrightarrow{d_2}) = 0$ *donc l'équation est* $\wp: x+y-1=0$

3- Ψ *la symétrie orthogonale par rapport à* $\wp$. $\vec{n}(1;1;0)$ *le vecteur normal à* $\wp$.

$$\Psi(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{M+M'}{2} \in \wp \\ \overrightarrow{MM'} \in \mathbb{R}\vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x+x'}{2} + \frac{y+y'}{2} - 1 = 0 \ et\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\ tel\ que \begin{cases} x' = x+\lambda \\ y' = y+\lambda \\ z' = z \end{cases}$$

$$\text{Donc } x'+y'+x+y-2=0 \Leftrightarrow x+\lambda+y+\lambda+x+y-2=0 \Leftrightarrow \lambda = -x-y+1$$

$$Par\ suite\ \Psi:\begin{cases} x' = -y+1 \\ y' = -x+1 \\ z' = z \end{cases}$$

EXERCICE 2

$$\varphi:\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$$

$D_\varphi = D_x \cap D_y$; $t \in \mathbb{R}, t+2\pi \in \mathbb{R}$ *et* $\varphi(t+2\pi) = \varphi(t)$ *donc* φ *est* $2\pi-$*périodique,*

On obtient toute la courbe sur $D = [-\pi, \pi]$

$$t \in [-\pi,\pi], -t \in [-\pi,\pi]\ et\ \varphi(-t) = (\cos t, -\sin 2t) = \big(x(t), -y(t)\big)$$

On une une symétrie par rapport à l'axe OX .Soit Γ_1 *la courbe sur* $D_1 = [0,\pi]$

Donc $\Gamma = \Gamma_1 \cup$ (*symétrie d'axe OX*)

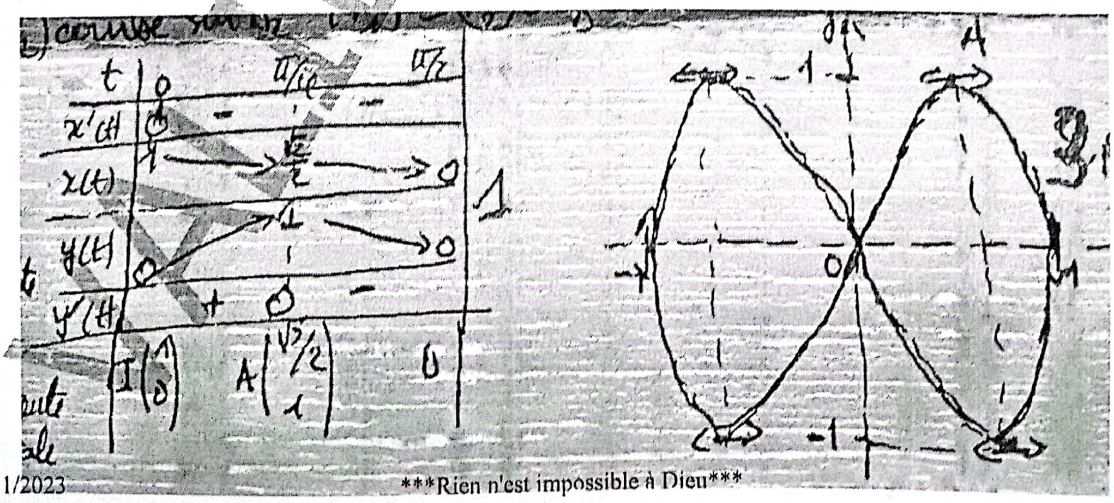
$$t \in [0,\pi], \quad \pi - t \in [0,\pi]\ et\ \varphi(\pi-t) = \big(-x(t), -y(t)\big)$$

On a une symétrie par rapport à l'origine O . Soit Γ_2 *la courbe sur* $D_2 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Donc $\Gamma_1 = \Gamma_2 \cup$ (*symétrie par rapport à* O)

$$\begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = 2\cos 2t \end{cases}$$

En I on a une tangente verticale , en A on a une tangente horizontale



Scanné avec CamScanner

EXERCICE 3

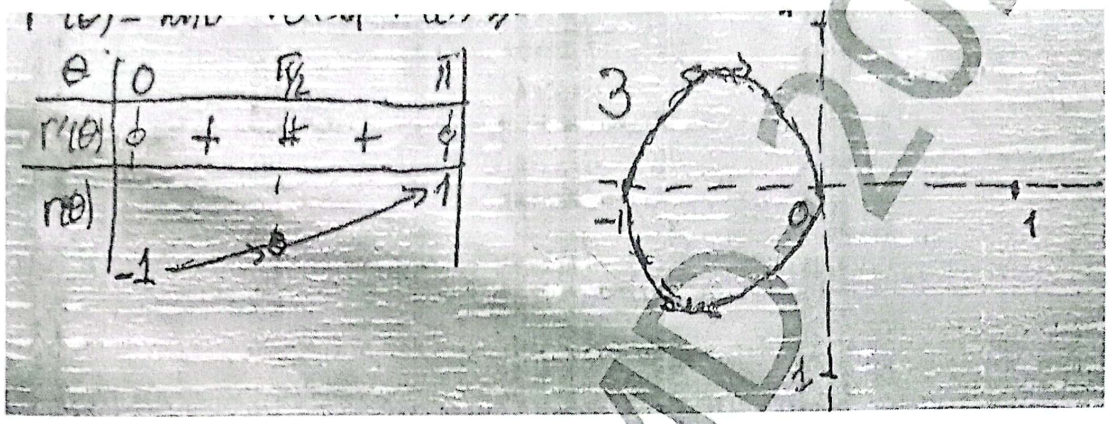
$$r(\theta) = -\cos\theta \ , D_r = \mathbb{R}, rest\ 2\pi - périodique$$

$$D = [-\pi, \pi]\ le\ domaine\ d'étude.$$

$$\theta \in D, -\theta \in D\ et\ r(-\theta) = r(\theta)\ donc\ la\ courbe\ \Gamma\ de\ r\ est\ symétrie\ par\ rapport\ à\ OX$$

$$Soit\ \Gamma_1\ la\ courbe\ sur\ D_1 = [0, \pi]\ alor\ \Gamma = \Gamma_1 \cup (symétrie\ d'axe\ OX)$$

$$r'(\theta) = \sin\theta\ , \forall\theta \in D_1 \quad r'(\theta) \geq 0.$$



VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFRMI L2 2019- 2020

EXAMEN DE GEOMETRIE 2 (ou GEOMETRIE DANS L'ESPACE) : Durée 2 h

EXERCICE 1

L'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère l'endomorphisme affine f de $\mathcal{E}$ qui à $M(x, y, z)$ associe $M'(x', y', z')$ tel que : $f(M) = (y + 1, x + 1, z)$.

Montrer f est une isométrie de $\mathcal{E}$ dont on précisera les caractéristiques géométriques.

EXERCICE 2

L'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit la quadrique d'équation : (E) $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + x = 0$

Déterminer l'équation réduite de cette quadrique et préciser sa nature.

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFRMI L2 2020-2021

EXAMEN DE GEOMETRIE 2(ou GEOMETRIE DE L'ESPACE)
Durée: 2H

EXERCICE 1

L'espace affine euclidien (ε, E) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'endomorphisme affine f de ε qui à $M(x, y, z)$ associe $M'(x', y', z')$ tel que : $F(M) = M'(y, x, z + 1)$.

Montrer f est une isométrie de ε dont on précisera la nature et les caractéristiques géométriques.

EXERCICE 2

L'espace affine euclidien (ε, E) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit la quadrique d'équation: $(E) : x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - x - z = 0$

Déterminer l'équation réduite de cette quadrique et préciser sa nature.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFRMI
L2 2020-2021
Session 2 Septembre 2021

EXAMEN DE GEOMETRIE 2(ou GEOMETRIE DE L'ESPACE)
Durée: 2H

EXERCICE 1

L'espace affine euclidien (ε, E) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère l'endomorphisme affine f de ε qui à $M(x, y, z)$ associe $M'(x', y', z')$ tel que : $F(M) = M'(y+1, x, z+1)$.

Montrer f est une isométrie de ε dont on précisera la nature et les caractéristiques géométriques.

EXERCICE 2

L'espace affine euclidien (ε, E) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit la quadrique d'équation: $(E) : x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + x = 0$

Déterminer une équation réduite de cette quadrique et préciser sa nature.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFRMI L2 2021- 2022

EXAMEN DE GEOMETRIE 2 (ou GEOMETRIE DANS L'ESPACE) : Durée 2 h
SESSION 1

Exercice 1

L'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

$f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ $M(x,y,z) \mapsto M'(x',y',z')$ tel que $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ z' = z+1 \end{cases}$ une application affine définie par son expression analytique.

Montrer que f est une isométrie de $\mathcal{E}$ dont on précisera la nature et les caractéristiques.

Exercice 2

L'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit la quadrique d'équation :

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - x - z = 0$$

Déterminer l'équation réduite et la nature de cette quadrique

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD-2024

Université FHB Cocody UFRMI L2 2022- 2023 Session 1

EXAMEN DE GEOMETRIE 2 (ou GEOMETRIE DANS L'ESPACE) : Durée 2 h

Exercice 1

L'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

$f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ $M(x,y,z) \mapsto M'(x',y',z')$ tel que $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x - 1 \\ z' = z + 1 \end{cases}$ une application affine définie par son expression analytique.

Montrer que f est une isométrie de $\mathcal{E}$ dont on précisera la nature et les caractéristiques.

Exercice 2

L'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit la quadrique d'équation :

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 2yz + x - y + z = 0$$

Déterminer l'équation réduite et la nature de cette quadrique

Scanné avec CamScanner

Proposition de correction Géométrie dans l'espace : 2019-2020

Exercice 1

$$f:\begin{cases} x' = y+1 \\ y' = x+1 \\ z' = z \end{cases}$$

Montrons que f est une isométrie de $\mathcal{E}$ dont on précisera les caractéristiques géométriques.

$$L(f) = \begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ z' = z \end{cases}$$

Soit A la matrice associée à $L(f)$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons $A \times ({}^tA)$

On a :

$$A \times ({}^tA) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \times ({}^tA) = I_3$ donc f est une isométrie

$$det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Donc f est un antidéplacement.

Déterminons $inv(f)$

$M \in inv(f) \Leftrightarrow f(M) = M$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1 = x \\ x+1 = y \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1+1 = x \\ y = x+1 \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 0 \ impossible \\ z = z \end{cases}$$

Donc $inv(f) = \emptyset$

D'où f est la composée de translation t et de réflexion S.

Alors $f = t_{\vec{u}} o s$, où $\vec{u}$ est le vecteur de translation.

Déterminons $\vec{u}$

$f^2 = fof = (t_{\vec{u}} o s) o (t_{\vec{u}} o s)$

$= (t_{\vec{u}} o s) o (s o t_{\vec{u}})$

$= t_{\vec{u}} o (sos) o t_{\vec{u}}$

$= t_{\vec{u}} o (Id_\epsilon) o t_u$ car $sos = Id_\epsilon$

$= t_{\vec{u}} o t_{\vec{u}} = t_{2\vec{u}}$

Ainsi 0 étant l'origine du repère

$0f^2(0) = 2\vec{u}$

Or $f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f^2(0) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 2\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc, $u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Déterminons une équation de $\mathcal{P}$

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Mt_{\vec{u}}(M)} = \vec{u}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = 1 \\ y'-y = 1 \\ z'-z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1-x = 1 \\ x+1-y = 1 \\ z-z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x = 0\ (1) \\ x-y = 0\ (2) \\ z = z\ (3) \end{cases}$$

Les équations (1) et (2) sont proportionnelle d'où

$$\begin{cases} x-y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

Donc, $\mathcal{P}$ est le plan d'équation :

$$\begin{cases} x-y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exercice 2

Soit γ la quadratique d'équation :

$x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + x = 0$. Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$

Posons $f(M) = x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + x$

q la forme quadratique associée à f et φ la partie linéaire de f.

$q(M) = x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + x$ et $\varphi(M) = x$

Prenons A la matrice associée à q telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-1) = 0$$

D'où $rg(A) < 3$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Alors y admet soit un centre vide, soit une droite affine ou un plan affine.

On a : $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2y+1=0\\ 2y-2x=0\\ -2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=0\\ x=y\\ 1=0\ impossible\end{cases}$

Donc, y n'a pas de centre.

Polynôme caractéristique de A $P_A(X)$.

$$P_A(X)=\begin{vmatrix}1-X & -1 & 0\\ -1 & 1-X & 0\\ 0 & 0 & -1-X\end{vmatrix}$$

$$P_A(X)=(-1-X)\begin{vmatrix}1-X & -1\\ -1 & 1-X\end{vmatrix}=-(1+X)[(1-X)^2-1]$$

$$P_A(X)=-X(X+1)(X-2)$$

Alors $Sp(A)=\{0,-1,2\}$

Sous espace propre

$$E_0=\left\{X\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathcal{E}/AX=0_\mathcal{E}\right\}$$

$$AX=0_\mathcal{E}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\ -x+y=0\\ -z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ z=0\end{cases}$$

D'où $E_0=<\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}>$

$$E_{-1}=\{X\in\mathcal{E}/(A+I_3)X=0_\mathcal{E}\}$$

$$(A+I_3)X=0_\mathcal{E}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=0\\ -x+2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x\\ x=0\\ z=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z\in\mathbb{R}\end{cases}$$

D'où $E_{-1}=<\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}>$

$$E_2=\{X\in\mathcal{E}/(A-2I_3)X=0_\mathcal{E}\}$$

$$(A-2I_3)X=0_\mathcal{E}\Leftrightarrow\begin{cases}-x-y=0\\ -x-y=0\\ -3z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y\\ z=0\end{cases}$$

D'où $E_2=<\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}>$

Déterminons une base orthonormée des sous-espaces propres.

Soit $\beta_1(V_1,V_2,V_3)$ une base orthogonale directe telle que $\det(V_1,V_2,V_3)=1$

$$V_1=\frac{E_0}{\|E_0\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$V_2=\frac{E_{-1}}{\|E_{-1}\|}=E_{-1}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$V_3=\frac{E_2}{\|E_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}E_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de passage β à β_1 où β est la base canonique de $\mathcal{E}$.

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Posons $X=PX'$ (Formule du changement de base.)

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'\\ z=z'\end{cases}$$

Donc y *devient* :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2-z'^2-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'=0$$

Après calcul on a :

$$\Leftrightarrow 2x'^2-z'^2+\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$$

Posons $X=x'$, $Y=z'$ et $Z=y-x'$

Alors, on a : $2X^2-Y^2-\frac{1}{\sqrt{2}}Z=0$

$$\Leftrightarrow\frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}-Y^2-\frac{1}{\sqrt{2}}Z=0$$

Donc, la quadratique y est une paraboloïde hyperbolique.

VALIDEUR LMD - 2024

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD-2024

Université FHB
MATHS-INFO L2

Année 2020-2021

CORRECTION GEOMETRIE 2
Session 1

Exercice 1

On considère l'endomorphisme affine $f+\varepsilon$ qui à $M(x,y,z)$ associe $M(x',y',z')$ tel que :
$f(M) = M'(y, x, z+1)$
Montrons que f est une isométrie de ε dont on précisera la nature et les caractéristique géométriques.

Soit $\varphi = L(f)$ et $M = mat(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

${}^tM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $M\,{}^tM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M'M = I_3$, donc f est isométrie.
$det(M) = -1$, donc f est antideplacement.
$Inv(f) = \{M(x,y,z) \backslash f(M) = M\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = x \\ z = z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - x = 0 \text{ absurde.} \\ -1 = 0 \end{cases}$

Donc $Inv(f) = \emptyset$
Etant donné que f est un antidéplacement et que $Inv(f) = \emptyset$ donc f est la composée de translation et de réflexion.
$f = S \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ S$ où S est une reflexion d'un plan $\mathcal{P}$ $\overrightarrow{u}$ appartient à la direction de $\mathcal{P}$.

Calculons $\overrightarrow{u}$
$f \circ f = (t_{\overrightarrow{u}} \circ S) \circ (S \circ t_{\overrightarrow{u}}) = t_{\overrightarrow{u}} \circ S \circ S \circ t_{\overrightarrow{u}}$ or $S \circ S = Id_\varepsilon$ où $f \circ f = t_{2\overrightarrow{u}}$
$f \circ f = t_{2\overrightarrow{u}} \Leftrightarrow \forall M \in \varepsilon f \circ f(M) = M + 2\overrightarrow{u}$
$\Leftrightarrow f[f(M)] = M + 2\overrightarrow{u}$
$\Leftrightarrow f[f(M)] - M = 2\overrightarrow{u}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{M f[f(M)]} = 2\overrightarrow{u}$

Pour $M = O$ origine du repère, on a: $\overrightarrow{O f[f(O)]} = 2\overrightarrow{u}$, $f(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

$$\overrightarrow{Of[f(O)]} = 2\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = 2\vec{u} \Leftrightarrow 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 2\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Déterminons l'équation du plan

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow S(M) = M \Leftrightarrow T_{\vec{u}}[S(M)] = T_{\vec{u}}(M)$
$\Rightarrow f(M) = M + \vec{u}$
$f(M) - M = \vec{u}$
$\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{u}$

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{Mf(M)} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}y\\x\\z+1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 0 \\ x - y = 0 \\ z + 1 - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = 0$$

D'où $\mathcal{P}$ d'équation $x - y = 0$

Exercice 2

Soit la quadratique d'équation:
$(E) : x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - x - z$
Déterminons l'équation réduite de cette quadratique et précisons sa nature.

* Equation réduite
$(E) : x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - x - z$
$(E) : A + L + k$ Avec A la matrice de la partie quadratique, L la partie linéaire et k la constante.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} \text{ et } k = 0$$

On a $det(A) = 0$ d'où (E) n'a pas de centre de symétrie. Donc le nouveau repère sur $\mathcal{R}_1 = (O, \mathcal{B}_1)$ à $\mathcal{B}_1$ est une base orthonormale directe composée de vecteurs propres de A.

* Déterminons $\mathcal{B}_1$

$$P_A = \begin{vmatrix}1\text{-x} & 1 & 0\\1 & 2\text{-x} & -1\\0 & -1 & 1\text{-x}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}c_1 + c_3 & & \\1\text{-x} & 1 & 0\\0 & 2\text{-x} & -1\\1\text{-x} & -1 & 1\text{-x}\end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 2\text{-x} & -1\\1 & -1 & 1\text{-x}\end{vmatrix}$$

$$P_A = (1-x)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 2\text{-x} & -1\\1 & -2 & 1\text{-x}\end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \quad = (1-x)\begin{vmatrix}2\text{-x} & -1\\-2 & 1\text{-x}\end{vmatrix}$$

$P_A = (1-x)\left[(2-x)(1-x) - 2\right] - x(1-x)(x-3)$ D'où $Sp(A) = \{0, 1, 3\}$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Déterminer les vecteurs propres associés à chaque valeur propre.

$$U_0\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in Kcr(A-0\times I_3) \Leftrightarrow [A-0\times I_3]U_0=0$$

$$\Leftrightarrow AU=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0\\ x+2y-z=0\\ -y+z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y\\ z=y\\ y=y\end{cases}$$

$Ker(A-0\times I_3)=\{(-y,y,y),\ y\in\mathbb{R}\}=\{y(-1,1,1),\ y\in\mathbb{R}\}$. D'où $U_0=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$U_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow AU_1=U_1$$

$$\begin{cases} x+y=x\\ x+2y-z=y\\ -y+z=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-x=0\\ x+2y-z-y=0\\ -y+z-z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0\\ x+y-z=0\\ -y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z\\ y=0\\ z=z\end{cases}$$

$Ker(A-I_3)=\{(z,0,z),\ z\in\mathbb{R}\}=\{z(1,0,1),\ z\in\mathbb{R}\}$. D'où $U_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$U_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow AU_3=3U_3$$

$$\begin{cases} x+y=3x\\ x+2y-z=3y\\ -y+z=3z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3x=0\\ x+2y-z-3y=0\\ -y+z-3z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y=0\\ x-y-z=0\\ -y-2z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}y\\ z=-\frac{1}{2}y\\ y=y\end{cases}$$

$Ker(A-I_3)=\{(\frac{1}{2}y,y,-\frac{1}{2}y),\ y\in\mathbb{R}\}=y(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})$. D'où $U_3=\begin{pmatrix}1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix}$

Déterminons $\mathcal{B}_1$

$$V_0=\frac{1}{||U_0||}U_0 \text{ avec } ||U_0||=\sqrt{3}$$

$$V_0=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$$

$$V_1=\frac{1}{||U_1||}U_1 \text{ avec } ||U_1||=\sqrt{2}$$

$$V_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$V_3 = \frac{1}{||U_3||}U_3 \text{ avec } ||U_3|| = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$V_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}) \Rightarrow V_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$$

Dans l'ordre V_0 V_1 V_3 le déterminant est positif dans $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{V_0}, \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_3})$ est une base orthonormale directe. D'où le nouveau repère $\mathcal{R}_1 = (O, \mathcal{B}_1)$

On a: $X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

Matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

On a: $X = P\,X_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}z_1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}z_1 \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}z_1 \end{cases}$

Dans le repère $\mathcal{R}_1$ l'équation de (E) devient:

$$(E) : 0x_1^2 + y_1^2 + 3z_1^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}z_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}z_1 = 0$$

$$(E) : y_1^2 + 3z_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1 = 0 \Leftrightarrow y_1^2$$

$$(E) : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z}{c} = 0$$

Donc (E) est l'équation d'une paraboloïde elliptique.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE GEOMETRIE 2 SESSION 1 ANNEE 2021-2022

EXERCICE 1

$$f:\varepsilon \to \varepsilon, \begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ z' = z+1 \end{cases}$$

$$A = Mat(L(f),\beta) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$t_{AA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Donc f est un antidéplacement.

$$M \in Inv(f) <=> \begin{cases} x = y \\ y = x \\ z = z+1 \end{cases}$$

$$<=> \begin{cases} y = x \\ 0 = 1 \end{cases}, Inv(f) = \emptyset$$

Inv(f)=ϕ donc f est un antidéplacement.

Donc f=$f = t_{\vec{v}} o d_p$; on a $fof = t_{\overrightarrow{2v}}$

$$t_{\overrightarrow{2v}}(0) = 0' = f'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} => \vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$=> d_p = t_{-\vec{v}} o f = \begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ z' = z+1 \end{cases}$$

EXERCICE 2

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - x - z = 0 \ (E)$$

$$(E): {}^tXAX + {}^tLX + k = 0 \quad avec\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

$$L = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; k = 0 \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)(3-\lambda)$$

- Les valeurs propres : Spec(A)={0,1,3}
- Vecteurs propres

$$\vec{u} \in E_0 <=> E_0 = \mathbb{R}\vec{u}_0\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \in E_1 <=> E_1 = \mathbb{R}\vec{u}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \in E_3 <=> E_3 = \mathbb{R}\vec{u}_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_0} = \frac{\vec{u}_0}{\|\vec{u}_0\|}; \ \overrightarrow{v_1} = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}; \ \overrightarrow{v_2} = \frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|}$$

$B(\overrightarrow{v_0}; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_3})$ est la base orthonormée directe car $\det(u_0, u_1, u_3) > 0$

$$P = Pas_{B_0 B} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

On a $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} => A = PDP^{-1}$

$$(E): {}^tXPDP^{-1}X + {}^tLX + k = 0;$$

On pose $Y = P^{-1}X \quad => X = PY$

$${}^tYDY + {}^tLX = 0 \text{ On pose } Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$(-1\ 0\ -1)\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$y_1^2 + 3z_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1 = 0$$

$$<=> \left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3z_1^2 = \frac{1}{2}$$

Alors c'est un cylindre elliptique

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

CORRECTION GEOMETRIE 2 PREMIERE SESSION 2023

EXERCICE 1

REMARQUE : Dans cette correction M^t *désigne la transposée de la matrice*

Donc

M^tM désigne le produit de la transposée de la matrice M par M. Donc tenez compte de cette remarque dans la lecture de cette correction .

$$f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \text{ à } M(x,y,z) \mapsto f(M) = M'(x',y',z') \text{tel que } \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x - 1 \\ z' = z + 1 \end{cases} \text{ et } \beta(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$$

$$L(f) : E \to E \text{ à } \vec{u} \mapsto \overrightarrow{u'} \text{ avec } \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \\ z = z \end{cases}$$

$$A = mat(L(f),\beta) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^tA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $A^tA = I_3$ donc f est une isometrie , $detA = -1$ donc f est un antideplacément

$$M(x,y,z) \in Inv(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = -x - 1 \\ z = z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = -x - 1 \\ 0 = 1 \end{cases} \text{ impossible donc } Inv(f) = \emptyset$$

D'aprèsla classification des isometries $f = T_{\vec{u}} o S_P$ avec $\vec{u} \in \vec{P}$

On a $fof = T_{\overrightarrow{2u}}$ soit $O'' = fof(O)$ et $O' = f(O)$donc $O' = (0,-1,1)$ et $O'' = (1,-1,2)$

$$\overrightarrow{OO''} = \overrightarrow{2u} \text{ donc } \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OO''} \text{donc } \vec{u} = (1/2, -1/2, 1) \text{ et } S_P = T_{-\vec{u}} of$$

$$T_{-\vec{u}} of : \begin{cases} x'' = -y - \frac{1}{2} \\ y'' = -x - \frac{1}{2} \\ z'' = z \end{cases} \quad M \in P \Leftrightarrow S_P(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - \frac{1}{2} \\ y = -x - \frac{1}{2} \\ z = z \end{cases} \text{ donc } P : x + y + \frac{1}{2} = 0$$

EXERCICE 2

$(\mathcal{E},E)$un espace affine muni d'un repère orthonormé $(O,\mathcal{B}_0)$ $\mathcal{B}_0 = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$$(E) : x^2 - y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 2yz + x - y + z = 0 \Leftrightarrow f(x,y,z) = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow X^tAX + L^tX + k = 0, \quad X = (x,y,z) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L = (1,-1,1) \quad k = 0$$

$detA = -4 \neq 0$ donc Γ la quadrique admet un centre unique

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - 2y + 2z - 1 = 0 \\ -2x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases} \quad \alpha = (0,-\frac{1}{2},0)$$

VALIDEUR 2024

Scanné avec CamScanner

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) \; SpecA = \{-2;1;2\}$$

E_λ désigne l'espacepropre de la valeur propre λ

$$E_{-2} = \mathbb{R}\overrightarrow{u_1}(1,-2,1) \quad E_1 = \mathbb{R}\overrightarrow{u_2}(1,1,1) \quad E_2 = \mathbb{R}\overrightarrow{u_3}(-1,0,1)$$

$$\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1} = \frac{\overrightarrow{u_1}}{\|u_1\|}; \overrightarrow{e_2} = \frac{\overrightarrow{u_2}}{\|u_2\|}; \overrightarrow{e_3} = \frac{\overrightarrow{u_3}}{\|u_3\|}\right) \text{ est une base orthonormée directe}$$

$$car \det(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}) = 1$$

$$P = Pass_{\overrightarrow{B_0}\overrightarrow{B}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^t AP \text{ avec } P^{-1} = P^t$$

$$\text{Dans le repère } (\alpha;\mathcal{B}), (E) \Leftrightarrow X^t DX + f(\alpha) = 0 \text{ avec } f(\alpha) = f\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$$

$$(E) \Leftrightarrow -2x^2 + y^2 + 2z^2 + \frac{1}{4} = 0 \; car \; f(\alpha) = \frac{1}{4}$$

$$(E) \Leftrightarrow 8x^2 - 4y^2 - 8z^2 = 1$$

Donc (Γ)est une hyperboloïde à deux nappes .

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITÉ FHB COCODY
UFR SSMT

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019-2020
SESSION DU 8 DÉCENBRE 2020

LICENCE 2 SM & IG
EXAMEN D'ELECTROMAGNÉTISME
Durée : 2 heures

Exercice 1. (5 pts)

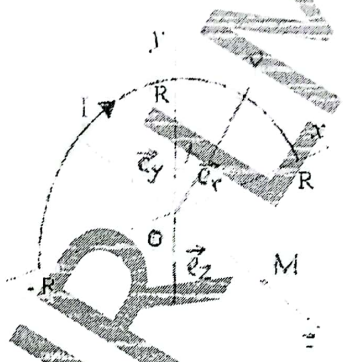
On considère dans un repère cartésien (O,x,y,z), une demi spire de centre O, de rayon R, d'axe (Oz), située dans le plan (yOx) et parcourue par un courant continu d'intensité I (Figure 1).

1. Quel est le plan d'antisymétrie de cette distribution de courant ?
2. Quel est le plan de symétrie de cette distribution de courant ?
3. Montrer que le champ magnétique en tout point M$(0,y,z)$ est de la forme

$$\vec{B}(M) = B_z \vec{e}_z + B_y \vec{e}_y$$

où B_z et B_y sont les composantes du champ $\vec{B}$

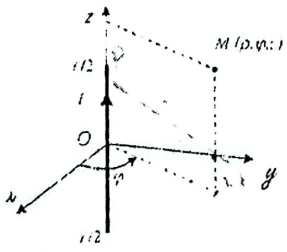
4. Quelle est la forme du vecteur champ $\vec{B}(O)$ créé par la demi spire au point O?



Exercice 2. (5 pts)

On considère une distribution constituée par un fil rectiligne de longueur finie parcouru par un courant d'intensité I en coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) (figure 2).

1. Faire l'étude des invariances et en déduire les coordonnées dont dépend le champ magnétique.
2. D[illegible]er l'orientation du vecteur $\vec{B}(M)$ pour tout point M appartenant à l'axe $Oy(y>0)$.



Exercice 3. (10 pts)

On considère un fil rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant d'intensité I_1 dans un repère en coordonnées cartésiennes (Figure 3a).

1. Un élément de longueur dl pris autour d'un point P du conducteur cré un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}(M)$ en tout point M situé à une distance $OM = x$ du conducteur. Donner l'expression de $d\vec{B}(M)$.
2. Donner les expressions respectives des projetés des vecteurs $d\vec{l}$ et $\overrightarrow{PM}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

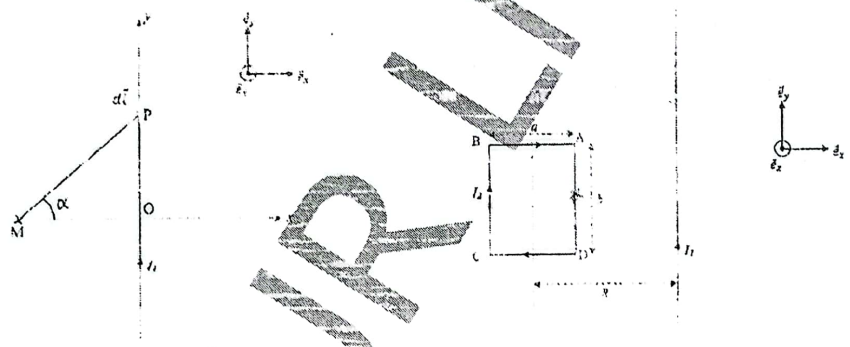
VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

3. En déduire le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par le fil au point M.
4. On place au voisinage de ce fil, un cadre rectangulaire ABCD ($AB = CD = a$, $BC = DA = b$) parcouru par un courant d'intensité I_2. La distance qui sépare le fil de la médiatrice principale du cadre ABCD est $R>a$ (Figure 3b). Le cadre baigne dans le champ magnétique créé par le fil de longueur infinie. Comment appelle t-on la force qui s'exerce sur ce circuit rectangulaire ABCD ?
5. Quelle est l'expression du champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le fil infini en tout point M ∈ [AD]?
6. Ce champ est-il uniforme en tout point du segment [AD]?
7. En déduire les forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ qui s'exercent respectivement sur les côtés AD et CB du cadre.
8. En tout point M, situé à une distance x du fil, le champ magnétique est donné par l'expression

$$\vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\vec{e}_z$$

Déterminer les expressions des forces $\vec{f}_3$ et $\vec{f}_4$ qui s'exercent respectivement sur les côtés BA et DC.
9. Quelle est la résultante $\vec{f}$ des forces qui s'exercent sur le cadre?
10. A quelle(s) condition(s) le cadre se rapproche-t-il du fil?



