Fomesoutra.com
ça soutra!

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET
BOIGNY
Union-Discipline-Travail

LE VALIDEUR LMD 2022

UFR DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE



LICENCE 1

SEMESTRE 1

- Fonction d'une Variable réelle
- Mécanique du point
- Initiation à l'Informatique
- Elément de Logique
- Structure Algébrique
- Technique d'expression
- Economie générale

SEMESTRE 2

- Analyse réelle
- Algorithme et Programmation
- Eléments d'Algèbre linéaire
- Probabilité Statistique
- Electricité
- Optique
- TP physique

Contacts :
+ 225 07 87 98 94 43
support@gvivaservices.com

Nouvelle édition à avoir absolument
Collection Succès
Plus de contenus sur www.gvivaservices.com

Scanné avec CamScanner

AVANT- PROPOS

« Je ne puis apprendre à parler à qui ne s'efforce de parler. »

Confucius

Bien joué ! Vous êtes orienté en Maths-Info ! Vous estimez avoir franchi l'étape que vous perceviez comme la plus difficile, c'est-à-dire le Bac C, E ou D. Toutes nos félicitations... D'ailleurs, votre entourage vous a toujours dit que vous étiez « bon et même très bon en mathématiques » ...

Certes, personne ne met en doute cela. Pour autant, la partie la plus importante du processus vient juste de commencer. Comme le dit le proverbe Chinois, *« quand on a dix pas à faire, neuf pas font la moitié du chemin »* ...

En d'autres termes, vous n'êtes pas au bout de vos peines. Cette dernière moitié de chemin comporte plusieurs obstacles tels que : s'adapter au système de cours universitaire, la compréhension des cours dispensés dans les amphithéâtres, valider toutesvos UE avec de bonnes mentions etc.

Le **VALIDEUR LMD** est un recueil d'anciens sujets du système LMD, de propositions de corrections et des conseils absolument importants à savoir. Sa mise à votre disposition vous permettra de vous imprégner des sujets auxquels vous pourriez être confrontés.

- **La première partie** de ce document présente quelques témoignages d'anciens et les opportunités qu'offre la filière.
- **La seconde partie** contient les sujets et propositions de corrections des années académiques antérieures (2016-2017/2017-2018/2018-2019/2019-2020/2020-2021).

S'appuyant sur l'expérience personnelle des auteurs et sur de nombreux témoignages d'étudiants, cet ouvrage se veut résolument concret et Opérationnel.

Vous avez des questions au sujet du VALIDEUR LMD ? Un point de cours qui vous résiste ? Une erreur que vous avez croisée dans l'ouvrage ? Voulez-vous intégrer l'équipe ? Ou vous voulez juste nous laisser un petit mot gentil ? Et bien n'hésitez pas à nous contacter. Nous nous ferons un plaisir de vous répondre dans les meilleurs délais : support@gvivaservices.com

L'EQUIPE VALIDEUR.

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

Sommaire

Maquette de l'année académique 6
Introduction 8
Bienvenu à la FAC.....9

Première partie

Témoignages des aînés 11
Vue globale des possibilités après des études en mathématiques informatique..... 13
Quelques précieux liens absolus pour mieux vous orienter.....14

Deuxième partie

SEMESTRE 1

Fonction d'une variable réelle

Résumé de suites ***17***

Examens de suites et fonctions dérivables	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2016-2017	19	
Examen session 2 2016-2017	21	
Examen session 1 2017-2018	22	29
Examen session 2 2017-2018	23	
Examen session 1 2018-2019	24	
Examen session 2 2018-2019	25	
Examen session 1 2019-2020	26	
Examen session 1 2020-2021	27	35

Examens de calcul intégral	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2016-2017	41	50
Examen session 2 2016-2017	42	
Examen session 1 2017-2018	43	
Examen session 2 2017-2018	44	
Examen session 1 2018-2019	45	52
Examen session 2 2018-2019	46	57
Examen session 1 2019-2020	47	
Examen session 1 2020-2021	48	60
Examen session 2 2020-2021	49	67

Résumé de mécanique du point ***66***

Examens de mécanique du point	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2016-2017	74	
Examen session 1 2017-2018	76	
Examen session 2 2017-2018	78	88
Examen session 1 2018-2019	80	
Examen session 1 2019-2020	82	91
Examen session 1 2020-2021	84	95
Examen session 2 2020-2021	86	99

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Initiation à l'informatique

Examens d'outils bureautiques	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2016-2017	135	
Examen session 1 2017-2018	137	147
Examen session 1 2018-2019	139	
Examen session 1 2019-2020	141	148
Examen session 1 2020-2021	143	152

Examens d'architecture des ordinateurs	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2016-2017	104	112
Examen session 2 2016-2017	105	
Examen session 1 2017-2018	106	117
Examen session 2 2017-2018	107	124
Examen session 2 2018-2019	108	131
Examen session 1 2019-2020	109	

Examens d'éléments de logique	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2016-2017	156	167
Examen session 1 2017-2018	158	
Examen session 1 2018-2019	156	171
Examen session 2 2018-2019	161	175
Examen session 1 2019-2020	162	178
Examen session 1 2020-2021	163	
Examen session 2 2020-2021	165	181

Résumé de structures algébriques *179*

Examens de structures algébriques	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2016-2017	186	
Examen session 2 2016-2017	187	
Examen session 1 2017-2018	188	195
Examen session 2 2017-2018	189	199
Examen session 1 2018-2019	190	
Examen session 2 2018-2019	191	
Examen session 1 2019-2020	192	201
Examen session 1 2020-2021	193	203
Examen session 2 2020-2021	194	206

Examens de technique d'expression	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2016-2017	209	
Examen session 1 2018-2019	211	
Examen session 1 2019-2020	212	

Examens d'économie générale	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2016-2017	217	229
Examen session 1 2017-2018	219	
Examen session 1 2018-2019	220	
Examen session 1 2019-2020	222	
Examen session 2 2020-2021	224	235
Examen session 1 2020-2021	226	232

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

SEMESTRE 2

Examens d'analyse réelle	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2016-2017	239	254
Examen session 1 2017-2018	241	
Examen session 1 2018-2019	245	256
Examen session 2 2018-2019	243	261
Examen session 1 2019-2020	247	265
Examen session 1 2020-2021	249	267
Examen session 2 2020-2021	252	279

Algorithme et Programmation

Examens d'algorithme	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2016-2017	283	
Examen session 1 2017-2018	285	
Examen session 1 2018-2019	287	299
Examen session 2 2018-2019	290	
Examen session 1 2019-2020	294	303
Examen session 1 2020-2021	296	306
Examens de python	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2016-2017	310	
Examen session 1 2017-2018	312	
Examen session 1 2018-2019	313	
Examen session 2 2018-2019	316	323
Examen session 1 2019-2020	318	325
Examen session 1 2020-2021	320	329

Éléments d'Algèbre linéaire

Examens de calcul matriciel	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 2 2016-2017	333	342
Examen session 1 2017-2018	334	346
Examen session 2 2017-2018	335	348
Examen session 1 2018-2019	336	349
Examen session 2 2018-2019	337	
Examen session 1 2019-2020	338	350
Examen session 1 2020-2021	339	353
Examen session 2 2020-2021	340	357

Examens d'espace vectoriel	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2016-2017	360	368
Examen session 2 2016-2017	361	
Examen session 1 2018-2019	362	374
Examen session 2 2018-2019	363	377
Examen session 1 2019-2020	364	380
Examen session 1 2020-2021	365	383
Examen session 2 2020-2021	367	385

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Probabilités Statistiques

Examens de Probabilités	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2016-2017	420	433
Examen session 2 2016-2017	421	
Examen session 1 2017-2018	423	436
Examen session 2 2017-2018	425	
Examen session 1 2018-2019	427	439
Examen session 2 2018-2019	429	440
Examen session 1 2019-2020	430	442
Examen session 2 2020-2021	431	

Examens de statistique descriptive	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2016-2017	389	401
Examen session 2 2016-2017	390	
Examen session 1 2017-2018	391	
Examen session 1 2018-2019	392	404
Examen session 2 2018-2019	395	406
Examen session 1 2019-2020	396	407
Examen session 1 2020-2021	397	411
Examen session 2 2020-2021	399	415

Examens d'électricité	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2016-2017	445	
Examen session 2 2016-2017	447	
Examen session 1 2017-2018	449	
Examen session 2 2017-2018	451	463
Examen session 1 2018-2019	453	466
Examen session 2 2018-2019	454	
Examen session 1 2019-2020	456	
Examen session 1 2020-2021	457	468
Examen session 2 2020-2021	460	475
Renforcement Electricité	444	461

Bibliographie

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Etablissement	Université Félix HOUPHOUET-BOIGNY
UFR	Mathématiques et Informatique
Domaine	Sciences et Technologies
Grade	Licence
Mention	Mathématiques/Informatique
Parcours	Mathématiques et Applications/Mécanique/Sciences Informatique
Niveau	L1

SEMESTRE 1

Code UE	Intitulé des Unités d'Enseigne	Code EC	Eléments constitutifs	Masse Horaire Semestrielle des EC												CECT UE	Fonctionnalité
				CM	TD	TP	Sem.	Sortie T	HE	HE	TPE	TPE		CTT	Coef		
UE Fondamentale																	
FVR2111	Fonctions d'une variable réelle	FVR21111	Suites et fonctions dérivables	15	15	0		0	30	30	45	45		75	3	5	Obligatoire
		FVR21112	Calcul intégral	10	10	0		0	20	20	30	30		50	2		
				50%	50%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		5		
STA2111	Structure Algébriques	STA21111	TD Structure algébriques	20	20	0		0	40	40	60	60		100	4	4	Obligatoire
				50%	50%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		4		
MNP2111	Mécanique du point	MNP21111	Outils Mathématiques	6	6	0		0	12	12	18	18		30	1,2	6	Obligatoire
		MNP21112	Cinématique du point	15	9	0		0	24	24	36	36		60	2,4		
		MNP21113	Dynamique du point	15	9	0		0	24	24	36	36		60	2,4		
				60%	40%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C				
IAN2111	Initiation à l'informatique	IAN21111	Architecture des ordinateurs	10	10	5		0	25	25	37,5	37,5		62,5	2,5	5	Obligatoire
		IAN21112	Outils bureautiques	10	0	15		0	25	25	37,5	37,5		62,5	2,5		
				40%	20%	40%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		5		
UE de Méthodologie																	
ELG2111	Eléments de logique	ELG21111	Eléments de logique	24	16	0		0	40	40	60	60		100	4	4	Obligatoire
				60%	40%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C				
TEX2111	Technique d'expression	TES21111	Techniques d'expression	18	12	0		0	30	30	45	45		75	3	3	Obligatoire
				60%	40%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		3		
UE de Culture Générale																	
ECG2111	Economie Générale	ECG2111	Economie Générale	18	12	0		0	30	30	45	45		75	3	3	Obligatoire
				60%	40%	0%		0%	0%	40%	40%	60%	C		3		
Total Semestre									300		450			750		30	

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

SEMESTRE 2

Code UE	Intitulé des Unités d'Enseigne	Code EC	Eléments constitutifs	Masse Horaire Semestrielle des EC												CECT UE	Fonctionnalité
				CM	TD	TP	Sem.	Sortie T	HE	HE	TPE	TPE		CTF	Coef		
UE Fondamentale																	
EAL2112	Eléments d'Algèbre linéaire	EAL21121	Calcul Matriciel	15	15	0		0	30	20	30	30		50	2	5	Obligatoire
		EAL21122	Espaces vectoriels	10	10	0		0	20	30	45	45		75	3		
				50%	50%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		5		
ANR2112	Analyse réelle	ANR21121	Analyse réelle	20	20	0		0	40	40	60	60		100	4	4	Obligatoire
				50%	50%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		4		
APG21112	Algorithme et Programme	APG211121	Algorithme	10	10	0		0	20	20	30	30		50	2	5	Obligatoire
		APG211122	Programmation Python	10	0	20		0	30	30	45	45		75	3		
				40%	20%	40%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		5		
PRS2112	Probabilité Statistique	PRS21121	Statistique descriptive	10	10	10		0	30	30	45	45		75	3	5	Obligatoire
		PRS21122	Probabilités	10	10	0		0	20	20	30	30		50	2		
				40%	40%	20%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		5		
ELT2112	Electricité	ELT2112	Electricité	24	16	0		0	40	40	60	60		100	4	4	Obligatoire
				60%	40%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C				
OPT2112	Optique	OPT2112	Optique	24	16	0		0	40	40	60	60		100	4	4	Obligatoire
				60%	40%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		3		
UE de Méthodologique																	
TPP2111	Travaux Pratiques de Physique 1	TPP2111	Travaux Pratiques de Physique 1	0	0	30		0	30	30	45	45		75	3	3	Obligatoire
				0%	0%	100%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		3		
Total Semestre									300		450			750		30	

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Introduction

L'**Equipe VALIDEUR LMD** vous souhaite encore une fois de plus la bienvenue dans la filière mathématique informatique (MI). Comme vous le constatez c'est une filière scientifique. En effet, elle fait partie du domaine des **sciences et technologies** qui regroupent en outre les Unités de Formations et de Recherche (UFR) Sciences des Structures de la Matière et Technologie (SSMT) communément appelée physique chimie (PC), Biosciences (CBG), sciences de la terre et des ressources minières (STRM). Si vous êtes orientés en MI, cela dit votre profil est compatible, car titulaire d'un BAC scientifique (C, D, E), vous êtes aptes à entamer les études dans ladite UFR. **Ici en MI c'est le courage rien que le courage.** L'année académique se fait en 2 semestres dont chacun d'eux est composé d'unités d'enseignements (UE) qui s'évaluent à 30 crédits. Ainsi l'année se compose de 60 crédits dont 80% des 60 crédits soit **48 crédits au moins validés** autorise l'étudiant à s'inscrire s'il le désire en deuxième année toute fois en revenant composer les UE qui n'ont pas été validées.

La conséquence liée au passage avec au moins 80% des crédits (pour ceux qui n'ont pu avoir 100% des crédits soit les 60 crédits) est que vous payez les frais d'inscription de la deuxième année puis la moitié de ceux de la première année.
L'étudiant a le choix de rester en première année puis valider tous ses crédits avant l'entame de ces études en deuxième année.

Les cours sont donnés en AMPHI par un professeur ; c'est ce que l'on qualifie de **Cour Magistral (CM)**. Celui-ci fait un briefing de son polycopié s'il en dispose dans le cas contraire il vous fait copier comme cela a été les années antérieures dans l'ancien système. À la fin d'un certain nombre de CM terminés, les **Travaux Dirigés** (TD) sont programmés et consistent à faire des exercices pour mettre en pratique les acquis du cours avec un enseignant mis à votre disposition. Pendant ces Travaux Dirigés l'enseignant est autorisé à faire des interrogations, des devoirs qui par la suite seront pris en compte dans le calcul de moyenne de la note de **contrôle continu.**

NB : **Faut dire ces dernières années dans le souci de rendre l'année académique normale ces devoirs se font rarement.**

Ainsi à la fin des TD il faut penser à un **contrôle final** qui représente un examen comme au baccalauréat.
L'équipe VALIDEUR LMD 2022 se dit heureux de contribuer efficacement à la formation des futurs cadres de la nation. En outre elle se compose de :

- **Sako Amy** MI/UFHB
- **Bamba Adama** MI/UFHB
- **Koffi Yetran Ange Eric** MI-Actuariat/UFHB
- **Fofana Souleymane** MI/UFHB
- **Fofana Aicha** MI/UFHB
- **Samake Aly** MI/UFHB
- **Kouakou Konan Marius** MI/UFHB
- **Assoumou Tanoh Raoul Martial** MI/UFHB
- **Kouassi David** MI/UFHB

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Bienvenu à la FAC (Zoulou la ☺)

➢ **Dès l'arrivée d'un nouvel étudiant à l'UFR**

L'étudiant s'il connait un ami bien avant sa venue à l'UFR, prend contact avec celui-ci pour qu'il lui donne quelques directives afin de voir son département. Si possible lui demander quelques conseils. Aussi l'étudiant doit s'informer sur la rentrée académique. Celui-ci peut par curiosité écouter les dires de plusieurs étudiants qui s'y trouvent déjà. Ensuite se diriger au **bureau M** de l'UFR pour prendre de plus amples informations du fait de la présence des conseillers disposés à nous fournir de vraies informations.

➢ **L'étudiant lors d'un cours magistral (CM)**

Lorsque vous suivez un cours magistral SVP soyez concentré car la moindre distraction peut vous compter chère dans la compréhension du polycopié du professeur.
En effet, il y a des professeurs qui mettent l'accent sur des points du cours qui sont à 99% susceptibles de sortir à l'examen (faites aussi attention aux 1% restant).
Ne prenez en aucun cas à la légère les cours magistraux. Votre présence à un CM est certes non obligatoire mais doit être pour vous une obligation. C'est en cela que vous comprendrez certaines démonstrations du cours.

➢ **L'étudiant pendant les travaux dirigés (TD)**

En TD il faut le signaler ; c'est comme si vous étiez dans une classe comme en terminale. Donc l'appel est fait (sous forme de liste de présence), les absences sont **marquées** et sont comptabilisées pour la note de contrôle continu qui compte un tiers dans la validation de l'UE.
La participation à la correction des exercices qui vous sont proposés sur la fiche de TD vous apportes un plus à la compréhension du cours.

➢ **La phase de préparation d'un examen**

Un examen comme vous l'avez constaté en terminal ne se prépare pas à la veille de la composition. Vous devez vous dire pendant que vous assistez aux CM et aux TD que c'est le moment de comprendre pour bien faire la composition.

➢ **Les conséquences liées à la TRICHERIE**

La Tricherie est une perte de dignité. Alors ôtez cette idée dans votre pensée. En voulant s'adonner à une telle pratique vous vous embrouiller et en fin de compte, vous avez un doute sur ce que vous avez appris. Eviter donc la tricherie (**Rester donc digne dans la douleur : disait un prof de CM**).

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

PREMIERE PARTIE

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Bienvenu dans cette première partie novatrice du document valideur LMD. Dans cette partie, il s'agira pour nous de vous donner cette propulsion à **votre projet professionnel.** Omniprésentes dans l'industrie – aérospatiale, Imagerie, cryptographie..., ou dans les services-banques, assurances..., les mathématiques apparaissent aussi dans de nombreux autres secteurs : sondages, gestion des risques, protection des données...Elles interviennent dans notre vie quotidienne – télécommunication, transports, médecine, météorologie, musique...et contribuent à la résolution de problématiques actuelles : énergie, santé ; environnement, climatologie, développement durable...Pour renchérir de cette diversité des mathématiques informatiques auprès des étudiants de l'Université Félix Houphouët Boigny ; voici ci-après des témoignages d'anciens ayant effectués des études à l'UFR Math Info de ladite Université.

Je suis **Bobet Goualo Victorien**, Ingénieur de Conception en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication (STIC) diplômé de l'Institut National Polytechnique Félix Houphouët Boigny de Yamoussoukro (INP-HB).

Actuellement j'exerce dans une entreprise de services informatique à savoir N-SOCITECH en tant qu'**Ingénieur des données et avant-vente**. Ainsi j'interviens sur les technologies **Bases de données, Big Data, Data Sciences**. En plus je suis aussi le conseillé auprès de nos clients sur ces technologies en ma qualité d'ingénieur Avant-Vente ou ingénieur d'affaires.

Après mon baccalauréat série C en 2013 au Lycée Tiapani Dominique de Dabou (**LTD**), je me suis inscrit en mathématique informatique à l'Université Félix Houphouët Boigny (**UFHB**) de Cocody, Abidjan. Ayant opter pour le couple mathématique appliquées et informatique ; j'ai accompli une partie de ma formation de maths au campus de Cocody puis complété celle-ci par la formation d'ingénieur en STIC de l'**INPHB** grâce à mon L2 de math info pour avoir un couple équilibré. Présentement en plus de mon activité professionnelle, je suis inscrit à Institut Supérieur de l'institut de l'aéronautique et de l'espace-institut Supmeca de paris (**ISAE-ISM Paris**) pour un Exécutive Master of Engineering Big Data & Data Science

Je puis vous assurer que vous avez fait l'un des meilleurs choix de filières. Et même ceux qu'on y a contraint, vous êtes au bon endroit. Alors je voudrais interpeler mes cadets sur l'importance d'avoir une idée de leur projet professionnel puis murir cette idée. Beaucoup de courage, ce n'est pas facile mais c'est possible car plusieurs ont pu le faire.

N'oubliez pas de vous approprier le **VALIDEUR LMD**, un document qui aide pour la validation des examens à travers des aperçus de la façon dont les profs composent. Le document VALIDEUR LMD qui est depuis 2015, un manuel très utile à la compréhension du système de l'enseignement supérieur est beaucoup apprécié des étudiants.