(a) (b)

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

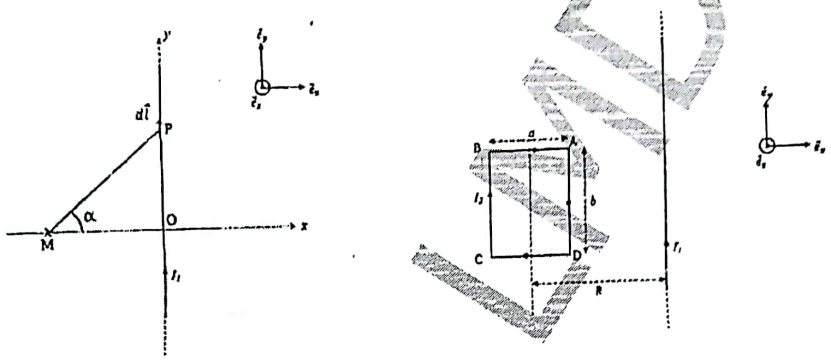
parcouru par un courant d'intensité I_2. La distance qui sépare le fil de la médiatrice principale du cadre ABCD est $R>a$ (Figure 3b). Le cadre baigne dans le champ magnétique créé par le fil de longueur infinie. Comment appelle t-on la force qui s'exerce sur ce circuit rectangulaire ABCD ?

5. Quelle est l'expression du champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le fil infini en tout point M ∈ [AD]?
6. Ce champ est-il uniforme en tout point du segment [AD]?
7. En déduire les forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ qui s'exercent respectivement sur les côtés AD et CB du cadre.
8. En tout point M, situé à une distance x du fil, le champ magnétique est donné par l'expression

$$\vec{B}_z(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\vec{e}_z$$

Déterminer les expressions des forces $\vec{f}_3$ et $\vec{f}_4$ qui s'exercent respectivement sur les côtés BA et DC.

9. Quelle est la résultante $\vec{f}$ des forces qui s'exercent sur le cadre?
10. A quelle(s) condition(s) le cadre se rapproche-t-il du fil?



(a) (b)

figure 3

Exercice 4. (6 pts)

On considère un solénoïde (S_1) de longueur infinie, de rayon R_1 consitué de n spires jointives par unité de longueur parcourues par un courant permanant d'intensité I_1. On place à l'intérieur du solénoïde,

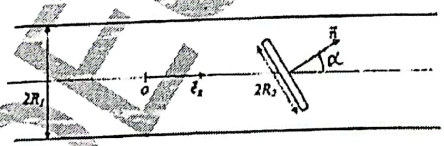


figure 4

une spire circulaire (S_2) de rayon $R_2 < R_1$. On définit $\alpha = (\vec{e}_z, \vec{n},)$ où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface de la spire (Figure 4).

1. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}_1$ créé sur l'axe du solénoïde.
2. Déterminer l'expression du flux Φ_{21} du champ $\vec{B}_1$ à travers la spire (S_2).
3. En déduire l'inductance mutuelle L_{21} des deux circuits.
4. En réalité, la spire circulaire est animée d'un mouvement de rotation avec une vitesse angulaire $\alpha = \omega t$, où ω désigne la pulsation. Déterminer la force électromotrice $e(t)$ induite dans la spire .
5. La spire ayant une résistance interne R, quelle est l'expression du courant $i(t)$ induit dans la spire?
6. Calculer l'amplitude maximale I_m de $i(t)$. On donne $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} SI$, $I_1 = 0,1A$, $\omega = 100\pi\, rd/s$, $R = 0,1\,\Omega$, $R_2 = 10^{-2} m$, $n = 10^3/m$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody, Abidjan
UFR-SSMT/Département de Physique

Année universitaire 2020-2021
(Session du 16 Septembre 2021)

LICENCE 2 (MI-IG)
Examen d'ELECTROMAGNETISME
(Durée 02H00)

Questions (4 points)

1. Quand dit-on qu'une distribution de courant possède un plan de symétrie ?
2. Pourquoi dit-on que le champ magnétique est non divergent ?
3. *Répondre par Vrai ou Faux*

3.1. Les vecteurs champs magnétiques en deux points symétriques d'une distribution possédant un plan de symétrie sont eux même symétriques ?

3.2. Les vecteurs champs magnétiques en deux points symétriques d'une distribution possédant un plan d'antisymétrie sont eux même symétriques ?

Exercice 1 (6 points)

1. Déterminer le champ magnétostatique $\vec{B}(O)$ créé par une spire circulaire de centre O de rayon R et d'axe Oz parcourue par un courant d'intensité I *(figure 1)* au centre O de la spire.
2. On considère par la suite, le circuit représenté par la *figure 2* constitué de deux fils semi-infinis (d_1) et (d_2) reliés par une semi-spire circulaire de centre O et de rayon R. Le circuit est contenu dans le plan (xOy) et est parcouru par un courant I. Déterminer le champ magnétostatique $\vec{B}(O)$ au point O dans la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

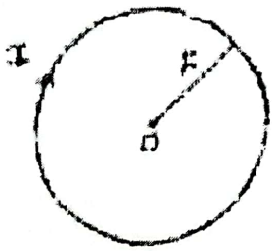


Figure 1

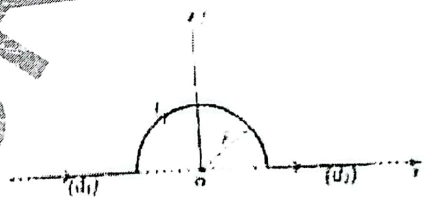


Figure 2

Exercice 2 (10 points)

Un conducteur (C_1) *filiforme* de longueur infinie est parcouru par un courant d'intensité I. L'espace est orienté selon une base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

1. Quelle est le champ magnétique $\vec{B}$ crée par (C_1) en un point M situé à la distance ρ du conducteur ?
2. Représenter le vecteur $\vec{B}$ et les lignes de champ.

En réalité le conducteur (C_1) est un cylindrique de rayon R, d'axe Oz. Il est parcouru par un courant volumique uniforme de vecteur densité $\vec{j} = j_0\vec{e}_z$ où J_0 est un réel. A l'extérieur de (C_1), c'est-à-dire pour $\rho > R, \vec{J} = \vec{0}$.

3. Donner l'expression de l'intensité du courant enlacé par le contour circulaire de rayon ρ et d'axe Oz pour $\rho \geq R$ (désigné par I_{ext}) et pour $\rho \leq R$ (désigné par I)

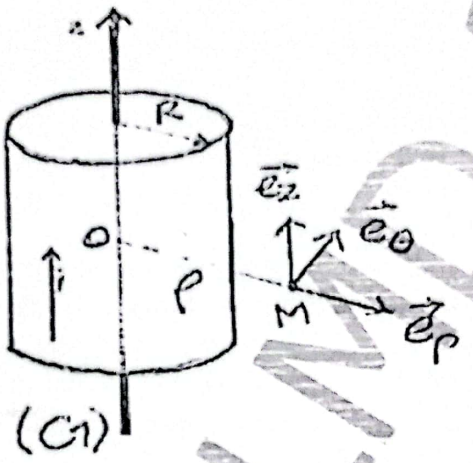
VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

4. Donner l'expression de la circulation (C) du champ magnétique $\vec{B}$ créée par ce conducteur (C_1) le long du contour circulaire de rayon ρ et d'axe Oz.
5. En déduire les expressions du champ magnétique $\vec{B}$ à $\rho \geq R$ puis à $\rho \leq R$.
6. Donner les composantes du potentiel vecteur $\vec{A}$ en fonction de A_0, ρ, R, μ_0 et J_0 à $\rho \geq R$ puis à $\rho \leq R$. On donne $A_z|0| - A_0$ à $\rho - 0$.

On rappelle : $\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$ et le rotationnel d'un vecteur $\vec{F}$ dans une base cylindrique est :

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho F_\varphi)\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\varphi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$



VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITÉ FHB COCODY
UFR MI

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021-2022
SESSION DU 10 MARS 2022

UE ELECTROMAGNÉTISME
DURÉE : 2H00

Question (4 pts)
Dans un repère cartésien, un circuit carré $A_1(a,a,0);A_2(-a,a,0);A_3(-a,-a,0);A_4(a,-a,0)$, est parcouru par un courant I (a est un nombre entier nature constant).
1. Déterminer les plans de symétries et d'antisymétrie de cette distribution de courant.
2. Quelles sont les invariances de cette distribution ?

Exercice 1 (10 pts)
Une spire carrée plane $P_1P_2P_3P_4$, de côté a, est parcourue par un courant stationnaire d'intensité I (figure 1)
1. Quel est le champ magnétique $\vec{B}_{P_1P_2}(M)$ produit par le côté P_1P_2 en un point M de son plan diamétral ? Le point M est situé à une distance r de P_1P_2.
2. En vous servant de la symétrie de distribution du courant, donner l'orientation du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par la spire en un point M(0,0,z) de son axe (Oz).
3. Montrer que le champ au centre O de la spire $P_1P_2P_3P_4$ est

$$\vec{B}(O) = 2\sqrt{2}\frac{\mu_0 I}{\pi a}\vec{e}_z$$

4. Quelle est l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par la spire sur son axe (Oz) à une distance z de son centre O. On exprimera $\vec{B}(M)$ en fonction de $z = OM$, a et I
5. La spire est déformée en un polygone à N côtés, plan régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R. Déterminer l'expression du champ $\vec{B}(M)$ au point $M(0,0,z)$.
6. En déduire l'expression du champ $\vec{B}(M)$ créé par une spire circulaire en un point M de son axe (Oz).

Exercice 2 (6pts)
Une spire rigide de côté a, d'arie S est parcourue par un courant d'intensité I. La spire de centre M, mobile sans frottement autour d'un axe $(\Delta) = (Mz)$ est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, ayant la direction et le sens de l'axe (Mx). Sa position est repérée par l'angle θ (Figure 2).
1. Quelle est force qui s'exerce sur la spire ?
2. On note $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_3$ les forces subies respectivement par les côtés perpendiculaires à (Mz) de milieu P_1 et P_3, $\vec{f}_2$ et $\vec{f}_4$ les forces subies respectivement par les côtés parallèles à (Mz) de milieux P_2 et P_4. Déterminer la somme totale des forces exercées sur la spire.
3. Calculer le moment des forces de Laplace $\vec{\Gamma}_\Delta$ par rapport à (Δ) en fonction de I, S B et θ.
4. Montrer que l'énergie potentielle de cette spire dans la position repérée par θ peut s'écrire

$$Ep = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$$

5. Quelles sont les valeurs de θ pour lequelles le système est en équilibre?

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

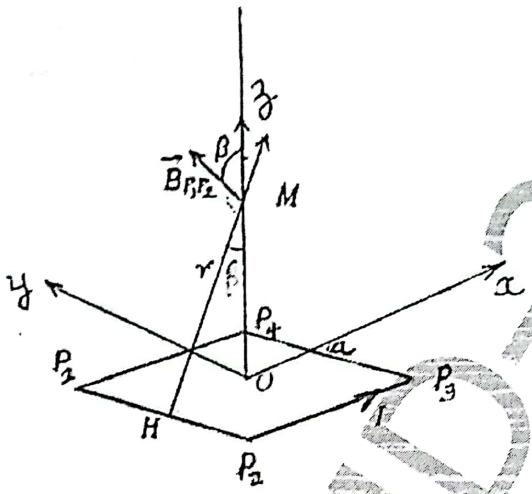


Figure 1:

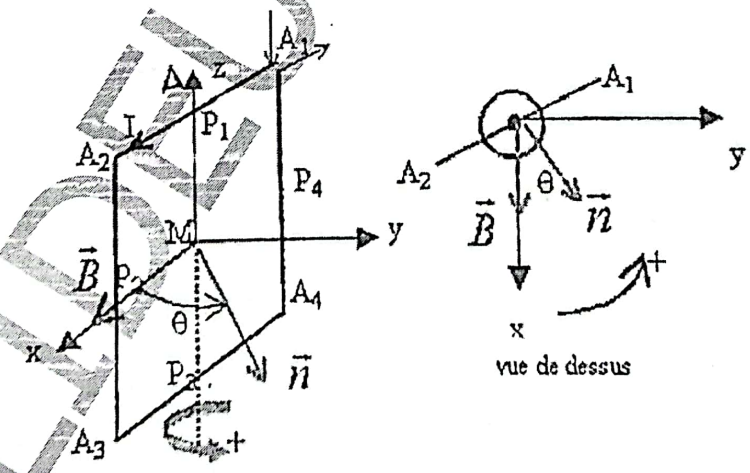


Figure 2:

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITÉ FHB COCODY
UFR MI

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021-2022
SESSION DU 21 JUILLET 2022

UE ELECTROMAGNÉTISME
DURÉE : 2H00

Question (4 pts)

Dans un repère cartésien, un circuit carré $A_1(a,a,0);A_2(-a,a,0);A_3(-a,-a,0);A_4(a,-a,0)$, est parcouru par un courant d'intensité I (a est un nombre entier nature constant).

1. Représenter le circuit $A_1A_2A_3A_4$ dans un repère (O,x,y,z).
2. Donner le ou les plans de symétrie de cette distribution de courant.
3. Danner le ou les plans d'antisymétrie de cette distribution de courant.
4. Quelles sont les invariances de cette distribution ?

Exercice 1 (8 pts)

Une spire carrée plane $P_1P_2P_3P_4$, de côté a, est parcourue par un courant stationnaire d'intensité I (figure 1)

1. Quel est le champ magnétique $\vec{B}_{P_1P_2}(M)$ produit par le côté P_1P_2 en un point M de son plan diamétral ? Le point M est situé à une distance r de P_1P_2.
2. En vous servant de la symétrie de distribution du courant, donner l'orientation du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par la spire en un point M(0,0,z) de son axe (Oz).
3. Quelle est l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par la spire sur son axe (Oz) à une distance z de son centre O. On exprimera $\vec{B}(M)$ en fonction de $z = OM$, a et I
4. En déduire l'expression du champ $\vec{B}(O)$ au centre O de la spire $P_1P_2P_3P_4$
5. La spire est déformée en un polygone à N côtés, plan régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R. Déterminer l'expression du champ $\vec{B}(M)$ au point $M(0,0,z)$.
6. En déduire l'expression du champ $\vec{B}(M)$ créé par une spire circulaire en un point M de son axe (Oz).

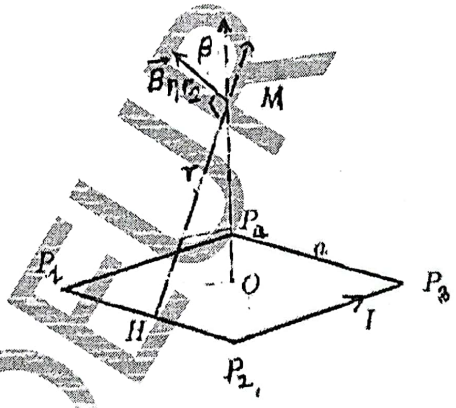


Figure 1:

Exercice 2 (8 pts)

Une spire rectangulaire $NPQR$, d'aire S de largeur $RQ = NP = a$ et de longueur $RN = QP = b$ est parcourue par un courant d'intensité I. La spire de centre O, mobile sans frottement autour de son axe $(\Delta) = (Oy)$ est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_x$ (Figure 2).

1. Comment appelle-t-on la force qui s'exerce sur chaque côté de la spire ?
2. Déterminer les forces $\vec{f}_{QR}$ et $\vec{f}_{NP}$ qui s'exercent respectivement sur les côtés QR et NP de la spire.
3. Déterminer les forces $\vec{f}_{RN}$ et $\vec{f}_{PQ}$ qui s'exercent respectivement sur les côtés RN et PQ de la spire.
4. Calculer le moment des forces de Laplace $\vec{\Gamma}_\Delta$ par rapport à (Δ) en fonction de I, S, B et α.
5. Montrer que

$$\vec{\Gamma}_\Delta = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

où $\vec{\mathcal{M}}$ désigne le moment magnétique de la spire.

6. Quelles sont les valeurs de α pour lequelles le système est en équilibre?

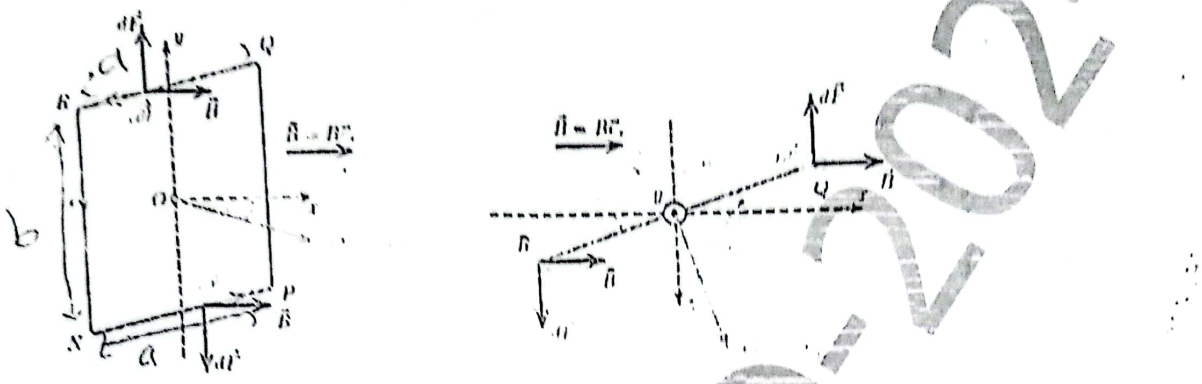


Figure 2:

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITÉ FHB COCODY
UFR MI

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2022-2023
SESSION DU 27 FÉVRIER 2023

UE ELECTROMAGNÉTISME
DURÉE : 2H00

Exercice 1 (8 pts)

On considère un conducteur (C_1) de forme cylindrique de rayon R, d'axe (Oz) et de longueur infinie (figure 1). Il est parcouru par un courant volumique uniforme de vecteur densité $\vec{J} = J_0\vec{e}_z$ où J_0 est une constante positive. A l'extérieur de (C_1), c'est-à-dire pour $OM = \rho > R$, $\vec{J} = \vec{0}$ dans un repère cylindrique.

1. Déterminer les plans de symétrie et d'antisymétrie de cette distribution de courant.
2. Etudier les invariances de cette distribution de courant.
3. Montrer qu'en tout point $M(\rho, \theta, z)$, le champ magnétique créé par le conducteur (C_1) peut s'écrire $\vec{B}(M) = B(\rho)\vec{e}_\theta$
4. Donner l'expression de l'intensité du courant traversant la surface délimitée par un contour circulaire de rayon $OM = \rho$, d'axe (Oz) pour $\rho \geqslant R$ (désigné par I_{ext}) et $\rho \leqslant R$ (désigné par I_{int})
5. Donner l'expression de la circulation $(\mathscr{C})$ du champ magnétique $\vec{B}(M)$ le long du contour circulaire de rayon $OM = \rho$ et d'axe (Oz).
6. En déduire les expressions du champ magnétique $\vec{B}(M)$ à $OM = \rho \geqslant R$ puis à $OM = \rho \leqslant R$.
7. Donner les composantes du potentiel vecteur $\vec{A}$ en fonction de A_0, ρ, R, μ_0 et J_0 à $OM = \rho \leqslant R$ puis à $OM = \rho \geqslant R$. On donne $A_z(0) = A_0$ lorsque $\rho = 0$.

On rappelle : $\Delta\vec{A} + \mu_0\vec{J} = \vec{0}$ et le rotationel d'un champ vectoriel $\vec{F}$ en coordonnées cylindrique

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta}\right) - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right]\vec{e}_\rho + \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right]\vec{e}_\theta + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta}\right]\vec{e}_z$$

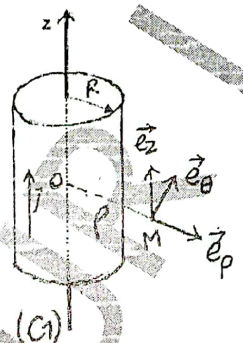


Figure 1:

Exercice 2 (12 pts)

Un fil de longueur infinie, d'axe (Oz), est parcouru par un courant d'intensité I. Un circuit carré $PQRS$ de côté a est placé dans le plan xOz (figure 2). Le module du champ magnétique créé par ce fil en un point M situé à la distance x du fil du repère cartésien a pour expression

$$B_{fil} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

1. Indiquer le sens du vecteur champ magnétique $\vec{B}$
2. On oriente le circuit selon le sens horaire. Le vecteur normal est $\vec{n} = \vec{e}_y$. Déterminer le flux Phi du champ magnétique B_{fil} créé par le fil infini à travers la spire carrée.
3. Le cadre s'éloigne du fil avec une vitesse constante telle que $\vec{v} = v\vec{e}_x$; deux des côtés du circuit carré restent parallèles au fil. De quel type d'induction s'agit-il ? Déterminer la force électromotrice $e(t)$ dans le

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

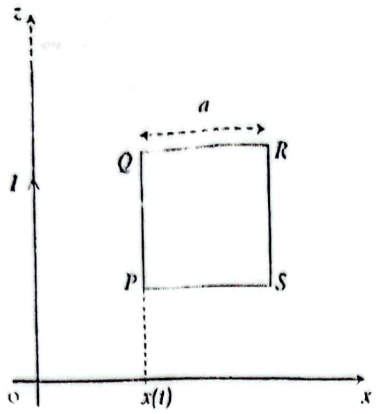


Figure 2:

circuit carré en fonction de $x(t)$ et $v(t)$.

4. Enoncer la loi de *Lenz*. Préciser le sens du courant induit $i(t)$. Justifier votre réponse.

5. On note R la résistance électrique de la spire et on néglige son inductance. Déterminer l'expression de $i(t)$ en fonction de $x(t)$ et $v(t)$.

6. Déterminer la force $\vec{F}_{PQ}$ de *Laplace* exercée sur le côté PQ de la spire carré.

7. En déduire l'expression de la résultante $\vec{F}$ des forces de *Laplace* exercée sur la spire. Le sens de cette résultante était-il prévisible ? Justifier votre réponse.

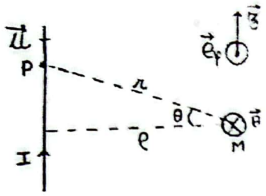
VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Correction d'Electromagnétisme session 1

Exercice 1

1) Première méthode



Posons $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$ puisque $\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int \frac{\vec{dl}\wedge\vec{r}}{r^3}$

Et que $\vec{dl}\wedge\vec{r} = dl.r\ sin(\vec{dl},\vec{r})\vec{e}_\varphi$ et $sin(\vec{dl},\vec{r}) = cos\theta$

Alors $\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int \frac{dl.r}{r^3} cos\theta\ \vec{e}_\varphi$ ①

On a : $cos\theta = \frac{\rho}{r} \Rightarrow r = \frac{\rho}{cos\theta}$ et $l = \rho tg\theta$ car $tg\theta = \frac{l}{\rho} \Rightarrow dl = \frac{\rho}{cos^2\theta}d\theta$

D'où ① devient $\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int \frac{\rho}{cos^3\theta}\frac{cos^2\theta}{\rho^2} cos\theta\ \vec{e}_\varphi$

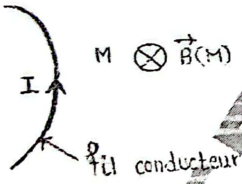
$$\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{cos\,\theta}{\rho}.d\theta\ \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}[sin\theta_1 - sin\theta_2]\ \vec{e}_\varphi$$

Et puisque le fil est infinie alors $\theta_1 = -\theta_2$ d'où

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu.I}{2\pi}.\vec{e}_\varphi}$$

2)



3) Le champ magnétique est non divergent.

Preuve : calcul la divergence du champ magnétique à partir du champ créé par un courant volumique.

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}\wedge\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}dv$$

$$div\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int div\left(\vec{j}\wedge\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right)dv$$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

On rappelle que

$$\begin{cases} div(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b}.\overrightarrow{rot}(\vec{a}) - \vec{a}.\overrightarrow{rot}(\vec{b}) \\ \dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = -\overrightarrow{grad}\left(\dfrac{1}{PM}\right) \end{cases}$$

$$div\left(\vec{j} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right) = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\overrightarrow{rot}(\vec{j}) - \vec{j}.\overrightarrow{rot}\left(\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right)$$

Comme le vecteur densité volumique $\vec{j}$ est uniforme au point P, $\overrightarrow{rot}(\vec{j}) = \vec{0}$

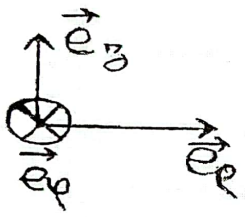
Par ailleurs $-\vec{j}.\overrightarrow{rot}\left(\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right) = -\vec{j}.\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{PM}\right)\right) = 0$

Donc $div\vec{B} = 0$

4) Sachant que Donc $div\vec{B} = 0$ et que la divergence du rotationnel d'un champ vectoriel est nulle, on en déduit qu'il existe un champ vectoriel $\vec{A}$ appelé potentiel de vecteur tel que : $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$

Exercice 2

1) Calculons $\vec{B}_{AC}$ et $\vec{B}_{GH}$ au point O.

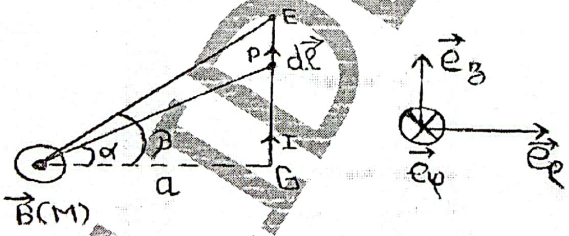




On a : $d\vec{l}//\overrightarrow{PO} \Rightarrow \vec{B}_{AC} = \vec{0}$

$d\vec{l}//\overrightarrow{PO} \Rightarrow \vec{B}_{GH} = \vec{0}$

2) Calculons $\vec{B}_{CD}(O)$ et $\vec{B}_{GH}(O)$



$$d\vec{B}_P(O) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO}}{PO^3}$$

$$d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO} = -dl.PO\ sin(\overrightarrow{dl},\vec{r})\vec{e}_\varphi$$

$$d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO} = -dl.PO cos\alpha \text{ avec } dl = dz$$

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

Alors $\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{POdz}{PO^3}\cos(\alpha)\vec{e}_\varphi$

$\cos(\alpha) = \frac{a}{PO} \Rightarrow PO = \frac{a}{\cos\alpha}$

$\tan(\alpha) = \frac{z}{a} \Rightarrow z = a.tan\alpha$

$dz = \frac{a}{\cos^2\alpha}d\alpha$

D'où $\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^\beta \frac{a}{cos\alpha} \times \frac{a}{\cos^2\alpha} \times \frac{\cos^3\alpha}{a^3} \times \cos(\alpha)d\alpha\vec{e}_\varphi$

$\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^\beta \cos(\alpha)\, d\alpha\vec{e}_\varphi$

$\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}[sin\alpha]_0^\beta \vec{e}_\varphi$

$\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} sin\beta\vec{e}_\varphi$

$\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\frac{a}{\sqrt{a^2+a^2}}\vec{e}_\varphi$

$\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\pi a}\vec{e}_\varphi = -\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi a}\vec{e}_\varphi$

Par symétrie, $\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi a}\vec{e}_\varphi$

3) On a : $DF = 2FG$

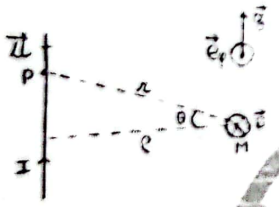
$\Rightarrow \vec{B}_{DF}(O) = 2\vec{B}_{FG}(O)$

$\vec{B}_{DF}(O) = -\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi a}\vec{e}_\varphi$

4) $\vec{B}(O) = \vec{B}_{AC} + \vec{B}_{GH} + \vec{B}_{DF} + \vec{B}_{FG} + \vec{B}_{CH}$

Exercice 3

1) Première méthode



Posons $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$ puisque $\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int \frac{\overrightarrow{dl}\wedge\vec{r}}{r^3}$

Et que $\overrightarrow{dl}\wedge\vec{r} = dl.r\, sin(\overrightarrow{dl},\vec{r})\vec{e}_\varphi$ et $sin(\overrightarrow{dl},\vec{r}) = cos\theta$

Alors $\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int \frac{dl.r}{r^3}cos\theta\,\vec{e}_\varphi$ ①

On a : $cos\theta = \frac{\rho}{r} \Rightarrow r = \frac{\rho}{cos\theta}$ et $l = \rho tg\theta$ car $tg\theta = \frac{l}{\rho} \Rightarrow dl = \frac{\rho}{\cos^2\theta}d\theta$

D'où ① devient $\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int \frac{\rho}{cos^3\theta}\frac{\cos^2\theta}{\rho^2}cos\theta\,\vec{e}_\varphi$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos\theta}{\rho}.d\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}[sin\theta_1 - sin\theta_2]\,\vec{e}_\varphi$$

Et puisque le fil est infinie alors $\theta_1 = -\theta_2$ d'où

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu.I}{2\pi}.\vec{e}_\varphi}$$

Deuxième méthode

D'après le théorème d'ampère on a :

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\sum I = \mu_0 I$$

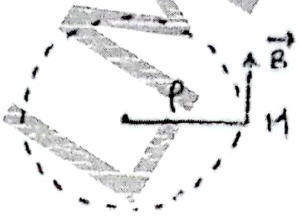
Or $\oint \vec{B}d\vec{l} = B.2\pi\rho$

D'où $B.2\pi\rho = \mu_0 I$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

Soit

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi}$$



2) Répresentation (Voir Cours)

3) Pour $\rho \geq R$

$$I = \int_{(S)}\vec{J}.d\vec{S}$$

Or $\vec{J} = J_0\vec{R}_z$

Et $d\vec{S} = dS\vec{e}_z$

D'où $I = \int_{(S)}J_0 d\vec{S}$

Avec $dS = \frac{1}{2}R^2 d\varphi$

$$I = J_0\int_{(S)}dS$$

$$I = J_0\int_{(S)}\frac{1}{2}R^2 d\varphi$$

$$I = J_0\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}R^2 d\varphi$$

$$I = \frac{1}{2}R^2 J_0\int_0^{2\pi}d\varphi$$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$I = \frac{1}{2}R^2 J_0 2\pi$$

$$\boxed{I = \pi R^2 J_0}$$

Pour $\rho \leq R$

$$dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi$$

$I_{inF} = \int \vec{J}.d\vec{S}$ Or $\vec{J} = J_0\vec{e}_z$

Et $d\vec{S} = dS\vec{e}_z$

D'où $Int = \frac{1}{2}J_0\rho^2 \int_0^{2\pi} d\varphi$

$$Int = \frac{1}{2}J_0\rho^2 2\pi$$

$$Int = J_0\rho^2\pi$$

Or $J_0 = \frac{I}{\pi R^2}$ car on avait trouvé precedement que $I = \pi R^2 J_0$

Donc $Int = \frac{I}{\pi R^2}.\rho^2\pi$

$$\boxed{Int = I\left(\frac{\rho}{R}\right)^2}$$

4) Composantes du champ $\vec{B}$

à $\rho \leq k$

Dans la base cylindrique $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$

on a :

$$\begin{vmatrix} \beta_\rho = 0 \\ \beta_\varphi = \frac{\mu_0 I_{int}}{2\pi\rho} \\ \beta_z = 0 \end{vmatrix}$$ d'après l'expression de $\vec{B}$ vu dans la question 1) .

donc $\vec{B} = \frac{\mu_0 Int}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi\rho}\left[I\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]\vec{e}_\varphi$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\rho}{2\pi R^2}I\vec{e}_\varphi$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} \beta_\rho = 0 \\ \beta_\varphi = \frac{\mu_0\rho}{2\pi R^2}I\vec{e}_\varphi \\ \beta_z = 0 \end{vmatrix}}$$

à $\rho \geq k$

Dans la base cylindrique $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$

$$\vec{B}\begin{vmatrix} \beta_\rho = 0 \\ \beta_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \\ \beta_z = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{B}\begin{vmatrix} \beta_\rho = 0 \\ \beta_\varphi = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2\rho} \\ \beta_z = 0 \end{vmatrix}$$

5) Les composantes du potentiel vecteur $\vec{A}$.

Pour $\rho \leq R$

Nous avons ceci $\vec{rot}\vec{A} = \vec{B}$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Comme l'expression du rotationnel en coordonnée cylindrique est :

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}[\rho A_\varphi]\right] \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right] \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\rho}\left[-\frac{\partial A_z}{\partial \varphi}\right] \\ -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ 0 \end{vmatrix}$$

En fait,

Nous savons que : $\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{J} = -\mu_0 J_0 \vec{e}_z$

On remarque que : $A_z \neq 0$

$A_\rho = 0$

$A_\varphi = 0$

Ainsi $\vec{A} = A_z\vec{e}_z$

On vient de montrer que $\vec{A} = A_z\vec{e}_z$

D'où $\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = 0$

Par conséquent $\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ 0 \end{vmatrix}$

Donc

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\vec{e}_\varphi = B\varphi\vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2\rho}\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2\rho}$$

$$\Rightarrow A_z = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\int \frac{d\rho}{l}$$

$$\Rightarrow A_z = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\ln(\rho) + cste$$

Pour $\rho = R$ on a $A_z(R) = A_0$

$$\Rightarrow -\frac{\mu_0 I R^2}{2\pi R^2} + A_0 = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\ln(R) + cste$$

$$\Rightarrow cste = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} + \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\ln(R) + A_0$$

$$\Rightarrow cste = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{4} + \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\ln(R) + A_0$$

$$cste = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\left[-\frac{1}{2} + \ln(R)\right] + A_0$$

Donc $A_z = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\left[\frac{1}{2} - \ln(R) + \ln(\varphi)\right] + A_0$

$$\boxed{A_z = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\left[\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{R}{\varphi}\right)\right] + A_0}$$

Or $-\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = B_\varphi = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R^2}$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Car $\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\vec{e}_\varphi = B_\varphi \vec{e}_\varphi$

$dA_z = -\frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R^2} d\varphi$

$\Rightarrow A_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\rho^2 + cste$

Pour $\rho = 0$ on a $A_z(0) = A_0$

Donc $A_z(\rho) = -\frac{\mu_0 J_0}{4\pi R^2}\rho^2 + A_0$ or puisque $J_0 = \frac{I}{\pi R^2}$

$A_z(\rho) = -\frac{\mu_0 J_0}{4}\rho^2 + A_0$

$A_\rho = A_\varphi = 0$

Pour $\rho \geq R$

$\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2\rho}$

En effet

$rot\vec{A} = \vec{B}$

En coordonnée cylindrique

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}[\rho A_\varphi]\right] \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\varphi - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\right] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ 0 \end{vmatrix}$$

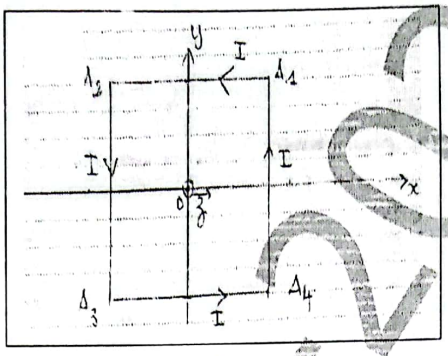
Car $\vec{A} = A_z\vec{e}_z \Rightarrow A_\rho = 0, A_\varphi = 0, \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = 0$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

CORRECTION D'ELECTROMAGNE 2021-2022 SESSION 1

QUESTION DE COURS



1 – Plan de symétries et d'antisymétrie

* Le plan (XOY) est un plan de symétrie pour cette distribution de courant

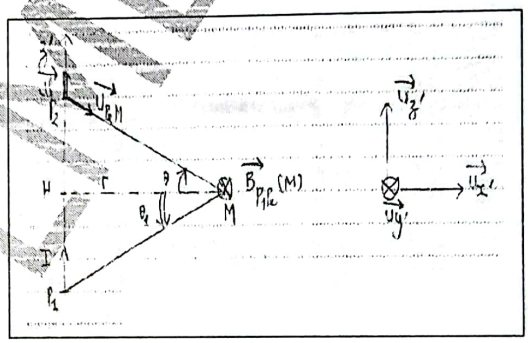
* Les plans (XOZ) et (YOZ) sont des plans d'antisymétrie pour cette distribution de courant

2 – Invariance

Cette distribution de courant est invariante par rotation discrète d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe (OZ)

EXERCICE 1

1 -Déterminons le champs magnétique $\overrightarrow{B_{p1p2}}(M)$



$$\overrightarrow{B_{p1p2}}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{p1}^{p2}\frac{\overrightarrow{dl}\Lambda\overrightarrow{U_{p2M}}}{P_2M^2}$$

$$\overrightarrow{dl} = dz'\overrightarrow{U_z} \text{ Et } \overrightarrow{dl}\Lambda\overrightarrow{U_{pM}} = dz'\overrightarrow{U_z}\Lambda\overrightarrow{U_{pM}} = dz'\sin(\overrightarrow{U_{z'}};\overrightarrow{P_2M})$$

$$\overrightarrow{B_{p1p2}}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{p1}^{p2}\frac{dz'\sin(\overrightarrow{U_{z'}};\overrightarrow{P_2M})}{P_2M^2}\overrightarrow{U_{y'}}$$

Pour effectuer ce calcul de l'intégrale, on introduit le paramètre angulaire

$$\theta = (\overrightarrow{MH};\overrightarrow{MP_2}) \; et \; \sin(\overrightarrow{U_{z'}};\overrightarrow{P_2M}) = \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{r}{P_2M} \Rightarrow \frac{1}{P_2M^2} = \frac{cos^2\theta}{r^2} \; et \; \tan\theta = \frac{z'}{r} \Rightarrow dz' = \frac{r}{cos^2\theta}d\theta$$

$$\overrightarrow{B_{p1p2}}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{r}{cos^2\theta}.\cos\theta.\frac{cos^2\theta}{r^2}.d\theta\overrightarrow{U_{y'}}$$

$$\overrightarrow{B_{p1p2}}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta.d\theta\overrightarrow{U_{y'}} = \frac{\mu_0'}{4\pi r}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\overrightarrow{U_{y'}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}.2\sin\theta_2\overrightarrow{U_{y'}} \; car \; \theta_1 = -\theta_2$$

$$\sin\theta_2 = \frac{P_1H}{P_1M} = \frac{a/2}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2\right)^{1/2}} \; ; \; \text{Donc } \overrightarrow{B_{p1p2}}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}.\frac{a}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2\right)^{1/2}}\overrightarrow{U_{y'}}$$

2 – Orientation du champ magnétique $\vec{B}$(M)

Les plans (XOZ) et (YOZ) sont des plans d'antisymétrie. Le champ appertient à leur intersection donc $\vec{B}(M)$est

Portée par l'axe $\overrightarrow{e_z}$. $\vec{B}(M) = B_z(z)\overrightarrow{e_z}$

3 – Montrons que le champ au centre O est $\vec{B}(O) = 2\sqrt{2}\frac{\mu_0 I}{\pi a}\overrightarrow{e_z}$

Le plan (XOY) est un plan de symétrie donc le champ lui est normal $\vec{B}(O) = B_z(O)\overrightarrow{e_z}$

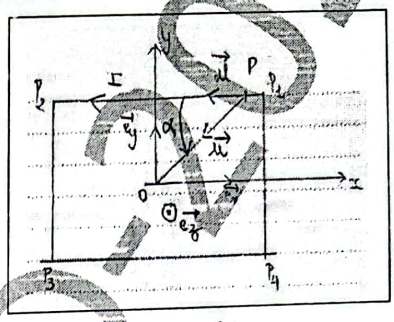
VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi PO^2}\overrightarrow{dl}\Lambda\vec{u}$ $\overrightarrow{dl} = dx\overrightarrow{e_x}$ $\alpha = (\overrightarrow{P_1P_2};\vec{u})ou\ \vec{u} = \frac{\overrightarrow{PO}}{PO}$ $\vec{u} = -\cos\alpha\overrightarrow{e_x} - \sin\alpha\overrightarrow{e_y}$

$\overrightarrow{dl}\Lambda\vec{u} = -dx\sin\alpha\overrightarrow{e_z}$ $\tan\alpha = \frac{a}{2x}$ $=> x = \frac{a}{2\tan\alpha}$ $=> dx = -\frac{a}{2sin^2\alpha}d\alpha$

$\sin\alpha = \frac{a}{2PO}$ $=>$ $\frac{1}{PO} = \frac{2\sin\alpha}{a}$ $donc\ \overrightarrow{dB_{p1p2}}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}.\left(\frac{2\sin\alpha}{a}\right)^2.\frac{ad\alpha}{2sin^2\alpha}.\sin\alpha\overrightarrow{e_z}$



$\overrightarrow{B_{p1p2}}(O) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin\alpha d\alpha\overrightarrow{e_z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(-\cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right)$

$\overrightarrow{B_{p1p2}}(o) = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\mu_0 I}{\pi a}$

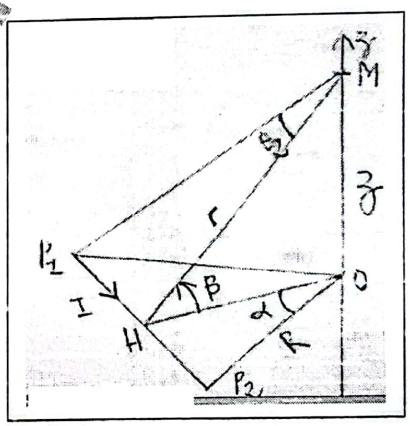
$\vec{B}(O) = 4\overrightarrow{B_{p1p2}}(O)$ $donc$ $\vec{B}(O) = 2\sqrt{2}\frac{\mu_0 I}{\pi a}\overrightarrow{e_z}$

4- L'expression du champ $\vec{B}(M)$ *crée par la spire sur son axe (oz)*

$\vec{B}(M) = 4\overrightarrow{B_{p1p2}}.\overrightarrow{e_z}$ $donc\ \vec{B}(M) = 4B\cos\beta\overrightarrow{e_z}$ $avec\ \cos\beta = \frac{a}{2r}$ $et\ r = \left(z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}$ $; z = OM$

$$\vec{B}(M) = 4.\frac{\mu_0 I}{4\pi r}.\frac{a}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2\right)^{1/2}}.\frac{a}{2\left(z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}}.\overrightarrow{e_z}$$

En remplacent $r = \left(z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}$ *dans* $\vec{B}(M)$



on obtient : $\vec{B}(M) = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I a^2}{\pi(a^2+4z^2)\sqrt{a^2+2z^2}}\overrightarrow{e_z}$

5 – l'expression du champ $\vec{B}(M)$ *crée par un polygone à N cotés*

$\overrightarrow{B_{p1p2}}.\overrightarrow{e_z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.\sin\theta_2\cos\beta$ Avec $\sin\theta_2 = \frac{P_1P_2}{2P_1M}$ $P_1M^2 = R^2 + z^2$

$\sin\alpha = \frac{P_1P_2}{2R}$ $=>$ $P_1P_2 = 2R\sin\alpha$ $où\ \alpha = \frac{\pi}{N}$ D'où $P_1P_2 = 2R\sin\frac{\pi}{N}$

Donc $\sin\theta_2 = \frac{2R\sin\frac{\pi}{N}}{2\sqrt{R^2+z^2}}$ $\cos\beta = \frac{HO}{r}$ et $\cos\alpha = \frac{HO}{R}$ $=> HO = R\cos\alpha$ $=> HO = R\cos\frac{\pi}{N}$

$r^2 = HO^2 + z^2$ on obtient $\cos\beta = \frac{R\cos\frac{\pi}{N}}{\sqrt{R^2cos^2\frac{\pi}{N}+z^2}}$ en remplacent dans $\overrightarrow{B_{p1p2}}.\overrightarrow{e_z}$ et en multipliant par

N *on obtient :* $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi}.\frac{R^2\cos\frac{\pi}{N}\sin\frac{\pi}{N}}{\left(z^2+R^2cos^2\frac{\pi}{N}\right)\sqrt{R^2+z^2}}\overrightarrow{e_z}$

6 – L'expression du champ $\vec{B}(M)$*crée par une spire circulaire*

Pour une spire circulaire N *tend vers l'infinie alors* $\sin\frac{\pi}{N} \to \frac{\pi}{N}$ et $\cos\frac{\pi}{N} \to 1$

Donc $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi}.\frac{R^2\frac{\pi}{N}}{(z^2+R^2)\sqrt{R^2+z^2}}\overrightarrow{e_z}$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)^3\overrightarrow{e_z}$$

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

On reconnait le champ crée en un point de son axe par une spire de courant de centre O et de rayon R parcourue par un courant I vue sous l'angle φ *depuis M avec* $\sin\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$

EXERCICE 2

1- **Il s'agit de la force de Laplace.**

2- **Calculons la somme totale des forces**

$\overrightarrow{f_1} = I\overrightarrow{A_1A_2}\Lambda\vec{B} = \vec{0}$ Et $\overrightarrow{f_3} = I\overrightarrow{A_3A_4}\Lambda\vec{B} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{f_2} = I\overrightarrow{A_2A_3}\Lambda\vec{B} = -Ia\vec{z}\Lambda B\vec{x} = -IaB\vec{y}$$

$$\overrightarrow{f_4} = I\overrightarrow{A_4A_1}\Lambda\vec{B} = Ia\vec{z}\Lambda B\vec{x} = IaB\vec{y}$$

La somme des forces est nulle.

3 -calculons le moment des forces de Laplace

$$\overrightarrow{\Gamma_\Delta} = \vec{M}\Lambda\vec{B} \; avec \; \vec{M} = IS\vec{n} \; moment \; magnétique$$

$$\overrightarrow{\Gamma_\Delta} = ISB\sin(\vec{n};\overrightarrow{e_x})\overrightarrow{e_z} = -ISB\sin\theta\overrightarrow{e_z}$$

4 – Montrons que $E_p = -\vec{M}.\vec{B}$

La spire tourne d'un angle $d\theta$ *autour de* M_z. le travail élémentaire du couple de force est :

$$\delta W = \Gamma_\Delta d\theta = -ISB\sin\theta d\theta = -d[-ISB\cos\theta]$$

On définit une énergie potentielle par :

$$dE_p = -\delta W = d[-ISB\cos\theta] \Rightarrow E_p = -ISB\cos\theta \Rightarrow E_p = -\vec{M}.\vec{B}$$

5- les valeurs de θ

A l'équilibre $\frac{dE_p}{d\theta} = 0 \Rightarrow ISB\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ *où* $\theta = \pi$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

CORRECTION EXAMEN SESSION 1 ELECTROMAGNETISME 2022-2023

EXERCICE 1

1- Déterminons les plans de symétrie et d'antisymétrie de cette distribution de courant

Le système de coordonné le mieux adapté à notre étude est le système se coordonné cylindrique M (ρ, θ, z) dans le repère $(0, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ voir figure 1

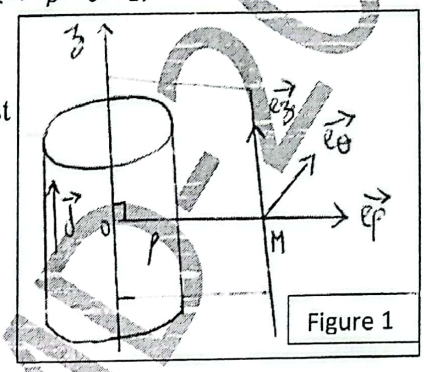


Figure 1

Soit 0 projection orthogonal de M sur(oz).

Le plan défini par la droite (OM) et l'axe (OZ) est un plan de symétrie pour le courant. Donc $(M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de cette distribution de courant.

Tout plan contenant l'axe $(M\theta)$ est un plan d'antisymétrie. Donc $(M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta) et\ (M, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ sont des plans d'antisymétries de la distribution de courant.

2- Etudions les invariances de cette distribution de courant.

- La distribution est invariante par translation suivant (Oz)car le conducteur de forme cylindrique est de longueur infinie. (*)
- La distribution est invariante par rotation autour de l'axe (Oz)c'est-à-dire suivant l'angle θ (**)
- La distribution varie par translation suivant ρ.(***)

3-De la question 2 (*), (**) et (***), on déduit que le champ magnétique crée par cette distribution dépend seulement que de ρ

- De la question 1 on déduit que le champ crée par cette distribution est orthoradial, c'est-à-dire est suivant $\vec{e}_\theta$. Conclusion : on peut écrire $\vec{B}(M) = B(\rho)\ \vec{e}_\theta$

4- Donnons l'expression de l'intensité du courant traversant la surface délimité par le contour circulaire de rayon $OM = \rho$, d'axe (Oz).

Soit (S) une surface ouverte. Le courant électrique traversant (S) de la face $(-)$ vers la face $(+)$(sortant de (S)) est : $I = \iint_{(S)} \vec{J}.d\vec{S}$; Ici $\vec{J} = J_0\vec{e}_z$, la surface (S) est la surface de base d'un cylindre donc $d\vec{S} = dS\vec{e}_z\ et\ dS = \rho d\rho d\theta$ et $\rho \in [0, R]\ et$ $\theta \in [0,2\pi]$. Ici $\vec{J}.d\vec{S} = J_0\rho d\rho d\theta$

$I = \iint_{(S)} J_0\rho d\rho d\theta = J_0 \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \quad => \quad I = J_0\pi R^2, => J_0 = \frac{I}{\pi R^2}$

- Pour $\rho \geq R$ $(désigné\ par\ I_{ext})$, le courant enlacé sera $I_{ext} = J_0\pi R^2 = I$

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

- Pour $\rho \leq R$ ($désigné\ par\ I_{int}$), le courant enlacé sera $I_{int} = J_0\pi\rho^2 = I\frac{\rho^2}{R^2}$

5- Donnons l'expression de la circulation du champ magnétique $\vec{B}(M)$ le long du contour circulaire de rayon $OM = \rho$ et d'axe (Oz).

Le contour est un cercle (C) fermé de rayon ρ la longueur (périmètre du cercle $(l = 2\pi\rho)$): le contour passe comme toujours par le point M ! Le module de B est constant sur ce contour.

La circulation du champ magnétique $\vec{B}(M)$ le long du contour est : $\oint_C \vec{B}d\vec{l}$

$$\oint_C \vec{B}(M)\vec{dl} = \oint_C \vec{B}(M)\vec{dl} = \oint_C B(M)\vec{e}_\theta dl\vec{e}_\theta = B(M)\oint_C dl = B(M) * 2\pi\rho$$

6- On déduit de (5) que

$$\begin{cases} \text{Pour } \rho \geq R: B(M) * 2\pi\rho = \mu_0 I_{ext} <=> \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\theta <=> \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2\rho}\vec{e}_\theta \\ \text{Pour } \rho \leq R: B(M) * 2\pi\rho = \mu_0 I_{int} <=> \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi R^2}\vec{e}_\theta <=> \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 J_0}{2}\rho\,\vec{e}_\theta \end{cases}$$

7- Donnons les composantes du potentiel vecteur $\vec{A}$

On sait que $\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{J} = -\mu_0 J_0\vec{e}_z$

D'où $A_z \neq 0, A_\rho = 0\ et\ A_\theta = 0$, on écrit alors $\vec{A} = A_z\vec{e}_z$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A_z}{\partial\theta}\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho} \\ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A_z}{\partial\theta}\right) \\ -\frac{\partial A_z}{\partial\rho} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On sait que $\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{B}(M) = B(M)\,\vec{e}_\theta$,

d'où $\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial A_z}{\partial\rho} \\ 0 \end{pmatrix}\ car\ \frac{\partial A_z}{\partial\theta} = 0$

$$-\frac{\partial A_z}{\partial\rho} = B(M)$$

$$=> \quad A_z = -\int B(M)d\rho$$

* Pour $\rho \leq R, A_z = -\int \frac{\mu_0 J_0}{2}\rho\ d\rho$

$$A_z = -\frac{\mu_0 J_0}{4}\rho^2 + C_1$$

Si $\rho = 0, A_z(0) = A_0, => C_1 = A_0$

D'où $\begin{cases} A_z = -\frac{\mu_0 J_0}{4}\rho^2 + A_0 \\ A_\theta = 0 \\ A_\rho = 0 \end{cases}$

* Pour $\rho \geq R$, $A_z = -\int \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2\rho}d\rho$

$$A_z = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\ln(\rho) + C_2$$

Si $\rho = R, A_z(R) = A_z$ =>

$$A_z(R) = -\frac{\mu_0 J_0}{4}R^2 + A_0$$

$$= -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\ln(R) + C_2$$

$$C_2 = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\left[\ln(R) - \frac{1}{2}\right] + A_0$$

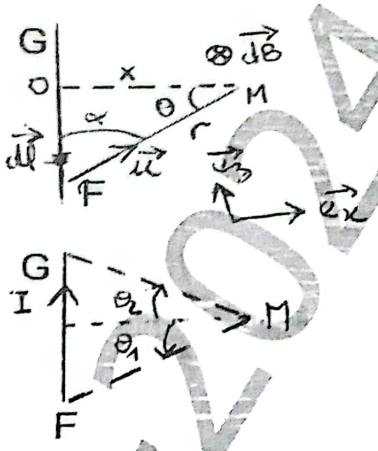
Finalement

$$\begin{cases} A_z = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\left[\ln\left(\frac{R}{\rho}\right) - \frac{1}{2}\right] + A_0 \\ A_\theta = 0 \\ A_\rho = 0 \end{cases}$$

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

EXERCICES 2



1- Indiquer le sens du vecteur champ magnétique.

Le plan $(\vec{e}_z, \vec{e}_x)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant. Le champ magnétique lui est perpendiculaire c'est-à-dire suivant $\vec{e}_y$. Car $(\vec{e}_z, \vec{e}_x) \perp \vec{e}_y$.

Le sens du vecteur champ magnétique est suivant $\vec{e}_y$.

REMARQUE :Si la question était de trouver l'expression du champ B créé par le fil infini en un point M situé à une distance x du fil, alors voilà la réponse :

On oriente les angles θ_1 *et* θ_2 par le sens du courant I. Voir figure ci-dessus, θ_1 est négatif et θ_2 est positif. Un élément $d\vec{l}$ de FG crée en un point M un champ élémentaire $d\vec{B}$ perpendiculaire au plan formé par $d\vec{l}$ et $\overrightarrow{FM}$ et orienté vers l'intérieur. Alors, d'après la loi de Biot et Savart, on a :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}.\frac{d\vec{l}\wedge\overrightarrow{FM}}{FM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}.\frac{d\vec{l}\wedge\vec{u}}{r^2}\ ;\ \vec{u} = cos\theta\vec{e}_x + sin\theta\vec{e}_z\ ;\ d\vec{l} = dl\vec{e}_z$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl.cos\theta}{r^2}\vec{e}_y$$

On écrit : $OM = x; FM = r = \frac{x}{cos\theta}; OP = l = x.tan\theta \quad => dl = \frac{x}{cos^2\theta}d\theta$

En reportant dans $d\vec{B}$, il vient : $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}cos\theta d\theta\vec{e}_y$; En intégrant sur tout le segment FG, on obtient : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\int_{\theta_1}^{\theta_2} cos\theta d\theta\,\vec{e}_y$ *donc* $\vec{B}_{segment} = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}(sin\theta_2 - sin\theta_1)\vec{e}_y$

Pour le fil de longueur infini $\theta_1 \to -\frac{\pi}{2}$ *et* $\theta_2 \to \frac{\pi}{2}$ d'où $\boxed{\vec{B}_{fil} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{e}_y}$

2- Déterminons le flux

Le flux de $\vec{B}$ à travers la spire carrée est le flux du vecteur $\vec{B}$ à travers la section carrée de la spire, dont l'élément de surface est $dS = dxdz$ avec x variant de $x(t)$ à $x(t) + a$ et z variant de $-\frac{a}{2}$ à $+\frac{a}{2}$

$$\phi = \iint \vec{B}_{fil}\,d\vec{S} = \iint \vec{B}_{fil}.\vec{n}dS = \iint \frac{\mu_0 I}{2\pi x}dxdz = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dz.\int_{x(t)}^{x(t)+a}\frac{dx}{x}$$

$$=> \phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}ln\left(\frac{x(t)+a}{x(t)}\right)$$

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

3- Le cadre s'éloigne du fil avec une vitesse constante $\vec{v} = v\vec{e}_x$

Il s'agit de l'induction magnétique, déterminons la force électromotrice $e(t)$

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dx}.\frac{dx}{dt} = -v(t)\frac{d}{dx}\left(\frac{\mu_0 Ia}{2\pi} ln\left(\frac{x(t)+a}{x(t)}\right)\right)$$

$$\rightarrow e(t) = v(t)\frac{\mu_0 Ia^2}{2\pi}\left(\frac{1}{x(t)[x(t)+a]}\right)$$

4- Enonçons la loi de Lenz

Le sens du courant induit est tel que le champ magnétique qu'il produit s'oppose à la variation de flux qui le produit. La boucle s'éloigne du fil, donc $\vec{B}$ est de plus en plus faible. Le courant induit doit donc créer un champ $\vec{B}_{ind}$ qui va compenser la diminution du $\vec{B}_{fil}$. Le $\vec{B}_{ind}$ doit être suivant $\vec{e}_y$, le courant induit est donc dans le sens horaire.

5- Expression de $i(t)$

$$e = Ri \rightarrow e(t) = Ri(t) \rightarrow i(t) = \frac{e(t)}{R} = v(t)\frac{\mu_0 Ia^2}{2\pi R}\left(\frac{1}{x(t)[x(t)+a]}\right)$$

6- Déterminons la force $\vec{F}_{PQ}$ de Laplace sur le coté PQ de la spire carré

$$\vec{F}_{PQ} = i\overrightarrow{PQ}\wedge\vec{B} = ia.\vec{e}_z\wedge\frac{\mu_0 I}{2\pi x}.\vec{e}_y \rightarrow \vec{F}_{PQ} = -\frac{\mu_0 Iia}{2\pi x}.\vec{e}_x$$

7- Déduisons-en l'expression de la résultante $\vec{F}$ des forces de Laplace exercée sur la spire

$\vec{F}_{QR} + \vec{F}_{SP} = 0$ *car après calcul* $\vec{F}_{QR} = -\vec{F}_{SP}$ Donc $\vec{F} = \vec{F}_{PQ} + \vec{F}_{RS}$

Or $\vec{F}_{RS} = i\overrightarrow{RS}\wedge\vec{B} = -ia.\vec{e}_z\wedge\frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)}.\vec{e}_y$ *car RS est à une distance* $(x+a)$ *du fil*

$$\rightarrow \vec{F} = -\frac{\mu_0 Iia}{2\pi x}.\vec{e}_x + \frac{\mu_0 Iia}{2\pi(x+a)}.\vec{e}_x \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\mu_0 Iia^2}{2\pi}.\frac{1}{x(x+a)}.\vec{e}_x}$$

Le sens de $\vec{F}$ est selon $-\vec{e}_x$, $\vec{F}$ freine le carde, on pouvait s'y attendre d'après la loi de Lenz : la boucle doit être parcourue par un courant induit dont les effets s'opposeront aux causes qui lui ont donnée naissance.

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

EXAMEN - LICENCE 2 : 1ère session
Mécanique des systèmes
Année académique 2019/2020
Durée : 2h00
(Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1 et 2)

Exercice 1 (4 points)

Soit un quart de disque de rayon **R** de centre **O** et de masse surfacique non uniforme $\sigma(r) = a\,r$, avec a une constante positive.



1) Calculer la masse **m** du quart de disque.
2) Calculer son moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire au quart de disque passant par **O** en fonction de **R** et **m**.

Exercice 2 (6 points)

Dans un repère $\mathcal{R}(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé et direct, on considère les torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ dont les éléments de réduction au point **O** et au point **O'** (0, 1, 1) sont respectivement $[\vec{R}_1, \vec{M}_{1O}]$ et $[\vec{R}_2, \vec{M}_{2O'}]$ définis par :

$$[T_1(O)] = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & -a\sin\alpha \\ \sin\alpha & a\cos\alpha \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad [T_2(O')] = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & -(a+1)\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -(a+1)\cos\alpha \\ 0 & \cos\alpha \end{Bmatrix};$$

où **a** et α sont des constantes réelles.

1) Préciser la nature des deux torseurs.
2) Déterminer l'équation de l'axe central de $[T_1]$ et en déduire le moment $\vec{M}_{1P}$ en un point **P** de cet axe.
3) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles le torseur $[T] = [T_1] + [T_2]$ est un glisseur.
4) Calculer le co-moment des deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$.
5) Trouver l'axe central de $[T]$.

Exercice 3 (10 points)

On considère un référentiel auquel est associé lerepère orthonormé direct $\mathcal{R}_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ vis-à-vis duquel on étudie le mouvement du système **Σ** suivant constitué:

- d'une tige **T** infiniment mince, de masse négligeable et de longueur **2R**, de milieu **E** et dont l'une des extrémités est liée à l'axe $O\vec{z}_0$ au point **A** défini par $\overrightarrow{OA} = R\vec{z}_0$. La liaison en **A** est telle que **T** peut tourner autour de ce point vis-à-vis de $\mathcal{R}_0$.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

- d'un disque **D** de centre **B**, de rayon **R** restant en contact ponctuel avec le plan $\Pi(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0)$. Le centre de **D** est lié à l'extrémité libre de **T** et la liaison est telle que **T** reste perpendiculaire à **D**, ce dernier pouvant tourner autour de **AB**. On note **I** le point de contact avec le plan Π à l'instant t.

Pour repérer Σ vis-à-vis de $\mathcal{R}_0$ on introduit la base orthonormee directe $(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ avec :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2R}$$

et on pose

$$\psi(t) = (\vec{x}_0,\vec{u}) = (\vec{y}_0,\vec{v}).$$

De même, en considérant un point **P** lié à lapériphéric de **D**, on introduit la base orthonormée directe $(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ avec

$$\vec{w} = \frac{\overrightarrow{BP}}{R}$$

et on pose

$$\theta(t) = (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{z}_0,\vec{z}).$$

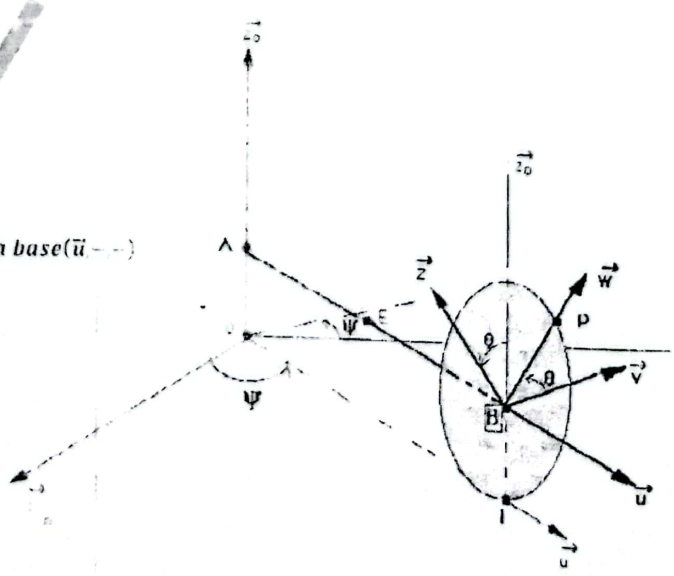
Dans tout ce qui suit, les résultats vectoriels seront donnés, projetés dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$.

1) a) Déterminer les éléments de réduction en **E** du torseur cinématique associé au mouvement de **T** vis-à-vis de $\mathcal{R}_0$.
   b) Déterminer les éléments de réduction en **B** du torseur cinématique associé au mouvement de **D** par rapport a $\mathcal{R}_0$.
2) On suppose que **D** roule sans glisser sur Π. Déterminer une relation entre $\dot{\theta}$ et $\dot{\psi}$ aduisant ce roulement sans glissement.
3) Calculer $\vec{\sigma}(B,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{\delta}(B,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0)$.
4) Calculer l'énergie cinétique $E_c(\Sigma/\mathcal{R}_0)$.

On donne :

Matrice d'inertie du disque de rayon R

$$J_B(D) = \frac{mR^2}{4}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{\forall\ la\ base(\vec{u}\ \ \ )}$$



VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFRMI L2 2020-2021

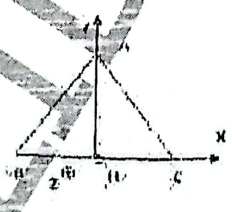
EXAMEN DE MECANIQUE DES SYSTEMES
SESSION 1
Durée: 3heures

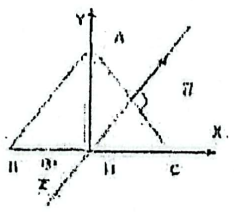
Exercice 1 (4 points)
Dans un repère orthonormé direct $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le champ de vecteurs $\vec{V}(M)$ dont les composantes sont définies en fonction des coordonnées (x, y, z) de M par:

$$\begin{cases} V_x = 1 + 3y - tz \\ V_y = -3x + 2tz \\ V_z = 2 + tx - t^2 y \end{cases} \quad \text{où t est un paramètre réel.}$$

1) Calculer le vecteur $\vec{V}(M)$ au point O.
2) Pour quelles valeurs de t, ce champ est antisymétrique ?
3) Pour chaque valeur trouvée de t, déterminer les éléments de réduction du torseur (résultante et moment en O)
4) Décomposer le torseur associé à $\vec{V}(M)$ en une somme d'un couple et d'un glisseur dont on précisera les éléments de réduction.
5) Déterminer la position de l'axe central du torseur pour $t = 0$ et $t = 2$.