Après mon **Baccalauréat série D en 2013**, j'ai été orienté à l'UFR Maths-Info à l'UFHB afin de poursuivre mes études. Après L1, L2 et L3 **mathématiques et applications** validées successivement avec beaucoup de difficulté, je décide de m'orienter en Master EDP Optimisation et analyse numérique suite à ma passion pour les maths appliquées et aussi dans le but de décrocher **un doctorat en Analyse numérique.** Vu l'évolution des choses à l'UFR et le départ de beaucoup d'autres personnes suite à des concours et aussi la difficulté à assimiler plusieurs cours, je décide d'aller continuer mes études en France par le biais de **Campus France** qui se solda par un succès avec une admission en **Licence 3 Mathématiques Pures à l'Université Clermont Auvergne.** Etant ici je m'aperçois des multitudes opportunités à accéder à des formations plus intéressantes. Avant la fin de l'année universitaire, je change mon objectif de devenir prof en postulant pour le concours « Master Econométrie et Statistique de l'ISFA » afin de devenir un Data Scientist ou

Scanné avec CamScanner

un Data Analyst. Alhamdoulilah, depuis septembre 2021, je dispose d'un diplôme d'ingénieur Data Analyst et Risk Management et je suis en quête active d'emploi.
Mes conseils aux plus jeunes consiste d'abord à leur dire de ranger leur « BAC avec mentions » dans leurs sacs et d'arrêter les débats inutiles comme « La série C ou Z est meilleure que D ou Y », ce qui compte aujourd'hui c'est ta capacité à t'en sortir, tu n'auras pas un diplôme ou une bourse parce que tu as fait la série W, reste concentrer car, une autre histoire vient de commencer et la meilleure manière de vivre pleinement cette histoire est d'être endurant, patient, motivé, courageux, bosseur et avoir la foi en Dieu comme on aimait si bien le dire **«c'est nous qui bossons mais c'est DIEU qui fait valider»** et **« Valideur »** est à coté de vous, il n'est plus un document à présenter pour moi, car ses bienfaits sont connus par tous, même hors des frontière de Math-Info. Soyez humble, respectueux envers vos aînés quelques soit leurs âges car pour moi, aînés signifie toute personne ayant intégrée l'université avant toi donc quel que soit ton intelligence, tu lui dois respect et considération et vice versa. **Surtout ne traînez pas à l'université**, ne vous attardez pas sur les futilités, ne vous adonnez pas aux vices, visez bien votre objectif et donnez-vous les moyens de les atteindre car les années passent très vite étant à la fac.
Enfin, ayez des objectifs clairs, renseignez-vous car plusieurs opportunités existent devant vous, en CI ou ailleurs et donnez-vous les moyens de les atteindre.
Merci pour votre attention, c'était votre frère, votre conseiller **KONE YACOUBA alias Scologie First.**

Je suis **DOUKOURE DAOUDA**, élève ingénieur statisticien économiste (ISE) à **l'école nationale de statistique et économie appliquée (ENSEA)**. Apres l'obtention du BAC D au lycée moderne de Tiassale ; j'opte pour la filière de mathématique informatique (MATH-INFO) à l'université Felix Houphouët Boigny, juste pour l'amour que je nourrissais pour les mathématiques.
Durant mon parcours en MATH-INFO ; je fus fasciné par l'utilisation qui pouvait être faites des mathématiques : tant en mécanique, économie, comptabilité ... Ainsi en licence de mathématique, je présente plusieurs concours d'entré dans des écoles ingénieurs, ou j'opte pour la formation ISE.
Comme message à tous ceux qui suivent le parcours mathématique, j'aimerais les rassurer de la diversité des débouchés que cette filière leurs offres.
Quant à ceux qui aimeraient embrasser le métier ingénieur, comme premier conseil : aillez confiance en vous, en votre potentiel et ensuite mettez-vous au travail. Faites votre possible pour comprendre les cours qui sont dispensés et de les approfondir. Comme j'aime le dire **« Faire sa part des choses et implorer le tout puissant qu'il facilite ».**

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

Pour une vue globale des possibilités après des études en mathématiques informatique

Etant en licence 1 math info	• Procédure CAMPUS France • Concours AS de l'ENSEA, TS de l'EAMAC • Des bourses pour les étudiants de L1	
Etant en licence 2 math info	• Cycle ingénieur EAMAC sous réserve • ISFA, EURIA, ISUP...(BECEAS)	
Etant en licence 3 math info	• Concours ENS • ISE de l'ENSEA sous réserve • Cycle ingénieur Centrale Casablanca	
Une L3 math info validée	• Concours cycle ingénieur INPHB, ISE • Concours Master IFORD, IIA, Big Data, ESATIC, PSAV • Concours écoles de commerce HEC, ESSEC, ESCP...	Master 2 PSAV Probabilités, Statistique et Applications au Vivant

Qui peut le plus, peut le moins. Cela dit que si vous être de niveau sup vous avez la possibilité de postuler à tous les opportunités de niveaux inférieurs.

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

Quelques précieux liens absolus pour mieux vous orienter

Campus France Côte d'Ivoire :
https://www.ivoire.campusfrance.org (site d'informations de base)
Concours Centrale Casablanca :
http://www.centrale-casablanca.ma/fr/ (site info et concours cycle ingénieur)
Concours INPHB Yamoussoukro (Bourse du gouvernement après admission) :
http://www.inphb.ci/2/vues/accueil/ (site info)
http://www.inphb.ci/ConCours_Ing-INPHB-2021/ (site concours Ingénieurs)
Concours ENSEA Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :
http://ensea.ed.ci/ (site info)
http://capesa.ensai.fr (site concours cycle AS/cycle ingénieur ISE)
Concours HEC Paris (Bourse du gouvernement après admission) :
https://www.hec.edu/fr
https://www.hec.edu/fr/grande-ecole-masters/programme-grande-ecole/admissions
Concours ENS Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :
https://ens.laatech.com/ (site concours)
http://www.ensabidjan.ci/ (site info)
Concours IIA Yaoundé :
http://www.iiayaounde.com/
http://www.iiayaounde.com/linstitut/conditions-dadmission/
Concours X polytechnique de Paris (Bourse du gouvernement après admission) :
https://www.polytechnique.edu/ (site officiel)
https://www.polytechnique.edu/admission-cycle-ingenieur/fr/voie-universitaire-univ-filière-universitaire-internationale-fui (page admission)
Concours ESATIC Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :
https://www.esatic.ci/index1.php (site info)
https://www.esatic.ci/admission.php (page admission)
Concours ISFA Lyon (Actuariat) :
https://isfa.univ-lyon1.fr/
https://isfa.univ-lyon1.fr/formation/actuariat/admission-a-la-formation-d-actuaire-a-l-isfa-803812.kjsp
Bourse Japon 2021 (Bourse du gouvernement Japonais après admission) :
https://www.ci.emb-japan.go.jp/files/000475798.pdf (PDF d'information à télécharger)
https://www.ci.emb-japan.go.jp/itpr_ja/00_000401.html (site officiel de la bourse)
Bourse Russie 2021 (Bourse du gouvernement Russe après admission) :
https://cotedivoire.mid.ru/web/cote-d-ivoire-fr/conditions-a-remplir-pour-devenir-candidats-aux-bourses-du-gouvernement-russe
M2PSAV de l'UFR Math Info (Possibilité de Bourse du gouvernement après admission) :
http://m2psav.master.edu-math.org/ (site officiel)
http://m2psav.master.edu-math.org/?page_id=18 (page de candidature)
Concours IFORD Yaoundé (Bourse du gouvernement après admission) :
http://www.iford-cm.org/
http://www.iford-cm.org/index.php/etudes-formation/concours-entree/informations-utiles
Concours EAMAC de Niamey (Bourse d'organisme Aéronautique(ANAC,SODEXAME ...) après admission) :
http://www.anac.ci/anac/web/ (site de l'autorité nationale de l'aviation civile de Côte d'Ivoire)
http://www.anac.ci/anac/web/docs/BrochureANAC2017.pdf (PDF pour s'informer sur l'aviation en côte d'ivoire à télécharger)

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD

DEUXIEME PARTIE

Scanné avec CamScanner

SEMESTRE 1

www.gvivaservices.com

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

RÉSUME SUITES

Pour montrer qu'une suite converge et trouver sa limite.

Essayer d'exprimer le terme général u_n de façon à pouvoir appliquer les théorèmes généraux (théorème d'encadrement, opérations sur les suites convergentes).

Pour étudier la convergence d'une suite.

De manière générale, privilégier l'application des énoncés des théorèmes du cours. Ne revenir aux « epsilons » que dans les cas où les énoncés des théorèmes du cours ne s'appliquent pas directement.

Pour étudier la convergence d'une suite dans laquelle apparaît une distinction entre les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs.

Examiner le comportement des deux suites extraites, indices pairs, indices impairs.

Pour montrer qu'une suite diverge. Essayer de :

- Trouver deux suites extraites et ayant des limites différentes
- Montrer que le terme général tend vers $+\infty$ ou tend vers $-\infty$
- Raisonner par l'absurde : supposer que la suite converge et amener une contradiction.

Pour étudier une suite extraite d'une suite convergente.

Appliquer le résultat du cours : la suite extraite considérée converge et a la même limite que la suite donnée.

Pour montrer que deux suites réelles $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ sont adjacentes. Établir que :

1) l'une est croissante

2) l'autre est décroissante

3) la différence $v_n - u_n$ tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Pour calculer le terme général d'une suite récurrente linéaire du second ordre, à coefficients constants et sans second membre.

Former l'équation caractéristique et appliquer les formules du cours.

Pour calculer le terme général un d'une suite récurrente linéaire du premier ordre ou du second ordre, à coefficients constants et avec second membre.

Chercher une suite particulière $(v_n)_n$ satisfaisant la même relation de récurrence que $(u_n)_n$ et de la même forme (à peu près) que le second membre. Former $w_n = u_n - v_n$, qui est le terme général d'une suite récurrente linéaire du premier ordre ou du second ordre à coefficients constants et sans second membre, calculer w_n et en déduire un par $u_n = v_n + w_n$.

Pour étudier une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

- ✓ Souvent, on pourra trouver la ou les valeurs nécessaires de l'éventuel le limite l de la suite (un)n. En effet, si $u_n \longrightarrow l$ et si f est continue en l, alors $f(l) = l$

- ✓ Il se peut que $(u_n)_n$ soit croissante et majorée, ou décroissante et minorée, donc convergente. En particulier, si f est croissante et si l'intervalle d'étude est stable par f, alors $(u_n)_n$ est monotone.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

- ✓ Un dessin permet souvent de prévoir le comportement de la suite $(u_n)_n$ et guide la marche à suivre.

- ✓ Une séparation en cas, selon la position du premier terme u_0 de la suite par rapport aux points fixes de f, peut être nécessaire, suivie de l'étude de la monotonie de la suite $(u_n)_n$.

- ✓ On peut essayer d'utiliser une majoration de type géométrique.

Pour étudier une suite ressemblant aux types usuels de suites.

Essayer de se ramener aux types usuels de suites, souvent par changement d'inconnue, en ramenant l'étude de u_n à celle, par exemple, de nu_n, de $ln(u_n)$, ...

Pour étudier deux suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ définies simultanément par des relations de récurrence les combinant.

Essayer de :

-Calculer les termes généraux u_n et v_n.

- Étudier la monotonie éventuelle des suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$

- Raisonner sur les valeurs nécessaires des limites éventuelles.

Théorèmes très importants :

(1) Soit (u_n) une suite. Alors (u_n) tend vers l si et seulement si toute extraire (sous suite) de (u_n) tend vers l

(2) Si une suite réelle (u_n) admet deux suites extraites qui tendent vers deux limites différentes, alors (u_n) n'admet pas de limite.

Exemple :*la suite de terme general* $U_n = (-1)^n$, *avec* $U_{2k} = 1$ *et* $U_{2k+1} = -1$

(3) Tout suite (u_n) croissante et majorée, converge vers sup u_n $n \in \mathbb{N}$

(4) Toute suite (u_n) croissante non majorée tend vers $+\infty$

(5) Toute suite (v_n) décroissante et minorée converge vers inf v_n; $n \in \mathbb{N}$

(6)Toute suite (v_n) décroissante et non minorée tend vers $-\infty$

(7) *(Bolzano-Weierstrass)* De toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

(8) Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

(9) Une suite réelle est divergente, si et seulement si, elle vérifie l'une des Deux conditions suivantes :
– elle est non bornée,
– elle est bornée et admet au moins deux valeurs d'adhérence

(10) Toute suite de Cauchy (réelle ou complexe) est bornée.

(11) Une suite réelle ou complexe est convergente si et seulement si, elle est de Cauchy.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny 2016-2017
UFR-MI-L1 2 heures

Examen de suites et fonctions dérivables

$x \mapsto \text{Arcsin}\, x$ est la réciproque de sinus sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $x \mapsto \text{Arctan}\, x$ la réciproque de tangente sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Documents interdits.

Exercice 1 (12 points). *Recopier sur votre feuille de composition les assertions A,B,C et D de chaque question, et répondre par vraie ou fausse à chacune d'elles. Toute réponse juste donne droit à 0,5 point et pour toute réponse fausse on perd 0,25 pt. Pour une même question, il est possible d'avoir plusieurs assertions vraies ou fausses.*

1) On considère la fonction de variable réelle x définie par :

$$f(x) = \text{Arcsin}(\frac{2x}{1+x^2}) - \text{Arctan}(\frac{2x}{1-x^2})$$

* Question 1

(A) f est définie sur $]-1,1[$.
(B) f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.
(C) f est paire car la composée de deux fonctions impaires est paire.
(D) f est impaire car la somme de deux fonctions impaires est impaire.

* Question 2

(A) f est bornée. (B) f est prolongeable par continuité en 1.
(C) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ (D) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2) Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on pose :

$$p_n = \prod_{p=1}^{n} \cos(\frac{t}{2^{p-1}}) \text{ et } q_n = p_n \sin(\frac{t}{2^{n-1}}).$$

(A) $(p_n)_{n \geq 1}$ est croissante et majorée par 1, donc $(p_n)_{n \geq 1}$ converge.
(B) $(q_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
(C) $(p_n)_{n \geq 1}$ et $(q_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.
(D) $(p_n)_{n \geq 1}$ converge vers 1.

3) On désigne par a un réel strictement positif, et par f_a la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_a(x) = ae^{-x}$. On suppose qu'il existe un et un seul $x \in [0, +\infty[$ qui vérifie l'équation : $f_a(x) = x$. On note ℓ_a cette solution. Soient x et y deux réels vérifiant $0 \leq x < y \leq a$.

(A) $0 < f_a(x) - f_a(y) < f_a(x)(y-x)$ (B) $0 < f_a(x) - f_a(y) < (y-x)\left(\frac{a}{e}\right)$
(C) $|f_a(x) - \ell_a| < |f_a(y) - \ell_a|$ (D) $|f_a(x) - \ell_a| < a\,|x - \ell_a|$.

4) Soient les fonctions $u : x \mapsto \ln x \cos x$ et $f : x \mapsto (x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$ définies au voisinage de 0. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

(A) Pour obtenir un $DL_2(0)$ de f, il suffit de prendre un $DL_2(0)$ de $\ln(x + \cos x)$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

(B) $f(x) = e^{u(x)}$ donc, si $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ est la partie régulière du $DL_2(0)$ de u, alors on peut utiliser le $DL_2(0)$ de exp pour écrire :

$$f(x) = 1 + p(x) + \frac{p(x)^2}{2!} + o(x^2)$$

(C) Le $DL_2(0)$ de f est $f(x) = e\left[1 - x - \frac{4}{3}x^2\right] + o(x^2)$

(D) Du $DL_2(0)$ de f, on déduit un prolongement par continuité de f en 0 en une fonction dérivable en 0, et un positionnement de $\mathcal{C}$ au-dessus de sa tangente au point $A(0, e)$.

5) Soit la fonction réelle f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

(A) Aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, on a : $\sqrt{x(x+2)} = x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right)$

(B) En $+\infty$, $\mathcal{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = x + 2$, et $\mathcal{C}$ est au-dessus de son asymptote.

(C) En $-\infty$, $\mathcal{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = x + 2$, et $\mathcal{C}$ est en dessous de son asymptote.

(D) En $-\infty$, $\mathcal{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = -x - 2$, et $\mathcal{C}$ est en dessous de son asymptote.

Exercice 2 (4 points). On considère les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \frac{3x_n + 2y_n}{5} \text{ et } y_{n+1} = \frac{2x_n + 3y_n}{5}$$

1. On considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = y_n - x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la suite u est géométrique, convergente et déterminer sa limite.
2. Etudier le sens de variations des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite que nous noterons ℓ.
4. Calculer $x_n + y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 3 (4 points). Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $\text{Arctan}\, x > \frac{x}{1+x^2}$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny 2016-2017
UFR-MI-L1 Session 2 - 2 heures

Examen de suites et fonctions dérivables

Nous désignons par th x la tangente hyperbolique de x définie par $\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Documents interdits.

Exercice 1 (5 points). 1. Quand dit-on qu'une partie A de $\mathbb{R}$ admet un maximum ?

2. Dresser le tableau de variation de la fonction numérique de la variable réelle f définie par

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

3. On pose

$$F = \left\{ (-1)^n \frac{n}{n^2+1} / n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

(a) F est-elle une partie bornée de $\mathbb{R}$? Justifier.

(b) F admet-elle un minimum ? si oui déterminer sa valeur.

(c) F admet-elle un maximum ? si oui déterminer sa valeur.

Exercice 2 (5 points). On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n \times v_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $0 < v_n < u_n$ puis que $u_{n+1} - v_{n+1} < \frac{u_n - v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 3 (6 points). On désigne par a un réel strictement positif, et par f_a la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_a(x) = ae^{-x}$.

1. Justifier que l'équation $f_a(x) = x$ admet une unique solution dans $[0, +\infty[$. On note x_a cette solution.
2. Comparer a et x_a.
3. Justifier que pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$|f_a(x) - x_a| < a\,|x - x_a|.$$

Exercice 4 (4 points). Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{\text{th}\, x - \tan x}; \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{3 - \sin^2 x}}{\cos^2 x}$$

Indications 4. On pourra utiliser les developpements limités.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny 2017-2018
UFRMI-L1 2 heures

Examen de suites et fonctions dérivables

Nous désignons par $\ln x$ le logarithme népérien de x et $\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ la tangente hyperbolique de x. La fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ de bijection réciproque Arctan.

Documents Interdits.

Exercice 1 (5 points). Soient x et y des réels, montrer que :

1. $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$
2. $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$

Exercice 2 (5 points). Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par :

$$u_0 = 1 \text{ et } v_0 = 2$$
$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$.
2. Etudier la monotonie de (u_n) et (v_n).
3. Justifier que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice 3 (5 points). 1. Rappeler le théorème des accroissements finis.

2. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tous nombres réels négatifs a, b, tels que $a < b$,

$$\frac{1}{1 + a^2} \leq \frac{\text{Arctan}(b) - \text{Arctan}(a)}{b - a} \leq \frac{1}{1 + b^2}$$

Exercice 4 (5 points). 1. Déterminer le developpement limité de $\text{th}\, x$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

2. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{\text{th}\, x - \tan x}; \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{3 - \sin^2 x}}{\cos^2 x}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny 2017-2018
UFRMI-L1 2 heures

Examen de suites et fonctions dérivables Session 2

Nous désignons par $x \mapsto \text{Arcsin}\, x$ la bijection réciproque de sinus sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x \mapsto \text{Arctan}\, x$ la bijection réciproque de tangente sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $x \mapsto \ln x$ le logarithme népérien.
Les documents sont interdits, seule les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1 (6 points). On considère la fonction de variable réelle x définie par :

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer la dérivée de f en précisant l'ensemble de dérivabilité.
3. Etudier la parité de f.
4. f est-elle prolongeable par continuité en 1 ?
5. Déterminer les asymptotes (si elles existent) à la courbe de f.

Exercice 2 (8 points).
1. Montrer que pour x réel strictement positif, on a : $\ln(1+x) < x < (1+x)\ln(1+x)$.
2. Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq n$,
$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que,
$$\frac{\Pi_{k=1}^{n}(1+k)^k}{\Pi_{k=1}^{n}k^k} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$
4. Calculer
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^{\frac{x+1}{x}}}{x}.$$
5. En utilisant la relation $\Pi_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e^n < \Pi_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$ donner un encadrement de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, par deux suites ayant la même limite ℓ que l'on calculera.

Exercice 3 (6 points).
1. Donner le developpement limité à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = (x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$ au voisinage de 0. En déduire l'équation et la position de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
2. Donner le developpement limite à l'ordre 2 de la fonction $g(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$ au voisinage de $-\infty$. En déduire (si elle existe) l'équation de l'asymptote à la courbe de g, et sa position.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny 2018-2019
UFRMI-LI 2 heures

Examen de suites et fonctions dérivables session 1

Exercice 1 (5 points). Prouver que pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \leq |b-c|.$$

Exercice 2 (5points). On considère les suites récurrentes (a_n) et (b_n) définies par $a_1 = 3$, $b_1 = 2$ et

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer par récurrence que $b_n < a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Etudier les variations des suites (a_n) et (b_n).
3. Justifier que ces deux suites convergent vers la même limite ℓ.
4. Calculer le produit a_nb_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire ℓ.

***Exercice 3** (5 points).*

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f(0) = 0$. Calculer la limite de $\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}$ quand x tend vers 0.*
2. *Soit $f : R \to R$ une fonction de classe C^2 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Calculer, au moyen des dérivées de f la limite de $\frac{xf(x)-f(x^2)}{(f(x))^3}$ quand x tend vers 0.*

***Exercice 4** (5 points). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par* $f(x) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{x}) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

1. *Ecrire les développements limités à l'ordre 4 de $\cos(x)$ et $\cosh(x)$ au point 0.*
2. *Montrer que f est de classe C^1 et possède un développement limité d'ordre 2 en 0 puis le calculer.*

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny 2018-2019
Licence 1-Maths 2h00

Examen de suites et fonctions dérivables

Pour les exercices 1,2,3 et 4, après avoir recopié chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Chaque bonne réponse donne droit à 1 point et chaque mauvaise réponse vous fait perdre 0,5 point. Toute affirmation sans réponse vaut 0.

Exercice 1 (5 points).

1. La somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.
2. Si $E(x) > -1$ alors $E(|x|) = |E(x)|$.
3. L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} / |\sqrt[3]{2} - 1| < 10^{-25}\}$ admet un minimum.
4. Si f et g sont deux fonctions bornées définies sur $\mathbb{R}$ alors $\sup\{f(x) + g(x) / x \in \mathbb{R}\} = \sup\{f(x) / x \in \mathbb{R}\} + \sup\{g(x) / x \in \mathbb{R}\}$.
5. Si A et B sont deux sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}$ alors $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 2 (3 points). Soient (a_n) et (b_n) deux suites adjacentes.

1. La suite $(a_n - b_n)$ est monotone.
2. Si pour tout n, $a_n < b_n < 0$ alors la suite $(\frac{a_n}{b_n})$ est monotone décroissante.
3. Si pour tout n nous avons $a_{n+1} < a_n$ et $b_n < b_{n+1}$ alors nous avons $b_p < a_q$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 (3 points). Soit la fonction $g(x) = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x)$ est du signe de $x^2 + x - 2$.
2. Le developpement limité de g au voisinage de -2 est
$$g(x) = e^{\frac{1}{2}}(-4 - 2(x+2) - \frac{3}{4}(x+2)^2) + o((x+3)^3).$$
3. Le developpement limité de g au voisinage de -2 est
$$g(x) = e^{\frac{1}{2}}(-4 - \frac{3}{4}(x+2)^2) + o((x+3)^3). \quad \checkmark$$

Exercice 4 (4 points). Soit $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$. On note C la courbe representative de f dans un repère orthonormé.

1. Au voisinage de $-\infty$ on a
$$\sqrt{x(x+2)} = x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right)$$
2. En $+\infty$, C admet pour asymptote la droite d'équation $y = x + 2$.
3. En $-\infty$, C admet pour asymptote la droite d'équation $y = x + 2$.
4. En $-\infty$, C admet pour asymptote la droite d'équation $y = -x - 2$ et C est en dessous de son asymptote.

Exercice 5 (5 points). Soient (a_n) et (b_n) deux suites définies par $a_1 = 2, b_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$
$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$
Montrer que ces deux suites sont monotones et convergent vers la même limite.

Scanné avec CamScanner

$\text{argch}'x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad \text{argsh}' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad \text{argth}' = \frac{1}{1-x^2}$

$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \arctan' = \frac{1}{1+x^2}$

Université Félix Houphouët-Boigny
UFRMI-L1

2019-2020
2 heures

Examen de suites et fonctions dérivables

Nous notons $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ le sinus hyperbolique de x. La fonction sh réalise une bijection réciproque Argsh. La fonction sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$ de bijection réciproque Arcsin.
Documents interdits.

Exercice 1 (5 points). Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes. 1 point pour chaque bonne réponse, -0,5 pt pour chaque mauvaise réponse et 0 pt en cas d'absence de réponse.

1. La fonction Arcsin est dérivable sur $[-1,1]$.
2. La fonction Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\text{Argsh})'(x) = \frac{-1}{x^2+1}$
3. Il existe un nombre infini de nombres irrationnels dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$.
5. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b) = 0$ alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

Exercice 2 (4 points). Soient α, β et γ des réels strictement supérieurs à -1, et $a, b, c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{(0,0,0)\}$. Montrer que l'équation

$$\frac{a}{x^\alpha} + \frac{b}{x^\beta} + \frac{c}{x^\gamma} = 1$$

admet exactement une solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 (5 points).

1. Chacune des expressions ci-dessous represente le developpement limité de f à l'ordre n au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Déterminer pour chaque expression n, x_0, la partie régulière et le reste du developpement limité.
   (a) $f(x) = x - 5x^3 + x^{11} - \frac{x^{20}}{\sin x}$.
   (b) $f(x) = \frac{1}{x^5} \sin\left(\frac{1}{x^7}\right)$
   (c) $f(x) = 2 + \frac{1}{8}(2x-\pi)^3 + \frac{1}{16}(2x-\pi)^4 + (2x-\pi)^3(\sin x - 1)$.
2. Calculer la limite suivante : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{3-\sin^2 x}}{\cos^2 x}$.
3. Soit f une fonction dont le developpement limité à l'ordre 7 en 0 est $f(x) = 3x + x^5 + o(x^7)$. Donner une équation de la tangente à la courbe de f en 0, ainsi que la position relative de cette tangente par rapport à la courbe.

Exercice 4 (6 points). On considère les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ définies par $a_1 = 2$, $b_1 = 1$ et

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

1. Etudier la monotonie des suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$.
2. Donner avec justification, la nature de ces suites (c'est-à-dire convergente ou divergente).
3. Donner si elle existe, la limite de $\{a_n\}$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny 2020−2021
UFRMI 2 heures

Examen de suites et fonctions dérivables

Exercice 1 (1 + 2 + 2 points)

1. Soient $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

2. Déduire de ce qui précède que

$$inf\{2^x + 2^{\frac{1}{x}}; x \in \mathbb{R}_+^*\} = 4.$$

3. Déterminer la borne inférieure et la borne supérieure de

$$A = \{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : n, m \in \mathbb{N}^*\}$$

Exercice 2 (1,5 + 2 + 1,5). On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = \sqrt{2}$ et $v_0 = \frac{3}{2}$ puis, pour $n \geq 0$ entier naturel donné,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) v_n}.$$

1. Montrer que pour tout n, on a $0 < u_n < v_n$.

2. Etudier la variation des deux suites.

3. Justifier que les deux suites convergent et ont la même limite.

Exercice 3 (2 + 1,5 + 1,5 points). Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1) = 0$. On suppose que f est dérivable en 0 et en 1 et que $f'(0) = f'(1) = 0$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

1. Montrer que la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1} & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$ est continue sur $[0,1]$.

2. Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}$.

3. Déduire de ce qui précède que l'équation $f(x) - x = 0$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.

Exercice 4 $(2,5+2,5$ points). Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1} - x + 2.$$

1. Donner le developpement limité à l'ordre 3 de f en 1. Déduire de ce developpement l'équation et la position relative de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

2. Donner le developpement limité à l'ordre 3 de f en $+\infty$. Que dire de la branche infinie de la courbe de f en $+\infty$?

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny 2017-2018
UFRMI-L1 2 heures

Examen de suites et fonctions dérivables

Nous désignons par $\ln x$ le logarithme népérien de x et $\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ la tangente hyperbolique de x. La fonction tangente réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ de bijection réciproque Arctan.
Documents interdits.

Correction Partielle

Exercice 2 *Soient x et y des réels, montrer que :*

1. $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$
2. $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x-1|)(1 + |y-1|)$

Correction 2 1. *On a*

$$2|x| = |(x+y) + (x-y)| \leq |x+y| + |x-y|$$

et

$$2|y| - |(x+y) - (x-y)| \leq |x+y| + |x-y|,$$

en sommant les deux inégalités, on a le double du résultat demandé.

2. *On a*

$$(1 + |x-1|)(1 + |y-1|) = |x-1| + |y-1| + |x-1||y-1| + 1.$$

Il s'agit donc de prouver que

$$|xy - 1| \leq |x-1| + |y-1| + |x-1||y-1| = |x-1| + |y-1| + |xy - x - y + 1|$$

Ce qui s'écrit $|xy-1| - |xy - x - y + 1| \leq |x-1| + |y-1|$ ou encore $|xy-1| - |x + y - xy - 1| \leq |x-1| + |y-1|$ Or la seconde inégalité triangulaire donne $|a| - |b| \leq |a+b|$

Exercice 4 : Calculer les limites suivantes:

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{\sin x - \tan x}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$; $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$; $\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^9)$

$\sin x - \tan x = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{225}{1800}x^5 + o(x^5)$; $\tanh x - \tan x = -\frac{2}{3}x^3 + o(x^5)$

La division suivant les puissances croissantes de $\sin x - \tan x$ par $\tanh x - \tan x$ on obtient $\frac{3}{4} + \alpha x^2 \longrightarrow \frac{3}{4}$ quand x tend vers 0.

Donc $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x - \tan x} = \frac{3}{4}}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{3 - sin^2 x}}{\cos^2 x}$$

Par expression conjugué,l'on a : $\frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{3-sin^2 x}}{\cos^2 x} = \frac{1 + \sin x - 3 + sin^2 x}{\cos^2 x(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{3 - sin^2 x})}$

En appliquant judicieusement les developpements limités on obtient :

$\boxed{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{3-sin^2 x}}{\cos^2 x} = -\frac{3\sqrt{2}}{8}}$

Scanné avec CamScanner

CORRECTION D'EXAMEN DE SUITES ET FONCTIONS DERIVABLES MI (2018-2019)

1ERE SESSION

EXERCICE 1

Montrons que $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \leq |b-c|$

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \leq |b-c| \leftrightarrow \left(\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\right)^2 \leq (|b-c|)^2$$

$$a^2+b^2+a^2+c^2-2\left(\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}\right) \leq b^2+c^2-2bc$$

$$a^2-\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2} \leq -bc$$

$$a^2+bc \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}$$

Si $a^2+bc<0$,alors il n'y a rien à démontrer.

Supposons que $a^2+bc \geq 0$

$$(a^2+bc)^2 = a^4+b^2c^2+2a^2bc\,,\left(\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}\right)^2 = a^4+a^2c^2+b^2a^2+b^2c^2$$

Et $(a^4+b^2c^2+2a^2bc)-a^4+a^2c^2+b^2a^2+b^2c^2 = 2a^2bc-a^2c^2-b^2a^2$

$$=a^2(2bc-c^2-b^2)$$

$$-a^2(b-c)^2 \leq 0$$

Donc $a^2+bc \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}$ *et pour la suite que* $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \leq |b-c|$

EXERCICE 2

1) $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ *et* $b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$

pour $n=1$ *nous avons*
$b_1=2<3<a_1$ *donc* $0<b_1<a_1$.
soit $n \geq 1$ *, nous supposons* $0<b_n<a_n$.

$$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}-\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$$

$$=\frac{(a_n+b_n)^2-4a_nb_n}{2(a_n+b_n)}$$

$$=\frac{a_n^2+2a_nb_n+b_n^2-4a_nb_n}{2(a_n+b_n)}$$

$$=\frac{a_n^2+b_n^2-2a_nb_n}{2(a_n+b_n)}$$

$$=\frac{(a_n-b_n)^2}{2(a_n+b_n)}>0$$

$$a_{n+1}>b_{n+1}$$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0<b_n<a_n$

Scanné avec CamScanner

2) Variation de (a_n) et (b_n)

$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{a_n + b_n - 2a_n}{2}$

$= \frac{b_n - a_n}{2} < 0$ car $b_n < a_n$

Donc (a_n) est décroissante .

$b_{n+1} - b_n = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} - b_n = \frac{2a_n b_n - a_n b_n - b_n^2}{2}$

$= \frac{a_n b_n - b_n^2}{a_n + b_n} = \frac{b_n(a_n - b_n)}{a_n + b_n} > 0$ c

Donc (b_n) est croissante .

3) Justification de la convergence

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq a_1$ car (a_n) est décroissante , $b_n < a_n$ d'après le 1) donc $b_n < a_1 = 3$

Conclusion : (b_n) est croissante et majorée par 3 , donc lim nc elle converge .

Soit $n \in \mathbb{N}^*, 2 = b_1 \leq b_n$ car (b_n) est croissante, $b_n < a_n$ d'après 1) donc $2 \leq b_n < a_n$.

Conclusion : (a_n) est décroissante et minorée par 2 , donc elle converge .

soient l et l' , les limites respectives de (a_n)et (b_n), nous avons :

$l = \frac{l + l'}{2} \leftrightarrow 2l = l + l' \quad l = l'$

4) $a_1 b_1 = 6$, soit $n \geq 1$. Nous supposons que $a_n b_n = 6$,

$a_{n+1} b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \times \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = a_n b_n = 6$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n b_n = 6$

C'est-à-dire $l^2 = 6$ d'ou $l = \sqrt{6}$ car les suites sont à termes positifs.

EXERCICE 3

soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2

tel que $f(0) = 0$.

1) Calcul de $lim \frac{f(x)+f(-x)}{x^2}$

f adment en 0 u DL_2^0 qui s'écrit

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$

avec $\epsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

il vient alors qu'au voisinage de 0.

$$\frac{f(x) + f(-x)}{x^2} = \frac{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + f(0) - f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + x^2(\epsilon(x) + \epsilon(-x))}{x^2}$$

$= \frac{2f''(0)}{2} + \epsilon(x) + \epsilon(-x) \to f''(0)$ quand $x \to 0$.

2)

soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tel que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$, calculons $lim \frac{xf(x) - f(x^2)}{(f(x))^3}$

f admet un DL_2^0 , C'est-à-dire pour tout x dans un voisinage de 0,

Scanné avec CamScanner

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$$

$$f(x^2) = f(0) + f'(0)x^2 + \frac{f''(0)}{2}x^4 + x^4\epsilon(x^2), \quad \textit{sinon considérons le voisinage dans }]-1;1[$$

$$xf(x) = xf(0) + f'(0)x^2 + \frac{f''(0)}{2}x^3 + x^3\epsilon(x)$$

$$(f(x))^3 = \left(f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)\right)^3$$

$$= \left(f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2\right)^3 + 3\left(f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2\right)x^2\epsilon(x) + 3\left(f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2\right)x^4\epsilon(x^2) + x^2\epsilon(x^3)$$

$$= (f(x))^3 = (f'(0))^3x^3 + x^3\epsilon'(x) \textit{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(0) = 0$$

Par ailleurs,

$$xf(x) - f(x^2) = x^2f'(0) + x^3\frac{f''(0)}{2} - f'(0)x^2 - \frac{f''(0)}{2}x^4 + x^3\epsilon'(x), \textit{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(0) = 0$$

$$= x^3\frac{f''(0)}{2} - \frac{f''(0)}{2}x^4 + x^3\epsilon''(x)$$

Donc

$$\frac{xf(x) - f(x^2)}{(f(x))^3} = \frac{x^3\frac{f''(0)}{2} - \frac{f''(0)}{2}x^4 + x^3\epsilon''(x)}{(f'(0))^3x^3 + x^3\epsilon'(x)}$$

$$= \frac{\frac{f''(0)}{2} - \frac{f''(0)}{2}x + \epsilon''(x)}{(f'(0))^3 + \epsilon'(x)}$$

D'où $\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-f(x^2)}{(f(x))^3} = \frac{\frac{f''(0)}{2}}{(f'(0))^3} = \frac{f''(0)}{2(f'(0))^3}$

EXERCICE 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{x}) & si\ x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & si\ x < 0 \end{cases}$$

1) Au voisinage de 0

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\cos h(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

2)

a) Montrons que f est de classe C^1

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ donc de classe C^1.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} sh(\sqrt{x}) \; si \; x > 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-x}} sin(\sqrt{-x}) \; si \; x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \begin{cases} \frac{\cosh(\sqrt{x})-1}{x} si \; x > 0 \\ \frac{\cos(\sqrt{-x})-1}{x} si \; x < 0 \end{cases}$$ 1

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{\cosh(\sqrt{x})-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4!}+o(x^4)-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{1}{2} + \frac{x}{4!} + o(x^4) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{\cos(\sqrt{-x})-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4!}+o(x^2)-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{1}{2} + \frac{x}{4!} + o(x) = \frac{1}{2}$$

Donc f est dérivable en et $f'(0) = \frac{1}{2}$. *Par ailleurs*

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{1}{2\sqrt{x}} sh(\sqrt{x})$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1+\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}{2} = \frac{1}{2}$$

Démontrons

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} f'^{(x)} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{-x}) = \frac{1}{2}$$

Donc f'*est continue en* 0.

Conclusion : f *est de classe* C^1.

D'après le DL_2 de cosh(x) et cos(x)

Pour $x > 0$, $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2)$

$x < 0, f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2)$

donc $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2)$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

Correction d'examen de suite et fonctions dérivables

Exercice 1

1) Faux
2) Faux
3) Vrai
4) Faux
5) Faux

Exercice 2 (à voir)

Exercice 3

1) a) $n = 11, x_0 = 0$

partie régulière : $x - 5x^3 + x^{11}$

reste du développement limité est : $-\frac{x^{20}}{sinx}$

b) $n = 6, x_0 = \infty$

partie régulière : 0

reste du développement limité est : $\frac{1}{x^6}\sin\left(\frac{1}{x^7}\right)$

c) $n = 4, x_0 = \frac{\pi}{2}$

partie régulière : $2 + \frac{1}{8}(2x-\pi)^3 + \frac{1}{16}(2x-\pi)^4$

reste du développement limité est :

$(2x-\pi)^3 \sin(x-1)$

2)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+sinx}-\sqrt{3-(sinx)^2}}{(cosx)^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+sinx}-\sqrt{3-(sinx)^2}}{1-(sinx)^2}$$

Posons $t = \sin x$

On a $t \to 1$ lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$

Ainsi $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+sinx}-\sqrt{3-(sinx)^2}}{(cosx)^2} = \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{3-(t)^2}}{1-t^2}$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{1+t-(3-t^2)}{(1-t^2)\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{3-t^2}\right)}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{t^2+t-2}{(1-t^2)\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{3-t^2}\right)}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{(t+2)(t-1)}{(1-t)(1+t)\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{3-t^2}\right)}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{t+2}{-(1+t)\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{3-t^2}\right)}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{3}{2(\sqrt{2}+\sqrt{2})}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+sinx}-\sqrt{3-(sinx)^2}}{(cosx)^2} = -\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

3) Une tangente à la courbe de f en 0 est

$(T): y = 3x$

Position relative

$f(x) - 3x = x^5 + o(x^7)$ à le même signe que x^5 donc que x.

Donc $\forall x \in]-\infty; 0[$, f est au dessous de (T)

$\forall x \in]0; +\infty[$, f est au dessus de (T)

Exercice 4 (Voir Valideur)

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

CORRECTION EXAMEN SUITE ET FONCTION DERIVABLE 2021
SESSION 1

EXERCICE 1

1) Soient $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

On a : $\forall a > 0$ et $b > 0$, $0 \leq \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{ab} + a \Rightarrow 0 \leq a + b - 2\sqrt{ab}$

$$\Rightarrow 2\sqrt{ab} \leq a + b \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

2) Déduire de ce qui précède que $inf\left\{2^x + 2^{\frac{1}{x}} ; x \in \mathbb{R}_+^*\right\} = 4$

Posons $A = \left\{2^x + 2^{(1/x)} ; x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$.

En posant $a = 2^x$ et $b = 2^{(1/x)}$, la question 1) nous donne que :

$$\frac{2^x + 2^{(1/x)}}{2} \geq \sqrt{2^x \times 2^{(1/x)}} = \sqrt{2^{x+\frac{1}{x}}} = \sqrt{2^{\frac{x^2+1}{x}}}$$

$$\Rightarrow 2^x + 2^{(1/x)} \geq 2\sqrt{2^{\frac{x^2+1}{x}}} \qquad (1)$$

$\forall x > 0, x^2 > 0$ alors en posant $a = x^2$ et $b = 1$, on a : $\frac{x^2+1}{2} \geq \sqrt{x^2} = x$

$\Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x$. Comme $x > 0$, en divisant le tout par x, on a : $\frac{x^2+1}{x} \geq \frac{2x}{x} = 2$

En remplaçant ce résultat dans (1), on a :

$$2^x + 2^{(1/x)} \geq 2\sqrt{2^{\frac{x^2+1}{x}}} \geq 2\sqrt{2^2} = 2 \times 2 = 4$$

Alors $\forall \alpha \in A, \alpha \geq 4 \Rightarrow 4$ est un minorant de A.

- Montrons que $inf(A) = 4$.

Considérons $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow 2^x + 2^{(1/x)}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \left(2^x + 2^{(1/x)}\right)' = (2^x)' + \left(2^{(1/x)}\right)'$$

$$f'(x) = \left(e^{x\ln 2}\right)' + \left(e^{\frac{1}{2}\ln(2)}\right)' \text{ car } 2^x = e^{x\ln 2} \text{ et } 2^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln(2)}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \ln 2 \left[2^x - \frac{1}{x^2} 2^{(1/x)}\right]$

On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln 2 \left[2^x - \frac{2^{(1/x)}}{x^2}\right] = 0$

$$2^x - \frac{2^{(1/x)}}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{2^{(1/x)}}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow x\ln(2) = \frac{1}{x}\ln(2) - 2\ln(x)$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)\ln(2) = -2\ln(x) \qquad (2)$$

En posant $X = \ln(x)$, on a :

$x = e^x$ et (2) devient $e^{2X}\ln(2) + 2 \times e^x - \ln(2) = 0 \Rightarrow X = 0$

Or $x = \ln(x) \Rightarrow 0 = \ln(x) \Rightarrow x = 1$

Alors le point $x = 1$ est un point critique.

- Déterminons la nature du point $x = 1$

On a : $f''(x) = \ln(2)\left[\ln(2) \times 2^x - \left[\frac{2}{x^3} 2^{(1/x)} - \frac{1}{x^4} 2^{(1/x)}\right]\right]$

$$f''(x) = \ln(2)\left[2^x \ln(2) + \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) 2^{(1/x)}\right]$$

On a : $f''(1) = \ln(2)\left[2^1 \ln(2) + \left(\frac{2}{1^3} + \frac{1}{1^4}\right) 2^{(1/1)}\right]$

$$f''(1) = \ln(2)(2\ln(2) + 6) > 0$$

$f''(1) > 0 \Rightarrow f(1) = 4$ est le minimum de f.

$$\boxed{inf(A) = inf_{x \in \mathbb{R}_+^*}(f) = 4}$$

3) Déterminer la bonne inférieure et la bonne supérieure de :

$$A = \left\{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \; ; n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$$

- Déterminons si elle existe $inf(A)$.

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*, \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} = \frac{m^2 + 4n^2}{n\,m} \geq \frac{4n\,m}{n\,m} = 4$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Car $(m-2n)^2 = m^2 + 4n^2 - 4m\,n \geq 0 \Rightarrow m^2 + 4n^2 \geq 4m\,n$

Ainsi 4 est un minorant de A et donc A admet une borne inférieure notée $inf(A) = \alpha$

Comme α est le plus grand des minorant de A et que 4 est un minorant de A, on a :

$4 \leq \alpha$. De plus, pour $m = 2n$, on a : $\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} = 4 \in A$. Alors $4 \geq \alpha$.

Ainsi $4 \leq \alpha$ et $\alpha \leq 4 \Rightarrow \alpha = 4$. Par conséquent $inf(A) = 4$.

- Déterminons si elle existe $sup(A)$.

On a : $\forall m, n \in \mathbb{N}^*, m^2 + 4n^2 \geq 4n\,m > n\,m$

Donc $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ ou \\ m\to+\infty}} \left(\frac{m}{n} + \frac{4n}{m}\right) = \lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ ou \\ m\to+\infty}} \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} = +\infty$

Par conséquent A n'étant pas majorant et donc A n'admet pas de borne supérieure.

EXERCICE 2 (Voir session 1 de l'année 2017 - 2018)

EXERCICE 3 (Cet exercice comporte des erreurs)

EXERCICE 4

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1} - x + 2$.

1) Donner le développement limité à l'ordre 3 de f en 1.

Posons $X = x - 1$. quand $x \longrightarrow 1, X \longrightarrow 0$ et $x = X + 1$

$$f(X) = \sqrt{(X+1)^2 + 2(X+1) - 1} - (X+1) + 2$$

$$= \sqrt{X^2 + 2X + 1 + 2X + 2 - 1} - X + 1$$

$$f(X) = \sqrt{X^2 + 4X + 2} - X + 1$$

Posons $g(X) = \sqrt{X^2 + 4X + 2} = \sqrt{2\left(1 + 2X + \frac{X^2}{2}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \left(2X + \frac{X^2}{2}\right)}$

Posons $t = 2X + \frac{X^2}{2}$. Alors quand $X \longrightarrow 0, t \longrightarrow 0$.

$$g(t) = \sqrt{2}\sqrt{1+t} = \sqrt{2}\,(1+t)^{1/2}$$

Scanné avec CamScanner

$$g(t) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}t + \left(\frac{\frac{1}{2}}{1} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2}\right)t^2 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{1} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-2}{3}\right)t^3 + 0(t^3)\right)$$

$$g(t) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{t}{2}t - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + 0(t^3)\right)$$

On a : $t^2 = \left(2X + \frac{X^2}{2}\right)^2 = (2X)^2 + 2(2X)\left(\frac{X^2}{2}\right) + 0(X^3) = 4X^2 + 2X^3 + 0(X^3)$

$$t^3 = \left(2X + \frac{X^2}{2}\right)^2\left(2X + \frac{X^2}{2}\right) = (4X^2 + 2X^3) + 0(X^3)$$

$$t^3 = 8X^3 + 0(X^3)$$

$$\Rightarrow g(X) = \sqrt{2}\left(1 + X + \frac{X^2}{4} - \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{4} + 0(X^3)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(1 + X - \frac{X^2}{4} - \frac{X^3}{4} + 0(X^3)\right)$$

On a : $\begin{cases} X = x - 1 \Rightarrow X^2 = x^2 - 2x + 1 \\ X^3 = (x^2 - 2x + 1)(x - 1) = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1 \\ X^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 0(x^3) \end{cases}$

Alors $g(x) = \sqrt{2}\left(1 + x - 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{x^3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{3x}{4} + \frac{1}{4} + 0(x^3)\right)$

$$g(x) = \sqrt{2}\left(x + \frac{x}{2} - \frac{3x}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{4} + 0(x^3)\right)$$

$$g(x) = \sqrt{2}\left(\frac{3x}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + 0(x^3)\right)$$

Alors $f(x) = g(x) - x + 2$

$$f(x) = \sqrt{2}\left(\frac{3x}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4}\right) - x + 2 + 0(x^3)$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$f(x) = \frac{-4+3\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^3 + 2 + 0(x^3)$$

$$f(x) = 2 + \frac{-4+3\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^3 + 2 + 0(x^3)$$

L'équation de la tangente à la courbe de f est donc $y = 2 + \frac{-4+3\sqrt{2}}{4}x$

On a : $f(x) - \left(2 + \frac{-4+3\sqrt{2}}{4}x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}x^3 + 0(x^3)$

On regarde le signe du monôme $\frac{\sqrt{2}}{2}x^2$.