Exercice 2 (6 points)
Un solide (S) à la forme d'une plaque triangulaire homogène d'épaisseur négligeable, de masse m, et de côtés $AB = AC = a\sqrt{2}$, $BC = 2a$. Où a est un réel strictement positif. On appelle H le milieu du côté BC.
Soit $(R_H) = (H; X, Y, Z)$ un repère orthonormé lié à (S) tel que (HX) et (HY) sont confondus respectivement à (HC) et (HA) (*voir figure*).
1) Déterminer les coordonnées du centre d'inertie G du solide (S) dans (R_H).
2) a) Montrer que la matrice d'inertie du solide (S) en H dans le repère orthonormé (R_H) est de la forme $[J_M] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}$
où M, N et P sont des scalaires que l'on déterminera en fonction de n et de a.
b) En déduire la matrice d'inertie du solide (S) en G dans le repère orthonormé $(R_G) = (G; X, Y, Z)$.
3) Quel est le moment d'inertie du solide (S) par rapport à la droite (AB)?





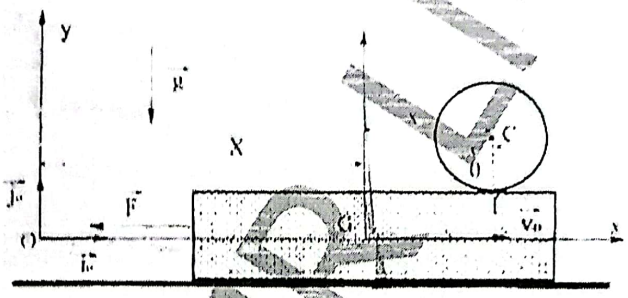
VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Exercice 3 (10 points)

On considère le système matériel composé d'un plateau (P) et d,un cylindre (C). Le plateau, de masse m est animé d'un mouvement rectiligne horizontal et uniforme de vitesse $\overrightarrow{v}_0$. Le cylindre (C), placé sur le plateau (P), est homogène , de masse m, de rayon a et son axe est perpendiculaire au vecteur vitesse $\overrightarrow{v}_0$. Le cylindre est initialement immobile par rapport au plateau. A l'instant $t = 0$, on applique au plateau une force $\overrightarrow{F}$ de freinage constante. La résultante des forces de réaction du plateau sur le cylindre est $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{T} + N\,\overrightarrow{j}_0$ $(N > 0)$. Le coefficient de frottement de glissement du plateau sur le cylindre est f. On désigne par $\mathcal{R}_0(O, \overrightarrow{i}_0, \overrightarrow{j}_0, \overrightarrow{k}_0)$ le repère fixe est par $\mathcal{R}_G(G, \overrightarrow{i}_0, \overrightarrow{j}_0, \overrightarrow{k}_0)$ un repère lié au plateau. Le centre C du cylindre est repéré, par rapport à $\mathcal{R}_G$ par $x = KI$ avec $I = K$ en $x = 0$ à l'instant initial $(t = 0)$. La rotation du cylindre est repérée par l'angle θ tel que $\theta = 0$ à $t = 0$. Le mouvement de (P) par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ est repéré par $X = OG$ avec $X = 0$ pour $t = 0$ et $\overrightarrow{v}_0 = v_0\,\overrightarrow{i}_0$.

Dans tout le problème, on considère que le cylindre roule sans glisser sur le plateau.



1) a) Faites un schéma montrant les différentes forces agissant sur le système.

b) Préciser la condition de roulement sans glissement du cylindre sur le plateau.

2) En appliquant le P.F.D dans le repère $\mathcal{R}_0$ au cylindre seul, puis au plateau seul, donner les équations différentielles qui régissent le mouvement du système.

3) Trouver la relation liant $\ddot{x}$ et $\ddot{X}$. En déduire que : $x(t) = \dfrac{F\,t^2}{3m + m_1}$

4) Exprimer $X(t)$ en fonction de F, v_0, m, m_1 et t. Trouver l'instant t_a correspondant à l'arrêt du plateau.

5) Sachant que le plateau restera immobile pour $t \geq t_a$ donner les valeurs de la force de frottement T et de $\overrightarrow{v}(C/\mathcal{R}_0)$.

6) Quelle est la nature du mouvement du cylindre pour $t \geq t_a$.

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD-2024

Université FHB Cocody UFRMI L2 2020-2021

EXAMEN DE MECANIQUE DES SYSTEMES
SESSION 2
Durée: 3h00

Exercice 1 (4 points)

Dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient $A(3,0,0)$ et $B(-1,2,1)$ deux points de l'espace. Soit $\vec{M}$ un champ de vecteurs défini par:
$\vec{M}(O) = (1,1,4)$, $\vec{M}(A) = (1,1,1)$, $\vec{M}(B) = (2,-1,9)$.
1) Montrer que $\vec{M}$ est un champ antisymétrique.
2) Déterminer la résultante $\vec{R}$ du torseur associéau champ $\vec{M}$.
3) En déduire $\vec{M}(P)$ en tout point $P(x,y,z)$ de l'espace.
4) Déterminer l'axe central (Δ) du torseur, et calculer $\vec{M}$ sur (Δ).

Exercice 2 (8 points)

Soit $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct. Une tige rectiligne AB de longueur L, est mobile relativement à $\mathcal{R}_0$ de manière que A se déplace sur $O\vec{z}_0$ et B se déplace dans le plan $O\vec{x}_0\vec{y}_0$ (figure 1). On suppose que le montage permet pour la côte de A des valeurs positives et négatives, et que B ne vient jamais en O. On note $\mathcal{R}_1(O, \vec{u}, \vec{v}_1, \vec{z}_0)$ le repère orthonormé direct tel que $\vec{u}$ soit le vecteur unitaire de OB dirigé de O vers B.
On pose $\overrightarrow{BA} = L\vec{z}$ et $\vec{v} = \vec{v}_1 \wedge \vec{z}$.
1) Justifier le fait que la position de AB relativement à $\mathcal{R}_0$ est déterminée par les angles $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{u})$ autour de $\vec{z}_0$ et $\beta = (\vec{z}_0, \vec{z})$ autour de $\vec{v}_1$.
2) Calculer $\vec{\Omega}(AB/\mathcal{R}_0)$ par ses composantes dans $\mathcal{R}_1$.
3) Caculer $\vec{V}(A/\mathcal{R}_0)$, $\vec{V}(B/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{V}(B/\mathcal{R}_1)$ dans $\mathcal{R}_1$.
4) Retrouver $\vec{V}(B/\mathcal{R}_0)$ en utilisant la composition de mouvements.
5) Calculer les composantes dans la base de $\mathcal{R}_1$ de l'accélération absolue de B.

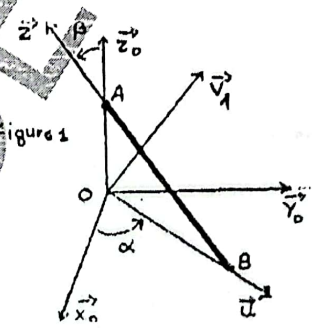


Figure 1

Scanné avec CamScanner

Exercice 3 (8 points)

On considere une tige (EF), homogène, de masse m, de longueur $2a$ et de centre d'inertie G qui glisse sans frottement à l'intérieur d'un anneau (A) circulaire de centre C et de rayon r (figure 2). Tout en restant dans le plan vertical (xOy) du repère $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, l'anneau roule sur l'axe Ox du repère $\mathcal{R}$ avec une vitesse angulaire angulaire ω **constante**. On désigne par, θ l'angle formé, à chaque instant, entre les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CG}$; x l'abscisse du point C sur l'axe Ox; $\vec{g} = -g\vec{y}$ le vecteur accéleration de la pésanteur; I le point de contact de l'anneau avec l'axe Ox et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ une base orthonormée directe liée à la tige (EF).

On pose $\overrightarrow{GC} = L\vec{v}$ avec $L = \sqrt{r^2 - a^2}$, $\overrightarrow{CE} = r\vec{u}_2$ et $\overrightarrow{CF} = r\vec{u}_1$.

1)Montrer que $\vec{\Omega}(EF/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\vec{z}$ et calculer $\vec{V}(G)$.

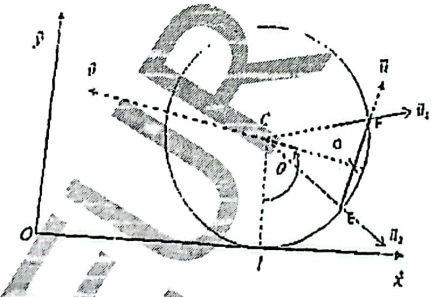
2) Calculer le moment d'inertie J de la tige (EF) par rapport à son axe $G\vec{z}$.

3) Déterminer le torseur dynamique de la tige (EF) au point G : $[m\vec{\gamma}(G), \delta(G, EF/\mathcal{R})]$.

4) En utilisant le théorème du moment dynamique à la tige (EF) au point C, montrer que l'une de ses équations dans le repère $\mathcal{R}$ s'écrit:

$$\ddot{\theta}\left[L + \frac{J}{mL}\right] + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0$$

5) En utilisant le théorème de la résultante dynamique, calculer les réactions de contact $\vec{R}_E$ et $\vec{R}_F$ aux points E et F.



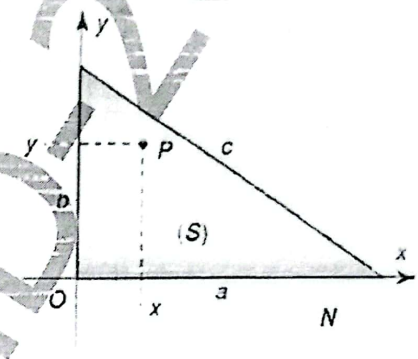
VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

EXAMEN de Mécanique des Systèmes
Année académique 2021/2022
Première session
Durée : 3 h 00
(Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2)

EXERCICE 1 : (5 points)

Soit un triangle rectangle (S) de côtés (a, b, c) dont la masse surfacique σ est donnée par : $\sigma(x,y) = \sigma_0 \frac{y}{b}$, $\sigma_0 = cste$

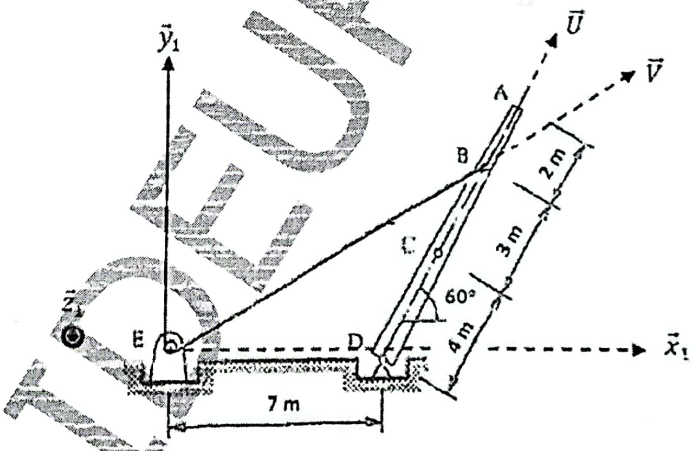


Le domaine de (S) est : $\left\{P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} / 0 \le y \le b,\ 0 \le x \le x_{MN}\right\}$.

1) Déterminer l'équation de la droite (MN) et exprimer x, c'est-à-dire x_{MN}, en fonction de y, a et b.
2) Calculer la masse m du triangle OMN en fonction de a, b et σ_0.
3) Calculer les coordonnées (x_G, y_G) du centre de masse G.

EXERCICE 2 : (7 points)

Pour mettre en place un mât d'éclairage, on le soulève lentement avec un câble de hissage actionné par un treuil E. Le mât a une masse m (centre d'inertie C) et le câble (EB) est de masse négligeable. $\mathcal{R}_1\ (O;\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ repère orthonormé direct relié à la terre supposé galiléen.



1) Pour la configuration indiquée sur la figure ci-dessus, faire le bilan des efforts extérieurs sur le mât (S_0). On notera $T > 0$ la tension du câble. $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont des vecteurs unitaires.
2) Écrire l'équilibre (relativement à la terre) et déterminer les efforts inconnus qui sollicitent le mât (la liaison pivot entre le mât et la terre en D est supposée parfaite) en fonction de m.

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

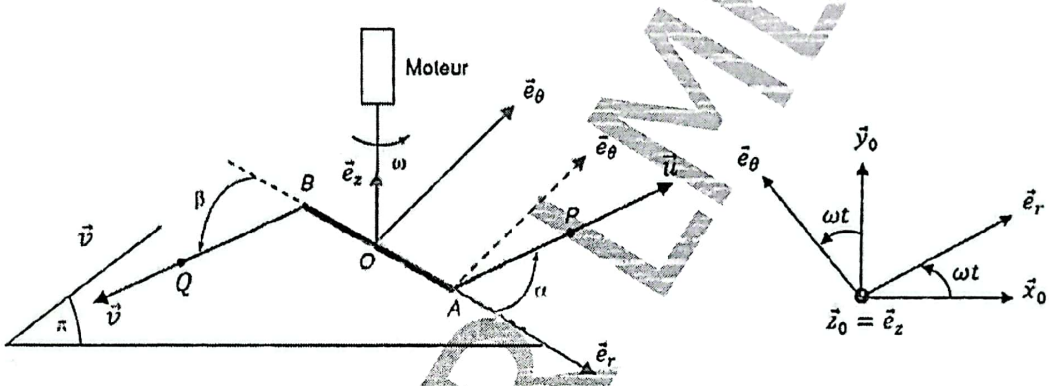
EXERCICE 3 : (8 points)

Une tige AB de masse négligeable, de longueur $2L$, de centre O fixe tourne dans un plan horizontal (π). $\mathcal{R}_0\ (O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ repère lié à (π) tel que $\vec{z}_0$ est ascendant dirigé vers le haut. Un moteur impose une vitesse angulaire $\omega = cte$ à la tige.

Deux autres tiges AP et BQ de masses négligeables et de longueur L portent chacune en leur extrémité respective P et Q un point matériel de masse m. Ces tiges sont articulées en A et B et peuvent donc tourner par rapport à la tige AB. L'ensemble forme le système (S_1).

$\mathcal{R}\ (O;\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$ repère lié à AB tel que $\vec{e}_z = \vec{z}_0$.

On note respectivement α l'angle entre $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AP} = L\vec{u}$ et β l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BQ} = L\vec{v}$.



1) **On considère dans un premier temps que les articulations en A et B sont bloquées et donc que $\alpha = cte$ et $\beta = cte$.**
   a) Déterminer les positions $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ dans la base $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$ en fonction de L, α et β
   b) En déduire les expressions des vitesses $\vec{V}(P/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{V}(Q/\mathcal{R}_0)$ dans $\mathcal{R}$.
   c) En déduire la quantité de mouvement $\vec{\mathcal{P}}$ de (S) en fonction de L, m, ω, α et β.
   d) Exprimer le moment cinétique $\vec{\sigma}_0$ de (S_1) en O.

2) **Les articulations sont à présent débloquées.**
   a) Exprimer $\vec{\mathcal{P}}$ en fonction de L, m, ω, α, β, $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$.
   b) En déduire le moment cinétique $\vec{\sigma}_0$ de (S_1) en O.
   c) Vérifier que l'on retrouve la question **1.d)** lorsque $\alpha = cte$ et $\beta = cte$.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

EXAMEN de Mécanique des Systèmes
Année académique 2021/2022
Deuxième session
Durée : 3 h 00
(Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2)

EXERCICE 1 (5 points)

Dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_1\ (O;\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$, on considère le champ de vecteurs $\vec{v}(M)$ dont les composantes sont définies en fonction des coordonnées (*x, y, z*) de M par :

$$v_x = 1 + 3y - tz \ ; \quad v_y = -3x + 2tz \ ; \quad v_z = 2 + tx - t^2 y\,, \qquad où\ t \in \mathbb{R}$$

1) Calculer le vecteur $\vec{v}(M)$ au point O.
2) Pour quelles valeurs de t, ce champ est antisymétrique ?
3) Pour chaque valeur trouvée de t, déterminer les éléments de réduction du torseur en O.
4) Décomposer le torseur associé à en une somme d'un couple et d'un glisseur dont on indiquera les éléments de réduction.
5) Déterminer la position de l'axe central du torseur pour chaque valeur de t.

EXERCICE 2 (9 points)

Un solide plan (T) est constitué d'une plaque plane triangulaire, *homogène* de masse m, de densité surfacique σ_0 et d'épaisseur négligeable. On désigne par G le centre d'inertie de (T) et par C le milieu du côté AB (Figure 1). On note $\mathcal{R}$ le repère orthonormé direct $(C;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ lié à (T), tel que $\vec{y}$ est colinéaire à AB, dirigé de A vers B, $C\vec{z}$ est orthogonal à $C\vec{y}$ dans le plan de (T).

Le repère $\mathcal{R}_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est orthonormé direct, avec $O\vec{z}_0$ vertical ascendant. Le solide (T) est lié en C à l'extrémité d'une tige OC de longueur l et de *masse négligeable*. OC reste dans le plan $O\vec{x}_0\vec{y}_0$ en étant confondu avec $\vec{x}$. La liaison en C est telle que le plan de (T) reste vertical et perpendiculaire à OC. On pose $\psi = (\vec{x}_0,\vec{x}) = (\vec{y}_0,\vec{u})$ et $\varphi = (\vec{z}_0,\vec{z}) = (u,\vec{y})$ et on donne $AB = 2CD = 2a$.

$$(T) = \left\{ M\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} / \ y_{DB} \le y \le y_{DA},\ -a \le z \le 0 \right\}$$

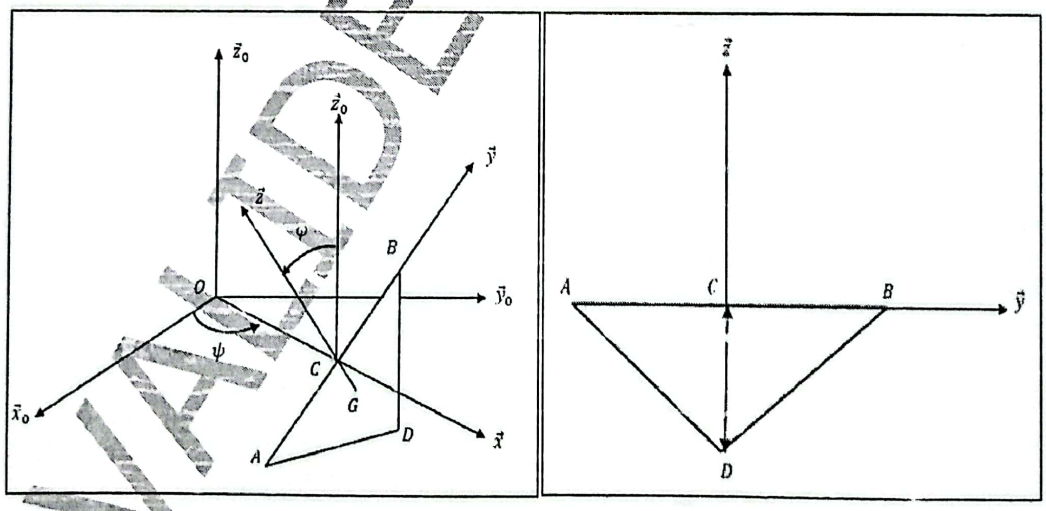


Figure 1 : Solide (T) constitué d'une plaque plane triangulaire homogène

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

1) Calculer $\vec{\Omega}(T/\mathcal{R}_0)$ par ses composantes dans la base de $\mathcal{R}$.
2) Montrer que G a pour coordonnées dans $\mathcal{R}$; $\left(0\,,0,-\frac{a}{3}\right)$.
3) Montrer que $(C;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est un repère principal d'inertie de (T) et déterminer l'opérateur d'inertie $\Pi_C(T)$ en C de (T).
4) Déterminer l'opérateur d'inertie $\Pi_C(G,m)$ au point C du centre de masse G. En déduire l'opérateur d'inertie $\Pi_G(T)$ au point G.
5) Calculer les moments cinétiques $\vec{\sigma}(G,T/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{\sigma}(O,T/\mathcal{R}_0)$.

EXERCICE 3 (9 points)

Un solide (S) est constitué de deux cylindres homogènes, concentriques, de rayons respectifs R_1 et $R_2 < R_1$ (Figure 2). La masse totale de (S) est M, son centre de masse G, son moment d'inertie par rapport à son axe de révolution est noté J_G. Le solide roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Un fil inextensible et sans masse est enroulé en partie autour du cylindre de rayon R_2 ; l'autre partie est parallèle à la pente. On fait passer ce fil sur une poulie parfaite sans masse et on y accroche une masse m. Le tout est lâché sans vitesse initiale. Le référentiel R(O; x,y,z) lié au plan incliné est galiléen. On repère le mouvement du solide (S) par les variables : $x(t)$: abscisse de G sur un axe parallèle à la pente, dirigé vers le bas ; $\theta(t)$: angle de rotation du cylindre dans R(O;x,y,z) ; $z'(t)$: abscisse du centre de masse G' de la masse m sur un axe Oz' vertical descendant.

1) Montrer que deux relations cinématiques entre ces trois variables cinématiques $x(t)$, $\theta(t)$ et $z'(t)$ sont données par : $\dot{x} + R_1\dot{\theta} = 0$ et $\dot{z}' + \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)\dot{x} = 0$. (On utilisera respectivement l'hypothèse de roulement sans glissement du cylindre de rayon R_1 ainsi que la nature inextensible du fil).
2) Faire un bilan des actions extérieures exercées sur le solide (S) et sur la masse m.
3) Appliquer le théorème de la résultante cinétique au solide (S) et à la masse m. A-t-on assez d'équations pour déterminer le mouvement des systèmes étudiés ?
4) Appliquer le théorème du moment cinétique au solide (S) en G. En déduire l'accélération de G.

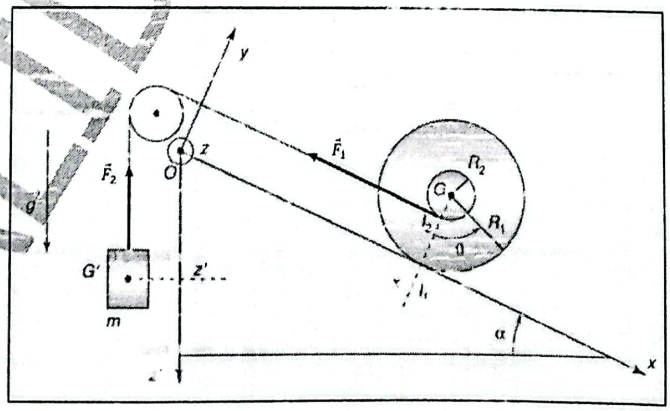


Figure 2 : Solide (S) constitué de deux cylindres homogènes concentriques

VALIDEUR LMD 2024

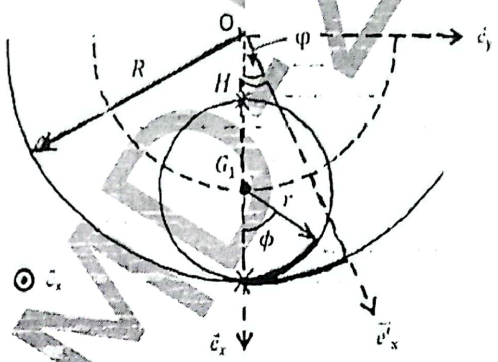
Scanné avec CamScanner

EXAMEN de Mécanique des Systèmes
Année académique 2022/2023
Première session
Durée : 3 h 00
(Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2)

EXERCICE 1

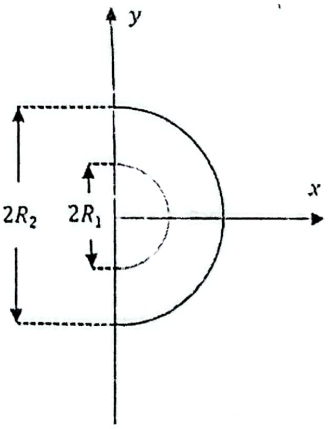
On considère un cylindre de rayon r, pouvant rouler à l'intérieur d'une gorge cylindrique de rayon R (cf. figure ci-contre). $\mathcal{R}\ (O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ repère fixe lié à au cylindre et $\mathcal{R}'\ (O;\vec{e}'_x,\vec{e}'_y,\vec{e}_z)$ mobile.

1) Calculer la vitesse du centre d'inertie G_1 par rapport à $\mathcal{R}$ en fonction de R, r et de φ (on pourra noter que G_1 décrit un cercle de rayon $R-r$).
2) En déduire la vitesse du point de contact I, ainsi que celle du point H par rapport à $\mathcal{R}$.
3) Ecrire alors la condition de roulement sans glissement au point I.
4) Exprimer finalement avec cette condition la vitesse en H en fonction de celle en G_1. Conclusion?



EXERCICE 2:

1) Calculer la position du centre d'inertie G_2 du demi disque homogène de rayon R_2 (cf. figure ci-contre), évidée (au centre de celui-ci) d'un demi disque également homogène de rayon R_1 $(0 < R_1 < R_2)$.
2) Calculer pour ce solide les moments d'inertie autour de l'axe Ox, puis autour de Oy. On supposera négligeable l'épaisseur du demi disque devant ses autres dimensions.



Indication : Pour cet exercice, on aura intérêt à utiliser le principe de superposition, avec une masse surfacique $+\sigma$ pour le demi disque de rayon R_2, superposée avec une masse surfacique $-\sigma$ et de rayon R_1.

PROBLÈME :

Soit $\mathcal{R}_0\ (O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ orthonormé direct considéré comme repère galiléen et (S) le solide constitué par :

- Une tige (T) de longueur $2L$, de masse négligéable, articulée en O, en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ dans le plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$. On désigne par $\mathcal{R}_1\ (O;\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ un repère orthonormé direct lié à (T) tel que $\vec{x}_1$ soit confondu avec (T) et $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$ (voir figure 1).

  La position de la tige par rapport à $\mathcal{R}_0$ est repérée, à chaque instant, par l'angle : $\psi = (\vec{x}_0,\vec{x}_1)$.

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

- Une plaque homogène carrée (P) de masse m, de côté $2a$ et dont l'un des côtés noté AB est relié à (T). On note O_2 le milieu de $[AB]$ qui coïncide avec celui de (T) et G le centre d'inertie de la plaque.

Un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_2\,(O_2;\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ est lié à (P) tel que $\vec{x}_2=\vec{x}_1$ et que $\vec{y}_2$ soit parallèle et de même sens que $\overrightarrow{O_2G}$.

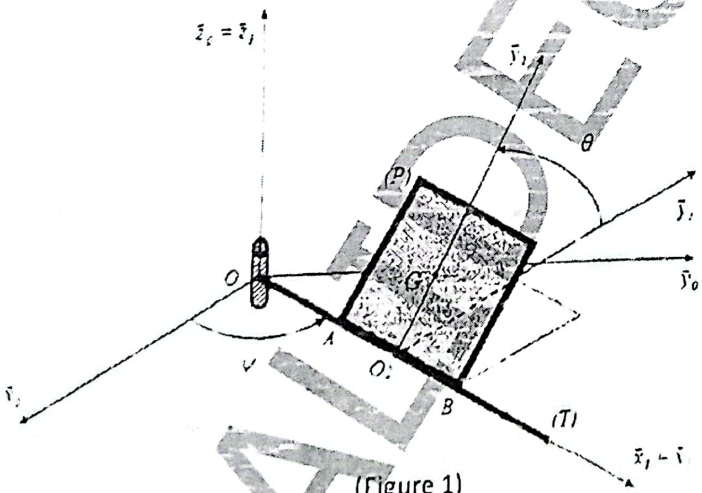
La position du solide (S) par rapport à $\mathcal{R}_0$ est repérée, à chaque instant, par les angles ψ et $\theta=(\vec{y}_1,\vec{y}_2)$; au cours du mouvement de (S), OO_2 reste dans le plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ (voir figure 1).

Dans tout le problème, les grandeurs vectorielles et matricielles seront exprimées dans la base $(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$.

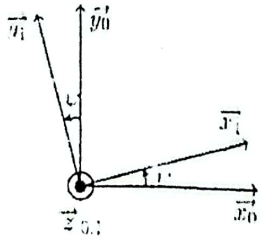
1) Déterminer le vecteur instantanée de rotation $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0)$ du solide (S) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$. Utiliser les figures planes de calcul de la figure 2.
2) Calculer la vitesse du point G par rapport à $\mathcal{R}_0$.
3) Déduire la vitesse du point O_2 par rapport à $\mathcal{R}_0$.
4) Montrer que la matrice d'inertie en G de la plaque (P) est de la forme :

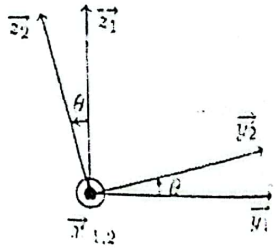
$$J(G/P)=\begin{pmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & C\end{pmatrix}_{(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)}$$

5) Déterminer les expressions de A et C.
6) En déduire $J(O_2/P)$ la matrice d'inertie en O_2 de la plaque.
7) Calculer $\vec{\sigma}(G/S)$ puis $\vec{\delta}(G/S)$ respectivement les moments cinétique et dynamique de S en G.
8) En déduire l'énergie cinétique $T(S/\mathcal{R}_0)$ du solide S dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.



(Figure 1)





(Figure 2)

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Correction Mécanique des systèmes Session 1 2020-2021

Exercice 1

1. Le point O a pour coordonnée $O = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{V(O)} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

2. Equiprojectivité, on utilise les points O et M, tel que :

$$\overrightarrow{V(O)}\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{V(M)}\,\overrightarrow{OM} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3y-tz\\2tz-3x\\2+tx-t^2y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 2$

Le champ $\overrightarrow{V(M)}$ est équiprojectif pour $t = 0$ ou $t = 0$; $\overrightarrow{V(M)}$ est un torseur pour ces valeurs de t.

3. Pour $t = 0$ on a : $\vec{R}(t=0) = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$

   Pour $t = 2$ on a : $\vec{R}(t=2) = \begin{pmatrix}-4\\-2\\-3\end{pmatrix}$

4. Soit les deux torseurs associés à $t = 0$: $[\mathcal{C}_0]$ et à $t = 2$: $[\mathcal{C}_2]$

Calculons pour les deux valeurs l'invariant scalaire :

$I_0 = \vec{V}(O).\vec{R}(t=0) = -6 \neq 0$

$I_2 = \vec{V}(O).\vec{R}(t=2) = -10 \neq 0$

Donc les deux torseurs sont quelconques (ni glisseur ni couple) chacun peut cependant être décomposé en la somme d'un glisseur et d'un couple :

$[\mathcal{C}_0] = [\vec{V}(O), \vec{R}(t=0)] = [\vec{V}(O), 0] + [0, \vec{R}(t=0)]$

De même

$[\mathcal{C}_2] = [\vec{V}(O), \vec{R}(t=2)] = [\vec{V}(O), 0] + [0, \vec{R}(t=2)]$

Donc $\begin{cases} couples : \vec{C}(M) = \vec{V}(O) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \forall M \\ Glisseurs : \vec{C}(M) = \vec{0} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OM} \end{cases}$

5. Soit p appartient à l'axe central du torseur, la position de P par rapport à O est donnée par $\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R}(t)\wedge\vec{V}(M)}{R^2} + \lambda\vec{R}$

   Avec $\lambda \in \mathbb{R}$

   Pour $\lambda = 0$, $\overrightarrow{OP_0} = \frac{\vec{R}(t)\wedge\vec{V}(0)}{R^2}$

   Donc pour $t = 0$, $\vec{R}(t=0) = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$;

   $\vec{V}(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ on obtient alors $\overrightarrow{OP_0} = -\frac{1}{3}\vec{j}$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

L'axe central pour $t = 0$ passe pour p_0 et parallèle à $\vec{R}(t=0)$ ⇒parallèle à $\vec{k}$. De la même façon on obtient l'axe central pour $t = 2$.

L'axe central pour $t = 0$ passe par

$$p_0 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{29} \\ -\frac{5}{29} \\ \frac{2}{29} \end{pmatrix} \text{ et parallèle à } \vec{R}(t=2) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. $G(0, y_G, 0)$ car l'axe y est un de symétrie et G appartient à l'axe de symétrie. On a :
   $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$
   $B(-a, 0)\ ; C(a, 0)\ ; A(0, y_A); y_A = AH = a$
   $A(0, a)\ y_G = \frac{a}{3}$ donc $G(0, \frac{a}{3}, 0)$.
2. Les plans (H, X, Y) et (H, Y, Z) sont des plans de symétrie matériel. Alors le repère (H, X, Y, Z) est un repère principale d'inertie d'où

$$J_H = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} M \text{ moment d'inertie par rapport à } (HX) \\ N \text{ moment d'inertie par rapport à } (HY) \\ P \text{ moment d'inertie par rapport à } (HZ) \end{cases}$$

- Déterminons M, N et P

Posons $(h = 0, b = 2a)$

$\frac{by}{b} = \frac{h-y}{h}$

$\Rightarrow by = \frac{b}{h}(h - y)$

$ds = \lambda b y dy$

$m = \lambda \frac{b \times h}{2}$

$\lambda = \frac{2m}{b \times h}$

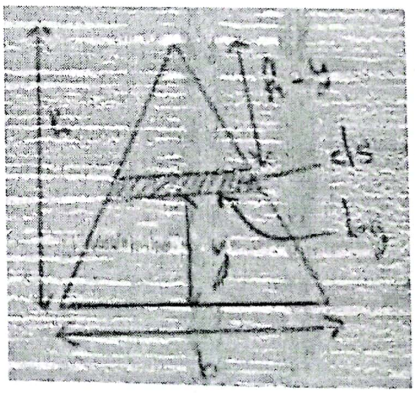
$$M = \int_s (y^2 + z^2) ds = \int_s (y^2) ds = \int_s (y^2) \lambda b y dy = \lambda \frac{b h^3}{12}$$

$$\Rightarrow M = \frac{m h^2}{6} = \frac{m a^2}{6}$$

$$N = \int_s (x^2 + y^2) ds = \int_s x^2 ds = \int_0^h \lambda x^2 \left(\frac{b}{h}\right)(h - x)\, dx$$

$N = \frac{mh^2}{6} = \frac{ma^2}{6}$ or $M + N = P + 2\int_s z^2 ds$

Donc $P = \frac{ma^2}{3}$; $J_H(S) = \frac{ma^2}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$



b) On a : $J_H(S) = J_G(S) + J(G, m)$

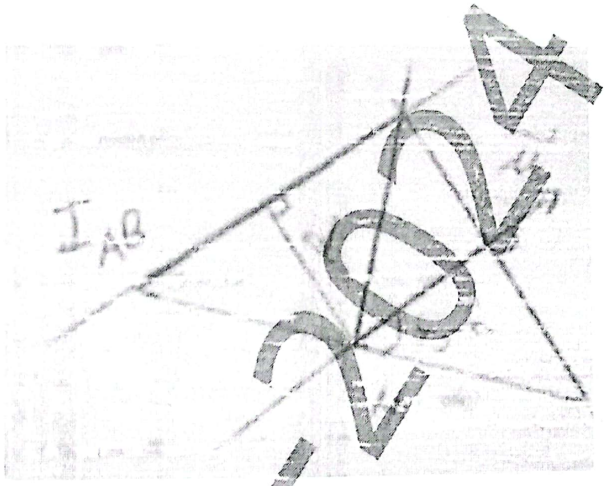
$\Rightarrow J_G(S) = J_H(S) - J(G, m)$

$$J_G(S) = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} - m\begin{pmatrix} y_G^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_G^2 \end{pmatrix}; y_G^2 = \frac{a^2}{9}$$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$J_G(S) = \frac{ma^2}{6}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



3. Moment d'inertie par rapport à (AB)

$I_{AB} = I_{\Delta H} + md^2$

$I_{\Delta H} = t_{\vec{u}} j_H(S)\vec{u}$

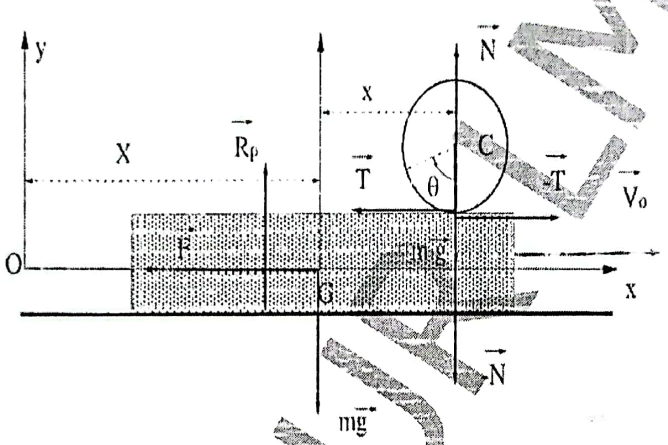
$\vec{u} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\jmath}$

$I_{\Delta H} = \frac{ma^2}{6}, d = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$I_{AB} = \frac{2}{3}ma^2$

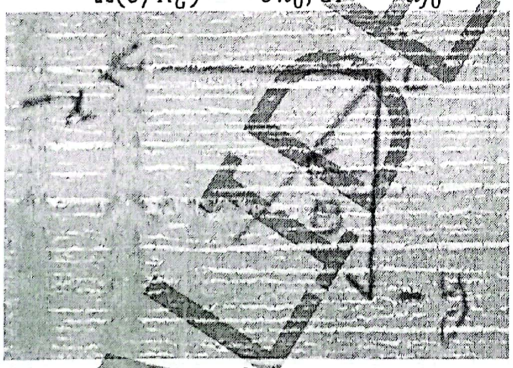
Exercice 3

1. a.



b. $\vec{V}_g(c/P) = \vec{V}(I \in c/R_G) = \vec{v}(c/R_G) + \vec{\Omega}(c/R_G) \wedge \overrightarrow{CI}$ avec

$\vec{\Omega}(c/R_G) = -\dot{\theta}\vec{k}_0; \overrightarrow{CI} = -a\vec{\jmath}_0$



$\vec{v}(c/R_G) = \frac{d\vec{x}\vec{\imath}_0}{dt}/R_G = \dot{x}\vec{\imath}_0$

$\vec{V}_g(c/P) = (\dot{x} - \dot{\theta}a)\vec{\imath}_0 = \vec{0}$ ①

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

2. Pour le cylindrique

$$\begin{cases} m_1\vec{\gamma}(c/R_0) = m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} \\ \vec{f}(C,c/R_0) = \dfrac{d}{dt}\vec{\sigma}(C,c/R_0)/R_0 \end{cases}$$

Car le cylindre roule sans glisser sur le plateau

Or $\vec{\sigma}(C,c/R_0) = J(c,R_0).\vec{\Omega}(c/R_0) = -\frac{ma^2\dot{\theta}}{2}\overrightarrow{k_0}$ or

D'où $\vec{f}(C,c/R_0) = -\frac{ma^2\ddot{\theta}}{2}\overrightarrow{k_0}$ or

$\vec{f}(C,c/R_0) = \vec{M}_c,ext = \vec{M}(\vec{P}) + \vec{M}(\vec{N}) + \vec{M}(\vec{T})$

$= \overrightarrow{CC} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{CI} \wedge \vec{N} + \overrightarrow{CI} \wedge \vec{T} = -aT\overrightarrow{k_0}$

$\vec{\gamma}(c/R_0) = \dfrac{d^2}{dt^2}(X+x)\vec{\imath}_0/R_0 = (\ddot{X}+\ddot{x})\vec{\imath}_0$

par projection sur les axes on obtient

$$\begin{cases} m_1(\ddot{X}+\ddot{x}) = -T \ (2) \\ 0 = N - m_1 g \ (3) \\ aT = \left(\dfrac{m_1 a^2}{2}\right)\ddot{\theta} \ (4) \end{cases}$$

- Pour le plateau

$$m\vec{\gamma}(G/R_0) = m\vec{g} + \overrightarrow{R_p} + \vec{F} - \vec{N} - \vec{T}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{X} = T - F \ (5) \\ 0 = Rp - N - mg \ (6) \end{cases}$$

3. L'équation (1) $\Rightarrow \dot{x} = a\dot{\theta}$

$\Rightarrow \ddot{x} = a\ddot{\theta}$

$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{a}$ dans l'équation (4)

$\Rightarrow \quad T = \left(\frac{m_1}{2}\right)\ddot{x}$ (7)

(7)dans(2) $\Rightarrow \quad m_1(\ddot{X}+\ddot{x}) = -\left(\frac{m_1\ddot{x}}{2}\right) \Rightarrow$

$m_1\left(\ddot{X} + \frac{3}{2}\ddot{x}\right) = 0 \Rightarrow \ddot{X} + \frac{3}{2}\ddot{x} = 0$ (8)

(7) Et (8) dans (5) $\Rightarrow m\ddot{X} = \left(\frac{m_1\ddot{x}}{2}\right) - F$

$\Rightarrow -\frac{3}{2}m\ddot{x} = \left(\frac{m_1\ddot{x}}{2}\right) - F \Rightarrow \ddot{X} = \dfrac{2F}{3m+m_1}$ (9)

(9) $\Rightarrow \dot{x}(t) = \dfrac{2Ft}{3m+m_1}$

$$\boxed{x(t) = \frac{Ft^2}{3m+m_1}}$$

4. L'équation (9) dans (8) $\Rightarrow$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$\ddot{X} + \frac{2F}{3m + m_1} \times \frac{3}{2} = 0$$

$$\ddot{X} = -\frac{3F}{3m + m_1} \Rightarrow \dot{X} = -\frac{3Ft}{3m + m_1} + V_0$$

donc $X(t) = -\frac{3Ft^2}{3m+m_1} + V_0 t$

L'instant $t\alpha$ correspondent à l'arrêt du plateau correspond à

$$\dot{X}(t\alpha) = 0 \Rightarrow t\alpha = \frac{V_0(3m + m_1)}{3F}$$

5. $t \geq t\alpha$, le plateau s'immobilise $\Rightarrow \dot{X}(t) = \ddot{X}(t) = 0$
   L'équation (2) devient $m_1\ddot{x} = -T$ et d'après (7) $m_1\ddot{x} = 2T \Rightarrow T = 0$
   Ainsi $m_1\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = cte = \dot{x}(t\alpha)$
6. Pour $t \leq t\alpha$, et en utilisant (8) $\ddot{X} + \frac{3}{2}\dot{x} = V_0$ pour tout $t = t\alpha$,
   $\ddot{X} = 0$ et $\dot{x} = \frac{2}{3}V_0$
   Or $\vec{V}(c/R_0) = \vec{V}(c/R_a) + \vec{V_e} = \dot{x}(t)\vec{\imath_0} = \frac{2}{3}V_0\vec{\imath_0}$
   Le mouvement du cylindre est uniforme

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Université FHB
MATHS-INFO L2

Année 2020-2021

CORRECTION MECANIQUE DES SYSTEMES
Session 2

Exercice 1

$A(3,0,0)$; $B(-1,2,1)$

$\vec{M}(0) = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$; $\vec{M}(A) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{M}(B) = \begin{pmatrix}2\\-1\\9\end{pmatrix}$

1) Champ antisymétrique $\Leftrightarrow$ champ équiprojectif.

$\overrightarrow{OA}.\vec{M}(0) = 3$

$\overrightarrow{OA}.\vec{M}(0) = 3 \Rightarrow \overrightarrow{OA}.\vec{M}(0) = \overrightarrow{OA}.\vec{M}(A)$ même chose pour $\overrightarrow{OB}.\vec{M}(0) = \overrightarrow{OB}.\vec{M}(B)$

$\overrightarrow{AB}.\vec{M}(A) = \overrightarrow{AB}.\vec{M}(B)$.

Donc $\vec{M}$ est un champ antisymétrique.

2) $\vec{M}$ est antisymétrique donc $\exists!\ \vec{R}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tel que

$\forall A, O,\ \vec{M}(A) = \vec{M}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OA} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

$\forall A, B,\ \vec{M}(B) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

$\forall O, B,\ \vec{M}(B) = \vec{M}(0) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OB}$ alors $\vec{R}$ est unique et $\vec{R} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

3) $\vec{M}(P)$ en tout point $P(x,y,z)$ de l'espace

On a: $\vec{M}(P) = \vec{M}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$

$\vec{M}(P) = \begin{cases} 1 + z \\ 1 - 2z \\ 4 - x + 2y \end{cases}$

4) $\vec{M}(P) = \lambda\vec{R} / P \in (\Delta)$

$\begin{cases} 1 + z = 2\lambda \\ 1 - 2z = \lambda \\ 4 + 2y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1/5 \\ y = \frac{1}{2}(x-4) \end{cases} \Rightarrow (\Delta)$ est la droite d'équation

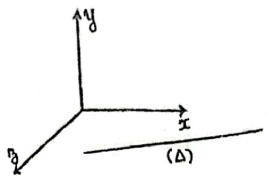
$y = \frac{1}{2}(x-4)$ qui se trouve dans le plan $z = \frac{1}{5}$

$z = \frac{1}{5} \Rightarrow \lambda = \frac{3}{5} \Rightarrow \vec{M}(P \in \Delta) = \frac{3}{5}\vec{R}$

VALIDEUR LMD-2024

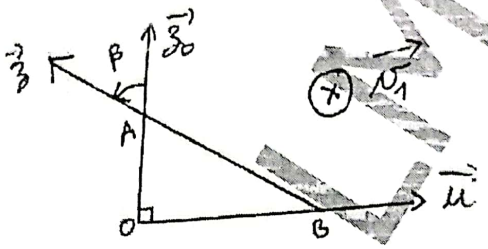
Scanné avec CamScanner

$$\overrightarrow{M}(P \in \Delta) = \frac{\overrightarrow{R}.\overrightarrow{M}(0)}{R^2}\overrightarrow{R} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$



Exercice 2

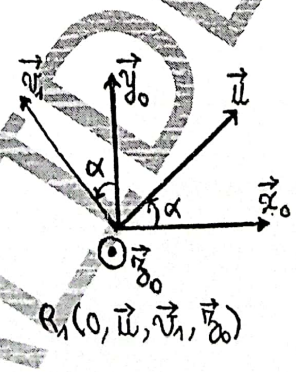
1) À tout instant t la tige se trouve dans le plan $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{z}_0)$

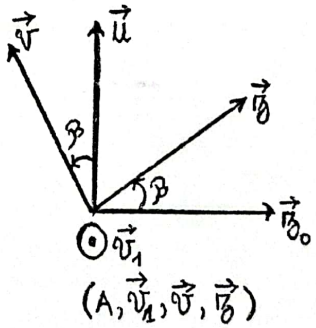


Or $\overrightarrow{v}_1$ est orthogonal à tout instant à ce plan$\Rightarrow$ $\overrightarrow{v}_1$ est lié à la tige. $\overrightarrow{z}$ vecteur unitaire de la tige est lié à la tige. $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{z}$ sont orthogonaux or $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_1 \wedge \overrightarrow{z} \Rightarrow (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{z})$ est orthonormé direct et $\overrightarrow{v}$ est aussi lié à la tige. Donc le repère $R(A, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{z})$ est lié à la tige.

$$\overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{z}_0 \Rightarrow \lambda = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{z}_0$$
$$= \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{z}_0 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{z}_0$$
$$= 0 + L\overrightarrow{z}.\overrightarrow{z}_0$$

Donc $\lambda = L\overrightarrow{z}.\overrightarrow{z}_0$





VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$\vec{z} = \cos\beta\,\vec{z}_0 + \sin\beta\,\vec{u}$

$\lambda = L\vec{z}.\vec{z}_0 = L\cos\beta$
$\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{z}_0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} = L\cos\beta\,\vec{z}_0$
$(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow[\vec{z}_0]{\alpha} (\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{z}_0) \xrightarrow[\vec{v}_1]{\beta} (\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{z})$

On passe de la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ à la base $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{z}_0)$ par rotation d'angle α autour de $\vec{z}_0$ et on passe de la base $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{z}_0)$ à la base $(\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{z})$ par rotation d'angle β autour de $\vec{v}_1$ donc α et β déterminent la position de $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{z})$ par rapport à $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$or $(\overrightarrow{OA} = L\cos\beta\,\vec{z}_0)$ β donne la position de A par rapport à $\mathcal{R}_0$.
Finalement α et β donnent la position de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ et comme $\mathcal{R}$ est lié à la tige , α et β donnent la position de la tige par rapport à $\mathcal{R}$.

2) Calculons $\vec{\Omega}(AB/\mathcal{R}_0)$ dans $\mathcal{R}_1$
$\vec{\Omega}(\overrightarrow{AB}/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)$
$= \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$
$= \dot{\beta}\,\vec{v}_1 + \dot{\alpha}\,\vec{z}_0$

3)
$\vec{V}(A/\mathcal{R}_0) = \dfrac{d\overrightarrow{OA}}{dt/\mathcal{R}_0} = \dfrac{Ld(\cos\beta\,\vec{z}_0)}{dt/\mathcal{R}_0}$
$= L\left(\cos\beta\dfrac{d\vec{z}_0}{dt/\mathcal{R}_0} + \dfrac{d\cos\beta}{dt}\vec{z}_0\right)$
$\vec{V}(A/\mathcal{R}_0) = -L\dot{\beta}\sin\beta\,\vec{z}_0$
$\vec{V}(B/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(A/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\overrightarrow{AB}/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{AB}$
$= -L\dot{\beta}\sin\beta\,\vec{z}_0 + (\dot{\beta} + \dot{\alpha}\,\vec{z}_0) \wedge (-L\vec{z})$
$= \vec{V}(A/\mathcal{R}_0) - L\dot{\beta}\vec{v} - L\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{v}_1$
$\vec{z}_0 = \cos\beta\,\vec{z} - \sin\beta\,\vec{v}$; $\vec{v} = \cos\beta\,\vec{u} - \sin\beta\,\vec{z}_0$
$\vec{V}(B/\mathcal{R}_0) = -L(\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{u} + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{v}_1)$

$\vec{V}(B/\mathcal{R}_1) = \dfrac{d\overrightarrow{OB}}{dt/\mathcal{R}_1}$
$\overrightarrow{OB} = \delta\vec{u} \Rightarrow \delta = \overrightarrow{OB}.\vec{u} = \overrightarrow{OA}.\vec{u} + \overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0 - L\vec{z}.\vec{u}$
$\Rightarrow \delta = -L\cos(\dfrac{1}{2} - \beta)$
$\Rightarrow \delta = -L\sin\beta$
$\overrightarrow{OB} = -L\sin\beta\,\vec{u}$
$\vec{V}(B/\mathcal{R}_1) = -L\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{u}$
4) Prenons comme repère absolue $\mathcal{R}_0$ et repère relatif $\mathcal{R}_1$
$\vec{V}_a(B) = \vec{V}_r(B) + \vec{V}_e(B) = \vec{V}(B/\mathcal{R}_0)$
$\vec{V}_r(B) = \vec{V}(B/\mathcal{R}_1)$
$\vec{V}_e(B) = \vec{V}(B \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

$$\vec{V}(B \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{OB}$$
$$= \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 \wedge (-L\sin\beta\,\vec{u})$$
$$= -L\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{u}$$
$$\vec{V}(B/\mathcal{R}_0) = -L\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{u} - L\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{v}_1$$

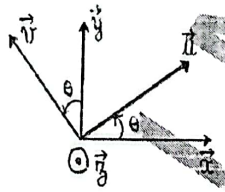
5) $\vec{\gamma}(B/\mathcal{R}_0) = \dfrac{d\vec{V}(B/\mathcal{R}_0)}{dt/\mathcal{R}_0}$

$$\vec{\gamma}(B/\mathcal{R}_0) = L(\sin\beta(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2) - \ddot{\beta}\cos\beta)\vec{u} - L(2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta + \ddot{\alpha}\sin\beta)\vec{v}_1$$

Exercice 3

1) Montrons que $\vec{\Omega}(EF/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\,\vec{z}$; la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ est une base orthonormée directe liée à la tige (EF)

On a: $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \xrightarrow[\vec{z}]{\theta} (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ donc $\vec{\Omega}(EF/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\,\vec{z}$



* Calculons $\vec{V}(G)$

$$\vec{V}(G) = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt/\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CG})_{/\mathcal{R}} = \frac{dx}{dt}\vec{x} + r\frac{d\vec{y}}{dt/\mathcal{R}} - L\frac{d\vec{v}}{dt/\mathcal{R}} \text{ avec}$$

$$\frac{d\vec{y}}{dt/\mathcal{R}} = \vec{0};\ \frac{d\vec{v}}{dt/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(EF/\mathcal{R}) \wedge \vec{v} = \dot{\theta}\,\vec{z} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{V}(G) = \dot{x}\,\vec{x} + L\dot{\theta}\,\vec{u} \text{ avec } L = \sqrt{a^2 - r^2} = Cste$$

2) Caculons J le moment d'inertie de la tige par rapport à son axe $\overrightarrow{Gz}$

$$J = \lambda\int(u^2 + v^2)du = \lambda\int_{-a}^{a} u^2\,du;\ m = \lambda 2a \Rightarrow \boxed{J = \frac{ma^2}{3}}$$

3) Déterminons le torseur dynamique de la tige au point G : $[m\vec{\gamma}(G), \vec{\delta}(G, EF/\mathcal{R})]$

$$\vec{\gamma}(G) = \frac{d\vec{V}(G)}{dt/\mathcal{R}} = \ddot{x}\,\vec{u} + L\ddot{\theta}\,\vec{u} + L\dot{\theta}^2\,\vec{v}$$

$$\vec{\delta}(G, EF/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt}\vec{\sigma}(G, EF/\mathcal{R}) \text{ Or } \vec{\sigma}(G, EF/\mathcal{R}) = J\,\vec{\Omega}(EF/\mathcal{R}) = J\dot{\theta}\,\vec{z}$$

$$\vec{\delta}(G, EF/\mathcal{R}) = J\ddot{\theta}\,\vec{z}$$

4) Théorème du moment dynamique de la tige au point C

$$\vec{\delta}(C, EF/\mathcal{R}) = \overrightarrow{CE} \wedge \vec{R}_E + \overrightarrow{CF} \wedge \vec{R}_F + \overrightarrow{CG} \wedge \vec{P}$$

$$\vec{R}_E = -R_E\,\vec{u}_2;\ \vec{R}_F = -R_F\,\vec{u}_1;\ \overrightarrow{CE} = r\,\vec{u}_2;\ \overrightarrow{CF} = r\,\vec{u}_1;\ \overrightarrow{CG} = -L\,\vec{v};$$

$$\vec{P} = -mg\,\vec{y};\ \vec{v} = -\sin\theta\,\vec{x} + \cos\theta\,\vec{y}$$

$$\overrightarrow{CE} \wedge \vec{R}_E = \overrightarrow{CF} \wedge \vec{R}_F = \vec{0};\ \overrightarrow{CG} \wedge \vec{P} = -mgL\sin\theta\,\vec{z}$$

$$\vec{\delta}(C, EF/\mathcal{R}) = \vec{\mathcal{S}}(G, EF/\mathcal{R}) + m\,\vec{\sigma}(G) \wedge \overrightarrow{GC} = [J\ddot{\theta} + mL^2\ddot{\theta} + m\ddot{x}L\cos\theta]\vec{z}$$

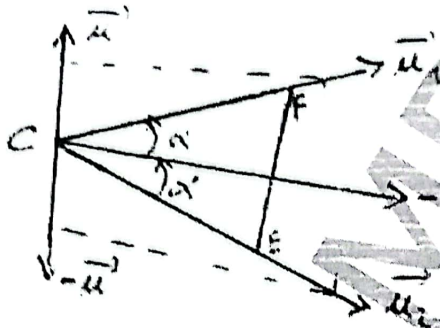
VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$\overrightarrow{\delta}(C, EF/\mathcal{R}) = Lm[\ddot{\theta}(L+J/mL)+\ddot{x}\cos\theta]\overrightarrow{z}$ or $\overrightarrow{\delta}(C, EF/\mathcal{R}) = -Lmg\sin\theta\overrightarrow{z}$
d'où l'une de ses équations dans le repère $\mathcal{R}$ est:

$$\ddot{\theta}(L + J/mL) + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0$$

5) Théorème de la résultante dynamique
$m\overrightarrow{\gamma}(G) = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}_E + \overrightarrow{R}_F = -mg\overrightarrow{y} - R_E\overrightarrow{u}_2 - R_F\overrightarrow{u}_1$



$\overrightarrow{u}_2 = -\sin\alpha\overrightarrow{u} - \cos\alpha\overrightarrow{v}$ avec $\cos\alpha = \frac{L}{r}$; $\sin\alpha = \frac{a}{r}$
$\overrightarrow{u}_1 = \sin\alpha\overrightarrow{u} - \cos\alpha\overrightarrow{v}$
$m\overrightarrow{\gamma}(G) = -mg\overrightarrow{y} + (R_E - R_F)\sin\alpha\overrightarrow{u} + (R_E + R_F)\cos\alpha\overrightarrow{v}$

$$= -mg\overrightarrow{y} + (R_E - R_F)\frac{a}{r}\overrightarrow{u} + (R_E + R_F)\frac{L}{r}\overrightarrow{v}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{u} = \cos\theta\overrightarrow{x} + \sin\theta\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{v} = -\sin\theta\overrightarrow{x} + \cos\theta\overrightarrow{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{x} = \cos\theta\overrightarrow{u} - \sin\theta\overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{y} = \sin\theta\overrightarrow{u} + \cos\theta\overrightarrow{v} \end{cases}$$

$m[(\ddot{x}\cos\theta + L\ddot{\theta})\overrightarrow{u} + (L\dot{\theta}^2 - \ddot{x}\sin\theta)\overrightarrow{v}] = [-mg\sin\theta + (R_E - R_F)\frac{a}{r}]\overrightarrow{u} +$
$[-mg\cos\theta + (R_E + R_F)\frac{L}{r}]\overrightarrow{v}$

$$\begin{cases} (R_E - R_F) = \frac{r}{a}[mg\sin\theta + m(\ddot{x}\cos\theta + L\ddot{\theta})] \\ (R_E + R_F) = \frac{r}{L}[mg\cos\theta + m(L\dot{\theta}^2 - \ddot{x}\sin\theta)] \end{cases}$$

Après résolution on obtient R_E et R_F.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

CORRECTION MECANIQUE DES SYSTEMES SESSION 1 ANNEE 2021-2022

EXERCICE 1

1- Déterminons l'équation de la droite (MN) et exprimons x, c'est-à-dire x_{MN} en fonction de y, a et b. $M\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$, $N\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$, $y = Ax + B$ Avec $A = \frac{0-b}{a-0} = -\frac{b}{a}$

$y_M = Ax_M + B \quad => B = b$ D'où $y = -\frac{b}{a}x + b = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$ (1)

de (1) On tire $x = x_{MN} = a\left(1 - \frac{y}{b}\right)$

2

On utilise l'expression intégrale de la masse, adaptée à la distribution surfacique. Les coordonnées décrivant le triangle seront les coordonnées cartésiennes car elles permettent d'exprimer simplement les frontières du triangle.
On ne peut pas séparer ici l'intégrale double en produit de deux intégrales simples car la frontière du domaine d'intégration n'est pas rectangulaire.

La masse M est donnée par $M = \iint_{(S)} \sigma \, dS = \iint_{(S)} \sigma(x, y)\, dx dy$.

La fonction σ ne dépend que de y, il est plus facile de commencer par une intégration sur la variable x :

$$M = \int_0^b \int_0^{x_{max}} \sigma(x, y)\, dx dy$$

x_{max} est donné par l'équation de l'hypoténuse : $\frac{x_{max}}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow x_{max} = a\left(1 - \frac{y}{b}\right)$, d'où :

$$M = \int_0^b \left(\int_0^{x_{max} = a\left(1-\frac{y}{b}\right)} \sigma(y)\, dx \right) dy$$

Calculons l'intégrale :

$$M = \int_0^b \left(a\sigma(y)\left(1 - \frac{y}{b}\right)\right) dy$$
$$= \frac{a\sigma_0}{b} \int_0^b \left(y - \frac{y^2}{b}\right) dy$$
$$= \frac{a\sigma_0}{b} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3b}\right]_0^b$$
$$= \frac{a\sigma_0}{b}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{3}\right)$$
$$= \frac{ab\sigma_0}{6}$$

$$\boxed{M = \frac{1}{6} ab\sigma_0}$$

3 –calculons les coordonnées (x_G, y_G) du centre de masse G

$$x_G = \frac{1}{M}\int_{y=0}^b \left(\int_{x=0}^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} x\sigma(x, y) dx \right) dy$$
$$= \frac{\sigma_0}{Mb} \int_{y=0}^b y \left(\int_{x=0}^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} x\, dx \right) dy$$
$$= \frac{\sigma_0}{Mb} \int_{y=0}^b y \left(\frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 \right) dy$$
$$= \frac{\sigma_0 a^2}{2Mb} \int_{y=0}^b \left(y + \frac{y^3}{b^2} - 2\frac{y^2}{b} \right) dy$$
$$= \frac{\sigma_0 a^2}{2Mb}\left(\frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{4} - 2\frac{b^2}{3}\right)$$
$$= \frac{\sigma_0 a^2 b}{24M}$$

$$\boxed{x_G = \frac{a}{4}}$$

$$y_G = \frac{1}{M}\int_{y=0}^b \left(\int_{x=0}^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} y\sigma(x, y) dx \right) dy$$
$$= \frac{\sigma_0}{Mb} \int_{y=0}^b y^2 \left(\int_{x=0}^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} dx \right) dy$$
$$= \frac{\sigma_0}{Mb} \int_{y=0}^b y^2 \left(a\left(1 - \frac{y}{b}\right)\right) dy$$
$$= \frac{\sigma_0 a}{Mb} \int_{y=0}^b \left(y^2 - \frac{y^3}{b} \right) dy$$
$$= \frac{\sigma_0 a}{Mb}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{4}\right)$$
$$= \frac{\sigma_0 a b^2}{12M}$$

$$\boxed{y_G = \frac{b}{2}}$$

On utilise alors l'expression de la masse M

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2

$R_1(o;\overrightarrow{x_1};\overrightarrow{y_1};\overrightarrow{z_1})$ Repère OND lié à la terre galiléen



1-) Bilan des efforts extérieurs sur le mât (S_o)

- Effort de pesanteur sur (S_o)

  Torseur équivalent : $[C(\vec{P})]_C = \begin{Bmatrix} -mg\overrightarrow{y_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
- Force exercée en par le câble (EB) sur (S_o)

  Torseur équivalent : $[C(\vec{T})]_B = \begin{Bmatrix} -T\vec{V} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
- Efforts sur (S_o) dûs à la liaison pivot d'axe $D\vec{z}_1$ entre (S_o) et la terre.