On a bien $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 \geq 0$. Alors la courbe de f est au-dessus de la tangente au point d'abscisse 1.

2) Donner le développement limité de f en $+\infty$. Que dire de la branche infinie de la courbe en $+\infty$?

On a : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1} - x + 2$

$$f(x) = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} - x + 2 = |x|\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} - x + 2$$

Au voisinage de $+\infty, x > 0 \Rightarrow |x| = x$

$$f(x) = x\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} - x + 2$$

Posons $h(x) = \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}$

En posant $X = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$, on a : $X \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$

$$h(x) = \sqrt{1+X} = (1+X)^{1/2}$$

$$h(x) = 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + \frac{X^3}{16} - \frac{5}{128}X^4 + 0\left(\frac{1}{X^4}\right)$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

On a : $\begin{cases} X^2 = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^2 = \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4} + 0\left(\frac{1}{x^4}\right) \\ X^3 = \frac{8}{x^3} - \frac{8}{x^4} - \frac{4}{x^4} + 0\left(\frac{1}{x^4}\right) \\ X^4 = \frac{16}{x^4} + 0\left(\frac{1}{x^4}\right) \end{cases}$

$$h(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{8}{x^3} - \frac{8}{x^4} - \frac{4}{x^4}\right) - \frac{5}{128} \times \frac{16}{x^4} + 0\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$h(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{8x^4} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{2x^4} - \frac{1}{4x^4} - \frac{5}{8x^4} + 0\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$h(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{2x^4} + 0\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Ainsi $f(x) = x\,h(x) - x + 2$

$$f(x) = x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x^3} - x + 2 + 0(x^3)$$

$$\boxed{f(x) = 3 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x^3} + 0\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x^3} = 3$

Alors la courbe représentative de f admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y' = 3$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB
UFR MATHS - INFO

ANNEE 2016 - 2017

CALCUL INTEGRAL
SESSION 1
DUREE: 1 H 30

EXERCICE 1:

But de l'exercice: résoudre par la méthode de superposition, l'équation:
(E): $y'' + 2y' + y = 2(x-1)\cosh(x)$.
Rappel: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
1) Donner la solution générale de l'équation homogène associée à (E).
2) Déterminer une solution particulière y_1 de l'équation
$y'' + 2y' + y = (x-1)\exp(x)$
3) Déterminer une solution particulière y_2 de l'équation
$y'' + 2y' + y = (x-1)\exp(-x)$.
On justifiera pourquoi elle est de la forme $(Ax^3 + Bx^2)\exp(-x)$.
4) Donner alors la solution générale de l'équation (E).
5) Donner l'unique solution $f(x)$ de (E) vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$.

EXERCICE 2:

Dans cet exercice, les changements de variables vous sont imposés.
Calculer les intégrales indéfinies suivantes:
$I = \int \frac{\sin x + \cos x}{2 - \sin 2x} dx$; $(\sin x - \cos x = t)$
$J = \int \frac{dx}{x(1+x^n)}$; $n \in \mathbb{N}^*$ $\left(t = \frac{1}{x}\right)$
$K = \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} dx$; $\left(x - \frac{1}{x} = t;\ x > 0\right)$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI : L1 Année 2016-2017

EXAMEN CALCUL INTEGRAL SESSION 2 DURÉE : 1H30

EXERCICE 1

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{8}$$

2. Donner l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

EXERCICE 2

Donner l'ensemble des primitives de f si :

a) $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$ $[x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)]$

b) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ [Poser $x = t^6$].

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Année Universitaire 2017 - 2018
UNIVERSITE F. H. B.
L1 UFR MI

CALCUL INTEGRAL
SESSION 1
DUREE: 1H30

EXERCICE 1:

On donne $f(x) = \frac{x-1}{x^3+1}$ et $g(x) = \frac{x^2-9}{(x^2+3)(x^2+1)}$

1) Déterminer $A, B, C \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

2) Déterminer $P, Q, R, T \in \mathbb{R}$ tels que $g(x) = \frac{Px+Q}{x^2+3} + \frac{Rx+T}{x^2+1}$.

3) Calculer $\int f(x)dx$ et $\int g(x)dx$

EXERCICE 2:

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 6y = (x-2)e^{-3x}$

1) Donner la solution générale y_h de l'équation homogène associée.

2) Expliquer pourquoi une solution particulière y_p de (E) est de la forme $y_p(x) = x(ax+b)e^{-3x}$. Déterminer les réels a et b.

3) Donner la solution générale y_g de l'équation complète (E).

4) Donner l'unique solution y_0 de l'équation (E), vérifiant

$y_0(0) = 1$ et $y_0'(0) = -1$

5) Donner un développement limité de y_0 à l'ordre 2 au voisinage de 0. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de y_0 au point $(0,1)$ et étudier les positions relatives.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Examen de Calcul Intégral 2017-2018 Session 2 Licence 1

DUREE : 1*H*15

Exercice 1 :

Trouver l'unique solution de l'équation $Y'' + 3Y' - 40Y = (X^2 + X - 1)\, e^{5X}$ vérifiant $Y(0) = 1; Y'(0) = -2$

Exercice 2 :

Calculer les integrales indéfinies suivantes :

$$I_1 = \int \frac{x^2 - 1}{x^3 (x^2 + 1)} dx \quad I_2 = \int \frac{dx}{x^3 + 1} dx$$

Indication : $(-1)^3 + 1 = 0$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB
UFR MATHS - INFO

ANNEE 2018 - 2019

CALCUL INTEGRAL
SESSION 1 (L1)
DUREE: 1 H 30

EXERCICE 1:

On considère l'équation différentielle (E): $y''-y'-6y=(x^2+x-2)e^{3x}$
1) Donner la solution générale de l'équation homogène associée.
2) Expliquer pourquoi une solution particulière de (E) est de la forme $(ax^3+bx^2+cx)e^{3x}$.
Déterminer alors les nombres réels a, b et c.
3) Donner la solution générale de (E).
4) Donner l'unique solution f de (E) vérifiant $f(0)=1$; $f'(0)=-\frac{53}{125}$
5) Donner le développement limité à l'odre 3 de f au voisinage de 0.En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point (0, f(0)). Etudier les positions relatives.

EXERCICE 2

Donner l'ensemble des primitives des fonctions suivantes, après en avoir précisé les domaines de définition:

a) $g(x)=\frac{1}{\sin x-2\cos x}$

b) $h(x)=\frac{7x-9}{x^2-x+1}$

c) $k(x)=\frac{x\sqrt{1+x}}{x+\sqrt{1+x}}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

ANNEE 2018 - 2019

UNIVERSITE FHB
UFR MATHS - INFO

CALCUL INTEGRAL
SESSION 2 L1
DUREE: 1 H 30

EXERCICE 1

A) Résoudre le problème suivant:
$y'' + y' - 2y = (x^2 - 2x + 7)\, e^x$
$y(0) = -1;\ y'(0) = 3$

B) On donne l'équation différentielle $(E) : y' + y^2 = \frac{1}{4x^4}$
1) Vérifier que la fonction $y_0(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$ en est une solution particulière.
2) Montrer que le changement de fonction $y(x) = \frac{1}{z(x)} + y_0(x)$ transforme (E) en une certaine équation (E_z) que l'on résoudra.
3) En déduire la solution générale de (E).

EXERCICE 2

Déterminer l'ensembles des primitives des fonctions suivantes, après en avoir donné le domaine de définition:
1) $f(x) = \frac{1}{x^3+27}$ (remarque: $(-3)^3 + 27 = 0$)
2) $g(x) = \frac{\sin 2x}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB
UFR MATHS - INFO

ANNEE 2019 - 2020

CALCUL INTEGRAL
SESSION 1 (L1)
DUREE: 1 H 30

EXERCICE 1:

On considère l'équation différentielle (E): $y'' - y' - 6y = (-x + 9)e^{-2x}$
1) Donner la solution générale de l'équation homogène associée.
2) Expliquer pourquoi une solution particulière de (E) est de la forme $(ax^2 + bx)e^{-2x}$.
Déterminer alors les nombres réels a et b.
3) Donner la solution générale de (E).
4) Donner l'unique solution f de (E) vérifiant $f(0) = 1$; $f'(0) = \frac{6}{25}$
5) Donner le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(0, f(0))$. Etudier les positions relatives.

EXERCICE 2

Donner l'ensemble des primitives des fonctions suivantes, après en avoir précisé les domaines de définition:

a) $g(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$.

b) $h(x) = \frac{9x+17}{x^2+2x+2}$

c) $k(x) = \frac{x\sqrt{2-x}}{x-\sqrt{2-x}}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFHB 20_21
UFR MATHS-INFO

CALCUL INTEGRAL

Durée : 1h45min

EXERCICE 1

Soient $a, b : I \hookrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues, et $y : I \to]0; +\infty[$ une solution de l'équation $(E) : y' + ay = by^m$.

1) On suppose $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$.

Montrer que par un changement convenable de fonction inconnue, (E) se transforme en équation différentielle linéaire du premier ordre.

2) On désigne par φ une primitive de la fonction $(1-m)a$.

Déterminons alors y.

3) Que se passe-t-il si $m = 1$? Donner la formule de calcul de y.

4) Résoudre le problème $\begin{cases} x^3y' + y^4 = x^2y;\ x > 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Attention ! Identifier clairement a, b et m avant de passer à la résolution.

EXERCICE 2

Préciser l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes, puis donner l'ensemble de leurs primitives.

1) $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$
2) $h(x) = \frac{4x+7}{x^2+x+2}$
3) $k(x) = \frac{x+3}{(x-1)^2(x^2+3)}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB ANNEE 2020 – 2021
UFR MATHS-INFO
ECUE: Probabilité

CALCUL INTEGRAL
SESSION 2 (L1)
DUREE: 1H45

EXERCICE 1:

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - 6y = (x-1)e^{3x}$

1) Donner la solution générale de l'équation homogène associée.

2) Expliquer pourquoi une solution particulière de (E) est de la forme $(ax^2 + bx)e^{3x}$.
Déterminer alors les nombres réels a et b.

3) Donner la solution générale de (E).

4) Donner l'unique solution f de (E) vérifiant $f(0) = 1$; $f'(0) = -\frac{6}{25}$

5) Donner le développement limité à l'ordre 4 de f au voisinage de 0. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(0, f(0))$. Etudier les positions relatives.

EXERCICE 2:

Donner l'ensemble des primitives des fonctions suivantes, après en avoir précisé les domaines de définition:

a) $g(x) = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$

b) $h(x) = \dfrac{5x - 11}{x^2 + 2x + 2}$

c) $k(x) = \dfrac{x\sqrt{2-x}}{x - \sqrt{2-x}}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN DE CALCUL INTEGRAL
1re SESSION 2016-2017

Exercice 1 :

1. Solution générale de l'équation homogène(E_H)
$(E_H) : y'' + 2y' + y = 0.$
Equation caractéristique $(E_C) : r^2 + 2r + 1 = 0.$
On a : $\Delta = 0$ et $r_0 = -1$.Donc la solution générale de l'équation homogène associée à (E) est :$Y_H = (\mu + \lambda x)e^{-x}; \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

2. Une solution particulière y_1 de l'opération $y'' + 2y' + y = (x-1)e^x.$

Soit $f_1(x) = (x-1)e^x \forall x \in \mathbb{R}$.D'après les notations du cour,ici $\alpha = 1$ qui n'est pas racine de (E_C),donc la solution particulière y_1 est de la forme $y_1 = (ax + b)e^x$.

En utilisant la rélation $y_1'' + 2y_1' + y_1 = (x-1)e^x$, On obtient $\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

c'est-à-dire $\boxed{y_1 = (\frac{1}{4}x - \frac{1}{2})e^x} \forall x \in \mathbb{R}.$

3. Une solution particulière y_2 de l'équation $y'' + 2y' + y = (x-1)e^{-x}.$

Soit $f_2(x) = (x-1)e^{-x}$;On a : $\alpha = -1$ qui est une solution double de (E_C),alors une solution particulière y_2 de $y'' + 2y' + y = f_2(x)$ est de la forme $y_2 = x^2(Ax + Bx^2)e^{-x}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $y_2 = (Ax^3 + Bx^2)e^{-x}$.

A l'aide de la relation $y_2'' + 2y_2' + y_2 = (x-1)e^{-x}$ On obtient $\begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$
Ainsi ,$y_2 = (\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2)e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$

4. Solution générale de l'équation(E).
D'après le principe de superposition,une solution particulière de l'équation (E) est : $y_p = y_1 + y_2$.D'où la solution générale de l'équation (E) :
$y = y_H + y_p = y_H + y_1 + y_2 = (\mu + \lambda x)e^{-x} + (\frac{1}{4}x - \frac{1}{2})e^x + (\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2)e^{-x}.$
$\boxed{Y = (\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \lambda x + \mu)e^{-x} + (\frac{1}{4}x - \frac{1}{2})e^x; x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

5. L'unique solution $f(x)$ de (E) vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$.
La solution générale est : $y = (\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \lambda x + \mu)e^{-x} + (\frac{1}{4}x - \frac{1}{2})e^x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors $f(0) = 0 \Rightarrow \mu - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{2}$.
$f'(0) = 0 \Rightarrow \lambda - \mu - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{4}$.
Ainsi ; $\boxed{f(x) = (\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2})e^{-x} + (\frac{1}{4}x - \frac{1}{2})e^x, x \in \mathbb{R}}$

Exercice 2

Calcul des intégrales suivantes en utilisant les changements de variables proposés.

1. $I = \int \frac{\sin x + \cos x}{2 - \sin 2x} dx; (\sin x - \cos x = t)$
$t = \sin x - \cos x \Rightarrow dt = (\sin x + \cos x)dx$.
$t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x = 1 - \sin 2x \Rightarrow t^2 + 1 = 2 - \sin 2x$
Ainsi, $I = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan(t) + C, C \in \mathbb{R}$. *On a* : $t = \sin x - \cos x$.
Donc $\boxed{I = \arctan(\sin x - \cos x) + C, x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}}$.

2. $J = \int \frac{dx}{x(1+x^n)}; (n \in \mathbb{N}^*, t = \frac{1}{x})$.
On a : $t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{dx}{x^2} \Rightarrow -xdt = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{dt}{t} = \frac{dx}{x}$.
Ainsi, $J = -\int \frac{dt}{t(1+\frac{1}{t^n})} = -\int \frac{t^{n-1}dt}{t^n+1} = -\frac{1}{n}\int \frac{nt^{n-1}dt}{t^n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$
D'où $J = -\frac{1}{n}\ln|t^n + 1| + C, C \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$
On a : $t = \frac{1}{x}$, Donc $\boxed{J = -\frac{1}{n}\ln|\frac{1}{x^n} + 1| + C; C \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^*|\{-1\}}$

3. $K = \int \frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}; (t = x - \frac{1}{x}, x > 0)$.
On a : $t = x - \frac{1}{x} \Rightarrow dt = (1 + \frac{1}{x^2}dx) = \frac{x^2+1}{x^2}dx$.
$x\sqrt{x^4 - x^2 + 1} = x^2\sqrt{x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}}; t^2 = (x - \frac{1}{x})^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$.
$t^2 + 1 = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow \sqrt{t^2+1} = \sqrt{x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}}$.
D'où $K = \int \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^2-1+\frac{1}{x^2}}}dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$
Posons $t = \sinh u \Rightarrow u = \arg\sinh t$.
Ainsi ; $t^2 + 1 = \sinh^2 u + 1 = \cosh^2 u$, et $dt = \cosh u du$.
D'où $K = \int \frac{\cosh u du}{\cosh u}$
$K = \int du = u + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. $u = \arg\sinh t$ et $t = x - \frac{1}{x}$.
Donc $\boxed{K = \arg\sinh(x - \frac{1}{x}) + C, C \in \mathbb{R}, x > 0.}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Année 2018-2019

UFR-MI

CORRECTION DE CALCUL INTEGRAL
SESSION 1 LICENCE 1

Exercice 1

On donne $(E) : y'' - y' - 6y = (x^2 + x - 2)e^{3x}$

1. Solution générale de l'équation homogène associée

$(E_H) : y'' - y' - 6y = 0$
$(E_C) : r^2 - r - 6 = 0$
$\Delta = 25$
$r_1 = 3$ et $r_2 = -2$
D'où $\boxed{y_H = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}}$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

2. Expliquons pourquoi $y_p = (ax^3 + bx^2 + cx)e^{3x}$

Le second membre de (E) est $f(x) = (x^2 + x - 2)e^{3x}$ alors la forme générale d'une solution particulière est $y_p = x^s Q(x)e^{3x}$. Comme 3 est solution simple de l'équation caractéristique. $s = 1$ et Q est un polynôme de même degré que $P(x) = x^2 + x - 2$. C'est-à-dire $Q(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Ainsi $y_p = (ax^3 + bx^2 + cx)e^{3x}$

* Déterminons a, b et c
En utilisant $y_p'' - y_p' - 6y_p = f(x)$ et par identification, on obtient $a = \frac{1}{15}; b = \frac{3}{10}$ et $c = -\frac{53}{125}$
Donc $\boxed{y_p = \left(\frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - \frac{53}{125}\right)e^{3x}}$

3. Solution générale de (E)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$y_G = y_H + y_p$

$$\boxed{y_G = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - \frac{53}{125}\right)e^{3x}}$$

4. Equation de f vérifiant

$f(0) = 1, f'(0) = -\frac{53}{125}$.

$f(0) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1$

$f'(0) = -\frac{53}{125} \Rightarrow 3C_1 - 2C_2 - \frac{53}{125} = -\frac{53}{125}$

$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 3C_1 - 2C_2 = 0 \end{cases}$ On obtient : $C_1 = \frac{2}{5}$ et $C_2 = \frac{3}{5}$

D'où $\boxed{f(x) = \frac{2}{5}e^{3x} + \frac{3}{5}e^{-2x} + \left(\frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - \frac{53}{125}x\right)e^{3x}}$

5. Développement limité d'ordre 3 de f au voisinage de 0

On a : $e^x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + 0(x^3)$

$e^{3x} = \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{6}x^3 + 0(x^3)$

$e^{-2x} = 1 + 2x^2 - x^3 + 0(x^3)$

On remplace e^{3x} et e^{-2x} dans $f(x)$ et on obtient :

$f(x) = 1 - \frac{53}{125}x + \frac{33}{10}x^2 - \frac{481}{750}x^3$

* Déduisons l'équation de la tangente.

$$\boxed{(T) : y = -\frac{53}{125}x + 1}$$

* Position relative

$f(x) - y = \frac{33}{10}x^2 - \frac{481}{750}x^3$

Posons $G(x) = \frac{33}{10}x^2 - \frac{481}{750}x^3$

*Etudier le signe de G

Exercice 2

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Donnons l'ensemble de définition et une primitive des fonctions suivantes :

a) $g(x) = \dfrac{1}{\sin x - 2\cos x}$

$x \in D_g \Leftrightarrow \sin x - 2\cos x \neq 0$

$\Leftrightarrow \sin x \neq 2\cos x$

$\Leftrightarrow \tan x \neq 2$

$\Leftrightarrow x \neq \arctan 2$

Donc $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\arctan 2\}$.

* Primitive de $g(x)$

Posons $t = \tan\frac{x}{2}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{1}{\sin x - 2\cos x}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} - 2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \times \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{1+t^2} \times \frac{1}{\frac{2t-2+2t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{2t^2+2t-2}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+t-1}$$

$$= \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1}$$

$$= \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{5}}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\frac{t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + C$$

$G(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\frac{t+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right| + C, C \in \mathbb{R}$

b) $h(x) = \dfrac{7x-9}{x^2-x+1}$

$x \in D_h \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$

Donc $D_h = \mathbb{R}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

* Primitive

On a : $(x^2-x+1)' = 2x-1$

$7x-9 = \frac{7}{2}(2x-1) - 9 + \frac{7}{2} = \frac{7}{2}(2x-1) - \frac{11}{2}$

$$\int \frac{7x-9}{x^2-x+1}dx = \frac{\frac{7}{2}(2x-1)-\frac{11}{2}}{x^2-x+1}dx = \int \frac{\frac{7}{2}(2x-1)}{x^2-x+1}dx - \frac{11}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{7}{2}\ln|x^2-x+1| - \frac{11}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$= \frac{7}{2}\ln|x^2-x+1| - \frac{11}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left|\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right| + C$$

$$H(x) = \frac{7}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{11}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right) + C$$

c) $K(x) = \dfrac{x\sqrt{1+x}}{x+\sqrt{1+x}}$

$x \in D_K \Leftrightarrow 1+x \geq 0$ et $x+\sqrt{1+x} \neq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -1$ or $\forall x \geq -1, x+\sqrt{1+x} \neq 0$

Ainsi $D_K = [-1;+\infty[$

* Primitive de $K(x)$

Posons $t = \sqrt{1+x}$

$t^2 = 1+x$

$x = t^2-1$

$dx = 2tdt$

D'où $\int \frac{x\sqrt{1+x}}{x+\sqrt{1+x}}dx = \int \frac{t^3-t}{t^2+t-1}dt$

On effectue la division eucludienne et on obtient :

$t^3-t = t-1+\frac{t-1}{t^2+t-1}$. L'intégrale devient :

$$\int \frac{t^3-t}{t^2+t-1}dt = \int \left(t-1+\frac{t-1}{t^2+t-1}\right)dt$$

$$= \int (t-1)dt + \int \frac{t-1}{t^2+t-1}dt$$

$$= \frac{1}{2}t^2 - t + \int \frac{t-1}{t^2+t-1}dt$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

On a : $(t^2+t-1)' = 2t+1$ or $t-1 = \frac{1}{2}(2t+1) - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}(2t+1) - \frac{3}{2}$

Posons $J = \int \frac{t-1}{t^2+t-1}dt$

$$J = \int \frac{\frac{1}{2}(2t+1)}{t^2+t-1}dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+t-1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t^2+t-1| - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t^2+t-1| - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{5}}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t^2+t-1| - \frac{3}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|\right]$$

$$J = \frac{1}{2}\ln|t^2+t-1| - \frac{3}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right|\right] + C, C \in \mathbb{R}$$

Conclusion :K(x)= $\frac{1}{2}t^2 - t + J + C; C \in \mathbb{R}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR MI :L1 2018-2019

CORRECTION : CALCUL INTEGRAL SESSION 2

Exercice 1

A) $(E) : y'' + y' - 2y = (x^2 - 2x + 7)e^x$
$y(0) = -1, \quad y'(0) = 3$

* Equation homogène : $y'' + y' - 2y = 0$

* Equation caractéristique : $r^2 + r - 2 = 0$
$\Delta = 9$
$r_1 = -2$
$r_2 = 1$

$$\boxed{y_H = Ae^{-2x} + Be^x \ , \ A, B \in \mathbb{R}}$$

* Solution particulière
$\alpha = 1$ est solution de l'équation caractéristique donc :
$y_p = x(ax^2 + bx + c)e^x = (ax^3 + bx^2 + cx)e^x$
Posons $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$
$\Rightarrow y_p = p(x)e^x$
$y_p' = (p'(x) + p(x))e^x$
$y_p'' = (p''(x) + 2p'(x) + p(x))e^x$

$$\begin{aligned} y_p'' + y_p' - 2y_p &= (p''(x) + 3p'(x))e^x \\ &= (x^2 - 2x + 7)e^x \end{aligned}$$

$\Rightarrow p''(x) + 3p'(x) = x^2 - 2x + 7$
On a : $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$p''(x) = 6ax + 2b$
Par identification, on a :

$$\begin{cases} 9a = 1 \\ 6a + 6b = -2 \\ 2b + 3c = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{9} \\ b = -\frac{11}{9} \\ c = \frac{71}{27} \end{cases}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Donc la solution générale de l'équatuion est :

$$\boxed{y_G = Ae^{-2x} + Be^x + (\frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{9}x^2 + \frac{71}{27}x)e^x, A, B \in \mathbb{R}}$$

On donne $y(0) = -1 \Rightarrow A + B = -1$

$y'(0) = 3 \Rightarrow -2A + B + \frac{71}{27} = 3$

D'où

$$\begin{cases} A = -\frac{37}{84} \\ B = -\frac{44}{84} \end{cases}$$

La solution de l'équation est :

$$\boxed{y_{G_0} = -\frac{37}{84}e^{-2x} - \frac{44}{84}e^x + (\frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{9}x^2 + \frac{71}{27}x)e^x}$$

B) On donne $(E) : y' + y^2 = \frac{1}{4x^4}$

1) $y_0(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$.