  Torseur équivalent : $[C(\vec{R})]_P = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{m_P} \end{Bmatrix}$

P : point arbitraire de l'espace, cette liaison pivot est parfaite, donc $\forall P \in D\overrightarrow{z_1}$, $\overrightarrow{m_P}.\overrightarrow{z_1} = 0$ (1)

2-) Ecrivons l'équilibre (relativement à la terre)

Et déterminons les efforts inconnus qui sollicitent le mât (S_o)A l'équilibre relativement à la terre (donc R_1

$$\begin{bmatrix} Torseur\ des\ efforts \\ exterieurs\ sur\ le \\ mât\ So \end{bmatrix} = [0] \quad (2)$$

$$\begin{cases} -mg\overrightarrow{y_1} - T\vec{V} + \vec{R} = \vec{0} & (3) \\ \overrightarrow{M_D(\vec{P})} + \overrightarrow{M_D(\vec{T})} + \overrightarrow{M_D(\vec{R})} = \vec{0} & (4) \end{cases}$$

$\overrightarrow{M_D(\vec{P})} = \overrightarrow{M_C(\vec{P})} + \vec{P}\wedge\overrightarrow{CD} = -mg\overrightarrow{y_1}\wedge\overrightarrow{CD}$ (5)

$\overrightarrow{M_D(\vec{P})} = \overrightarrow{M_B(\vec{T})} + \vec{T}\wedge\overrightarrow{BD} = -T\vec{V}\wedge\overrightarrow{BD}$ (6)

$\overrightarrow{M_D(\vec{R})} = \overrightarrow{m_D}$

(5) => $\overrightarrow{M_D(\vec{P})} = -mg\|\overrightarrow{y_1}\| * \|\overrightarrow{CD}\|\sin(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{CD})\overrightarrow{z_1}$

(6) => $\overrightarrow{M_D(\vec{T})} = -T\|\vec{V}\| * \|\overrightarrow{BD}\|\sin(\vec{V},\overrightarrow{BD})\overrightarrow{z_1}$



$\vec{u} = cos\frac{\pi}{3}\overrightarrow{x_1} + sin\frac{\pi}{3}y_1' = \frac{1}{2}\overrightarrow{x_1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{y_1}$

EBD est un triangle isocèle en D

=> $2\beta + \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \pi$; $2\beta = \frac{\pi}{3}$ => $\beta = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

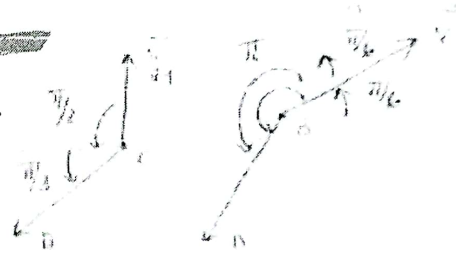
ou $\beta = \left(\frac{\pi}{6} + \pi\right)[2\pi]$ Or β est un angle aigu => $\beta = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

Finalement $\vec{V} = cos\beta\overrightarrow{x_1} + sin\beta\overrightarrow{y_1}'$

$= cos\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{x_1} + sin\frac{1}{2}\overrightarrow{y_1}$

$(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$; $\sin(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}$

$(\vec{V},\overrightarrow{BD}) = \pi + \frac{\pi}{6}$ => $\sin(\vec{V},\overrightarrow{BD}) = -1/2$



$$\begin{cases} -mg\overrightarrow{y_1} - T\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{x_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{y_1}\right) + \vec{R} = \vec{0} & (7) \\ -2mg\overrightarrow{z_1} + T\frac{7}{2}\overrightarrow{z_1} + \overrightarrow{m_D} = \vec{0} & (8) \\ \overrightarrow{m_D}.\overrightarrow{z_1} = 0 & (9) \end{cases}$$

Projection dans la base $(\overrightarrow{x_1};\overrightarrow{y_1};\overrightarrow{z_1})$ (7)

$$(7) => \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}T + \vec{R}.\overrightarrow{x_1} = 0 & (10) \\ -mg - \frac{1}{2}T + \vec{R}.\overrightarrow{y_1} = 0 & (11) \\ \vec{R}.\overrightarrow{z_1} = 0 & (12) \end{cases}$$

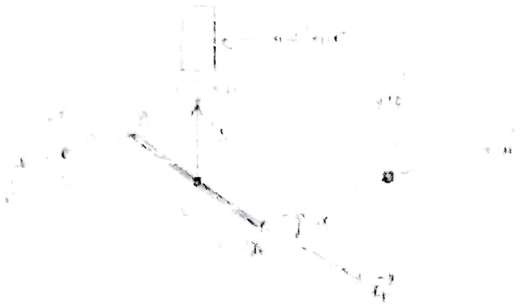
VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

$$(8)\ et\ (9) => \begin{cases} \overrightarrow{m_D}.\overrightarrow{x_1} = 0 \quad (13) \\ \overrightarrow{m_D}.\overrightarrow{y_1} = 0 \quad (14) \\ \overrightarrow{m_D}.\overrightarrow{z_1} = 0 \\ -mg + \frac{7}{2}T + \overrightarrow{m_D}.\overrightarrow{z_1} = 0 \quad (15) \end{cases}$$

$(15) => T = \frac{4}{7}mg$; $(10) => \vec{R}.\overrightarrow{x_1} = \frac{2\sqrt{3}}{7}mg$ et $(11) => \vec{R}.\overrightarrow{y_1} = \frac{9}{7}mg$

EXERCICE 3



$R_0(0;\overrightarrow{x_0};\overrightarrow{y_0};\overrightarrow{z_0})$ un repere OND lié à $(\mathcal{R})$ galiléen ; $R_0(0;\overrightarrow{e_r};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_z})$ repère OND lié à (AB)

1-) Les articulations en A et B sont bloquées $\alpha = cte$ et $\beta = cte$

Déterminons $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ dans $(\overrightarrow{e_r};\overrightarrow{e_0};\overrightarrow{e_z})$ en fonction de L, α et β

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = L\overrightarrow{e_r} + L\vec{u}$ | $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ} = -L\overrightarrow{e_r} + L\vec{v}$

$\vec{u} = cos\alpha\overrightarrow{e_r} + sin\alpha\overrightarrow{e_\theta}$ | $\vec{v} = -cos\beta\overrightarrow{e_r} - sin\beta\overrightarrow{e_\theta}$

$\overrightarrow{OP} = L(1+cos\alpha)\overrightarrow{e_r} + Lsin\alpha\overrightarrow{e_\theta}$ | $\overrightarrow{OQ} = -L(1+cos\beta)\overrightarrow{e_r} - Lsin\beta\overrightarrow{e_\theta}$

b) Calculons $\vec{V}(P/R_0)$ et $\vec{V}(Q/R_0)$ dans R

$\vec{V}(P/R_0) = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}/R_0 = L(1+cos\alpha)\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}/R_0 + Lsin\alpha\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}/R_0$

Or $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}/R_0 = \vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\overrightarrow{e_r} = \omega\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{e_r} = \omega\overrightarrow{e_\theta}$ et $\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}/R_0 = \vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\overrightarrow{e_\theta} = \omega\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{e_\theta} = -\omega\overrightarrow{e_r}$

Finalement $\boxed{\vec{V}(P/R_0) = -L\omega sin\alpha\overrightarrow{e_r} + L\omega(1+cos\alpha)\overrightarrow{e_\theta}}$

De même $\boxed{\vec{V}(Q/R_0) = L\omega sin\beta\overrightarrow{e_r} - L\omega(1+cos\beta)\overrightarrow{e_\theta}}$

C) Quantité de mouvement $\vec{P}$ de (S_1)

$\vec{P} = m\vec{V}(P/R_0) + m\vec{V}(Q/R_0)$; $\boxed{\vec{P} = mL\omega[(sin\beta - sin\alpha)\overrightarrow{e_r} + (cos\alpha - cos\beta)\overrightarrow{e_\theta}]}$

d-) Exprimons le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_0}$ de (S_1) en 0.

Le moment cinétique de (S_1) se calcule en sommant les cinétiques des deux masses :

$\overrightarrow{\sigma_0} = \overrightarrow{OP}\wedge m\vec{V}(P/R_0) + \overrightarrow{OQ}\wedge m\vec{V}(Q/R_0)$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$\overrightarrow{OP}\wedge\vec{V}(P/R_0)=\begin{pmatrix}L(1+cos\alpha)\\ Lsin\alpha\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-L\omega sin\alpha\\ L\omega(1+cos\alpha)\\ 0\end{pmatrix}=L^2\omega[(1+cos\alpha)^2+sin^2\alpha]\overrightarrow{e_z}$$

$$=4L^2\omega cos^2\frac{\alpha}{2}\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{OQ}\wedge\vec{V}(Q/R_0)=\begin{pmatrix}-(L+cos\beta)\\ -Lsin\beta\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}L\omega sin\beta\\ -L\omega(1+cos\beta)\\ 0\end{pmatrix}=L^2\omega[(1+cos\beta)^2+sin^2\beta]\overrightarrow{e_z}$$

$$=4L^2\omega cos^2\frac{\beta}{2}\overrightarrow{e_z}$$

Il vient que $\overrightarrow{\sigma_0}=4mL^2\omega(cos^2\frac{\alpha}{2}+cos^2\frac{\beta}{2})\overrightarrow{e_z}$

2-) Les articulations sont à présent débloquées (α *et* β *ne sont pas des contantes*)

a-) Exprimons $\vec{P}$ en fonction de $L, m, \omega, \alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$

$$\vec{V}(P/R_0)=-L\omega sin\alpha\overrightarrow{e_r}+L\omega(1+cos\alpha)\overrightarrow{e_\theta}+L\dot{\alpha}(-sin\alpha\overrightarrow{e_r}+cos\alpha\overrightarrow{e_\theta})$$

$$\vec{V}(Q/R_0)=L\omega sin\beta\overrightarrow{e_r}-L\omega(1+cos\beta)\overrightarrow{e_\theta}+L\dot{\beta}(sin\beta\overrightarrow{e_r}-cos\beta\overrightarrow{e_\theta})$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{P}=mL\omega[(sin\beta-sin\alpha)\overrightarrow{e_r}+(cos\alpha-cos\beta)\overrightarrow{e_\theta}]\\&+mL\left[(-\dot{\alpha}sin\alpha+\dot{\beta}sin\beta)\overrightarrow{e_r}+(\dot{\alpha}cos\alpha-\dot{\beta}\cos\beta)\overrightarrow{e_\theta}\right]\end{aligned}}$$

b-) Moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_0}$

$$\overrightarrow{\sigma_0}=4mL^2\omega\left(cos^2\frac{\alpha}{2}+cos^2\frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{e_z}+mL^2[\dot{\alpha}(1+cos\alpha)+\dot{\beta}(1+cos\beta)]\overrightarrow{e_z}$$

C-) Vérifions que l'on retrouve la 1-d) lorsque $\alpha = cte$ *et* $\beta = cte$

$$\alpha = cte \Rightarrow \dot{\alpha}=0$$

$$et\ \beta = cte \Rightarrow \dot{\beta}=0$$

D'où $\overrightarrow{\sigma_0}=4mL^2\omega\left(cos^2\frac{\alpha}{2}+cos^2\frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{e_z}$

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

ELEMENTS DE CORRECTION

MECANIQUE DES SYSTEMES 2EME SESSION 2021-2022

EXERCICE 1 (5 points)

1- Le point O a pour coordonnés : $O = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{V(O)} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}}$.

2- Equiprojectivité, on utilise les points O et M ;

$$\text{tq} \cdot \overrightarrow{V(O)}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{V(M)}\overrightarrow{OM} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3y-tz\\2tz-3x\\2+tx-t^2y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 0 \; ou \; t = 2.$

Le champ $\overrightarrow{V(M)}$ est équiprojectif pour $t = 0 \; ou \; t = 2$: $\overrightarrow{V(M)}$ est un torseur pour ces valeurs de t.

3- Pour $t = 0$, on a $\vec{R}(t=0) = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$;

Pour $t = 2$, on a $\vec{R}(t=2) = \begin{pmatrix}-4\\-2\\-3\end{pmatrix}$;

4- Soit les deux torseurs associés à $t = 0$: $[\Im_0]$ et à $t = 2$: $[\Im_2]$;
Calculons pour les deux valeurs l'invariant scalaire :

$$I_0 = \vec{V}(O).\vec{R}(t=0) = -6 \neq 0$$

$$I_2 = \vec{V}(O).\vec{R}(t=2) = -10 \neq 0$$

Donc les deux torseurs sont quelconques (ni glisseur ni couple) chacun peut cependant etre décomposé en la somme d'un glisseur et d'un couple :

$$[\Im_0] = [\vec{V}(O), \vec{R}(t=0)] = [\vec{V}(O), 0] + [0, \vec{R}(t=0)]$$

De meme : $[\Im_2] = [\vec{V}(O), \vec{R}(t=2)] = [\vec{V}(O), 0] + [0, \vec{R}(t=2)]$

Donc : $\begin{cases}\text{Couples} : \vec{C}(M) = \vec{V}(O) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \; \forall M \\ \text{Glisseurs} : \vec{G}(M) = \vec{0} + \vec{R}(t) \wedge \overrightarrow{OM}\end{cases}$.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

5- Soit $P \in$ à l'axe central du torseur, la positionde P par rapport à O est donnée par :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R}(t) \wedge \overrightarrow{V(M)}}{R^2} + \lambda \vec{R} \text{ avec } \lambda \in R$$

Pour $\lambda = 0$, $\overrightarrow{OP_0} = \frac{\vec{R}(t) \wedge \overrightarrow{V(0)}}{R^2}$,

Donc pour t = 0, $\vec{R}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{V(O)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, on obtient alors : $\overrightarrow{OP_0} = -\frac{1}{3}\vec{j}$

L'axe central pour t = 0, passe par P_0 et parralèle à $\vec{R}(t=0) \Rightarrow$ parralèle à $\vec{k}$.

de la meme façon on obtient l'axe central pour t = 2 :

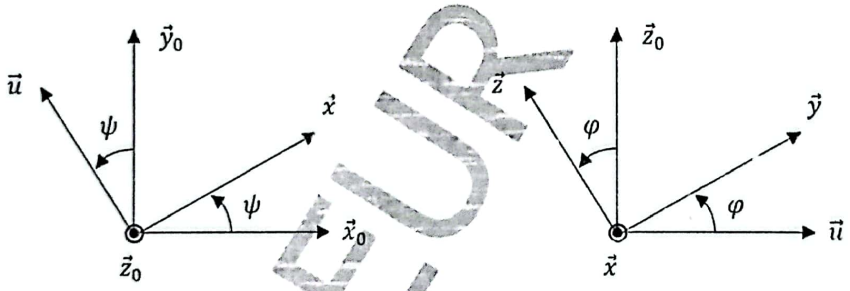
L'axe central pour t = 0, passe par $P_0 = \begin{pmatrix} -4/29 \\ -5/29 \\ 2/29 \end{pmatrix}$ et parralèle à $\vec{R}(t=2) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2 (9 points)

1) Calculer $\vec{\Omega}(T/\mathcal{R}_0)$ par ses composantes dans la base de $\mathcal{R}$.

$\vec{x}$ et $\vec{z}_0$ vecteurs unitaires et orthogonaux $\longrightarrow (\vec{x}, \vec{u}, \vec{z}_0)$ où $\vec{u} = \vec{z}_0 \wedge \vec{x}$

On a $\mathcal{R}_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, $\mathcal{R}(C; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et posons $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}, \vec{u}, \vec{z}_0)$



$$\vec{\Omega}(T/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$$

$$\vec{\Omega}(T/\mathcal{R}_0) = \dot{\varphi}\vec{x} + \dot{\psi}\vec{z}_0$$

Ainsi dans la base de $\mathcal{R}$, on obtient

$$\vec{\Omega}(T/\mathcal{R}_0) = \dot{\varphi}\vec{x} + \dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{y} + \dot{\psi}\cos\varphi\,\vec{z}$$

2) Montrer que G a pour coordonnées dans $\mathcal{R}$; $\left(0, 0, -\frac{a}{3}\right)$.

(T) est une plaque plane triangulaire homogène donnée par $\left\{M\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} / y_{DB} \leq y \leq y_{DA}, -a \leq z \leq 0\right\}$,

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

m sa masse et G son centre de masse. Soit σ_0 sa densité surfacique égale à une constant.

On note x, y, z les coordonnées cartésiennes relativement au repère OND $\mathcal{R}(C;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

(CD) est un axe de symétrie matérielle de (T) $\Longrightarrow$ $G \in (CD) \equiv O\vec{z}$ donc $x_G = y_G = 0$.

On a :

$$mz_G = \int_{(T)} zdm$$

$A\begin{pmatrix}-a\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}-a\\0\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}(C;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Sur (AD) : $y = -(z+a)$

Sur (DB) : $y = (z+a)$

$$mz_G = \int_{(T)} zdm = \sigma_0 \int_{(T)} zdS$$

$$mz_G = \sigma_0 \int_{-a}^{0} z\left(\int_{-(z+a)}^{(z+a)} dy\right) dz$$

$$mz_G = \sigma_0 \int_{-a}^{0} z[y]_{-(z+a)}^{(z+a)} dz$$

$$mz_G = 2\sigma_0 \int_{-a}^{0} (z^2 + az)dz = 2\sigma_0 \left[\frac{z^3}{3} + a\frac{z^2}{2}\right]_{-a}^{0}$$

$$z_G = \frac{\sigma_0 a^3}{m\ 3}$$

On sait également que $m = \sigma_0 S$ avec $S = \frac{CD \times AB}{2} = a^2$

D'ou

$$m = \sigma_0 a^2 \Longleftrightarrow \frac{\sigma_0}{m} = \frac{1}{a^2}$$

Finalement,

$$z_G = -\frac{a}{3}$$

3) Montrer que $(C;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est un repère principal d'inertie de (T) et déterminer l'opérateur d'inertie $\Pi_C(T)$ en C de (T).

$C\vec{z}$ est axe de symétrie matérielle de (T) $\Longrightarrow$ $\vec{z}$ direction principale d'inertie de (T) en C

$C\vec{y}\vec{z}$ plan de symétrie matérielle de (T) $\Longrightarrow$ $\vec{x}$ direction principale d'inertie de (T) en C

$\vec{x}$ et $\vec{z}$ étant linéairement indépendants $\Longrightarrow$ $\vec{y} = \vec{z} \wedge \vec{x}$ est aussi direction principale d'inertie de (T) en C.

Conclusion : $(C;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est un repère principal d'inertie de (T).

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$[\Pi_C(T)]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{bmatrix} I_{C\vec{x}}(T) & 0 & 0 \\ 0 & I_{C\vec{y}}(T) & 0 \\ 0 & 0 & I_{C\vec{z}}(T) \end{bmatrix}$$

Avec

$$I_{C\vec{x}}(T) = I_{C\vec{y}}(T) + I_{C\vec{z}}(T)$$

Car (T) plan, $\vec{x} \perp (T)$, $C \in (T)$ et $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ othonormé.

$$I_{C\vec{y}}(T) = \int_{(T)} z^2 dm = \sigma_0 \int_{-a}^{0} z^2 \left(\int_{-(z+a)}^{(z+a)} dy \right) dz$$

$$I_{C\vec{y}}(T) = 2\sigma_0 \int_{-a}^{0} z^2 (z+a) dz$$

$$I_{C\vec{y}}(T) = 2\sigma_0 \left[\frac{z^4}{4} + a\frac{z^3}{3} \right]_{-a}^{0} = \frac{\rho a^4}{6}$$

$$I_{C\vec{y}}(T) = \frac{ma^2}{6}$$

$$I_{C\vec{z}}(T) = \int_{(T)} y^2 dm = \sigma_0 \int_{-a}^{0} \left(\int_{-(z+a)}^{(z+a)} y^2 dy \right) dz$$

$$I_{C\vec{z}}(T) = \sigma_0 \int_{-a}^{0} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-(z+a)}^{(z+a)} dz = \frac{2\sigma_0}{3} \int_{-a}^{0} (z+a)^3 dz = \frac{\sigma_0 a^4}{6}$$

$$I_{C\vec{y}}(T) = \frac{ma^2}{6}$$

$$I_{C\vec{x}}(T) = \frac{ma^2}{6} + \frac{ma^2}{6} = \frac{ma^2}{3}$$

$$[\Pi_C(T)]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \frac{ma^2}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

4) Déterminer l'opérateur d'inertie $\Pi_C(G,m)$ au point C du centre de masse G. En déduire l'opérateur d'inertie $\Pi_G(T)$ au point G.

On sait que

$$\overrightarrow{CG} = z_G\vec{z} = -\frac{a}{3}\vec{z}$$

entraine que

$$[\Pi_C(G,m)]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = m\begin{bmatrix} z_G^2 & 0 & 0 \\ 0 & z_G^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{ma^2}{9}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'après le théorème de Kœnigs, on a :

$$\Pi_C(T) = \Pi_G(T) + \Pi_C(G,m)$$

Et donc

$$\Pi_G(T) = \Pi_C(T) - \Pi_C(G,m)$$

$$\Pi_G(T) = \frac{ma^2}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{ma^2}{9}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_G(T) = \frac{ma^2}{18}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5) Calculer les moments cinétiques $\vec{\sigma}(G,T/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{\sigma}(O,T/\mathcal{R}_0)$.

$$\vec{\sigma}(G,T/\mathcal{R}_0) = \Pi_G(T)\vec{\Omega}(T/\mathcal{R}_0)$$

$$\vec{\sigma}(G,T/\mathcal{R}_0) = \frac{ma^2}{18}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi}\sin\varphi \\ \dot{\psi}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}(G,T/\mathcal{R}_0) = \frac{2ma^2}{9}\dot{\varphi}\vec{x} + \frac{ma^2}{18}\dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{y} + \frac{ma^2}{6}\dot{\psi}\cos\varphi\,\vec{z}$$

grâce à $\vec{\sigma}(G,T/\mathcal{R}_0)$ on en déduit $\vec{\sigma}(O,T/\mathcal{R}_0)$,

$$\vec{\sigma}(O,T/\mathcal{R}_0) = \vec{\sigma}(G,T/\mathcal{R}_0) + m\vec{V}(G/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{GO}$$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Avec

$$\vec{V}(G/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} \quad et \quad \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} = l\vec{x} + z_G\vec{z}$$

$$\vec{V}(G/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = l\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + z_G\left(\frac{d\vec{z}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0}$$

$$\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{x} = \dot{\psi}\vec{u}$$

$$\left(\frac{d\vec{z}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{z} = -\dot{\phi}\vec{y} + \dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{x}$$

$$\vec{V}(G/\mathcal{R}_0) = l\dot{\psi}\vec{u} + z_G(-\dot{\phi}\vec{y} + \dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{x})$$

Expression dans une base

$$\vec{u} = \cos\varphi\,\vec{y} - \sin\varphi\,\vec{z}$$

$$\vec{V}(G/\mathcal{R}_0) = z_G\dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{x} + (l\dot{\psi}\cos\varphi - \dot{\phi}z_G)\vec{y} - l\dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{z}$$

$$\vec{V}(G/\mathcal{R}_0) = -\frac{a}{3}\dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{x} + \left(l\dot{\psi}\cos\varphi + \dot{\phi}\frac{a}{3}\right)\vec{y} - l\dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{z}$$

On en déduit

$$\vec{\sigma}(O,T/\mathcal{R}_0) = \frac{2ma^2}{9}\dot{\phi}\vec{x} + \frac{ma^2}{18}\dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{y} + \frac{ma^2}{6}\dot{\psi}\cos\varphi\,\vec{z}$$
$$+ m\left[-\frac{a}{3}\dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{x} + \left(l\dot{\psi}\cos\varphi + \dot{\phi}\frac{a}{3}\right)\vec{y} - l\dot{\psi}\sin\varphi\right] \wedge \left[-(l\vec{x} + z_G\vec{z})\right]$$

$$\vec{\sigma}(O,T/\mathcal{R}_0) = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{3}\dot{\phi} + \frac{mla}{3}\dot{\psi}\cos\varphi \\ \left(ml^2 + \frac{ma^2}{6}\right)\dot{\psi}\sin\varphi \\ \frac{mla}{3}\dot{\phi} + \left(ml^2 + \frac{ma^2}{6}\right)\dot{\psi}\cos\varphi \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 3 (9 points)

1

L'énoncé indique une hypothèse de roulement sans glissement du cylindre de rayon R_1, ainsi que la nature inextensible du fil. Il faut prendre en compte ces deux hypothèses pour établir les relations entre variables cinématiques.

La vitesse du point I_1 appartenant au cylindre de rayon R_1 et en contact avec le plan incliné à un instant t est donnée par la formule de Varignon : $\vec{v}(I_1) = \vec{v}(G) + \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{GI_1}$.

soit : $$\boxed{\vec{v}(I_1) = \left(\frac{dx}{dt} + R_1\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{e}_x}$$

Le plan incliné étant fixe et le cylindre roulant sans glisser sur ce plan, la vitesse précédente doit être nulle, d'où une première relation entre variables cinématiques :

$$(1)\ \boxed{\frac{dx}{dt} + R_1\frac{d\theta}{dt} = 0}$$

Le fil étant inextensible, on doit vérifier la relation (attention, l'axe z' est dirigé vers le bas) :

$$\boxed{\frac{dz'}{dt} = -\vec{v}(I_2)\cdot\vec{e}_x}$$

Cependant : $$\vec{v}(I_2) = \vec{v}(G) + \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{GI_2}$$

soit : $$\vec{v}(I_2) = \left(\frac{dx}{dt} + R_2\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{e}_x$$

d'où : $$\frac{dz'}{dt} + \frac{dx}{dt} + R_2\frac{d\theta}{dt} = 0$$

Combinée avec la premiere relation cinématique, l'équation précédente conduit à :

$$(2)\ \boxed{\frac{dz'}{dt} + \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{dx}{dt} = 0}$$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

2

On étudie séparément les deux sous-systèmes, masse m et solide sur le plan incliné. Les tensions du fil sont donc des actions extérieures.

Le solide en mouvement sur le plan incliné est soumis aux actions extérieures suivantes :
- poids, appliqué en G et de résultante $M\vec{g} = Mg(\sin\alpha\vec{e}_x - \cos\alpha\vec{e}_y)$;
- actions de contact appliquées au point de contact I_1 et de résultante $T\vec{e}_x + N\vec{e}_y$;
- tension exercée par le fil $-F_1\vec{e}_x$.

La masse m est soumise aux actions extérieures suivantes :
- poids, appliqué en G' et de résultante $m\vec{g} = mg\vec{e}_{z'}$;
- tension exercée par le fil $-F_2\vec{e}_{z'}$.

3

Le théorème de la résultante cinétique nous indique que la dérivée par rapport au temps de la résultante cinétique est égale à la résultante des actions extérieures.

Le solide a pour résultante cinétique $M\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x$. Le théorème de la résultante cinétique projeté respectivement sur (Ox) et sur (Oy) conduit donc à :

$$(3)\quad \boxed{M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = Mg\sin\alpha + T - F_1}$$

$$(4)\quad \boxed{0 = -Mg\cos\alpha + N}$$

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

De même, le théorème de la résultante dynamique appliqué à la masse m et projeté sur (Oz') conduit à :

$$(5)\ \boxed{m\frac{\mathrm{d}^2 z'}{\mathrm{d}t^2} = mg - F_2}$$

Il y a trois inconnues cinématiques (x, z', θ) et quatre inconnues dynamiques (N, T, F_1 et F_2). On dispose de deux relations cinématiques et trois équations dynamiques scalaires, soit au total 5 equations pour 7 inconnues. Il n'y a donc pas assez d'équations pour déterminer le mouvement du système.

L'hypothèse de poulie parfaite et sans masse n'a pas été utilisée jusqu'à présent. La poulie est soumise aux actions du fil $F_1\vec{e}_x$ et $F_2\vec{e}_{z'}$, de moment par rapport à l'axe de la poulie respectivement $-F_1 r$ et $F_2 r$, où r désigne le rayon de la poulie, et aux actions d'axe de moment nul car la poulie est supposée parfaite. On en déduit :

$$(6)\ \boxed{F_1 = F_2}$$

On a donc finalement 6 équations pour 7 inconnues. Il manque encore une équation.

4

Le théorème du moment cinétique peut être appliqué au centre d'inertie d'un système, même si ce point est mobile.

Le moment cinétique du cylindre en G est $J_G\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z$. Déterminons le moment des actions extérieures exercées sur le solide :

– le poids, appliqué en G, a un moment nul en G ;

– les actions de contact appliquées au point de contact I_1 ont pour moment en G : $R_1 T\vec{e}_z$;

– la tension exercée par le fil $-F_1\vec{e}_x$ au point de contact I_2 a pour moment en G : $-R_2 F_1\vec{e}_z$.

Le théorème du moment cinétique appliquée en G conduit donc à :

$$\boxed{J_G\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = R_1 T - R_2 F_1}$$

Cette équation peut être réécrite en fonction de x :

$$(7)\ \boxed{-\frac{J_G}{R_1}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = R_1 T - R_2 F_1}$$

Il s'agit de déterminer F_1 et T en fonction de l'accélération de G. Les équations (5) et (6) conduisent à :

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

$$\boxed{F_1 = mg - m\frac{d^2z'}{dt^2}}$$

soit, d'après l'équation (2) : $F_1 = mg + m\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{d^2x}{dt^2}$

L'équation (3) et l'expression précédente conduisent à :

$$T = M\frac{d^2x}{dt^2} - Mg\sin\alpha + mg + m\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{d^2x}{dt^2}$$

On reporte les expressions de F_1 et T dans l'équation (7), d'où l'équation du mouvement du centre d'inertie du solide (S) sur le plan incliné :

$$\boxed{\left(MR_1 + \frac{J_G}{R_1} + m\frac{(R_1 - R_2)^2}{R_1}\right)\frac{d^2x}{dt^2} = MgR_1\sin\alpha - mg(R_1 - R_2)}$$

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

Correction de l'examen de mécanique des systèmes

Session 1 Année académique **2022-2023**

Exercice 1

Soient δ_R(le cylindre de rayon R) et δ_r (cylindre de rayon r)

1) Calculons la vitesse $\vec{v}\ (G_1\ /R)$
   Après le PFCS on a : $\vec{v}\ (G_1\ /R)=\vec{v}\ (O\ /R)+\vec{\Omega}(OG_1/R)\wedge\overrightarrow{OG_1}$
   Or $\overrightarrow{OG_1}=(R-r)\overrightarrow{e_x}$ et $\vec{v}\ (O\ /R)=\vec{0}$ car O est fixe
   Etant compte du mouvement du cylindre de centre $\vec{\Omega}(OG_1/R)=\dot{\varphi}\overrightarrow{e_z}$
   $\vec{v}\ (G_1\ /R)=(R-r)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_y}$
2) En déduire $\vec{v}(I\ /R)$ et $\vec{v}(H\ /R)$
   Appliquons le PFCS
   $\vec{v}(I\ /R)=\vec{v}\ (G_1\ /R)+\vec{\Omega}(G_1I/R)\wedge\overrightarrow{G_1I}$ avec $\vec{\Omega}(G_1I/R)=\dot{\phi}\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{G_1I}=r\overrightarrow{e_x}$

   D'où $\vec{v}(I\ /R)=[(R-r)\dot{\varphi}+r\dot{\phi}]\overrightarrow{e_y}$

   $\vec{v}(H\ /R)=\vec{v}\ (G_1\ /R)+\vec{\Omega}(G_1H/R)\wedge\overrightarrow{G_1H}$ avec $\vec{\Omega}(G_1H/R)=\dot{\phi}\overrightarrow{e_z}$ et
   $\overrightarrow{G_1H}=-r\overrightarrow{e_x}$
   $\vec{v}(H\ /R)=[(R-r)\dot{\varphi}-r\dot{\phi}]\overrightarrow{e_y}$

3) Condition de rouler sans glisser en I
   La vitesse de glissement est notée : $\vec{v}_g(I,\delta_r/\delta_R)$
   $\vec{v}_g(I,\delta_r/\delta_R)=\vec{v}(I\epsilon\delta_r\ /R)-\vec{v}(I\epsilon\delta_R\ /R)$

   Or $\vec{v}(I\epsilon\delta_R\ /R)=\vec{0}$ et $\vec{v}(I\epsilon\delta_r\ /R)=\vec{v}(I\ /R)$

   Rouler sans glisser $\Rightarrow\vec{v}_g(I,\delta_r/\delta_R)=\vec{0}$

   Alors $\vec{v}(I\ /R)=[(R-r)\dot{\varphi}+r\dot{\phi}]\overrightarrow{e_y}=\vec{0}$

   $\Rightarrow(R-r)\dot{\varphi}=-r\dot{\phi}$

4) Exprimons $\vec{v}(H\ /R)$ en fonction de $\vec{v}(G_1\ /R)$
   On sait que $\vec{v}(H\ /R)=[(R-r)\dot{\varphi}-r\dot{\phi}]\overrightarrow{e_y}$ or d'après 3) $(R-r)\dot{\varphi}=-r\dot{\phi}$
   Par conséquent $\vec{v}(H\ /R)=[(R-r)\dot{\varphi}+(R-r)\dot{\varphi}]\overrightarrow{e_y}$

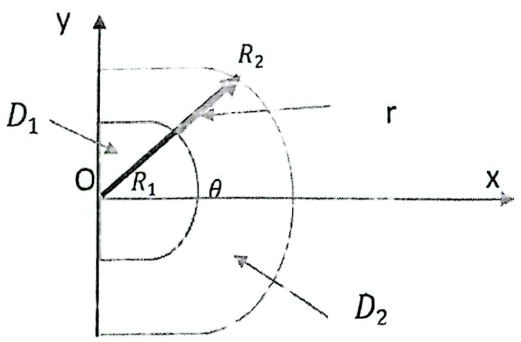
   $\vec{v}(H\ /R)=2(R-r)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_y}=2\vec{v}(G_1\ /R)$

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

Exercice 2

Schéma



En projetant dans la base polaire on aboutit à $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = 0 \end{cases}$

$R_1 \leq r \leq R_2$ et $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

1) Calcul de la position du centre d'inertie G_2
   - ✓ $(O\vec{x})$ est un axe de symétrie matérielle
   - ✓ Tout plan contenant cet axe est un plan de symétrie matérielle
   - ✓ $(O, \vec{x}, \vec{y})$ un plan de symétrie matérielle, $G \in (O\vec{x})$ lors $y_{G_2} = 0$ et $z_{G_2} = 0$

   $ds = rdrd\theta$

   On a : $dm = \sigma ds$ et le disque D_2 étant homogène $m = \sigma s$

   En appliquant la formule du cours on obtient : $x_{G_2} = \frac{1}{m}\int_{(S)} x dm$