On a : $y_0'(x) + y_0^2(x) = \frac{1}{4x^4}$ donc y_0 est une solution particulière de (E).

2) On pose $y(x) = \frac{1}{z(x)} + y_0(x)$

$$y'(x) = -\frac{z'(x)}{z^2(x)} + y_0'(x) = -\frac{z'(x)}{z^2(x)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

$$y' + y^2 = -\frac{z'(x)}{z^2(x)} + y_0' + \frac{1}{z^2(x)} + 2\frac{y_0(x)}{z(x)} + y_0^2$$

$$= -\frac{z'(x)}{z^2(x)} + 2\frac{y_0(x)}{z(x)} + \frac{1}{4x^4} + \frac{1}{z^2(x)} \quad \text{car } y_0' + y_0^2 = \frac{1}{4x^4}$$

Donc $y' + y^2 = \frac{1}{4x^4} \Rightarrow -\frac{z'(x)}{z^2(x)} + 2\frac{y_0(x)}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)} = 0$

$\Rightarrow z'(x) - 2y_0(x)z(x) - 1 = 0$

$\Rightarrow (E_3) : z' - 2(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2})z - 1 = 0$

Résoudre (E_3) pour trouver Z_G(la solution générale de (E_3))

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

3) Prendre $y_G = \dfrac{1}{z_G} + y_0(x)$.

Exercice 2

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^3+27} = \dfrac{1}{(x+3)(x^2-3x+9)}$

Décomposition en élément simple :

$f(x) = \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{Bx+C}{x^2-3x+9}$

On obtient : $\begin{cases} A = 1/27 \\ B = -1/27 \\ C = 2/9 \end{cases}$

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \frac{\frac{1}{27}}{x+3}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{27}x + \frac{2}{9}}{x^2-3x+9}\,dx \\ &= \frac{1}{27}\int \frac{dx}{x+3} - \frac{1}{27}\int \frac{\frac{1}{2}(2x-3)+\frac{3}{2}}{x^2-3x+9}\,dx + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x^2-3x+9} \\ &= \frac{1}{27}\ln(x+3) - \frac{1}{54}\ln(x^2-3x+9) - \frac{3}{54}\int \frac{dx}{x^2-3x+9} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x^2-3x+9} \\ &= \frac{1}{27}\ln(x+3) - \frac{1}{54}\ln(x^2-3x+9) - \frac{3}{54}\int \frac{dx}{(x-\frac{3}{2})^2 + (\frac{3\sqrt{3}}{2})^2} \\ &+ \frac{2}{9}\int \frac{dx}{(x-\frac{3}{2})^2 + (\frac{3\sqrt{3}}{2})^2}\end{aligned}$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{27}\ln(x+3) - \frac{1}{54}\ln(x^2-3x+9) - \frac{1}{27\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\right) + \frac{4}{27\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

CORRECTION CALCUL INTEGRAL 1ere SESSION 2021

EXERCICE N°1

Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $I \to]0,+\infty[$ une solution de l'équation

$$(E) : y' + a(x)y = b(x)\, y^m$$

1) On suppose que $m \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$. Divisons les deux membres de l'égalité (E) par terme y^m

Nous obtenons :

$$y'y^{-m} + a(x)yy^{-m} = b(x)y^m y^{-m}$$

Soit $y'y^{-m} + a(x)y^{1-m} = b(x)$ (E')

Posons $z = y^{1-m} \longrightarrow z' = (1-m)y'y^{-1-m-1} = (1-m)y'y^{-m}$ (E'')

En remplaçant dans (E'') z et z' par deux expressions respectives, on obtient :

$$\frac{z'}{1-m} + a(x)z = b(x) \Leftrightarrow z' + (1-m)\, a(x)\, z = (1-m)\, b(x)$$

$$z' + (1-m)\, a(x)\, z = (1-m)\, b(x) \qquad (E''')$$

2) $\varphi(x) = \int (1-m)\, a(x)\, dx$

Equation homogène associé à (E''')

$$z' + (1-m)\, a(x)\, z = 0 \qquad (E_H''')$$

Désignons par z_H la solution de l'équation homogène (E_H''')

$$z_H' + (1-m)\, a(x)\, z_H = 0$$

$$z_H' = -(1-m)\, a(x)\, z_H$$

$$\frac{dz_H}{dx} = -(1-m)\, a(x)\, z_H$$

$$\frac{dz_H}{dx} = -(1-m)\, a(x)\, dx \Rightarrow \ln|z_H| = -\int (1-m)\, a(x)\, dx$$

$$|z_H| = e^{-\int (1-m)\, a(x)\, dx + A}$$

$$z_H = \pm e^A\, e^{-\int (1-m)\, a(x)\, dx} = e^A\, e^{-\int (1-m)\, a(x)\, dx}$$

Posons $k = \pm e^A \Rightarrow z_H = k\, e^{-\int (1-m)\, a(x)\, dx}$

$$z_H = k\, e^{-\varphi(x)}$$

Recherche d'une solution particulière de l'équation

$(E''') : z' + (1-m)\, a(x)\, z = (1-m)\, b(x)$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Appliquons la méthode de la variation de la constante k, en posant $k = k(x)$, nous obtenons : $z_p = k(x)e^{-\varphi(x)} \Rightarrow z_p' = k'(x)e^{-\varphi(x)} - k(x)\,\varphi(x)'e^{-\varphi(x)}$

$$z_p' = k'(x)e^{-\varphi(x)} - k(x)\,\varphi(x)'e^{-\varphi(x)}$$

Sachant que $\varphi(x) = e^{\int(1-m)\,a(x)dx}$, alors, on a $\varphi(x)' = (1-m)\,a(x)$

$$z_p' = k'(x)e^{-\varphi(x)} - k(x)\,(1-m)\,a(x)e^{-\varphi(x)}$$

L'équation (E''') nous donne :

$$k'(x)e^{-\varphi(x)} - k(x)\,(1-m)\,a(x)e^{-\varphi(x)} + (1-m)\,a(x)k(x)e^{-\varphi(x)} = (1-m)\,b(x)$$

$$k'(x)e^{-\varphi(x)} - k(x)\,(1-m)\,a(x)e^{-\varphi(x)} + (1-m)\,a(x)k(x)e^{-\varphi(x)} = (1-m)\,b(x)$$

$$\Rightarrow k'(x)e^{-\varphi(x)} = (1-m)\,b(x) \Rightarrow k'(x) = (1-m)\,b(x)e^{\varphi(x)}$$

$$\Rightarrow k'(x) = (1-m)\,b(x)e^{\varphi(x)} \Rightarrow k(x) = (1-m)\int b(x)e^{\varphi(x)}\,dx$$

$$k(x) = (1-m)\int b(x)e^{\varphi(x)}\,dx$$

$$\Rightarrow z_p = k(x)e^{-\varphi(x)} = \left[(1-m)\int b(x)e^{\varphi(x)}\,dx\right]e^{-\varphi(x)}$$

Solution générale de (E''') :

$$z = z_H + z_p$$

$$= k(x)e^{-\varphi(x)} + \left[(1-m)\int b(x)e^{\varphi(x)}\,dx\right]e^{-\varphi(x)}$$

$$z = \left[k + (1-m)\int b(x)e^{\varphi(x)}\,dx\right]e^{-\varphi(x)}$$

Or $z = y^{1-m} \Rightarrow y = z^{\frac{1}{1-m}} = [z(x)]^{\frac{1}{1-m}}$, $k \in \mathbb{R}$

3) Si $m = 1$, on obtient

$$y' + a(x)\,y = b(x)\,y \Leftrightarrow y' + \big(a(x) - b(x)\big)\,y = 0$$

$$\Rightarrow y' = -\big(a(x) - b(x)\big)\,y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\big(a(x) - b(x)\big)\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\int\big(a(x) - b(x)\big)\,dx \Rightarrow y = e^{-\int(a(x)-b(x))\,dx + C}$$

$$y = e^{C}\,e^{-\int(a(x)-b(x))\,dx} = A\,e^{-\int(a(x)-b(x))\,dx}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$y = A\, e^{-\int (a(x)-b(x))\, dx} \quad , A \in \mathbb{R}$$

4) Résolvons le problème

$$\begin{cases} x^3 y' + y^4 = x^2 y & , x > 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Nous avons : $x^3 y' + y^4 = x^2 y \Rightarrow y' + \frac{1}{x^3}\, y^4 = \frac{1}{x}\, y$

$$\Rightarrow y' - \frac{1}{x} y = -\frac{1}{x^3}\, y^4 \qquad (E_2)$$

Dans l'expression de l'équation (E_2), nous avons

$$a(x) = -\frac{1}{x}\ ;\ b(x) = -\frac{1}{x^3}\ ;\ m = 4\ ;\ z = y^{-3}$$

On a :

$$z = \left[k + (1-m) \int b(x) e^{\varphi(x)}\, dx\right] e^{-\varphi(x)}$$

$$= \left[k + (1-m) \int \left(-\frac{1}{x^3}\right) e^{\varphi(x)}\, dx\right] e^{-\varphi(x)}$$

$$e^{\varphi(x)} = e^{\int (1-m)\, a(x)\, dx} = e^{\int (1-4)\left(-\frac{1}{x}\right) dx} = e^{3\int \frac{dx}{x}}$$

$$e^{\varphi(x)} = e^{3 \ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

$$e^{-\varphi(x)} = e^{-\int (1-m)\, a(x)\, dx} = e^{-3\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x^{-3}} = \frac{1}{x^3}$$

$$z = \left[k - 3 \int \left(-\frac{1}{x^3}\right) x^3\, dx\right] \frac{1}{x^3}$$

$$= \left[k + 3 \int dx\right] \frac{1}{x^3} = [k + 3x] \frac{1}{x^3} = \frac{k + 3x}{x^3}$$

$$z = \frac{k+3x}{x^3}\ .\ \text{Or}\ z = y^{-3} \Rightarrow \frac{1}{z^{1/3}} = y$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{k+3x}{x^3}}} = \frac{x}{\sqrt[3]{k+3x}}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{k+3x}}}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Pour $x = 1$; $y(1) = 1 \Rightarrow y(1) = \frac{1}{\sqrt[3]{k+3}} = 1$

$$1 = \sqrt[3]{k+3} \Rightarrow 1 = (k+3) \Rightarrow \boxed{k = -2}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{3x-2}} \quad , \forall x \in \mathbb{R}_+^* - \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

EXERCICE N°2

1) $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} / \sin x - \cos x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / \sin x \neq \cos x\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{\sin x}{\cos x} \neq 1\right\} = \{x \in \mathbb{R} / \tan x \neq 1\}$$

Or $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Donc $Df = \left\{x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$Df = \mathbb{R} - \left\{x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Posons $F(x) = \int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$

Posons $t = \tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = arctgt \Rightarrow \frac{dx}{2} = \frac{dt}{1+t^2}$

$$\Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad ; \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{1}{\sin x - \cos x} = \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1}{\frac{t^2+2t-1}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{t^2+2t-1}$$

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sin x - \cos x} = \int \frac{1+t^2}{t^2+2t-1} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{2\,dt}{t^2+2t-1}$$

Remarque $t^2 + 2t - 1 = (t+1)^2 - 2 = (t+1)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2$

$$F(t) = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}$$

Posons $u = t + 1 \Rightarrow du = dt$

Scanné avec CamScanner

$$F(u)=2\int\frac{dt}{u^2-(\sqrt{2})^2}=2\int\frac{dt}{(u-\sqrt{2})(u+\sqrt{2})}$$

$$\frac{1}{(u-\sqrt{2})(u+\sqrt{2})}=\frac{A}{(u-\sqrt{2})}+\frac{B}{(u+\sqrt{2})}$$

$$1=A(u+\sqrt{2})+B(u-\sqrt{2})$$

$$1=(A+B)u+\sqrt{2}(A-B)$$

$$\begin{cases}A+B=0\\ A-B=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{\sqrt{2}}{u}\\ B=-\frac{\sqrt{2}}{u}\end{cases}$$

$$F(u)=2\times\frac{\sqrt{2}}{u}\int\left(\frac{1}{(u-\sqrt{2})}-\frac{1}{(u+\sqrt{2})}\right)du=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{(u-\sqrt{2})}{(u+\sqrt{2})}\right|+C$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{(t+1-\sqrt{2})}{(t+1+\sqrt{2})}\right|+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{(\tan u+1-\sqrt{2})}{(\tan u+1+\sqrt{2})}\right|+C$$

$$\boxed{F(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{(\tan x+1-\sqrt{2})}{(\tan x+1+\sqrt{2})}\right|+C}$$

2) $h(x)=\frac{4x+7}{x^2+x+2}$; $x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$; $Dh=\mathbb{R}$

Remarque $(x^2+x+2)'=2x+1$

$4x+7=2(2x+1)+5$

$$h(x)=\frac{4x+7}{x^2+x+2}=\frac{2(2x+1)+5}{x^2+x+1}=\frac{2(2x+1)}{x^2+x+1}+\frac{5}{x^2+x+1}$$

$$H(x)=\int h(x)dx=2\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}+5\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$=2\int\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx+5\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$= 2\ln(x^2+x+1) + 5\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

$$5\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = 5\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{5}{\frac{\sqrt{7}}{2}} artg \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C = \frac{10}{\sqrt{7}} artg \frac{2}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{2}\right) + C$$

$$h(x) = 2\ln(x^2+x+2) + \frac{10}{\sqrt{7}} artg\left[\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + C$$

$$\boxed{h(x) = 2\ln(x^2+x+2) + \frac{10}{\sqrt{7}} artg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C}$$

3) $k(x) = \frac{x+3}{(x-1)^2(x^2+3)}$

$$Dk = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0 \text{ ou } x^2+3 \neq 0\}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2+3 \geq 0$

Donc $Dk = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\}$

Décomposition en élément simple de $k(x)$

$$\frac{x+3}{(x-1)^2(x^2+3)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$$x+3 = A(x^2+3) + B(x-1)(x^2+3) + (Cx+D)(x-1)^2$$

$$= A(x^2+3) + B(x^3-x^2+3x-3) + Cx(x^2-2x+1) + D(x^2-2x+1)$$

$$= (B+C)x^3 + (A-B-2C+D)x^2 + (3B+C-2D)x + (3A-3B+D)$$

$$\begin{cases} B+C=0 \\ A-B-2C+D=0 \\ 3B+C-2D=1 \\ 3A-3B+D=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B=-C \\ A-C+D=0 \\ -2C-2D=1 \\ 3A+3C+D=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B=-C \\ -2C-2D=1 \\ A-C+D=0 \\ 3A+3C+D=3 \end{cases}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} B=-C \\ -2C-2D=1 \\ -3A+3C-3D=0 \\ 3A+3C+D=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-C \\ C+D=-\frac{1}{2} \\ 6C-2D=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-C \\ C+D=-\frac{1}{2} \\ 8C=-1+3 \\ A-B-2C+D=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=-C \\ C=\frac{1}{4} \\ D=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4} \end{cases} \quad ; \quad B=-\frac{1}{4} \quad ; \quad A=1$$

$$k(x)=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{4}\frac{x-3}{x^2+3}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{8}\frac{2x-6}{x^2+3}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{8}\frac{2x}{x^2+3}-\frac{6}{8}\frac{1}{x^2+3}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{8}\frac{(x^2+3)'}{x^2+3}-\frac{3}{4}\frac{1}{x^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$\int k(x)dx=-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{8}\ln(x^2+3)-\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{3}}\,artg\,\frac{x}{\sqrt{3}}+C$$

$$\boxed{\int k(x)dx=-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{8}\ln(x^2+3)-\frac{4}{\sqrt{3}}\,artg\,\frac{x}{\sqrt{3}}+C}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Correction de Calcul Intégral Session 2 (L1)

Exercice 1

On considère l'équation différentielle.

(E) : $y'' - y' - 6y = (x-1)e^{3x} = P(x)e^{3x}$, avec $P(x) = x - 1$

1) L'équation homogène (E_H) est :

(E_H) : $y'' - y' - 6y = 0$ et l'équation caractéristique correspondante est : $r^2 - r - 6 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$

$\Delta = (5)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5^2} = |5|$

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{-(-1) - 5}{2} = -2 \\ r_2 = \dfrac{-(-1) + 5}{2} = 3 \end{cases}$$

Ainsi l'équation (E_H) admet pour solution générale $y_H(x) = \lambda e^{-2x} + \mu e^{3x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2) Expliquons pourquoi une solution particulière de (E) est de la forme $(ax^2 + bx)e^{3x}$.

On a : (E) : $y'' - y' - 6y = P(x)e^{3x}$

Une solution particulière de E est de la forme $y(x) = x^s Q(x)e^{3x}$ avec $Q(x) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de même degré que P. Donc de degré 1. Alors $Q(x) = ax + b$. De plus 3 est une racine simple de l'équation caractéristique, donc $s = 1$.

D'où une solution particulière de (E) est de la forme $y(x) = x(ax + b)e^{3x} = (ax^2 + bx)e^{3x}, (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Déterminons a et b.
Comme y est une solution particulière de (E), y vérifie (E).
On a : $y(x) = (ax^2 + bx)e^{3x}$

- $y'(x) = (3ax^2 + (2a + 3b)x + b)e^{3x}$
- $y''(x) = \big(9ax^2 + (12a + 9b)x + (2a + 6b)\big)e^{3x}$
- on a : $y'' - y' = (6ax^2 + 10ax + 66x + 2a + 5b)e^{3x}$
- $y'' - y' - 6y = 10ax + 2a + 5b$

Ainsi (E) : $(10ax + 2a + 5b)e^{3x} = (x - 1)e^{3x}$
$\Leftrightarrow (10ax + 2a + 5b) = (x - 1)$

Par identification : $\begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ 2a + 5b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = -\frac{6}{25} \end{cases}$

On vérifie aisément ces résultats en remplaçant a et b par $\frac{1}{10}$ et $-\frac{6}{25}$ respectivement dans $y(x)$.

3) La solution générale est donnée par :
$y_G(x) = y_p(x) + y$

Scanné avec CamScanner

$$y_G(x) = \lambda e^{-2x} + \mu e^{3x} + \left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{6}{25}x\right)e^{3x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$y_G(x) = \lambda e^{-2x} + \left(\mu + \frac{1}{10}x^2 - \frac{6}{25}x\right)e^{3x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

4) On pose $y_G = f$.