   $x_{G_2} = \frac{1}{m}\int_{(S)} x dm = \frac{1}{\sigma s}\int_{(S)} x\,\sigma ds \Rightarrow x_{G_2} = \frac{1}{s}\int_{(S)} x\, ds$

Or $s = \int_{(S)} rdrd\theta = \int_{R_1}^{R_2} rdr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta$

$s = \frac{\pi}{2}({R_2}^2 - {R_1}^2)$

$x_{G_2} = \frac{2}{\pi({R_2}^2 - {R_1}^2)}\int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\, d\theta$

$x_{G_2} = \frac{4}{3\pi}\frac{({R_2}^3 - {R_1}^3)}{({R_2}^2 - {R_1}^2)}$

2) Calcul des moments d'inertie I_{O_x} et I_{O_y}
   - ❖ Pour I_{O_x}

$I_{O_x} = \int_{(S)}(y^2 + z^2)\, dm = \int_{(S)} y^2\, dm$

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

$$I_{O_{xx}} = \sigma \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\, d\theta = \frac{m}{4}\frac{({R_2}^4 - {R_1}^4)}{({R_2}^2 - {R_1}^2)}$$

$$I_{O_{xx}} = \frac{m}{4}\frac{({R_2}^4 - {R_1}^4)}{({R_2}^2 - {R_1}^2)}$$

❖ Pour I_{O_y}

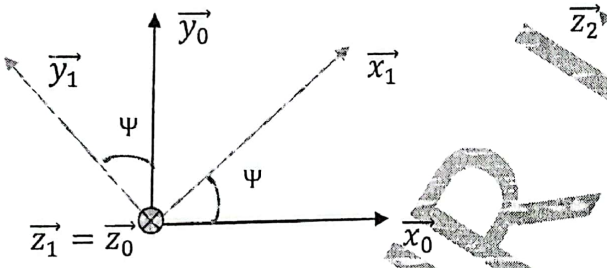
$$I_{O_{yy}} = \sigma \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\, d\theta$$

Or $\sigma = \frac{m}{s} = \frac{m}{\frac{\pi}{2}({R_2}^2 - {R_1}^2)}$

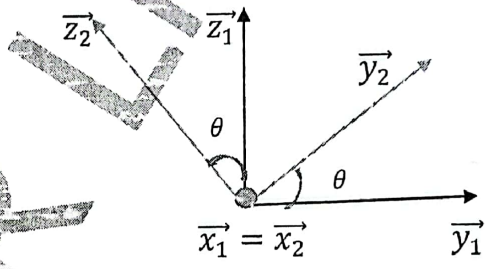
En remplaçant σ dans I_{O_x} on obtient : $I_{O_y} = \frac{m}{4}\frac{({R_2}^4 - {R_1}^4)}{({R_2}^2 - {R_1}^2)}$

Problème

Schémas de projection



$\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi}\overrightarrow{z_0}$



$\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \dot{\theta}\overrightarrow{x_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{x_1}$

1) Détermination du vecteur vitesse de rotation instantanée $\vec{\Omega}(S/R_0)$

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi}\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}\overrightarrow{x_2}$$

Or $\overrightarrow{z_0} = \cos(\theta)\overrightarrow{z_2} + \sin(\theta)\overrightarrow{y_2}$

$$\Rightarrow \vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}(\cos(\theta)\overrightarrow{z_2} + \sin(\theta)\overrightarrow{y_2}) + \dot{\theta}\overrightarrow{x_2}$$

2) Calcul de $\vec{v}(G/R_0)$

❖ Première méthode (dérivation du vecteur position $\overrightarrow{OG}$)

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2G}$$

$$\overrightarrow{OG} = L\overrightarrow{x_2} + a\overrightarrow{y_2}$$

$$\vec{v}(G/R_0) = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = L\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt} + a\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}$$

En appliquant la formule de Varignon, on a :

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{x_2} \text{ et } \left.\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{y_2}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right|_{R_0} = [\dot{\psi}(\cos(\theta)\overrightarrow{z_2} + \sin(\theta)\overrightarrow{y_2}) + \dot{\theta}\overrightarrow{x_2}]\wedge\overrightarrow{x_2}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right|_{R_0} = -\dot{\psi}\sin(\theta)\overrightarrow{z_2} + \dot{\psi}\cos(\theta)\overrightarrow{y_2}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right|_{R_0} = [\dot{\psi}(\cos(\theta)\overrightarrow{z_2} + \sin(\theta)\overrightarrow{y_2}) + \dot{\theta}\overrightarrow{x_2}]\wedge\overrightarrow{y_2}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right|_{R_0} = -\dot{\psi}\cos(\theta)\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}\overrightarrow{z_2}$$

$$\vec{v}(G/R_0) = -a\dot{\psi}\cos(\theta)\overrightarrow{x_2} + L\dot{\psi}\cos(\theta)\overrightarrow{y_2} + (a\dot{\theta} - -L\dot{\psi}\sin(\theta))\overrightarrow{z_2}$$

- ❖ 2e méthode (utilisation de la formule de la cinématique du solide)

$$\vec{v}(G/R_0) = \vec{v}(O/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{OG}$$

$$\vec{v}(G/R_0) = -a\dot{\psi}\cos(\theta)\overrightarrow{x_2} + L\dot{\psi}\cos(\theta)\overrightarrow{y_2} + (a\dot{\theta} - L\dot{\psi}\sin(\theta))\overrightarrow{z_2}$$

3) Déduisons-en $\vec{v}(O_2/R_0)$

Après le PFCS

$$\vec{v}(O_2/R_0) = \vec{v}(G/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GO_2}$$

or $\overrightarrow{GO_2} = -a\overrightarrow{y_2}$

Après calcul on obtient $\vec{v}(O_2/R_0) = L\dot{\psi}\cos(\theta)\overrightarrow{y_2} - L\dot{\psi}\sin(\theta)\overrightarrow{z_2}$

4) Montrons

- Les axes (G, $\overrightarrow{x_2}$) et (G, $\overrightarrow{y_2}$) sont des axes de symetrie matérielle, d'où les axes principaux d'inerties.
- $\overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{y_2}$ linéairement indépendants, par conséquent $\overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{x_2}\wedge\overrightarrow{y_2}$ est aussi axe principal d'inertie en G .
- A=B et C=2A
- (G, $\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}$) un repère principal d'inertie $\Rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$

5) Déterminons A et C

$P \in (p)$ alors $P(x, y, o)_{R_2}$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$A = \int_{P\in(p)} y^2\, dm = \sigma \int_{P\in(p)} y^2\, dxdy$$

$$A = \sigma \int_{-a}^{a} y^2 dy \int_{-a}^{a} dx$$

$$A = \sigma \frac{4}{3} a^4 \text{ et } s = \int_{-a}^{a} dy \int_{-a}^{a} dx = 4a^2$$

La plaque étant homogène $m = \sigma s$ et $\sigma = \frac{m}{4a^2}$

$$A = \frac{ma^2}{3}$$

$$B = \frac{ma^2}{3}$$

$$C = \frac{2ma^2}{3}$$

$$J(G,P) = \frac{ma^2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6) En déduire $J(O_2, P)$

En utilisant la formule de Huygens généralisé

$$J(O_2,P) = J(G,P) + J(O_2,\{G,m\})$$

On a $\overrightarrow{O_2G} = a\overrightarrow{y_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ dans R_2 d'où $J(O_2,\{G,m\}) = m\begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$

$$J(O_2,P) = \frac{ma^2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$J(O_2,P) = ma^2\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$J(O_2,P) = \frac{ma^2}{3}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

7) Calculons $\vec{\sigma}$(G/S) puis $\vec{\delta}$(G/S)

T est de masse négligeable et S est un solide indéformable

$\vec{\sigma}$(G/S)= $\vec{\sigma}$(P/S)= $J(G,P)\cdot\vec{\Omega}(S/R_0)$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

$$\vec{\sigma}(G/S)=\frac{ma^2}{3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\psi}\sin(\theta)\\ \dot{\psi}\cos(\theta)\end{Bmatrix}$$

$$\vec{\sigma}(G/S)=\frac{ma^2}{3}[\dot{\theta}\overrightarrow{x_2}+\dot{\psi}\sin(\theta)\overrightarrow{y_2}+2\dot{\psi}\cos(\theta)\overrightarrow{z_2}]$$

$$\vec{\delta}(G/S)=\left[\frac{d\vec{\sigma}(G/S)}{dt}\right]_{R_2}+\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\vec{\sigma}(G/S)$$

Après calcul on obtient :

$$\vec{\delta}(G/S)=\frac{ma^2}{3}[(\ddot{\theta}+\dot{\psi}^2\sin(\theta)\cos(\theta))\overrightarrow{x_2}+\ddot{\psi}\sin(\theta)\overrightarrow{y_2}+(2\ddot{\psi}\cos(\theta)+2\dot{\theta}\dot{\psi}\sin(\theta))\overrightarrow{z_2}]$$

8) Calcul de l'énergie cinétique $T(S/R)$

$$T(S/R)=\frac{m\vec{v}^2(G/R_0)}{2}+\frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0)^T\cdot J(G,P)\cdot\vec{\Omega}(S/R_0)$$

Après calcul on a :

$$T(S/R)=\frac{m}{2}\left[\frac{4a^2}{3}\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2-\left(\frac{a^2}{3}+\frac{4a^2}{3}\cos^2(\theta)+L^2\right)-aL\ddot{\theta}-2\dot{\theta}L\dot{\psi}\sin(\theta)\right]$$

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

UFR MI Licence 2 2019-2020
Programmation Python
Examen session 1 durée : 1 h 30

Exercice 1 : culture générale

1. Compléter la phrase en choisissant un mot (compilé, interprété, machine, binaire). Python est un langage .....
2. Donner le rôle des modules Python : Numpy, SciPy
3. Donner un exemple de code Python correspondant aux structures de données suivantes : dictionnaires, ensembles, listes
4. Ecrire un code python permettant de calculer la puissance entière d'un réel.
5. Remplir le tableau ci-dessous

Instructions	Code Python	Instructions	Code Python
Comment accède-t-on à la 3e lettre d'une chaîne de caractères ?		Quelle instruction en Python permet d'obtenir la liste des entiers divisibles par 3 compris entre 5 et 111 compris ?	
Comment demande-t-on à l'utilisateur d'entrer une chaine de caractères ?		Comment accède-t-on en Python à l'avant dernier élement d'une liste (sans utiliser l'instruction len) ?	
Comment effectue-t-on la concaténation de deux chaînes de caractères ?		Quel opérateur en Python permet d'obtenir le reste de la division euclidienne ?	

Exercice 2 : Python

```
ALGORITHME test ;
VAR b, i, N : ENTIER ,
cumul. REEL;
DEBUT
ECRIRE(' Algorithme  tester licence 2 en info');
b←10; (* initialisation *)
cumul←20;
ECRIRE('Saisir un nombre entier N');
LIRE(N) ;
POUR i←1 JUSQUA N FAIRE
 DEBUT
 cumul←cumul+(b*i);
 b←b-1;
 FIN;
 ECRIRE(' cumul = ', cumul);
ECRIRE(' b= ', b);
FINPOUR
 ECRIRE('Fin du traitement');
FIN.
```

1. Ecrire un programme qui permet de saisir un nombre puis déterminer s'il appartient à un intervalle donné, sachant que les extrémités de l'intervalle sont fixées par l'utilisateur.
2. Ecrire un programme qui demande deux nombres à l'utilisateur et l'informe ensuite si leur produit est négatif ou positif. Attention toutefois on ne doit pas calculer le produit des deux nombres.
3. Soit l'algorithme ci-contre. Si **N=3**, donner les résultats de l'exécution du programme tels qu'ils apparaissent exactement à l'écran.
4. Modifier cet algorithme en introduisant un test qui affiche une erreur si l'utilisateur saisi **N** négatif
5. Transformer la boucle pour en une boucle **tant que**
6. Traduire cet algorithme en python

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

EXAMEN 2020-2021 SESSION1

Exercice 1 :

Algorithme : Tribulle(T)

Données : un tableau T de nombres
Résultats : le tableau T trie en ordre croissant

```
Pour i=len(T)-1 à 1 décroissant faire
    Pour j=0 à i-1 faire
        Si T[j]>T[j+1] alors
            Echange (Tjj+1) ;
```

Soit l'algorithme ci-contre.
1. Ecrire une fonction **TriBulle** en python.
2. Transformer la boucle **pour** en **tant que** en python dans **TriBulles.**
3. Echange dans l'algorithme est une fonction. Ecrire en python la fonction **Echange** qui permet de permuter deux éléments.
4. Dans un programme principal manipuler un tableau de 6 entiers.

Exercice 2

2.1

```
a=9
b=a-1
a=b-8
a=a*7
if (a < 8)
        print (« bonjour », a)
else
        print (« au revoir »,  b)
```

Un élève a écrit et exécuté le programme python ci-dessus :
Justifier avec soin la réponse obtenue en traçant ce code (cad donner le résultat obtenu après exécution.)

2.2

```
a ← 5

Saisir (a)      où n est entier

Saisir (x)      où x est flottant

Afficher (« Bonjour »)

Afficher ()
```

Traduire l'algorithme ci-dessus en python.
Modifier votre code pour que l'utilisateur puisse continuer ou no en répondant à la question voulez-vous continuez ?

Exercice 3

1. Donner le rôle des bibliothèques numpy, scipy et matplolib puis ecrire le code pour tracer la fonction **2x+1** sur l'intervalle [-3, +3].
2. Ecrire un module appeler ufrmi contenant une fonction somme, différence, division et multiplication de 2 réels. Utiliser le module ufrmi pour réaliser une calculette (+ ; * ; - ;/) en python.
3. Ecrire un code python permettant de saisir le mot de passe **lic2mi** sachant que l'utilisateur n'a que trois essais.
4. Ecrire un programme python permettant de calculer la **combinaison** d'un nombre p dans un nombre n en utilisant une fonction **factoriel** itérative.
5. Réécrire la fonction **factoriel** de façon récursive.
6. On suppose qu'un **contact** est décrit par **téléphone** et **nom**. Modéliser la structure de données contact en python puis écrire un code permettant de saisir 5 contacts et de les afficher.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

EXAMEN 2020-2021 SESSION 2

Consignes générales : pas de documents, calculatrices, téléphone, et internet. Merci de bien numéroter les intercalaires.

Exercice 1 : Donner les valeurs des variables A, B, C et l'affichage à l'écran des algorithmes suivants :

```
Algorithme algo1 :
Variable A, B, C, D : entier
Début
  A ←10 ;
  B← 3 ;
  TantQue (A> B) Faire
    Si (A div B=B) Alors
      B← A mod B ;
      A ← A mod B ;
    Finsi
    Si (B-A=B+A) Alors
      C ← 10*B mod B+2 ;
      D ← C+(B-A) ;
    FinSi
  FinTantQue
  Ecrire(D+C-(B+A))
Fin
```

```
Algorithme algo2 :
Variable A, B, C, D : entier
Début
  A ←5 ;
  B← 10 ;
  Pour B allant de 1 à 2 Faire
    Si (D-A = D div 2) Alors
      A← A * 2-D /2 ;
      C ← D mod 3 div 2 ;
      D ← D /2 div A ;
    Sinon
      A ← A-D ;
      C ← A div 2 ;
      Ecrire(A-C-D*2) ;
    FinSi
  FinPour
Fin.
```

```
Algorithme algo3 :
Variable A, B, C, D : entier
Début
  A ←10 ;
  B← 1 ;
  C← 8 ;
  Répéter
    Si (B> 2) ou (A< 9) Alors
      C← (B+A) mod 5 ;
    Sinon
      D ← B+A div 3 ;
    Finsi
    A ← A-2 ;
    B ← B+1 ;
  Jusqu'à(A=C) et (B=D) ;
  Ecrire(A) ;
Fin.
```

Exercice2 :

```
Algorithme exo3 ;
Variable a, b, i, P : entier ;
Début
   Lire (a, b) ; i ←2 ; P←1 ;
   Tantque(i≤b) faire
      Si (a mod i = 0) et (b mod i = 0) alors
          P←i ;
       FinSi ;
        i← i+1 ;
   FinTantque
   Ecrire(P) ;
Fin
```

Utiliser l'algorithme ci-contre

1. Que fait cet algorithme ?
2. Tracer cet algorithme pour a =12 et b=8
3. Traduire cet algorithme en python.
4. Reprendre le code python obtenue et remplacer la boucle tant que par la boucle pour.
5. Modifier votre code python pour que l'utilisateur ne saisisse que des entiers positifs
6. Modifier votre code python pour que l'utilisateur réponde à la question voulez-vous continuez.
7. Modifier votre code sous forme de fonction.

Exercice 3 :

1. Ecrire un programme affichant les 10 premiers nombres pairs.
2. Donner le code python permettant de trier un tableau de réels par ordre croissant, d'afficher le plus grand élément et de rechercher un nombre donné.
3. Donner les bibliothèques nécessaires pour les utilisations suivantes : tracer de courbes, utiliser des formules mathématiques.
4. Donner un exemple de code pour tracer la courbe cosinus(x).
5. Donner un exemple de code pour faire le produit de 2 matrices carres d'ordre2.
6. Ecrire en python deux fonctions puissances (cad x ') l une itérative et l'autre récursive. Tracer ces deux fonctions pour 2^5 et dites celle qui semble plus rapide en termes d'exécution.
7. Soit un nom de longueur 10. Ecrire un algorithme permettant de renverser le nom (par exemple **abcdef** donne **fedcba**).

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

Licence 2
Année : 2021- 2022 Semestre 1
Examen Langage Python de durée : 1 h 30

Exercice 1 : Culture langage Python

1. Donner le rôle des bibliothèques numpy, scipy et matplotlib
2. Un programmeur écrit un algorithme relatif à la fonction factoriel en 2 versions en utilisant le pour, le tant que. Réaliser ces deux versions de la fonction factoriel en Python.
3. Donner une signification à chacun des codes suivants ; Après avoir reproduit le tableau ci-dessous, le remplir

On donne s=['lundi' , 'mardi' , 230 , 'dimanche']

Commande	Affichage	Commande	Affichage
s[0 :4 :2]		s.append('samedi')	
del(s[2])		for pair in range(100,110,2): print(pair)	
s+['jeudi','vendredi']		thisset = {"apple", "banana", "cherry"} print(thisset) print(len(thisset))	

Exercice 2

Soit l'algorithme suivant :

variables : x, n, puiss des entiers positifs;

afficher("entrer x") ; lire(x) ;

afficher("entrer n") ; lire(n) ;

initialiser puiss à 1

Initiatliser i à 1

tant que i inférieur ou égal à n faire

debut

puiss recoit puiss*x ;

incrémenter i ;

fin

afficher les valeurs de x, n et x puissance n

1. Tracer cet algorithme pour x=2 et n= 3
2. Traduire cet algorithme en langage Python
3. Se servir la question 2 pour transformer la boucle while en boucle for
4. En Python, modifier le programme qui utilise une fonction puissance itérative avec les paramètres x et n
5. Modifier la fonction puissance itérative en fonction récursive
6. Modifier le code Python, prenant en compte le cas d'erreur lors de saisie de mauvaises valeurs de x et de n.
7. En Python, écrire un code remplissant un tableau T de 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 et d'afficher en renversant le tableau (plus grande valeur à la plus petite)
8. Donner un code Python pour résoudre ax+b= 0, a et b sont des réels

Exercice 3

3.1

```
a = 9
b = a+1
a = b-3
a = a*7
if (a>8) :
    print("bonjour", a)
else :
    print("au revoir", b)
```

Un élève a écrit et exécuté le programme Python ci-dessus ;
Justifier avec soin la réponse obtenue en traçant ce code (cad donner le résultat obtenu après exécution

3.2

```
a ← 5
Saisir (n)        où n est entier
Saisir (x)        où x est flottant
Afficher("Bonjour")
Afficher(x)
```

Traduire l'algorithme ci-dessus en python
Modifier votre code pour que l'utilisateur puisque continuer ou non en répondant à la question voulez- vous continuez ?

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

Licence 2
Examen final (Deuxième session) 1h30
Initiation à Python
Année : 2021-2022

EXERCICE I

Algorithme9 : triBulle(T)
Données : Le tableau T de nombre
Résultats : Le tableau T trie en ordre croissant

```
procedure tri_bulles(T)
 N ← taille de T
  pour i de N − 1 à 1 faire
    pour j de 0 à i − 1 faire
      si T[j] > T[j + 1] alors
        échanger T[j] et T[j + 1]
      fin si
    fin pour
  fin pour
fin procedure
```

1- Quelle est la différence entre une procédure et une fonction
2- Réécrire la procédure tri bulle en python
3- Transformer la boucle pour en tant que en python dans la procédure
4- Echange dans l'algorithme est une fonction. Ecrire en python la fonction Echange qui permet de permuter deux éléments
5- Dans un programme principal manipuler un tableau de 6 entiers

EXERCICE II

1- Ecrire un code python permettant de :
   • Lire un nombre fini de notes comprises entre 0 et 20.
   • Afficher la meilleure note, la mauvaise note et la moyenne de toutes les notes.
2- Dans un programme python, utiliser le module cercle et on demandera à l'utilisateur de donner le rayon et on affichera la circonférence et l'aire.

VALIDEUR 2024

Scanné avec CamScanner

entier a, b écrire "Introduisez le 1er nombre: " lire a écrire "Introduisez le 2ème nombre: " lire b tant que NOT (a*b=0) faire si a>b alors a <-- a-b sinon b <-- b-a fsi ftant si a=0 alors écrire "PGCD = ", b sinon écrire "PGCD = ", a fsi	3-1 Que fait l'algorithme dans la colonne de gauche ? 3-2 Traduire l'algorithme en python 3-3 Retracer l'algorithme pour a =32 et b= 14

EXERCICE III

1- Donner le rôle des bibliotheques numpy, scipy et matplotlib puis écrire le code pour tracer la fonction 2x+1 sur l'intervalle [-3 ;+3]
2- Écrire un programme Python permettant de calculer la combinaison d'un nombre p dans un nombre n en utilisant une fonction factorielle
3- Ecrire un code python permettant de réaliser une calculette avec les quatre opérations de base. On utilisera l'instruction (switch...case....) pour permettre à l'utilisateur de faire le choix de son opération
4- On considère un tableau de 10 étudiants (matricule, nom et moyenne). Écrire un code python permettant de les saisir puis de les afficher par ordre alphabétique
5- Les nombres de Catalan sont un autre exemple de définition récursive basée non seulement sur la valeur de la fonction à n−1 et C(0). Ils sont définis ainsi: C(0) =1 et $C_n = \sum_{i=0}^{n} C(i) * C(n-i)$.

Ecrivez le code python des nombres de catalan sous la forme défini ci-dessus

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Licence 2
Examen Algorithmique et Programmation Python
Semestre 1 Session 1 1h 30 2022 - 2023

Exercice 1 : Culture sur python

1. Remplir le tableau ci-dessous

Instructions	Code Python	Instructions	Code Python
Comment accède-t-on à la 3è lettre d'une chaîne de caractères ?		lister des entiers divisibles par 3 compris entre 5 et 111 compris ?	
Quel opérateur en Python permet d'obtenir le reste de la division euclidienne ?		Comment accède-t-on en Python à l'avant dernier élément d'une liste (sans utiliser l'instruction len) ?	

2. Donner le rôle des modules Python : Numpy, SciPy
3. Donner un exemple de code Python correspondant aux structures de données suivantes : dictionnaires, tuples, listes
4. Une année est bissextile si son millésime est divisible par 4 et non divisible par 100, sauf s'il est divisible par 400 : 1900 n'est pas bissextile, 2000 l'est, 2001 ne l'est pas, 2004 l'est. Ecrivez un code Python qui, étant donné le millésime d'une année, affiche si cette année est bissextile ou non.

Exercice 2 : Algorithmique et Python

```
Algorithme 9: TriBulle(T)
Données : Un tableau T de nombres
Résultat : Le tableau T trié en ordre croissant
pour i=len(T)-1 à 1 decroissant faire
    pour j=0 à i-1 faire
        si T[j] > T[j+1] alors
            Echange(T,j,j+1);
```

Soit l'algorithme ci-contre.
1. Ecrire une fonction **TriBbulle** en python
2. Transfomer la boucle **pour** en **tant que** en python dans **TriBulles**
2. Echange dans l'algorithme est une fonction. Ecrire en python la fonction **Echange** qui permet de permuter deux éléments
3. Dans un programme principal manipuler un tableau de 6 entiers

Exercice 3 : Python

```
def Recherche_dicho_iterative(tab, x):
    debut, fin = 0, len(tab)
    while debut <= fin:

        milieu = (debut + fin)//2
        if tab[milieu] == x:
            return milieu

        elif tab[milieu] < x:
            debut = milieu + 1

        else:
            fin = milieu - 1
    # l'element n'existe pas
    return -1
```

On considère la fonction Recherche_dicho_iterative ci-contre prenant en paramètre que des tableaux triés

1. Expliquer le principe de la recherche dichotomique

On donne le tableau tab= [2, 7, 8, 20, 25, 30, 33, 39, 45, 50]

2. Tracer cette fonction en utilisant tab et l'élément 8 à rechercher dans ce tableau
3. Dans un programme principal, demander à l'utilisateur de saisir un élément à rechercher dans le tableau et à afficher le résultat de la recherche
4. Ecrire la fonction Recherche_dicho_recursive qui est la version récursive de la fonction Recherche_dicho_iterative

On donne tab1=[8, 7, 50, 2, 25, 30, 33, 39, 20, 45,]

5. Donner un code python permettant de trier Tab1 en tableau trié Tab

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

CORRECTION Programmation Python Licence 2 2019 - 2020

Exercice 1 : culture générale

1. **Réponse** : Python est un langage **interprété.**
2. **Réponse** : - Numpy : est un module Python qui est utilise pour les calculs numériques sous Python.
   - SciPy : est un module Python utilisé pour les calculs scientifiques.
3. **Réponse** : - dictionnaire : nom_dictionnaire = {"voiture : 4", "vélo : 2"}
   - ensembles : dic = {1, 3, 5, 7}
   - listes : liste = [ ] #Une liste vide.
4. **Réponse** :

```
#coding : utf-8
x = float(input("Entrez un nombre réel :"))
n = int(input("Entrez un nombre entier : "))
while (n < 0):
    n = int(input("ATTENTION : ERREUR vous devez entrer un nombre entier positif :"))
puiss = 1
i = 1
while (i <= n):
    puiss *= x
    i += 1
print("la valeur de ", x , " à la puissance ", n , " est : ", puiss)
```

5. Remplir le tableau ci-dessous.

Instructions	Code Python	Instructions	Code Python

Comment accède-t-on à la 3e lettre d'une chaîne ?	chaine[2]	Quelle instruction en Python permet d'obtenir la liste des entiers divisibles par 3 compris entre 5 et 111 compris ?	for i in range(5, 112):
			if (i % 3 == 0):
			print(i)

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Comment demande-t-on à l'utilisateur d'entrer une chaîne de caractère ?	chaine = input("Entrez une chaîne : ") ou chaine = string(input("Entrer une chaine : "))	Comment accède-t-on en python à l'avant dernier élément d'une liste (sans utiliser l'instruction len)	liste[-2]
Comment effectue-t-on la concaténation de deux chaînes de caractères ?	chaine = chaine1 + chaine2	Quel opérateur en Python permet d'obtenir le reste de la division euclidienne ?	% (le modulo)

Exercice 2 : Python

1. **Réponse :**

```
#coding : utf-8
inf = int(input("Entrer la borne inférieure de l'intervalle : "))
sup = int(input("Entrer la borne supérieure de l'intervalle : "))
nombre = int(input("Entrer un nombre pour vérifier s'il appartient à l'intervalle : "))
if ((nombre > inf) and (nombre < sup)):
    print("Le nombre ", nombre , "appartient à l'intervalle.")
else:
    print("Le nombre ", nombre , "n' appartient à l'intervalle.")
```

2. **Réponse :**

```
#coding : utf-8
a = int(input("Entrer le premier nombre : "))
b = int(input("Entrer le deuxième nombre : "))
if ((a < 0) or (b < 0)):
    print("Le produit est de ", a , " par ", b , " est négatif ")
else:
    print("Le produit est de ", a , " par ", b , " est positif ")
```

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

```
ALGORITHME test;
VAR b, i, N : ENTIER;
cumul: REEL;
DEBUT
ECRIRE('Algorithme tester licence 2 en info');
b- 10; (*initialisation*)
cumul- 20;
ECRIRE('Saisir un nombre entier N');
LIRE(N);
POUR i - 1 JUSQUA N FAIRE
  DEBUT
    cumul- cumul+(b*i);
    b- b-1;
  FIN;
 ECRIRE('cumul =', cumul);
ECRIRE('b =', b);
FINPOUR
 ECRIRE('Fin du traitement');
FIN.
```

3. Soit l'algorithme ci-contre. Si **N=3**, donner les résultats de l'exécution du programme tels qu'ils apparaissent exactement à l'écran.

Réponse :

Algorithme tester licence 2 en info

Saisir un nombre entier N

3

cumul = 30

b = 9

cumul = 48

b = 8

cumul = 72

b = 7

Fin du traitement

4. Réponse :

```
ALGORITHME test;
VAR b, i, N : ENTIER;
cumul: REEL;
DEBUT
ECRIRE('Algorithme tester
licence 2 en info');
b- 10; (*initialisation*)
cumul- 20;
ECRIRE('Saisir un nombre entier
N');
LIRE(N);
TANT QUE (N < 0) FAIRE
  ERCIRE("ATTENTION :
ERREUR vous devez saisir un
nombre positif");
  LIRE(N);
FINTANTQUE
POUR i - 1 JUSQUA N FAIRE
  DEBUT
    cumul- cumul+(b*i);
    b- b-1;
  FIN;
 ECRIRE('cumul =', cumul);
ECRIRE('b =', b);
FINPOUR
 ECRIRE('Fin du traitement');
FIN.
```

5. Transformer la boucle **POUR** en une boucle **TANT QUE**

Réponse :

```
ALGORITHME test;
VAR b, i, N : ENTIER;
cumul: REEL;
DEBUT
ECRIRE('Algorithme tester
licence 2 en info');
b- 10; (*initialisation*)
cumul- 20;
ECRIRE('Saisir un nombre entier
N');
LIRE(N);
i - 1;
TANT QUE (i <= N) FAIRE
  DEBUT
```

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

```
    cumul← cumul+(b*i);
    b← b-1;
  i ← i + 1;
  FIN;
  ECRIRE('cumul =', cumul);
 ECRIRE('b =', b);
FINPOUR
 ECRIRE('Fin du traitement');
FIN.
```

6. Traduit cet algorithme en python.

Réponse :

```
#coding : utf-8
print('Algorithme tester licence 2 en info')
b = 10 #initialisation
cumul = 20
N = int(input('Saisir un nombre entier N'))
for i in range(1, N+1):
    cumul = cumul + ( b * i )
    b = b - 1
    print('cumul =', cumul')
    print('b =', b')
print('Fin du traitement')
```

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

SUJET PYTHON SESSION 1 LICENCE 2

Exercice 1

1.Ecrivons la fonction triBulle en python

```
def  TriBulle (T) :

        for i in range(len(T)-1,1,-1) :
                for j in range(0,i-1):
                        if T[j] > T[j+1] :
                                Echan=T[j]    #represente l'implementation de la fonction
echange.
                                T[j]=T[j+1]
                                T[j+1]=Echan
        return(T)
```

2.Transformons la boucle pour en tant que

```
def  TriBulle (T) :
        i=len(T)-1
        j=0
        while (i >=1):
                while(j <= i-1):
                        if  (T[j] > T[j+1]) :
                                Echan=T[j]
                                T[j]=T[j+1]
                                T[j+1]=Echan
                        j=j+1
                i=i-1

        return(T)
```

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

3.Ecriture de la fonction echange

```
def Echange(T,k,k+1):

    Echan=T[k]
    T[k]=T[k+1]
    T[k+1]=Echan
     return (T) # Ici le tableau retourné sera le tableau T avec les elements
```

d'indice k et k+1 permuter.