On a : $f(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda e^{-2\times 0} + \left(\mu + \frac{1}{10}\times 0^2 - \frac{6}{25}\times 0\right)e^{3\times 0} = 1$

$\Leftrightarrow \lambda + \mu = 1$ ①

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -2\lambda e^{-2x} + \left(\mu + \frac{2}{10}x^1 - \frac{6}{25} + 3\mu + \frac{5}{10}x^2 - \frac{18}{25}x\right)e^{3x},$$

$$f'(0) = -2\lambda + \mu + 3\mu - \frac{6}{25} = -\frac{6}{25}$$

$$f'(0) = -2\lambda + 4\mu - \frac{6}{25} = -\frac{6}{25} \Rightarrow 4\mu - 2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow 2\mu - \lambda = 0$$ ②

De ① et ② on a le système : $\begin{cases}\lambda + \mu = 1\\ 2\mu - \lambda = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mu = \frac{1}{3}\\ \lambda = \frac{2}{3}\end{cases}$

Ainsi l'unique solution de f de (E) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\frac{6}{25}$ est :

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{3}e^{-2x} + \left(\frac{1}{3} - \frac{6}{25}x + \frac{1}{10}x^2\right)e^{3x}}$$

5) Au voisinage de 0, on a : $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \circ(x^4)$

- $e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \circ(x^4)$
- $e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 + \circ(x^4)$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{6}{25}x + \frac{1}{10}x^2\right)e^{3x} = \left(\frac{1}{3} - \frac{6}{25}x + \frac{1}{10}x^2\right)\left(1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 + \circ(x^4)\right)$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{6}{25}x + \frac{1}{10}x^2\right)e^{3x} = \left(\frac{1}{3} + \frac{19}{25}x + \frac{22}{25}x^2 + \frac{18}{25}x^3 + \frac{99}{200}x^4 + \circ(x^4)\right)$$ ①

$$\frac{2}{3}e^{-2x} = \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^4 + \circ(x^4)\right)$$ ②

$f(x) = ① + ②$

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{43}{75}x + \frac{166}{75}x^2 - \frac{146}{75}x^3 + \frac{1097}{600}x^4 + \circ(x^4)}$$

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(0, f(0))$ est : $y_T = 1 - \frac{43}{75}x$.

$$I = \int g(x)dx = -\int \frac{2dt}{t^2 - 2t + 1 - 2} = -\int \frac{2dt}{(t-1)^2 - 2}$$

$$I = -2\int \frac{du}{t^2 - 2} = -2\int \frac{dt}{(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})}$$

Scanné avec CamScanner

$$I = -2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}dt}{t-\sqrt{2}} - 2\int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}dt}{t+\sqrt{2}}$$

Après calcul, on a :

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} ln\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{2}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{2}}\right| + C$$

b) $h(x) = \frac{5x-11}{x^2+2x+2}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x + 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x + 1 + 1 \neq 0\}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R} / (x+1)^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 + 1 \neq 0$

$$J = \int h(x)dx = \int \frac{5x-11}{x^2+2x+2}dx = 5\int \frac{x}{x^2+2x+2}dx - 11\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

$$J = \frac{5}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - 13\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

$$\boxed{J = \frac{5}{2} ln|x^2+2x+2| - 13\arctan(x+1) + K, K \in \mathbb{R}}$$

c) $k(x) = \frac{x\sqrt{2-x}}{x-\sqrt{2-x}}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} / 2 - x \geq 0 \; et \; x - \sqrt{2-x} \neq 0\}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} / 2 \geq x \; et \; x \neq \sqrt{2-x}\}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \; et \; x^2 \neq 2 - x\}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \; et \; x^2 + 2(\frac{x}{2}) \neq 2\}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \; et \; \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \neq 2 + \frac{1}{4}\}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \; et \; \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \neq 0\}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \; et \; \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \neq 0\}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \; et \; \left(x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right) \neq 0\}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \; et \; x \neq 1 \; et \; x \neq -2\}$

Il faut noter que $x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = x + 2 \neq 0$ est toujours vraie $\forall x \in]-\infty ; 2]$

Donc $D_k = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \; et \; x \neq 1\}$

$D_k =]-\infty ; 2] \backslash \{1\}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

RESUME MECANIQUE DU POINT

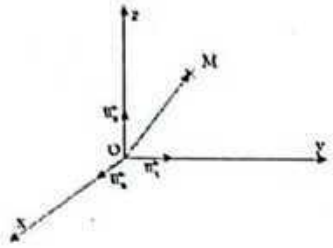
CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

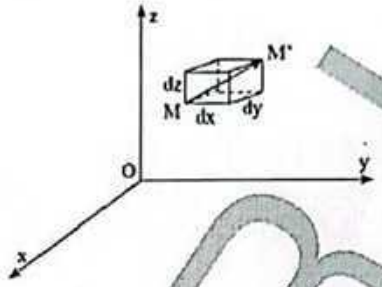
COORDONNÉES CARTÉSIENNES, CYLINDRIQUES, SPHÉRIQUES

On considère un point M et le référentiel $\mathfrak{R}=(O;\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$. Toutes les vitesses et déplacements dans ce chapitre sont calculés dans le référentiel $\mathfrak{R}$.

I. COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Le point M est repéré par les coordonnées cartésiennes (x,y,z).





$-\infty < x,y,z < \infty$

$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

$\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d\vec{l}}{dt} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z = \dfrac{dx}{dt}\vec{u}_x + \dfrac{dy}{dt}\vec{u}_y + \dfrac{dz}{dt}\vec{u}_z$

Le déplacement élémentaire vaut : $d\vec{l} = \overrightarrow{MM'} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$.
Il sert pour calculer les surfaces et volumes élémentaires.

On en déduit : $d\tau = dx\,dy\,dz$.

$x = cte$: $dS_x = dy\,dz$

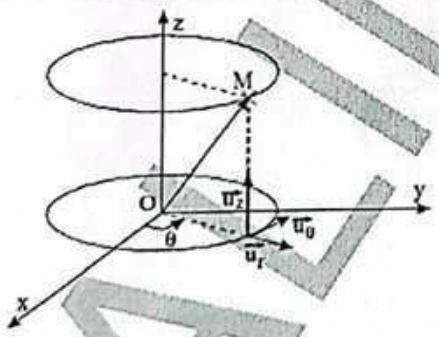
$y = cte$: $dS_y = dx\,dz$

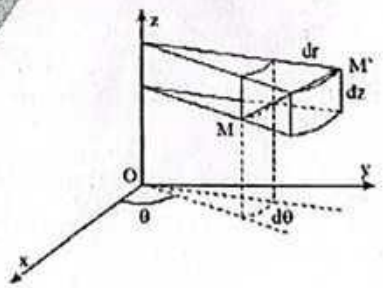
$z = cte$: $dS_z = dx\,dy$

II. COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Le point M est repéré par les coordonnées cylindriques (r,θ,z).

On utilisera les coordonnées cylindriques dès que la distance à l'axe Oz joue un rôle important dans l'exercice.





VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$0 \le r < \infty, 0 \le \theta \le 2\pi, -\infty < z < +\infty$

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$$

Le déplacement élémentaire vaut : $d\vec{l} = \overrightarrow{MM'} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$.
Il sert pour calculer les surfaces et volumes élémentaires.

On en déduit : $d\tau = (dr)(rd\theta)(dz)$.

$r = cte$: $dS_r = rd\theta\, dz$

$\theta = cte$: $dS_\theta = dr\, dz$

$z = cte$: $dS_z = dr\, rd\theta$

On a souvent besoin du volume élémentaire compris entre les cylindres de rayon r et de rayon $r + dr$.

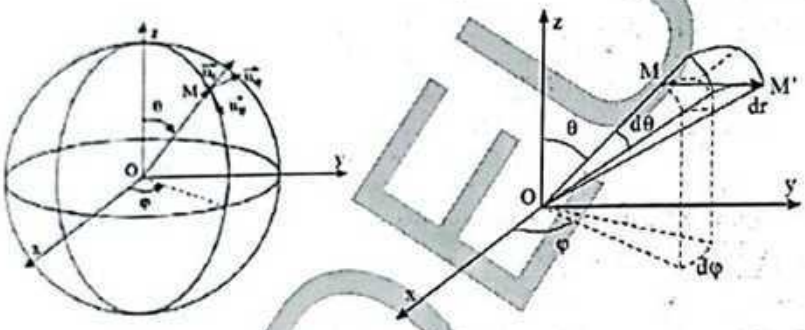
$$\pi(r+dr)^2 H - \pi r^2 H = \pi r^2\left(1+\frac{dr}{r}\right)^2 H - \pi r^2 H = \pi r^2\left(1+\frac{2dr}{r}\right)H - \pi r^2 H = 2\pi r dr H$$

Le volume élémentaire compris entre les cylindres de rayon r et de rayon $r + dr$ est la surface du cylindre de rayon r et de hauteur H multipliée par dr : $d\tau = 2\pi r dr H$

III. COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Le point M est repéré par les coordonnées cylindriques (r,θ,φ).

On utilisera les coordonnées sphériques dès que la distance au centre joue un rôle important dans l'exercice.



Géographie terrestre :
$\vec{u}_r$ est dirigé selon la verticale ascendante du lieu.
$\vec{u}_\theta$ est dirigé vers le sud.
$\vec{u}_\varphi$ est dirigé vers l'est.
θ est appelé la colatitude. φ est la longitude.

$0 \le r < \infty, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi$

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi$$

Le déplacement élémentaire vaut : $d\vec{l} = \overrightarrow{MM'} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$.
Il sert pour calculer les surfaces et volumes élémentaires.

On en déduit : $d\tau = (dr)(rd\theta)(r\sin\theta\, d\varphi)$.

$r = cte$: $dS_r = (rd\theta)(r\sin\theta d\varphi)$

$\theta = cte$: $dS_\theta = (dr)(r\sin\theta d\varphi)$

$\varphi = cte$: $dS_\varphi = dr\, rd\theta$

On a souvent besoin du volume élémentaire compris entre les sphères de rayon r et de rayon $r + dr$.

$$\frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3\left(1+\frac{dr}{r}\right)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3\left(1+\frac{3dr}{r}\right) - \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2 dr$$

Le volume élémentaire compris entre les sphères de rayon r et de rayon $r + dr$ est la surface de la sphère de rayon r multipliée par dr : $d\tau = 4\pi r^2 dr$

IV. PRODUIT VECTORIEL AVEC UNE BASE ORTHONORMÉE DIRECTE

On a souvent besoin dans les exercices de calculer $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$ dans les exercices.

Un moyen mnémotechnique est d'écrire les 6 vecteurs unitaires à la suite : $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$.
Si on a trois vecteurs unitaires en suivant, alors $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$: $\vec{u}_r = \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\varphi$ ou $\vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r$
Sinon, il faut mettre un signe négatif : $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = -\vec{u}_\varphi$
C'est très pratique à utiliser sans être obligé d'utiliser en permanence les trois doigts de la main !!!

DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

Quantité de mouvement (ou impulsion)

La quantité de mouvement par rapport au référentiel R d'un point matériel M, de masse m, est :

$$\vec{p}(M)_{/\mathcal{R}} = m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}.$$

Lois de Newton

Les trois lois de Newton sont les lois fondamentales de la mécanique du point matériel.

• ***Première loi : principe d'inertie***

Il existe une classe de référentiels, appelés référentiels galiléens par rapport auxquels un point matériel *isolé* est en mouvement rectiligne uniforme.

• ***Deuxième loi : relation fondamentale de la dynamique***

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces appliquées à un point M de masse m et son accélération sont liées par :

$$F_{\mathcal{E}\to M} = \frac{d\vec{p}(M)}{dt} = m\vec{a}(M)$$

• ***Troisième loi : principe des actions réciproques***

Les forces d'interaction exercées par deux *points matériels* M_1 et M_2 l'un sur l'autre sont opposées et colinéaires à l'axe (M_1, M_2).

Évolution d'un système mécanique

Les systèmes mécaniques ont une évolution unique pour des conditions initiales données (déterminisme mécanique).

Pour un système autonome (ou libre), deux trajectoires de phase ne peuvent se couper.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi$$

Le déplacement élémentaire vaut : $d\vec{l} = \overrightarrow{MM'} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$.
Il sert pour calculer les surfaces et volumes élémentaires.

On en déduit : $d\tau = (dr)(rd\theta)(r\sin\theta\, d\varphi)$.

$r = cte$: $dS_r = (rd\theta)(r\sin\theta d\varphi)$

$\theta = cte$: $dS_\theta = (dr)(r\sin\theta d\varphi)$

$\varphi = cte$: $dS_\varphi = dr\, rd\theta$

On a souvent besoin du volume élémentaire compris entre les sphères de rayon r et de rayon $r + dr$.

$$\frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3\left(1+\frac{dr}{r}\right)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3\left(1+\frac{3dr}{r}\right) - \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2 dr$$

Le volume élémentaire compris entre les sphères de rayon r et de rayon $r + dr$ est la surface de la sphère de rayon r multipliée par dr : $d\tau = 4\pi r^2 dr$

IV. PRODUIT VECTORIEL AVEC UNE BASE ORTHONORMÉE DIRECTE

On a souvent besoin dans les exercices de calculer $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$ dans les exercices.

Un moyen mnémotechnique est d'écrire les 6 vecteurs unitaires à la suite : $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$.
Si on a trois vecteurs unitaires en suivant, alors $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$: $\vec{u}_r = \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\varphi$ ou $\vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r$
Sinon, il faut mettre un signe négatif : $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = -\vec{u}_\varphi$
C'est très pratique à utiliser sans être obligé d'utiliser en permanence les trois doigts de la main !!!

DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

Quantité de mouvement (ou impulsion)

La quantité de mouvement par rapport au référentiel R d'un point matériel M, de masse m, est :

$$\vec{p}(M)_{/\mathcal{R}} = m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}.$$

Lois de Newton

Les trois lois de Newton sont les lois fondamentales de la mécanique du point matériel.

• ***Première loi : principe d'inertie***

Il existe une classe de référentiels, appelés référentiels galiléens par rapport auxquels un point matériel *isolé* est en mouvement rectiligne uniforme.

• ***Deuxième loi : relation fondamentale de la dynamique***

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces appliquées à un point M de masse m et son accélération sont liées par :

$$F_{\mathcal{E}\to M} = \frac{d\vec{p}(M)}{dt} = m\vec{a}(M)$$

• ***Troisième loi : principe des actions réciproques***

Les forces d'interaction exercées par deux *points matériels* M_1 et M_2 l'un sur l'autre sont opposées et colinéaires à l'axe (M_1, M_2).

Évolution d'un système mécanique

Les systèmes mécaniques ont une évolution unique pour des conditions initiales données (déterminisme mécanique).

Pour un système autonome (ou libre), deux trajectoires de phase ne peuvent se couper.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

Année 2016-2017

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR Maths-Info

Licence 1 : Tronc Commun

EXAMEN DE MÉCANIQUE DU POINT

Première Session

Durée : 3 Heures

Exercice 1 :

On considère un vecteur $\vec{a}$ de coordonnées $(2, 1, -2)$ dans la base de $\mathcal{R} = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et un point B de coordonnées $(1, 2, 3)$.

1. Trouver les cosinus directeurs de $\vec{a}$. Que représent-ils ?
2. Donner l'équation du plan passant par B et perpendiculaire à $\vec{a}$. Déterminer la distance de O à ce plan.

Exercice 2 :

Considérons un point matériel M de masse m qui décrit dans un référentiel fixe $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. supposé galiléen, une trajectoire située dans le plan (xOy) de façon à ce que son accélération passe toujours pas un point fixe O (mouvement à accélération centrale).

Un mouvement est dit à accélération centrale s'il existe un point fixe O tel que, pour tout instant t. le vecteur accélération du point M, $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$, est colinéaire au vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

Il en découle : $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \vec{0}$.

Soit $\vec{c}$ le vecteur défini par : $\vec{c} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R})$.

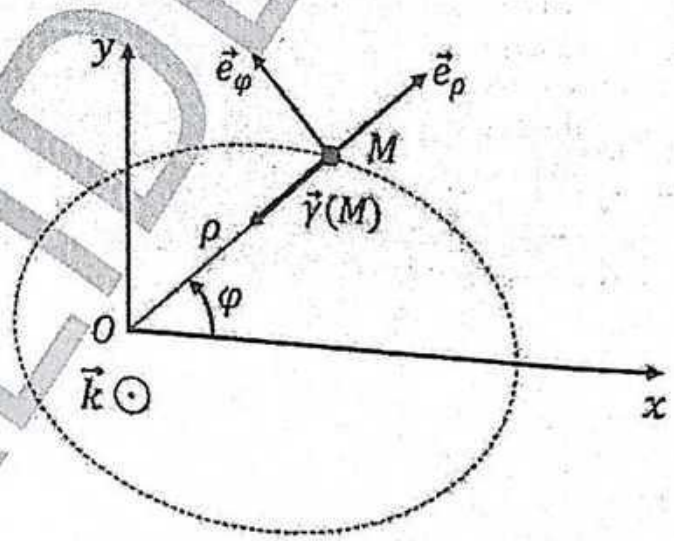


FIGURE 1 – Mouvement à accélération centrale

1. Montrer que $\vec{c}$ est un vecteur constant.
2. Déduire que le moment cinétique de M par rapport à O est constant.

VALIDEUR.LMD:conseils-sujets-d'examens-corrections

Scanné avec CamScanner

3. Donner l'expression de $\vec{c}$ en coordonnées polaires (ρ, ϕ).
4. Donner $c = \| \vec{c} \|$ en fonction de ρ et $\dot{\phi}$. Déduire de $c = cte$ que $2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi} = 0$.
5. On pose $u = \frac{1}{\rho}$, démontrer que $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = -c\frac{du}{d\phi}\vec{e}_\rho + cu\vec{e}_\phi$.

Exercice 3 :

Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}(O; xyz)$ supposé galiléen, un point matériel A, de masse m, se déplace sur un rail situé dans un plan vertical (figure 2). Le rail comporte une partie circulaire, de diamètre $BC = 2l$, que le mobile parcourt à l'intérieur du cercle. Le point est libéré sans vitesse initiale en H à la hauteur h au-dessus de B, point le plus bas du cercle, et on étudie uniquement le mouvement de A dans la partie circulaire. La liaison est unilatérale et on néglige tous les frottements.

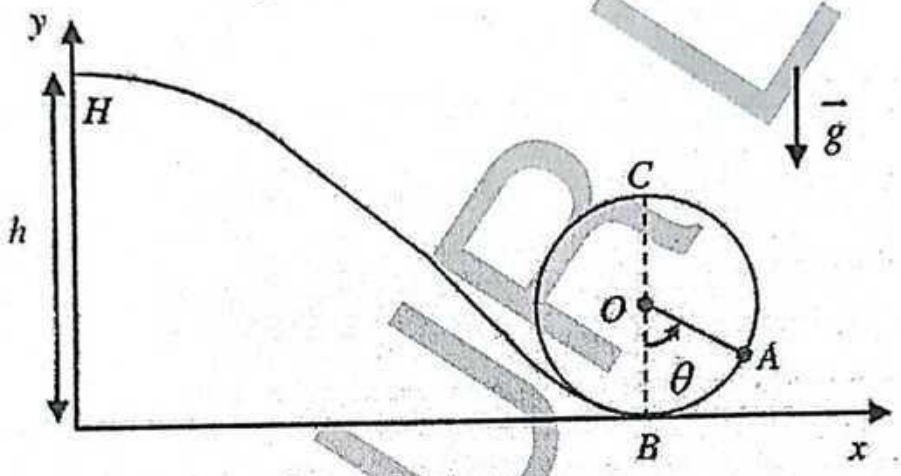


FIGURE 2 – Mouvement d'un point matériel guidé sur une courbe circulaire

1. Par application du théorème de l'énergie, exprimer la vitesse $\vec{v}(A/\mathcal{R})$ de A dans $\mathcal{R}$ en fonction de l'angle $\theta = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.
2. Par application du principe fondamental de la dynamique dans le repère de Frénet, donner l'expression de la réaction $\vec{R}$ exercée par le guide sur A en fonction de θ.
3. Quelle condition traduit l'existence du contact entre le point matériel et le rail ?
4. De quelle hauteur minimale h_{min}, doit-on lâcher le point pour qu'il fasse le looping sans perdre le contact ?
5. Dans le cas particulier où $h = 3l$, $l = 10\ m$ et $m = 350\ kg$, calculer les vitesses de passage en B et C ainsi que les réactions du rail lors du passage en ces points.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR Maths-Info

Année 2017-2018

Licence 1 Tronc Commun

EXAMEN DE MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL

Première Session

Durée : 3 Heures
NB : Aucun document n'est autorisé !

Exercice 1 :
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation vectorielle d'inconnue $\vec{x}$: $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$.

1. Montrer que si l'équation admet une solution, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. On supposera dans la suite que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
2. Déterminer toutes les solutions colinéaires à $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation.
4. Déterminer les vecteurs solutions qui vérifient en outre $\vec{x} \cdot \vec{w} = a$.

Exercice 2 :
Un mobile se déplace dans l'espace suivant la loi :

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \\ z = \alpha t \end{cases} \quad (1)$$

où α, ω et R sont des constantes positives.

1. Soit m la projection de M dans le plan XOY :
   a- Quelle est la nature de la trajectoire de m dans le plan XOY?
   b- Quelle est la nature du mouvement de m suivant l'axe OZ ?
   c- En déduire la nature de la trajectoire du mobile M.
2. Dans le système des coordonnés cylindriques :
   a- Ecrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et représenter la base $(\vec{u_\rho}, \vec{u_\varphi}, \vec{u_z})$ en un point M de l'espace.
   b- Trouver la vitesse et l'accélération de M, ainsi que leurs modules.
   c- En déduire le rayon de courbure.

Exercice 3 :
Une particule de masse m est lâchée en A sans vitesse initiale (figure 1). On cherche à savoir quelle doit être la hauteur H pour que la particule atteigne le point S sommet de la gouttière.

1. Appliquer le théorème de l'énergie mécanique pour calculer la vitesse v_B au point B.
2. Exprimer h en fonction de r et θ.

Scanné avec CamScanner

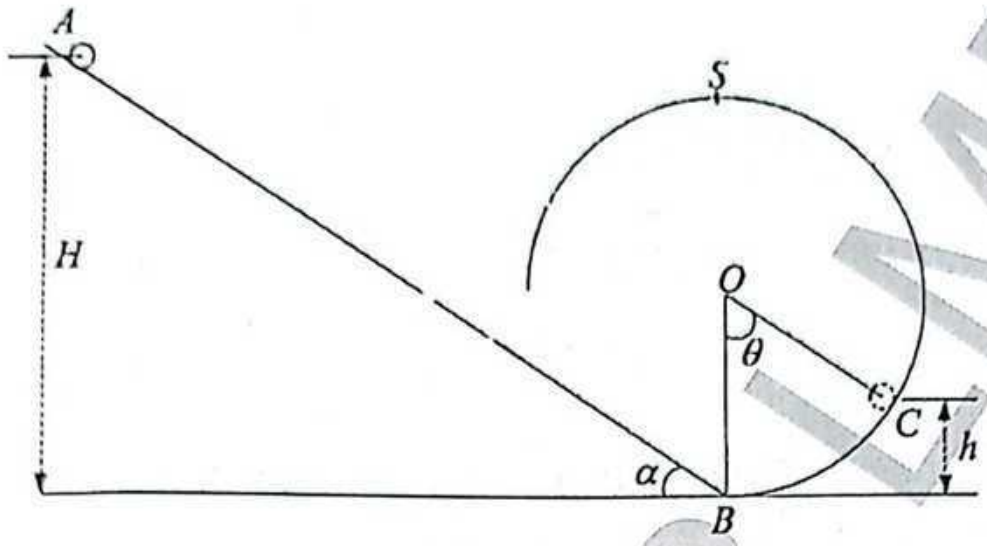


Figure 1: Mouvement d'une particule sur une gouttière

3. Appliquer le théorème de l'énergie mécanique pour calculer la vitesse v_C au point C en fonction de h et v_B.
4. En appliquant le théorème fondamental de la dynamique, déduire la valeur de la réaction R en fonction de m, r, θ, v_B et g.
5. Démontrer que la vitesse minimale que doit acquérir la particule au point B pour atteindre le point S est $v_{Bmin} = 2\sqrt{gr}$
6. En prenant v_{Bmin} la vitesse au point B, calculer la réaction aux points B et S. Que conclure ? En quel point la réaction s'annule-t-elle ?
7. Quelle est la vitesse v_{0B} que doit avoir la particule au point B pour atteindre le point S sans que la réaction ne change de signe ? Quelle est la valeur de H correspondante ?

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Année 2017-2018

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR Maths-Info

Licence 1 Tronc Commun

EXAMEN DE MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL

Deuxième Session

Durée : 2 H 15
NB : Aucun document n'est autorisé !

Questions de cours:

1. Que désigne les vecteurs $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ et $\vec{b}$ de la base de Frenet.
2. Dans le référentiel d'étude, les normes de la vitesse et de l'accélération d'un point matériel sont constantes au cours du temps et non nulles. Quelle est la nature du mouvement ?

Exercice 1 :

Un mobile se déplace dans l'espace suivant la loi :

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \\ z = \alpha t \end{cases} \quad (1)$$

où α, ω et R sont des constantes positives.

1. Soit m la projection de M dans le plan XOY :
   a- Quelle est la nature de la trajectoire de m dans le plan XOY?
   b- Quelle est la nature du mouvement de m suivant l'axe OZ ?
   c- En déduire la nature de la trajectoire du mobile M.
2. Dans le système des coordonnés cylindriques :
   a- Ecrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et représenter la base $(\vec{u_\rho}, \vec{u_\varphi}, \vec{u_z})$ en un point M de l'espace.
   b- Trouver la vitesse et l'accélération de M, ainsi que leurs modules.
   c- En déduire le rayon de courbure.

Exercice 2 :

Une particule de masse m est lâchée en A sans vitesse initiale (figure 1). On cherche à savoir quelle doit être la hauteur H pour que la particule atteigne le point S sommet de la gouttière.

1. Appliquer le théorème de l'énergie mécanique pour calculer la vitesse v_B au point B.
2. Exprimer h en fonction de r et θ.
3. Appliquer le théorème de l'énergie mécanique pour calculer la vitesse v_C au point C en fonction de h et v_B.
4. En appliquant le théorème fondamental de la dynamique, déduire la valeur de la réaction R en fonction de m, r, θ, v_B et g.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

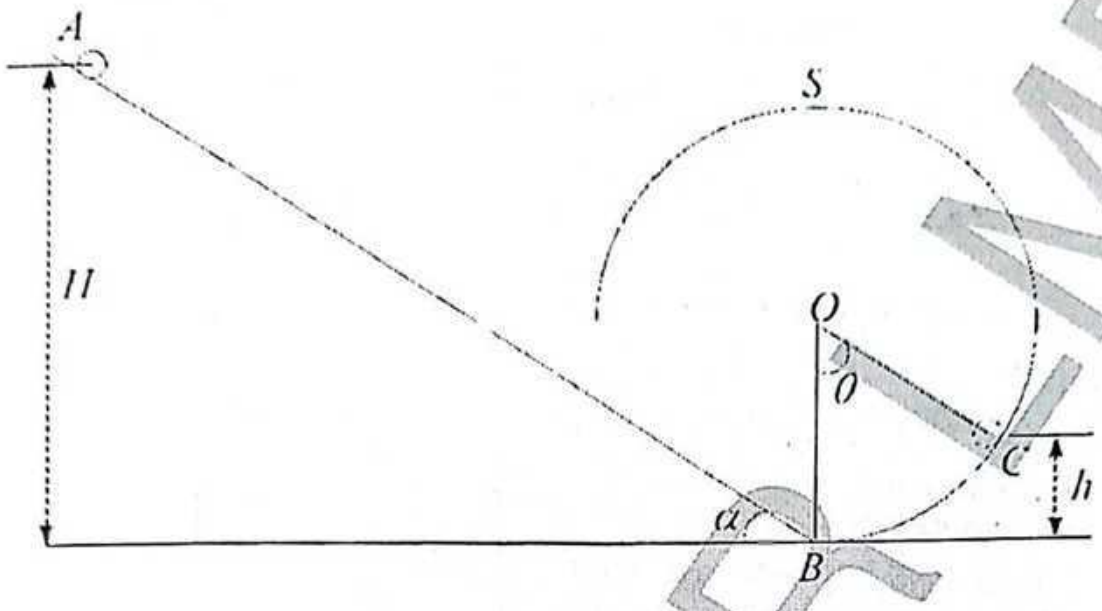


Figure 1: Mouvement d'une particule sur une gouttière

5. Démontrer que la vitesse minimale que doit acquérir la particule au point B pour atteindre le point S est $v_{Bmin} = 2\sqrt{gr}$

6. En prenant v_{Bmin} la vitesse au point B, calculer la réaction aux points B et S. Que conclure ? En quel point la réaction s'annule-t-elle ?

7. Quelle est la vitesse v_{0B} que doit avoir la particule au point B pour atteindre le point S sans que la réaction ne change de signe ? Quelle est la valeur de H correspondante ?

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

L1 - Tronc Commun

Année académique 2018-2019

Examen de Mécanique du Point Matériel
Première Session

Durée : 3 Heures

Exercice 1 :
Les équations horaires du mouvement de M par rapport :

$$\begin{cases} x = be^{-kt}\cos(kt) \\ y(t) = be^{-kt}\sin(kt) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

1. a. Calculer les coordonnées polaires ρ et φ de M en fonction de t.
   b. En déduire l'équation polaire de la trajectoire $\rho(\varphi)$.
2. a. Déterminer les composantes polaires du vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$ en fonction de t.
   b. Calculer l'angle $\alpha = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{V(M/R)})$. Conclure?
   c. Quelle est la nature du mouvement ?
3. a. Déterminer les composantes polaires de l'accélération.
   b. En déduire la direction et le sens de l'accélération.

Exercice 2 :
Soit $\mathcal{R}(O, xyz)$ un référentiel muni de la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère un système formé par deux tiges rigides de masses négligeables (OA) et (AB), avec $\| \overrightarrow{OA} \| = L_1$. La tige (OA) est articulée en O et tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire constante $\theta(t)$. Soit $\mathcal{R}_1(A, x_1y_1z_1)$ un référentiel muni de la base $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$. La tige (AB) est articulée en A à la tige (OA) et tourne dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ avec une vitesse angulaire constante $\dot{\varphi}(t)$, (voir figure). Un anneau P se déplace sur la tige AB par rapport à $\mathcal{R}_1$ avec une vitesse constante v_0. A l'instant initial $t = 0$, les barres OA et OB sont colinéaires avec Ox, $\theta_0 = \varphi_0 = 0$, et l'anneau se trouve en A. La position de l'anneau P est repérée dans $\mathcal{R}_1$ par $\overrightarrow{AP} = \rho\vec{e_\rho}$. Dans la suite du problème, $\mathcal{R}$ est le référentiel absolu et $\mathcal{R}_1$ est le référentiel relatif dont le vecteur de rotation est $\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\theta}$.

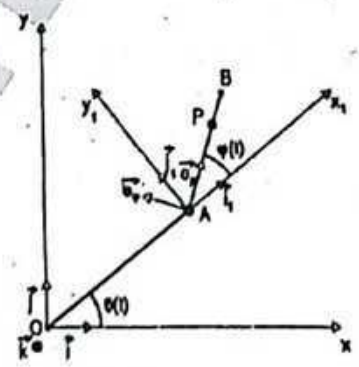


Figure 1: Anneau en mouvement sur une tige.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

1. Calculer ρ en fonction de t et de v_0.
2. Calculer la vitesse relative $\vec{V}_r = \vec{V}(P/\mathcal{R}_1)$ et la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e$ de l'anneau P.
3. En déduire la vitesse absolue $\vec{V}_a = \vec{V}(P/\mathcal{R})$ de l'anneau P.
4. Calculer l'accélération relative $\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(P/\mathcal{R}_1)$ de l'anneau P.
5. Calculer l'accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ et l'accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_c$ de l'anneau P.
6. En déduire l'expression de l'accélération absolue $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}(P/\mathcal{R})$.

Exercice 3 :

On considère le repère fixe $\mathcal{R}(Oxyz)$ (repère absolu) muni de la base OrthoNormé Direct $(O.N.D)$ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. (xOy) étant le plan horizontal. Soit (P) un plan vertical qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω. On désigne par $\mathcal{R}_1(Ox_1y_1z_1)$ le repère relatif muni de la base $O.N.D$ $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, tel que (x_1Oz_1) se trouve constamment dans le plan (P) et $\vec{k} = \vec{k}_1$ (voir la figure ci-dessous).

Soit (Δ) une tige de longueur L (de vecteur directeur unitaire $\vec{u}_1$) passant par O, constamment contenue

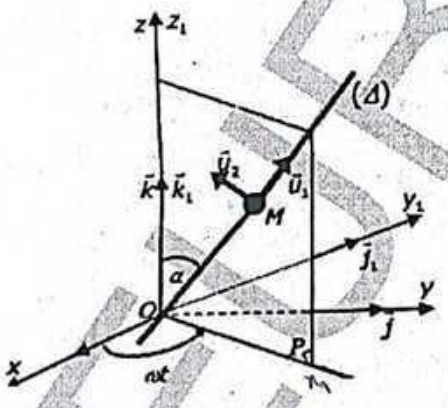


Figure 2: Anneau en mouvement sur une tige.

dans le plan (P) et faisant un angle α constant avec l'axe (Oz_1) $(0 < \alpha < \pi/2)$.

Un anneau M de masse m (assimilé à un point matériel) se meut sans frottement le long de la tige (Δ). La position de M sur la tige est définie par : $\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{u}_1$. Soient $\vec{u}_2$ un vecteur unitaire, contenu dans le plan (P) et perpendiculaire à $\vec{u}_1$, et $\vec{u}_3$ un vecteur unitaire tel que la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, soit $O.N.D$.

1. Exprimer dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$
   a- le moment cinétique de M au point O par rapport à $\mathcal{R}_1$.
   b- le poids de M.
   c- les forces d'inertie.
2. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère $\mathcal{R}_1$, déterminer la réaction $\vec{R}$ exercée par la tige sur le point M.
3. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\mathcal{R}_1$, déterminer l'équation différentielle, du mouvement de M, vérifiée par r. Donner la solution de cette équation.
4. Calculer, en fonction de r, l'énergie potentielle de M par rapport au repère $\mathcal{R}_1$.

Scanné avec CamScanner

L1 Tronc Commun

Année Académique 2019-2020

UE : Mécanique du Point Matériel

ECUE : Cinématique

Durée : 1 H 15

Exercice 1 :

Un point matériel M est repéré dans un référentiel fixe $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par ses coordonnée cylindriques (ρ, ϕ, z) telles que : $\rho = R$, $\phi = \omega t$ et $z = h\phi$ (R, ω et h sont des constantes positives et t le temps).

1. Ecrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2. a- Quelle est la nature du mouvement de M dans le plan (xOy)?
   b- Quelle est la nature du mouvement de M suivant la direction de l'axe (Oz)?
   c- Quelle est la nature du mouvement résultant de M?
3. Déterminer les expressions des vecteurs vitesse et accélération de M dans la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$
4. Quelles sont les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération de M selon les vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ du trièdre de Frénet.

Exercice 2 :

La trajectoire d'un point M en mouvement dans le plan de repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est la courbe d'équation polaire : $\rho = 1 - \cos\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Calculer la vitesse de M.
2. Déterminer la loi horaire du mouvement de M sachant que l'hodographe de pôle O est le cercle d'équation polaire : $\rho = \cos\frac{\theta}{2}$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

L1 Tronc Commun

Année Académique 2019-2020

UE : Mécanique du Point Matériel

ECUE : Dynamique

Durée : 1 H 00

Exercice 1 :

Une bille, assimilée à un point matériel M de masse m, est lâchée sans vitesse initiale depuis le point A d'une gouttière situé à une hauteur h du point le plus bas O de la gouttière. Cette dernière est terminée en O par un guide circulaire de rayon a, disposé verticalement. La bille, dont on suppose que le mouvement

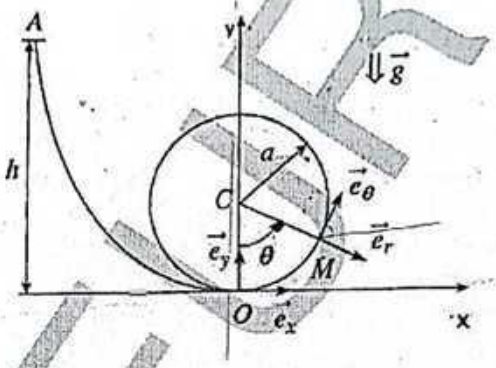


Figure 1: Gouttière

a lieu sans frottement, peut éventuellement quitter la gouttière vers l'intérieur du cercle. On désigne par $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ l'accélération de la pesanteur (figure 1).

1. Calculer la norme v_0 de la vitesse de la bille en O.
2. Exprimer la norme v_M de la vitesse de la bille en un point M quelconque du cercle repéré par l'angle θ.
3. On désigne par $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{CM}}{\|\overrightarrow{CM}\|}$ le vecteur unitaire porté par le vecteur position $\overrightarrow{CM}$ du point M. Ecrire l'expression de la réaction $\vec{R} = R\vec{e}_r$ du guide circulaire sur la bille. Donner l'expression de la réaction $\vec{R}$ au point O.
4. Déterminer la hauteur minimale h_{min} à partir de laquelle il faut lâcher la bille sans vitesse initiale pour qu'elle arrive jusqu'au point le plus haut du cercle.
5. On lâche la bille sans vitesse initiale depuis une hauteur $h_0 = 2a$. Calculer, en degrés, la valeur θ_0 de l'angle θ pour laquelle la bille quitte le guide.
6. Calculer la valeur v_{0x} de la composante suivant l'axe Ox de la vitesse de la bille au moment où elle quitte le guide.
7. Calculer la valeur maximale h_M de la hauteur atteinte dans ces conditions par la bille après qu'elle ait quitté le guide. Quelle est alors la nature de son mouvement.

Scanné avec CamScanner

L1 Tronc Commun **Année Académique 2020-2021**

UE : Mécanique du Point Matériel

Durée : 3 H 00

Exercice 1

1. Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trois vecteurs donnés dans un espace vectoriel E.
   a. Résoudre l'équation vectorielle suivante d'Inconnue $\vec{x}$ dans E : $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$;
   b. Faire une représentation graphique de la solution trouvée à la question 1.a.

2. On considère un vecteur $\vec{a}$ de coordonnées $(-2,1,-2)$ dans la base de $\mathcal{R} = (O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et un point B de coordonnées $(1,2,1)$.
   a. Définir et calculer les cosinus directeurs du vecteur $\vec{a}$.
   b. Déterminer en détaillant les calculs, l'équation du plan passant par B et perpendiculaire à $\vec{a}$.

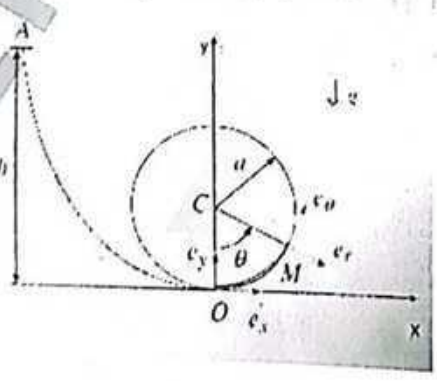
Exercice 2

Un point matériel M est repéré dans un référentiel fixe $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par ses cordonnées cylindriques $(\rho, \emptyset, z)$ telles que : $\rho = R, \emptyset = \omega t$ et $z = h\emptyset$ (R, ω et h sont des constantes positives et t le temps).

1. Ecrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
2. a- Quelle est la nature du mouvement de M dans le paln (xOy) ?
   b- Quelle est la nature du mouvement de M suivant la direction de l'axe (Oz) ?
   c- Quelle est la nature du mouvement résultant de M ?
3. Déterminer les expressions des vecteurs vitesse et accélération de M dans la base cylindrique $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$.
4. Montrer que l'angle $\alpha = (\vec{k},\vec{v})$ est constant. En déduire l'hodographe du mouvement.

Exercice 3

Une bille, assimilée à un point matériel M de masse m, est lâchée sans vitesse initiale depuis le point A d'une gouttière situé à une hauteur h du point le plus bas O de la gouttière. Cette dernière est terminée en O par un guide circulaire de rayon a, disposé verticalement. La bille, dont on suppose que le mouvement a lieu sans frottement, peut éventuellement quitter la gouttière vers l'intérieur du cercle. On désigne par $\vec{g} = -g\overrightarrow{e_y}$ l'accélération de la pesanteur (figure 1).



VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

1. Calculer la norme v_O de la vitesse de la bille en O.
2. Exprimer la norme v_M de la vitesse de la bille en un point M quelconque du cercle repéré par l'angle θ.
3. On désigne par $\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{CM}}{\|\overrightarrow{CM}\|}$ le vecteur unitaire porté par le vecteur position $\overrightarrow{CM}$ du point M. Ecrire l'expression de la réaction $\vec{R} = R\overrightarrow{e_r}$ du guide circulaire de la bille.
4. Déterminer la hauteur minimaleh_{min} à partir de laquelle il faut lâcher la bille sans vitesse initiale pour qu'elle ait un mouvement révolutif dans le guide.
5. On lâche la bille sans vitesse initiale depuis une hauteur $h_0 = 2a$. A quelle condition la bille décolle-t-elle du guide ? Calculer en degré, la valeur θ_0 de l'angle θ correspondante.
6. Calculer la valeur v_{O_x} de la composante suivant l'axe Ox de la vitesse de la bille au moment où elle quitte le guide.
7. Calculer la valeur maximale h_M de la hauteur atteinte dans ces conditions par la bille après qu'elle est quitté le guide.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

L1 Tronc Commun **Année Académique 2020-2021**

UE : Mécanique du Point Matériel
Deuxième session
Durée : 3 H 00

Exercice 1 :

1. Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}$ trois vecteurs donnés dans un espace vectoriel E.
   a- Résoudre l'équation vectorielle suivante d'inconnue $\vec{x}$ dans E : $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$;
   b- Faire une représentation graphique de la solution trouvée à la question 1.a.
2. On considère un vecteur $\vec{a}$ de coordonnées $(-2,1,-2)$ dans la base de $\mathcal{R} = (O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et un point B de coordonnées $(1,2,1)$.
   a- Définir et calculer les cosinus directeurs du vecteur $\vec{a}$.
   b- Déterminer en détaillant les calculs, l'équation du plan passant par B et perpendiculaire $\vec{a}$.

Exercice 2 :

Un point matériel M est repéré dans un référentiel fixe $\mathcal{R}(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ par ses coordonnées cylindriques (ρ,ϕ,z) telles que : $\rho = R, \phi = \omega t$ et $z = h\phi$ (R, ω et h sont des constantes positives et t le temps).

1. Ecrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
2. a- Quelle est la nature du mouvement de M dans le plan (xOy) ?
   b- Quelle est la nature du mouvement de M suivant la direction de l'axe (Oz) ?
   c- Quelle est la nature du mouvement résultant de M?
3. Déterminer les expressions des vecteurs vitesse et accélération de M dans la base cylindrique $(\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{k})$.
4. Montrer que l'angle $\alpha = (\vec{k},\vec{v})$ est constant. En déduire l'hodographe du mouvement.

Exercice 3 :

On considère le repère fixe $\mathcal{R}(Oxyz)$ (repère absolu) muni de la base orthonormée directe $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. (xOy) étant le plan horizontal. Soit $(\mathcal{P})$ un plan vertical qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω. On désigne par $\mathcal{R}_1(Ox_1y_1z_1)$ le repère relatif muni de la base orthonormée directe $(\vec{\imath_1},\vec{\jmath_1},\vec{k_1})$, tel que (x_1Oz_1) se trouve constamment dans le plan $(\mathcal{P})$ et $\vec{k} = \vec{k_1}$ (voir la figure ci-dessous).
Soit (Δ) une tige de longueur L (de vecteur directeur unitaire $\vec{u_1}$) passant par O, constamment contenue dans le plan $(\mathcal{P})$ et faisant un angle α constant avec l'axe (Oz_1) $(0 < \alpha < \pi/2)$.

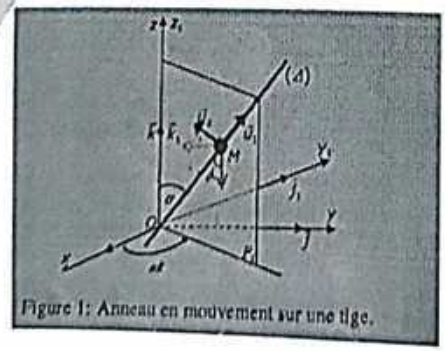


Figure 1: Anneau en mouvement sur une tige.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Un anneau M de masse m (assimilé à un point matériel) se meut sans frottement le long de la tige (Δ). La position de M sur la tige est définie par : $\overrightarrow{OM} = r(t)\overrightarrow{u_1}$ 71. Soient $\overrightarrow{u_2}$ un vecteur unitaire, contenu dans le plan $(\mathcal{P})$ et perpendiculaire à $\overrightarrow{u_1}$, et $\overrightarrow{u_3}$ un vecteur unitaire tel que la base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$, soit orthonormée directe.

1. Exprimer dans la base $(\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1})$
   a- le moment cinétique de M au point O par rapport à $\mathcal{R}_1$.
   b- le poids de M.
   c- les forces d'inertie.

2. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère $\mathcal{R}_1$, détermine la réaction $\vec{R}$ exercée par la tige sur le point M.

3. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\mathcal{R}_1$, détermine l'équation différentielle, du mouvement de M, vérifiée par r. Donner la solution de cette équation.

4. Calculer, en fonction de r, l'énergie potentielle de M par rapport au repère $\mathcal{R}_1$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR Maths-Info

Année 2017-2018

Licence 1 Tronc Commun

CORRECTION DE L'EXAMEN DE MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL

Deuxième Session

Exercice 1 : (2/2)

1. - $\vec{\tau}$: vecteur unitaire tangent à la trajectoire en M et de même sens que le mouvement. (0.5 pt)
   - $\vec{n}$: vecteur unitaire perpendiculaire à est dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire. (0.5 pt)
   - $\vec{b}$: vecteur unitaire perpendiculaire au plan formé par $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$. (0.5 pt)
2. C'est un mouvement circulaire uniforme. (0.5 pts)

Exercice 2 : (7/7)

Pour celui qui fait une représentation (1 pt)

1.a. Le mouvement du point m s'effectue dans le plan XOY. Afin d'obtenir l'équation de la trajectoire de ce point, on élimine le temps entre les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$. Nous obtenons $x^2 + y^2 = R^2$ qui est l'équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R. (1 pt)

b. Suivant l'axe OZ, l'équation de la trajectoire $z = \alpha t$ nous indique que le mouvement est rectiligne uniforme verticalement. (0.5 pt)

c. La trajectoire du mobile est la composition d'un mouvement plan et d'un mouvement vertical, il en résulte un mouvement hélicoïdal. (0.5 pt)

2. Dans le système de coordonnées cylindriques :

a. Le vecteur position est : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z \Leftrightarrow \vec{r} = R\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$ (1 pt)

b. La vitesse et l'accélération du point M sont donc :

(0.5 pt + 0.5 pt) $\begin{cases} \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\vec{u}}_\rho + \dot{z}\vec{u}_z \\ \dot{\vec{u}}_\rho = \dot{\varphi}\vec{u}_\varphi = \omega\vec{u}_\varphi \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = R\omega\vec{u}_\varphi + \alpha\vec{u}_z}, \boxed{v = \sqrt{R^2\omega^2 + \alpha^2}}$ (1)

(0.5 pt + 0.5 pt) $\begin{cases} \vec{a} = R\omega\dot{\vec{u}}_\varphi \\ \dot{\vec{u}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{u}_\rho = -\omega\vec{u}_\rho \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \boxed{-R\omega^2\vec{u}_\rho}, \boxed{a = R\omega^2}$ (2)

L'angle que fait le vecteur vitesse avec le vecteur $\vec{u}_\varphi$, d'après la figure ci-dessous, est : $\boxed{tan\beta = \frac{v_z}{v_\varphi} = \frac{\alpha}{R\omega}}$

L'accélération est centripète c'est-à-dire qu'elle est dirigée vers le centre de la trajectoire circulaire.