4.Dans un programme principale manipulons un tableau de 6 entiers:

```
# saisie des elements du tableau

S=[]
for i in range(0,6):
    a=int(input('veuillez entrer l'élément svp : '))
    S.append(a) #cette fonction permet d'ajouter un element dans un tableau

#Appel de la fonction tribulle ecrite a la question 1)
TriBulle(S)
```

Exercice 2

2.1 Le resultat de l'execution est :

```
au revoir 10
```

2.2 Traduisons l'algorithme en python:

```
a=5
n=int(input('saisir n :'))
x=float(input('saisir x' :))
print('bonjour ')
print(n)
```

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

-Modification de l'algorithme

```
choix=int(input('voulez vous continuer tapez 1 pour oui et 0 pour non : '))
while (choix!=0):

    a=5
    n=int(input('saisir n :'))
    x=float(input('saisir x' :))
    print('bonjour ')
    print(n)
    choix=int(input('voulez vous continuer tapez 1 pour oui et 0 pour non : '))
```

Exercice 3

1)Voir cours

2) calculatrice

```
print('Calculatrice version etudiant math info')
a=int(input('entrer le premier nombre :'))
b=int(input('entrer le deuxieme nombre :'))
print ('quelle operation voulez vous faire ')
print ('1.addition ')
print ('2.soustraction ')
print ('3.multiplication ')
print ('4.division')
choix=int(input('faites votre choix :'))

if (choix==1):
    resultat=a+b
    print('la somme de ',a,'et',b,'donne',resultat)

elif (choix==2):

    resultat=a-b
    print(«'la difference de ',a,'et',b,'donne',resultat)
```

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

```
elif (choix==3):

        resultat=a*b
        print(«'le produit de ',a,'et',b,'donne',resultat)

else:

        if (b==0):
                print('ERREUR DIVISION PAR 0')
        else:
                resultat=a / b
                print('le quotient de ',a,'par',b,'donne',resultat)
```

3.mot de passe

```
password= 'lic2mi'
reponse= input('veuillez entrer le mot de passe svp :')

for i in range(1,4):

        if(reponse= ='password'):
                print('Mot de passe accepté')

        else:
                print('Mot de passe invalide')
                reponse= input('veuillez entrer le mot de passe svp :')


        if(i==3):
                print('nombre de tentative écoulé')
```

4.Combinaison avec factoriel iterative

```
        def factoriel (n):
                facto=1
                for i in range(1,m+1):
                        facto=facto*i
                return (facto)
        def  combinaison(p,n):
                comb=factoriel(n) / (factoriel(p) * factoriel (n-p))

                return (comb)
```

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

5.factoriel recursive

```
def factorielrecursif (m):

    if(m==0):
        facto=1

    else :

        facto=m*factorielrecursif(m-1)

    return (facto)
```

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

CORRECTION PYTHON 2021-2022 SESSION 1

```
#Examen Session 1 python
# Exercice 1

# 1) voir le cours
# 2) La fonction factoriel avec for et tant que:
# boucle for:
def factoriel(n):
    fact=1
    for i in range(1,n+1):
        fact=fact*i
    return fact
# boucle tant que :
def factorielle(n):
    fact=1
    i=1
    while (i<n+1):
        fact=fact*i
        i=i+1
    return fact
# 3)
s=["lundi","mardi",230,"dimanche"]
#a- s[0:4:2]
s[0:4:2]
# =>['lundi', 230] ce code liste les elements de
 la listes à partir de l'index 0 à 4 avec un pas de 2.
#b- del(s[2])
del(s[2])
# =>['lundi', 'mardi', 'dimanche'] ce code
supprime l'élement à l'index 2.
# c- s+["jeudi", "vendredi"]
s+["jeudi", "vendredi"]
# ce code donne
["lundi",230, "mardi", "dimanche","jeudi", "vendredi"]
# d- s.append('samedi')
s.append('samedi')
# => ['lundi', 'mardi', 'dimanche', 'samedi'] ce
code ajoute l'élement samedi à la fin de liste s
# e- for pair in range (100,110.2):
        #print(pair)
# 100
# 102
# 104
# 106
# 108
# ce code génère les nombres compris entre 100
et 110 avec un pas de 2
# f- thisset=["apple", "banana","cherry"]
thisset=["apple", "banana","cherry"]
print(thisset)
# ['apple', 'banana', 'cherry'] ce code affiche la
liste thisset
print(len(thisset))
# 3 ce code affiche la taille de la liste thisset
```

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

```
# Exercice 2
# 1) trace de l'algo pour x=2 et n=3 voir pages suiv
# A la 1ère itération: i=1,puiss=1,
# on obtient: puiss= 1*2=2, i=1+1=2

# A la 2e itération: i=2,puiss=2
# on obtient: puiss= 2*2=4, i=2+1=3
# A la 3e itération: i=3,puiss=4
# on obtient: puiss= 4*2=8, i=2+1=4
# on a i=4 >n=3, donn fin de boucle.
# on obtient la trace de cet algo :
# x=2, n=3, x puissance n est: 8
# 2) traduction en python
x=int(input("Entrer x :"))
n=int(input("Entrer n :"))
puiss=1
i=1
while (i<=n):
    puiss=puiss*x
    i=i+1
print("x=",x,", n=",n,"et x puissance n est :",puiss)
# 3) traduction de la boucle while en boucle for:
x=int(input("Entrer x :"))
n=int(input("Entrer n :"))
puiss=1
for i in range(1,n+1):
    puiss=puiss*x
print("x=",x,", n=",n,"et x puissance n est :",puiss)
# 4)
def puissance(x,n):
    puiss=1
    for i in range(1,n+1):
        puiss=puiss*x
    print("x=",x,", n=",n,"et x puissance n est
:",puiss)
# 5)
def puissance1(x,n):
    if (n==0):
        return 1
    if n%2==0:
        puiss=puissance1(x,n/2)
        return puiss*puiss
    else:
        return x*puissance1(x,n-1)
# 6)
def puissance(x,n):
    if(x<0 or n<0):
        return print("erreur sur la valeur de n ou
x")
    elif (n==0):
        return 1
    elif n%2==0:
        puiss=puissance(x,n/2)
        return puiss*puiss
    else:
        return x*puissance(x,n-1)
```

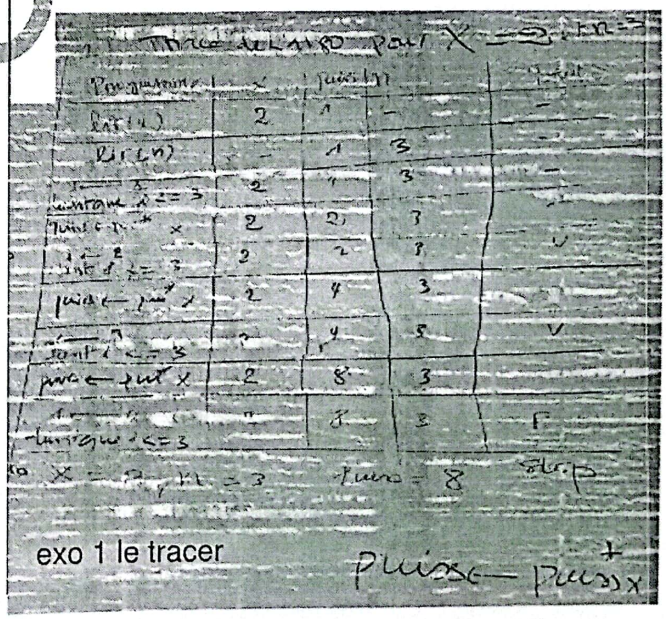
VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

```
# 7)
T=[puissance(2,k) for k in range(1,6)]
for i in range(0,5):
    print(T[4-i])
# 8)
#Resolution de l'équation ax+b=0
def equation():
    a=float(input("Donnez la valeur
    b=float(input("Donnez la valeur
    x=float
    if(a==0):
        x=b
    elif(b==0):
        x=0
    else:
        x=b/a
    print("La solution de cette équa
(",a,"X +",b,"=0)est: x =",x)

# Exercice 3
# 3.1)
a=9
b=a+1
a=b-8
a=a*7
if (a<8):
    print("bonjour",a)
else:
    print("au revoir ", b)
```

```
'''
Au depart: a=9, b=a+1=10,
ensuite on a: a=b-8=10-8=2
et on a: a=a*7=2*7=14
donc on termine avec la vaeur de a=14 et b=10
par conséquant, le resultat de la trace est : au revoir
10
'''
# 3.2) Traduction du code en python
for i in range(10):
    a=5
    n=int(input("Saisir n:"))
    x=float(input("Saisir x:"))
    print("Bonjour")
    print(n)
    reponse=input("Voulez-vous continuer?oui ou non
:")
    if reponse=="non":
        break
```



VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

CORRECTION SESSION 2 PYTHON 2021-2022

```
# Examen Session 2


# Exercice 1
# 1) La difference entre une procedure et une fonction:
# voir le cours
# 2) La procedure tri bulle en python
def tri_bulle(T):
    n=len(T)
    for i in range(n):
        for j in range(0,n-1):
            if(T[j]>T[j+1]):
                echanger(T[j],T[j+1])
#T[j],T[j+1]=T[j+1],T[j]
 #3) transformation de la boucle pour en tant que dans la procedure
def tri_bulle(T):
    n=len(T)
    i=0
    while i<n:
        j=0
        while j<n-1:
            if(T[j]>T[j+1]):
                #T[j],T[j+1]=T[j+1],T[j]
                T[j],T[j+1]= echanger(T[j],T[j+1])
            j=j+1
        i=i+1
    return T
#4) Ecriture de la fonction Echange
def echanger(a,b):
    a,b=b,a
    return a,b
```

VALIDEUR I MD-2024

Scanné avec CamScanner

```
#5) Le programme principal
Tab=[20,4,0,1,11,2]
print(tri_bulle(Tab))
# =>[0, 1, 2, 4, 11, 20]
# Exercice 2
# 1)Ecrivons un code python permettant de:
# lire un nombre fini de notes comprises entre 0 et 20:
def notes():
  notes=[]
  for i in range(5):
    note=float(input("Saisir la note : "))
    if(note<0 or note>20):
      print("Saisissez une note comprise entre 0 et 20")
    else:
      notes.append(note)
  return notes
# Afficher la meilleure note, la mauvaise note et la moyenne des notes
note=notes()
tri_bulle(note)
print("La meilleure note est: ",note[-1],"/20")
print("La mauvaise note est: ",note[0],"/20")
som=0
for i in note:
  som=som+i
moyenne=som/len(note)
print("La moyenne des notes est : ",moyenne,"/20")
```

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Examen CORRECTION SESSION 1 Programmation Python 2022-2023

Semestre 1 Session 1 2022-2023

Exercice 1 : culture sur python

1- Remplir le tableau :

a-

En Python, on peut accéder à la 3e lettre d'une chaîne de caractères en utilisant l'indexing. Les indices dans Python commencent à 0, donc pour accéder à la 3e lettre, vous devez utiliser l'index 2. Voici un exemple :

Code python

```
chaine = "Bonjour"

troisieme_lettre = chaine[2]

print(troisieme_lettre)  # Affiche 'n'
```

Explications :

Dans cet exemple, la variable `chaine` contient la chaîne de caractères « Bonjour ». En utilisant `chaine[2]`, nous accédons à la 3e lettre de la chaîne, qui est 'n'. Ensuite, nous imprimons cette lettre avec `print(troisieme_lettre)`.

b-

En Python, l'opérateur qui permet d'obtenir le reste de la division euclidienne est le symbole de pourcentage `%`. Cet opérateur est également connu sous le nom d'opérateur de modulo. Voici un exemple :

Code python

```
dividende = 10

diviseur = 3

reste = dividende % diviseur

print(reste)  # Affiche 1
```

Explications :

Dans cet exemple, nous utilisons l'opérateur `%` pour effectuer la division euclidienne de 10 par 3. Le résultat est le reste de la division, qui est 1. Nous stockons ce reste dans la variable `reste` et l'imprimons ensuite avec `print(reste)`.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

c-

Pour lister les entiers divisibles par 3 compris entre 5 et 111, vous pouvez utiliser une boucle for en combinant l'opérateur de modulo `%` pour vérifier la divisibilité par 3. Voici un exemple de code en Python :

Code python

```
for nombre in range(5, 112) :
  if nombre % 3 == 0 :
    print(nombre)
```

Explications :

Dans ce code, nous utilisons la boucle `for` avec `range(5, 112)` pour parcourir tous les nombres de 5 à 111 inclus. Ensuite, nous utilisons l'opérateur `%` pour vérifier si chaque nombre est divisible par 3. Si le reste de la division par 3 est égal à 0 (`nombre % 3 == 0`), cela signifie que le nombre est divisible par 3, donc nous l'imprimons avec `print(nombre)`.

d-

Pour accéder à l'avant-dernier élément d'une liste en Python sans utiliser l'instruction `len`, vous pouvez utiliser un index négatif. Voici un exemple :

Code python :

```
liste = [10, 20, 30, 40, 50]
avant_dernier = liste[-2]
print(avant_dernier)  # Affiche 40
```

Explications :

cet exemple, nous avons une liste `liste` contenant plusieurs éléments. En utilisant l'index `-2`, nous accédons à l'avant-dernier élément de la liste, qui est 40. Ensuite, nous imprimons cet élément avec `print(avant_dernier)`.

L'utilisation d'un index négatif dans une liste permet de parcourir les éléments en partant de la fin. L'index `-1` correspond donc au dernier élément, `-2` à l'avant-dernier élément, et ainsi de suite.

2- Donner le rôle des modules python : Numpy, scipy.

Les modules Python tels que NumPy et SciPy sont des bibliothèques spécialisées qui fournissent des fonctionnalités étendues pour effectuer des calculs scientifiques et numériques. Voici une brève explication du rôle de chaque module :

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

- NumPy (Numérique Python) : NumPy est une bibliothèque fondamentale pour les calculs scientifiques en Python. Son objectif principal est de prendre en charge les tableaux multidimensionnels (appelés « ndarrays ») et les opérations vectorisées. NumPy fournit des fonctions mathématiques et des opérations efficaces pour effectuer des calculs sur les tableaux, telles que l'algèbre linéaire, la transformation de Fourier, la génération de nombres aléatoires, etc. Il est largement utilisé dans les domaines scientifiques et d'analyse des données.
- SciPy (Scientific Python) : SciPy est une bibliothèque construite au-dessus de NumPy et fournit des fonctionnalités avancées pour les calculs scientifiques. Elle offre un ensemble de modules spécialisés qui permettent de résoudre des problèmes spécifiques dans divers domaines tels que l'optimisation, l'algèbre linéaire, l'interpolation, les statistiques, le traitement du signal, l'intégration numérique, etc. SciPy est souvent utilisé en conjonction avec NumPy pour des tâches scientifiques et d'ingénierie plus avancees.

En résumé, NumPy fournit les bases pour les calculs numériques et les opérations sur les tableaux multidimensionnels, tandis que SciPy étend ces fonctionnalités avec des modules spécialisés pour les domaines scientifiques et techniques spécifiques.

3- Donner un exemple de code python correspondant aux structures de données suivantes :

Dictionnaire, tuples, listes

Voici un exemple de code Python illustrant les structures de données suivantes : dictionnaire, tuple et liste.

- **Dictionnaire** :

Un dictionnaire est une structure de données qui associe des clés à des valeurs. Voici un exemple de dictionnaire qui stocke des informations sur une personne :

Code python

```
personne = {
  " nom " : " Doe ",
  " prénom " : " John ",
  " âge " : 30,
  " ville " : " Paris "
}
# Accéder à une valeur spécifique
print(personne[" nom "])  # Affiche " Doe "
# Parcourir les clés et les valeurs du dictionnaire
for cle, valeur in personne.items() :
  print(cle, " : ", valeur)
```

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner

- **Tuple** :

Un tuple est une séquence immuable d'éléments. Voici un exemple de tuple qui stocke les coordonnées d'un point :

Code python

```
point = (3, 5)

# Accéder aux éléments du tuple

x = point[0]

y = point[1]

print(" Coordonnées : ", x, y)
```

- **Liste :**

Une liste est une séquence mutable d'éléments. Voici un exemple de liste qui contient des noms de fruits :

Code python

```
fruits = [" pomme ", " banane ", " orange "]

# Accéder à un élément de la liste

print(fruits[0])  # Affiche " pomme "

# Modifier un élément de la liste

fruits[1] = " kiwi "

print(fruits)  # Affiche [" pomme ", " kiwi ", " orange "]

# Parcourir les éléments de la liste

for fruit in fruits :

  print(fruit)
```

Explications:

Ces exemples illustrent comment utiliser les structures de données en Python. Vous pouvez les adapter selon vos besoins spécifiques.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

4- Une année est bissextile si son millésime est divisible par 4 et non divisible par 100, sauf s'il est divisible par 400 : 1900 n'est pas bissextile, 2000 l'est, 2001 ne l'est pas, 2004 l'est. Ecrivez un code python qui, étant donné le millésime d'une année, Affiche si cette année est bissextile ou non

Voici un exemple de code Python qui détermine si une année donnée est bissextile ou non, en suivant les règles mentionnées :

Code python

```
def est_bissextile(annee) :
  if annee % 4 == 0 and (annee % 100 != 0 or annee % 400 == 0) :
    return true
  else :
    return false

# Demande à l'utilisateur d'entrer une année
annee_utilisateur = int(input(" Entrez une année : " ))

# Vérifie si l'année est bissextile et affiche le résultat
If est_bissextile(annee_utilisateur) :
  print(annee_utilisateur, " est une année bissextile. ")
else :
  print(annee_utilisateur, " n'est pas une année bissextile. ")
```

Explications:

Dans ce code, la fonction `est_bissextile()` prend en argument une année et applique les conditions pour déterminer si elle est bissextile ou non. Si l'année satisfait ces conditions, la fonction retourne `True`, sinon elle retourne `False`.

Ensuite, le code demande à l'utilisateur d'entrer une année en utilisant la fonction `input()`. La valeur entrée est convertie en entier à l'aide de `int()`.

Enfin, le code utilise la fonction `est_bissextile()` pour vérifier si l'année est bissextile ou non, puis affiche le résultat correspondant.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Exercice 2 : Algorithmique et Python

1-

Voici une fonction en Python qui implémente l'algorithme de tri à bulles (TriBulle) :

code python

```
def triBulle(T) :
  n = len(T)
  for i in range(n-1, 0, -1) :
    for j in range(i) :
      if T[j] > T[j+1] :
        T[j], T[j+1] = T[j+1], T[j]

# Exemple d'utilisation :
t = [4, 2, 7, 1, 5]
triBulle(t)
print(t)  # Affiche [1, 2, 4, 5, 7]
```

Explications :

La fonction `TriBulle` prend en paramètre un tableau `T` de nombres et trie ce tableau en ordre croissant. L'algorithme itère sur le tableau en comparant les éléments adjacents et en les échangeant si nécessaire. La boucle externe `for` va de la fin du tableau jusqu'à l'indice 1, tandis que la boucle interne `for` parcourt le tableau de l'indice 0 à `i-1`. Si un élément est plus grand que son élément suivant, ils sont échangés à l'aide de l'opération `T[j], T[j+1] = T[j+1], T[j]`.

Dans l'exemple donné, le tableau `[4, 2, 7, 1, 5]` est trié à l'aide de la fonction `TriBulle`, et le résultat `[1, 2, 4, 5, 7]` est affiché.

2-

Pour transformer la boucle « pour » en Python dans la fonction TriBulle, vous pouvez utiliser une boucle « while » avec une condition de terminaison basée sur la variable « i ». Voici la fonction TriBulle modifiée :

Code python

```
def triBulle(T) :
  n = len(T)
  i = n - 1
  while i >= 1 :
```

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

```
    j = 0
    while j < i :
      if T[j] > T[j+1] :
        T[j], T[j+1] = T[j+1], T[j]
      j += 1
    i -= 1

# Exemple d'utilisation :
t = [4, 2, 7, 1, 5]
triBulle(t)
print(t)  # Affiche [1, 2, 4, 5, 7]
```

Explications :

Dans cette version, la boucle externe « pour » a été remplacée par une boucle « while » qui se poursuit tant que la condition `i >= 1` est vérifiée. À chaque itération, la boucle interne « pour » est remplacée par une boucle « while » qui parcourt le tableau tant que la condition `j < i` est vérifiée. Une fois que la boucle interne « while » est terminée, la variable « i » est décrémentée de 1 pour passer à l'élément précédent du tableau.

L'exemple d'utilisation reste le même et donne le même résultat `[1, 2, 4, 5, 7]`.

3-

Voici la fonction `Échange` en Python qui permet de permuter deux éléments d'un tableau :

Code python

```
def echange(a, b) :
  temp = a
  a= b
  b = temp
```

Explications:

Cette fonction prend deux paramètres `a` et `b` correspondant aux éléments à permuter. Elle utilise une variable temporaire `temp` pour stocker la valeur de `a` avant d'effectuer l'échange. Les valeurs de `a` et `b` sont ensuite échangées en utilisant des affectations simples.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Cependant, il est important de noter que Python utilise des références lors de la transmission d'arguments. Dans le cas de variables immuables comme des entiers, la fonction `Échange` n'aura aucun effet observable en dehors de sa portée. Pour permuter les éléments d'un tableau à l'extérieur de la fonction, vous devez utiliser les indices du tableau pour effectuer l'échange. Par exemple :

Code python

```
def echange(T, i, j) :
    temp = T[i]
    T[i] = T[j]
    T[j] = temp
```

Explications:

Dans cette version de la fonction `Échange`, le tableau `T` est passé en tant qu'argument, ainsi que les indices `i` et `j` correspondant aux éléments à permuter. Les éléments du tableau sont échangés en utilisant les indices fournis. Cette fonction permet de permuter les éléments du tableau effectivement.

4-

Voici un exemple de programme principal en Python qui manipule un tableau de 6 entiers en utilisant les fonctions `TriBulle` et `Échange` pour trier le tableau :

Code python

```
def echange(T, i, j) :
    temp = T[i]
    T[i] = T[j]
    T[j] = temp

def triBulle(T) :
    n = len(T)
    for i in range(n-1, 0, -1) :
        for j in range(i) :
            if T[j] > T[j+1] :
                echange(T, j, j+1)

# Programme principal
t = [5, 2, 8, 1, 4, 3]
```

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

```
print(" Tableau initial : ", t)

triBulle(t)

print(" Tableau trié : ", t)
```

Explications :

Dans ce programme, nous avons défini les fonctions `Échange` et `TriBulle` comme nous l'avons discuté précédemment. Dans le programme principal, nous créons un tableau `T` de 6 entiers pour l'exemple.

Nous affichons d'abord le tableau initial. Ensuite, nous appelons la fonction `TriBulle` pour trier le tableau. Finalement, nous affichons le tableau trié.

Lorsque vous exécutez ce programme, vous obtiendrez la sortie suivante :

```
Tableau initial : [5, 2, 8, 1, 4, 3]

Tableau trié : [1, 2, 3, 4, 5, 8]
```

Le tableau initial `[5, 2, 8, 1, 4, 3]` est trié en utilisant la fonction `TriBulle` et le résultat `[1, 2, 3, 4, 5, 8]` est affiché.

Exercice 3 : Python

1-

Le principe de la recherche dichotomique, également connue sous le nom de recherche binaire, est une technique efficace pour rechercher un élément spécifique dans un tableau trié. Au lieu de parcourir le tableau élément par élément, la recherche dichotomique divise continuellement la plage de recherche en deux parties et compare l'élément recherché avec l'élément au milieu de cette plage.

Voici les étapes principales de la recherche dichotomique :

- L'algorithme commence par définir une plage de recherche initiale, généralement toute la longueur du tableau. Dans ce cas, cela est représenté par les variables « début » et « fin », qui sont initialement définies sur les indices extrêmes du tableau.
- Ensuite, il calcule l'indice du milieu de la plage de recherche en utilisant la formule (début + fin) // 2. Cela donne l'indice de l'élément au milieu de la plage.
- L'algorithme compare l'élément au milieu avec l'élément recherché (x). S'ils sont égaux, cela signifie que l'élément recherché a été trouvé et l'algorithme renvoie l'indice correspondant.
- Si l'élément au milieu est inférieur à l'élément recherché, cela signifie que l'élément recherché ne peut pas se trouver dans la première moitié de la plage de recherche. Par conséquent, l'algorithme met à jour la variable « début » pour être l'indice du milieu + 1, et la recherche se poursuit dans la moitié supérieure de la plage.

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

- Si l'élément au milieu est supérieur à l'élément recherché, cela signifie que l'élément recherché ne peut pas se trouver dans la deuxième moitié de la plage de recherche. L'algorithme met à jour la variable « fin » pour être l'indice du milieu – 1, et la recherche se poursuit dans la moitié inférieure de la plage.
- Les étapes 2 à 5 sont répétées tant que la plage de recherche n'est pas réduite à un seul élément (début == fin) ou que l'élément recherché est trouvé.
- Si l'algorithme parcourt toute la plage de recherche sans trouver l'élément recherché, il renvoie -1 pour indiquer que l'élément n'est pas présent dans le tableau.

En résumé, la recherche dichotomique divise répétitivement la plage de recherche en deux parties et élimine la moitié des éléments à chaque étape, ce qui permet une recherche efficace dans un tableau trié.

2-

Voici un exemple de tableau illustrant l'exécution de la fonction `recherche_dicho_iterative` pour rechercher l'élément 8 dans le tableau `tab=[2,7,8,20,25,30,33,39,45,50]` :

```

**Trace du code:**

| Étape | Début | Fin | Milieu | tab[Milieu] | tab[Milieu] == x | tab[Milieu] < x | tab[Milieu] > x | Nouveau début | Nouvelle fin |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Init | 0 | 9 | | | | | | | |
| 1 | 0 | 9 | 4 | 25 | False | True | | 5 | 9 |
| 2 | 5 | 9 | 7 | 33 | False | True | | 8 | 9 |
| 3 | 8 | 9 | 8 | 39 | False | True | | 9 | 9 |
| 4 | 9 | 9 | 9 | 45 | False | | True | | 8 |

**Explications :**

- Étape 1 : Au départ, la plage de recherche va de l'indice 0 à l'indice 9 (longueur du tableau – 1).

VALIDEUR LMD 2024



Scanné avec CamScanner
```

- Étape 2 : Le milieu de la plage de recherche est calculé en prenant l'indice du milieu arrondi vers le bas : (0 + 9) // 2 = 4. L'élément à l'indice 4 est 25. On compare 25 avec l'élément recherché 8.
- Étape 3 : Comme 25 est plus grand que 8, on met à jour la variable « fin » à l'indice du milieu – 1, c'est-à-dire 3.
- Étape 4 : La nouvelle plage de recherche va de l'indice 0 à l'indice 3.
- Étape 5 : On calcule le nouveau milieu : (0 + 3) // 2 = 1. L'élément à l'indice 1 est 7. On compare 7 avec l'élément recherché 8.
- Étape 6 : Comme 7 est plus petit que 8, on met à jour la variable « début » à l'indice du milieu + 1, c'est-à-dire 2.
- Étape 7 : La nouvelle plage de recherche va de l'indice 2 à l'indice 3.
- Étape 8 : On calcule le nouveau milieu : (2 + 3) // 2 = 2. L'élément à l'indice 2 est 8. On compare 8 avec l'élément recherché 8.
- Étape 9 : Les deux éléments sont égaux, donc on a trouvé l'élément recherché et on renvoie l'indice 2.

Remarque : Dans le tableau, les cases vides indiquent des valeurs non pertinentes pour l'étape correspondante.

3-

Voici un exemple de programme principal en Python qui demande à l'utilisateur de saisir un élément à rechercher dans le tableau et affiche le résultat de la recherche en utilisant la fonction `Recherche_dicho_iterative` :

Code python

```
def recherche_dicho_iterative(tab, x) :
    debut, fin = 0, len(tab) – 1
    while debut <= fin :
        milieu = (debut + fin) // 2
        if tab[milieu] == x :
            return milieu
        elif tab[milieu] < x :
            debut = milieu + 1
        else :
            fin = milieu – 1
    return -1
```

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

```
tab = [2, 7, 8, 20, 25, 30, 33, 39, 45, 50]
element_recherche = int(input(" Saisissez un élément à rechercher dans le tableau : " ))
indice_resultat = Recherche_dicho_iterative(tab, element_recherche)
if indice_resultat != -1 :
   print(" L'élément ", element_recherche, " a été trouvé à l'indice ", indice_resultat)
else :
   print(" L'élément ", element_recherche, " n'a pas été trouvé dans le tableau. ")
```

Explications :

Dans ce programme, nous utilisons la fonction `input` pour demander à l'utilisateur de saisir un élément à rechercher. La valeur saisie est convertie en entier à l'aide de la fonction `int`. Ensuite, nous appelons la fonction `Recherche_dicho_iterative` en passant le tableau `tab` et l'élément recherché `element_recherche`. Le résultat de la recherche est stocké dans la variable `indice_resultat`.

Enfin, nous vérifions si `indice_resultat` est différent de -1. Si c'est le cas, cela signifie que l'élément a été trouvé et nous affichons le message correspondant avec l'élément recherché et son indice. Sinon, nous affichons un message indiquant que l'élément n'a pas été trouvé dans le tableau.

4-

Voici la fonction `recherche_dicho_recursive` qui est la version récursive de la fonction `recherche_dicho_iterative` :

Code python

```
def recherche_dicho_recursive(tab, x, debut, fin) :
   if debut > fin :
      Return -1

   milieu = (debut + fin) // 2
   if tab[milieu] == x :
      return milieu
   elif tab[milieu] < x :
      return recherche_dicho_recursive(tab, x, milieu + 1, fin)
   else :
      return recherche_dicho_recursive(tab, x, debut, milieu – 1)
```

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Explications :

La fonction `recherche_dicho_recursive` utilise une approche récursive pour effectuer la recherche dichotomique. Elle prend en paramètres le tableau `tab`, l'élément recherché `x`, et les indices `debut` et `fin` définissant la plage de recherche.

La fonction suit les étapes suivantes :

- Si `debut` est supérieur à `fin`, cela signifie que la plage de recherche est vide et l'élément recherché n'a pas été trouvé. Dans ce cas, la fonction renvoie -1.
- On calcule le milieu de la plage de recherche en utilisant la formule `(debut + fin) // 2`.
- On compare l'élément `tab[milieu]` avec l'élément recherché `x`. Si les deux éléments sont égaux, on renvoie l'indice `milieu`.
- Si l'élément `tab[milieu]` est inférieur à `x`, cela signifie que l'élément recherché ne peut pas se trouver dans la première moitié de la plage de recherche. On effectue alors un appel récursif à la fonction en mettant à jour `debut` à `milieu + 1` et en conservant `fin` inchangé.
- Si l'élément `tab[milieu]` est supérieur à `x`, cela signifie que l'élément recherché ne peut pas se trouver dans la deuxième moitié de la plage de recherche. On effectue un autre appel récursif à la fonction en mettant à jour `fin` à `milieu – 1` et en conservant `debut` inchangé.

En résumé, la fonction `recherche_dicho_recursive` divise récursivement la plage de recherche en deux parties et effectue la recherche dans la moitié appropriée jusqu'à ce que l'élément recherché soit trouvé ou que la plage de recherche devienne vide.

5-

Voici un exemple de code Python qui utilise l'algorithme du tri à bulles pour trier le tableau `tab1` et obtenir le tableau trié `tab` :

Code python

```
def triBulle(tab) :
    n = len(tab)
    for i in range(n – 1) :
        for j in range(0, n – i – 1) :
            if tab[j] > tab[j + 1] :
                tab[j], tab[j + 1] = tab[j + 1], tab[j]

tab1 = [8, 7, 50, 2, 25, 30, 33, 39, 20, 45]
tab = tab1.copy(), # Copie du tableau pour préserver l'original
triBulle(tab)
print(" Tableau trié : ", tab)
```

VALIDEUR LMD-2024

Scanné avec CamScanner

Explications :

La fonction `triBulle` implémente l'algorithme du tri à bulles. Elle prend en paramètre le tableau `tab` à trier.

L'algorithme du tri à bulles fonctionne en comparant les éléments adjacents du tableau et en les échangeant si nécessaire, de sorte que les éléments plus grands « remontent » vers la fin du tableau. Cela crée une série de passages sur le tableau jusqu'à ce que tous les éléments soient dans l'ordre.

Dans le code, nous itérons sur `n – 1` passages, où `n` est la longueur du tableau. À chaque passage, nous itérons sur les éléments du tableau avec `j` allant de 0 à `n – i – 1`. À chaque itération interne, nous comparons `tab[j]` avec `tab[j + 1]` et les échangeons si `tab[j]` est supérieur à `tab[j + 1]`.

Ensuite, nous créons une copie du tableau initial `tab1` en utilisant la méthode `copy()` pour préserver l'original. Puis, nous appelons la fonction `triBulle` avec le tableau copié `tab` pour le trier.

Enfin, nous affichons le tableau trié `tab`.

VALIDEUR LMD 2024

Scanné avec CamScanner