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

c. Le rayon de courbure est :

$$(0.5\text{ pt} + 0.5\text{ pt})\begin{cases} R_C = \dfrac{v^2}{a_N} \\ a_N^2 = a^2 - a_T^2 ; \text{avec } a_T = \dfrac{dv}{dt} = 0 \\ a_N = R\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{R_C = \frac{R^2\omega^2 + \alpha^2}{R\omega^2}} \quad (3)$$

Exercice 3 : (11/11)

Pour celui qui fait une représentation (0.5 pt)

1. Calcul de la vitesse v_B :

$\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = mgH$, avec $V_A = 0$ donc : $\boxed{V_B = \sqrt{2gH}}$ (0.5 pt)

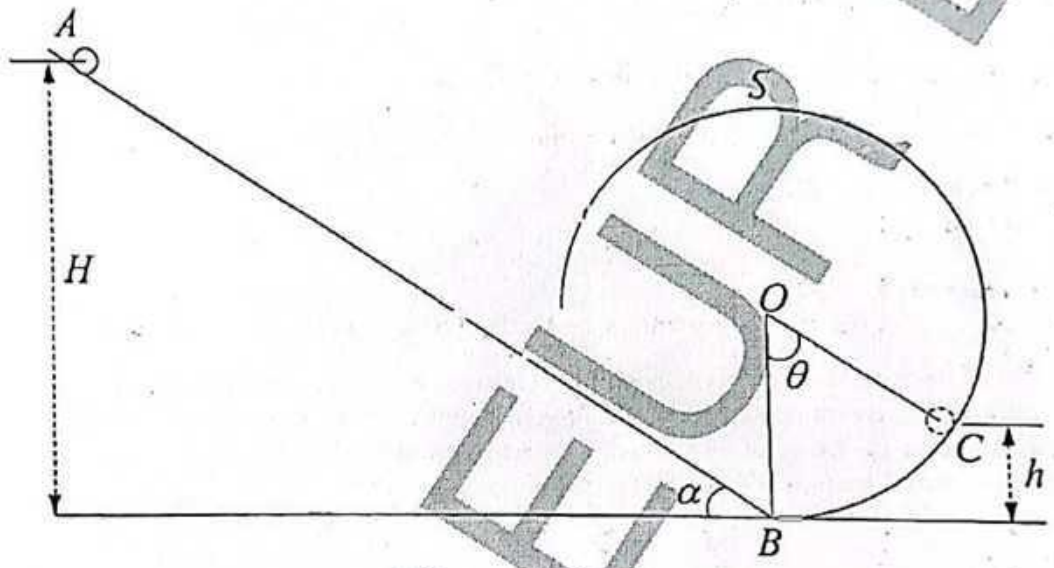


Figure 1: Mouvement d'une particule sur une gouttière

2. Expression de h en fonction de r et θ : $h = r - r\cos\theta \Rightarrow \boxed{h = r(1 - \cos\theta)}$ (0.5 pt)

3. Calcul de la vitesse v_C au point C en fonction de h et v_B : $\frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = -mgh \Rightarrow \boxed{V_C = \sqrt{-2gh + V_B^2}}$ (0.5 pt)

4. La valeur de la réaction R en fonction de m, r, θ, v_B et g :

La particule est soumise aux deux forces P et R.

$$\vec{R} + \vec{P} = m\vec{a} \text{ .(0.5 pt)} \quad (4)$$

Le mouvement étant circulaire, la résultante est une force normale. Projetons les forces sur l'axe normal et déduisons la réaction :

$$(1\text{ pt})\begin{cases} \vec{R} + \vec{P} = m\vec{a}, \\ R - mg\cos\theta = ma_N \\ a = a_N = \dfrac{V_C^2}{r} = \dfrac{1}{r}(-2gh + V_B^2) \\ h = r(1 - \cos\theta) \end{cases} \Rightarrow$$

Scanné avec CamScanner

$\boxed{R = 3mg\cos\theta - 2mg + \frac{m}{r}V_B^2}$ (0.5 pt) (5)

5. Pour que la particule atteigne au moins le point S avec une vitesse nulle il faut qu'elle ait acquis au point B une vitesse minimale qui doit vérifier l'équation :

$\frac{1}{2}mV_S^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = -mg(2r)$ (avec $V_S = 0$) $\Rightarrow \boxed{V_{B,min} = 2\sqrt{gr}}$ (1 pt)

6. Pour calculer la réaction aux points B et S exploitons l'équation (1) et remplaçons h et θ par leur valeur :

- Au point B on a : $\theta = 0$, $h = 0$, d'où :

$$\text{(1.5 pt)} \begin{cases} R_B = 3mg\cos 0 - 2mg + \frac{m}{r}V_{B,min}^2 \\ R_B = 3mg - 2mg + \frac{m}{r}4gr \Rightarrow \boxed{R_B = 5mg} \end{cases} \quad (6)$$

- Au point S on a : $\theta = \pi$, $h = 2r$, d'où :

$$\text{(1.5 pt)} \begin{cases} R_S = 3mg\cos\pi - 2mg + \frac{m}{r}V_{B,min}^2 \\ R_S = -3mg - 2mg + \frac{m}{r}4gr \Rightarrow \boxed{R_S = -mg} \end{cases} \quad (7)$$

Quand la particule se déplace entre les points cités plus haut le signe de la réaction change du positif au négatif. Cela prouve l'inversion du sens de la réaction au point I. (On comprend de cela que la réaction s'annule au point I). Le point où s'annule la réaction est défini par l'angle θ_I que nous voulons déterminer (toujours à partir de l'équation (1)) :

$$\text{(1 pt)} \begin{cases} R_I = 3mg\cos\theta_I - 2mg + \frac{m}{r}V_{B,min}^2 \\ 0 = 3mg\cos\theta_I - 2mg + \frac{m}{r}4gr \Rightarrow \theta_I = \frac{-2}{3} \Rightarrow \boxed{\theta_I \approx 132°} \end{cases} \quad (8)$$

7. Pour que la réaction ne s'annule pas entre les points B et S, c'est-à-dire qu'elle doit rester positive tout au long de l'arc BS, il faut satisfaire les conditions suivantes :

$$\text{(1 pt)} \begin{cases} R \geq 0 \Rightarrow 3mg\cos\pi - 2mg + \frac{m}{r}V_{B,0}^2 \geq 0 \\ V_{B,0} \geq \boxed{\sqrt{5rg}} \end{cases} \quad (9)$$

La valeur de H correspondante est :

$$\text{(0.5 pt)} \begin{cases} \frac{1}{2}mV_{B,0}^2 = mgH \\ V_{B,0}^2 \geq 5rg \end{cases} \Rightarrow \boxed{H \geq \frac{5}{2}r} \quad (10)$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

(5)

u'elle ait acquis

çons h et θ par

(6)

(7)

ange du positif
ıd de cela que
le θ_f que nous

(8)

rester positive

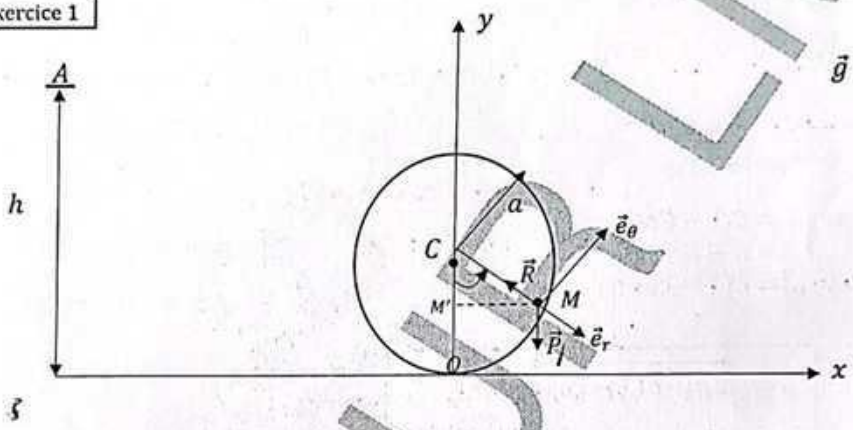
(9)

(10)

UFHB-UFRMI / Licence1 Année Académique
UE Mécanique du Point 2019/2020

CORRECTION Mécanique du Point ECUE DYNAMIQUE

Exercice 1



1)

- Système : la bille
- Référentiel terrestre supposé galiléen
- Bilan des forces : $\vec{P}, \overrightarrow{R_N}$
- Appliquons le TEC

$$\Delta E_C = \sum W(\overrightarrow{F_{ext}})$$
$$A \to 0 \qquad A \to 0$$
$$\Longrightarrow E_{C_O} - E_{C_A} = w(\vec{P}) + w(\vec{R})$$

On a : $V_A = 0 \Rightarrow E_{C_A} = 0$ et $w(\vec{R}) = 0$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}mV_O^2 = mgh$$

Donc $\boxed{V_O = \sqrt{2gh}}$

2) Appliquons le TEC entre O et M

$$O \to M$$

Scanné avec CamScanner

$$\Delta E_C = \sum W(\overrightarrow{F_{ext}})$$

$$\Rightarrow E_{C_M} - E_{C_O} = w(\vec{P}) \text{ car } w(\vec{R}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(V_M^2 - V_O^2) = -mgh \text{ avec } h = y_M$$

$$\Rightarrow V_M^2 - V_O^2 = -2gy_M$$

$$\Rightarrow V_M = \sqrt{-2gy_M + V_O^2}$$

❖ Cherchons y_M

On a : $y_M = CO - CM'$

$= a - a\cos\theta$

$y_M = a(1 - \cos\theta)$

Donc $\boxed{V_M = \sqrt{2g[-a(1-\cos\theta) + h]}}$

3) Soit $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{CM}}{\|\overrightarrow{CM}\|}$

En appliquant le TCI, on a : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{j}$

Projetons les forces dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

- Suivant $\vec{e}_r$: $P\cos\theta + R = mj_r$

On a : $\overrightarrow{CM} = a\vec{e}_r$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{d(\overrightarrow{CM})}{dt} = \frac{d}{dt}(a\vec{e}_r) = a\frac{d\vec{e}_r}{dt} \text{ or } \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \vec{e}_\theta \times \dot{\theta} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Donc $\underline{\underline{\vec{V} = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta}}$

D'où $\vec{j} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(a\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + a\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

or $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = -\vec{e}_r \times \dot{\theta} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$

Donc $\vec{j} = a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - a\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\vec{j} = a(\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2\,\vec{e}_r)$$

$\Rightarrow P\cos\theta + R = mj_r$

$\Rightarrow mg\cos\theta + R = m(-a\dot{\theta}^2)$ car $j_r = -a\dot{\theta}^2$ et $j_O = a\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \boxed{R = -m(g\cos\theta + a\dot{\theta}^2)}$$

4) Déterminons la hauteur minimale h_{min}

Cette hauteur existe si et seulement si $R \leq 0$ et $\theta = \pi$.

$R \leq 0 \Rightarrow -m(g\cos\pi + a\dot{\theta}^2) \leq 0$

$\Rightarrow -m(-g + a\dot{\theta}^2) \leq 0$ car $\cos\pi = -1$

$\Rightarrow mg - ma\dot{\theta}^2 \leq 0$

On a : $V_M = a\dot{\theta} \Leftrightarrow \dot{\theta} = \frac{V_M}{a}$

$\Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{1}{a^2}V_M^2$

$\Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{1}{a^2}(-2g(a(1-\cos\theta)+h))$

$\Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{1}{a^2}(-2ag(1-\cos\theta)+2hg)$

D'où $R \leq 0 \Rightarrow mg - ma[\frac{1}{a^2}(-2ag(1-\cos\theta)+2hg)] \leq 0$

$\Rightarrow mg - \frac{1}{a}m(-2ag(1-\cos\theta)) - \frac{2}{a}mgh \leq 0$

$\Rightarrow mg + 2mg(1-\cos\theta) - \frac{2m}{a}gh \leq 0$

$\Rightarrow \frac{2m}{a}gh \leq mg + 2mg - 2mg\cos\theta$

$\Rightarrow \frac{2m}{a}h \leq m + 2m - 2m\cos\theta$

$\Rightarrow \frac{2}{a}h \leq 1 + 2 - 2\cos\theta$

$\Rightarrow \frac{2}{a}h \leq 3 - 2\cos\theta$

$\Rightarrow \frac{2}{a}h \leq 3 + 2$ car $\cos\theta = \cos\pi = -1$

$\Rightarrow \frac{2}{a}h \leq 5$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow h \leq 5 \times \frac{a}{2}$$

Donc $\boxed{h_{min} = \frac{5}{2}a}$

5) Soit $h_0 = 2$, Calculons θ_0

$$R = 0 \Leftrightarrow -3mg\cos\theta_0 + 2mg\left(1 - \frac{h_0}{a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3mg\cos\theta_0 + 2m - 4mg = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta_0 = -\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \theta_0 = cos^{-1}(-\frac{2}{3}) \simeq 131{,}81^\circ$$

6) On sait que $\vec{V} = a\dot{\theta}\vec{e}_{\theta_0}$

$V_{O_x} = a\dot{\theta}\cos\theta_0$ car par projection $\vec{e}_\theta = \cos\theta_0$

$V_{O_x} = a\dot{\theta}(-\frac{2}{3})$ or $\dot{\theta} = (\frac{2g}{a}\cos\theta_0 + \frac{2g}{a})^{1/2} \Rightarrow \dot{\theta} = (\frac{2g}{3a})^{1/2}$

Donc $\boxed{V_{O_x} = -\frac{2}{3}(\frac{2ga}{3})^{1/2}}$

7)

$$y_{\theta_0} = a(1 - \cos\theta) = h_{\theta_0}$$

$$\Rightarrow E_{C_M} - E_{C_0} = mg(h_M - h_{\theta_0})$$

$$\Rightarrow \boxed{h_M = \frac{50}{27}a}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB Maths-Info 2020-2021

CORRECTION MECANIQUE

SESSION 1

Exercice 1

1. a) Résolvons $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$ (1)

(1) admet une solution ssi $\vec{a} \perp \vec{b}$. Soit (π) un plan contenant le vercteur $\vec{a}$ et $\vec{x}$.
On cherche une solution particulière $\vec{x_0}$ tel que $\vec{a} \cdot \vec{x_0} = 0$.

$\vec{a} \wedge \vec{x_0} = \vec{b}$ (2)

$\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{x_0}) = \vec{a} \wedge \vec{b}$

$\underbrace{\vec{a}(\vec{a}.\vec{x_0})}_{0} - (\vec{a}.\vec{a})\,\vec{x_0} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

$$\vec{x_0} = \frac{\vec{b} \wedge \vec{a}}{\vec{a}^2}$$

Ainsi la solution particulière trouvée.

$$\begin{cases} \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b} & (1) \\ \vec{a} \wedge \vec{x_0} = \vec{b} & (2) \end{cases}$$

$(1) - (2) \Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{x} - \vec{a} \wedge \vec{x_0} = \vec{0}$

$\vec{a} \wedge (\vec{x} - \vec{x_0}) = \vec{0}$

$\vec{x} - \vec{x_0} = \alpha\,\vec{a};\ \alpha \in \mathbb{R}$

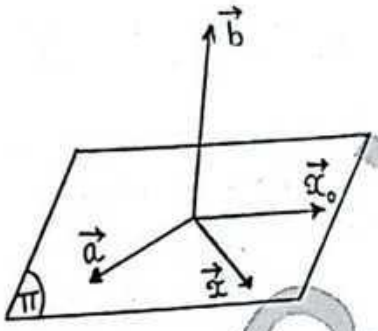
$\vec{x} = \vec{x_0} + \alpha\,\vec{a};\ \alpha \in \mathbb{R}$

$$\vec{x} = \frac{\vec{b} \wedge \vec{a}}{\vec{a}^2} + \alpha\vec{a};\ \alpha \in \mathbb{R}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

b) Schéma



2. $\vec{a}(-2,1,-2)$ et $B(1,2,1)$

a) Soit $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ les coordonnées du vecteur unitaire de même orientation que le vecteur $\vec{a}$.

$u_1 = \vec{u}.\vec{i} = \|\vec{u}\|.\|\vec{i}\|.\cos\theta_x = \cos\theta_x$

$u_2 = \vec{u}.\vec{j} = \|\vec{u}\|.\|\vec{j}\|.\cos\theta_y = \cos\theta_y$

$u_3 = \vec{u}.\vec{k} = \|\vec{u}\|.\|\vec{k}\|.\cos\theta_z = \cos\theta_z$

$\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ et $\|\vec{a}\| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

$$\vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

b) Soit $(\mathcal{P})$ ce plan, $\vec{a}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et soit $M(x,y,z)$ un point du plan.

$M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\vec{a} = 0$

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix}$

D'où $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow -2(x-1)+(y-2)-2(z-1)=0$

$\Leftrightarrow -2x+2+y-2-2z+2=0$

$\Leftrightarrow -2x+y-2z+2=0$

Une équation de $(\mathcal{P})$ est $-2x+y-2z+2=0$

Exercice 2

1. $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

- En corrdonnée cylindrique, on a:

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = h\,\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \\ z = h\,\omega t \end{cases}$$

D'où $\underline{\overrightarrow{OM} = R\cos\omega t\,\vec{i} + R\sin\omega t\,\vec{j} + h\omega t\,\vec{k}}$

2. a) $\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = R^2$

Alors dans le plan (xoy) la nature du mouvement de M est un cercle de centre $C\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ est le rayon R.

b) $\begin{cases} x = R\cos(\omega t + 2\pi) \\ y = R\sin(\omega t + 2\pi) \\ z = h(\omega t + 2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = R\cos(\omega t) \\ y = R\sin(\omega t) \\ z = h\omega t + 2\pi h \end{cases}$

Suivant l'axe (oz), on a un mouvement de translation ou rectiligne uniforme

c) La nature du mouvement résultant:
Le mouvement résultant est un mouvement hélicoïdal.

3. $\vec{V}$ et $\vec{\delta}$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$

On a: $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k} = R\vec{e}_\rho + h\omega t\,\vec{k}$

$\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt/R} = \dot{R}\vec{e}_\rho + R\dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt/R} + h\omega\vec{k} + h\omega t\dfrac{d\vec{k}}{dt/R}$

$\dot{R}$ car $R = cste$ $\dfrac{d\vec{k}}{dt/R} = \vec{0}$

$\dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt/R} = \dot{\varnothing}\vec{e}_\rho = (\dot{\omega t})\vec{e}_\rho = \omega\vec{e}_\rho$

$\left(\dfrac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right)_R = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = (\dot{\omega t})\vec{e}_\varphi = \omega\vec{e}_\varphi$

donc $\boxed{\vec{V} = R\omega\vec{e}_\rho + h\omega\vec{k}}$

$\vec{\delta} = \dfrac{d\vec{V}}{dt/R} = R\omega\dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt/R}$ or $\dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt/R} = -\dot{\varnothing}\vec{e}_\rho = -(\dot{\omega t})\vec{e}_\rho = -\omega\vec{e}_\rho$

donc $\boxed{\vec{\delta} = -R\omega^2\vec{e}_\rho}$

4. Montrons que l'angle $\alpha = (\vec{k}, \vec{v})$ est constant.
On sait que $\vec{v}.\vec{k} = \|\vec{v}\| . \|\vec{k}\|\cos(\alpha)$
$\|\vec{v}\| = \sqrt{(R\omega)^2 + (h\omega)^2} = \omega\sqrt{R^2 + h^2}$
$\|\vec{k}\| = 1$ or $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est orthonormée alors

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$\vec{v}.\vec{k} = (R\omega\vec{c_\varphi} + h\omega\vec{k}).(\vec{k}) = h\omega$

donc $\cos\alpha = \dfrac{h\omega}{\omega\sqrt{R^2+h^2}} = \dfrac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} = Cste$

Alors α est un angle constant. Puisque l'angle α et le module de la vitesse sont constants, on en déduit que l'hodographe du mouvement est un cercle de rayon $r_1 = R\omega$

Exercice 3: Voir correction Examen 2019 – 2020 ECUE Dynamique

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB Mathis-Info 2020-2021

CORRECTION MECANIQUE DU POINT MATERIEL

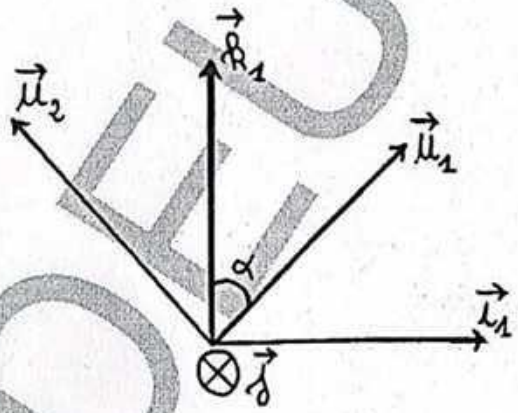
SESSION 2

Exercice 1 (Correction, voir Exercice 1 session 1 2020 – 2021)

Exercice 2 (Correction, voir Exercice 1 session 2 2020 – 2021)

Exercie 3

1. Exprimons dans la base $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$
   a) Le moment cinétique de M au point O par rapport à R_1
   $\vec{L_0}$ est le moment cinétique en O du point matériel M, d'où:
   $\vec{L_0} = m\,\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R_1)$, On a: $\overrightarrow{OM} = r(t)\,\vec{u_1}$



$R_1(O, x_1, y_1, z_1)$; base$(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$

$\vec{u_1} = \sin\alpha\ \vec{i_1} + \cos\alpha\ \vec{k_1}$
$\vec{u_2} = -\cos\alpha\ \vec{i_1} + \sin\alpha\ \vec{k_1}$
$\vec{u_3} = -\vec{j_1}$; $\vec{k} = \vec{k_1}$

$$\vec{V}(M/R_1) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/R_1} = \frac{d}{dt/R_1}(r\,\vec{u_1}) = \dot{r}\vec{u_1} + r\,\frac{d\vec{u_1}}{dt/R_1}$$

$\frac{d\vec{u_1}}{dt/R_1} = \vec{0}$ car $\dot{\alpha} = 0$

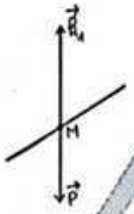
$\dot{r} = \dot{r}(t)$ et $r = r(t)$ donc $\vec{V}(M/R_1) = \dot{r}\,\vec{u_1}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$\vec{V}(M/R_1) = \dot{r}\,(\sin\alpha\ \vec{i_1} + \cos\alpha\ \vec{k_1})$
$\Rightarrow \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R_1) = r(t)\ \vec{u_1} \wedge \dot{r}(t)\ \vec{u_1} = \vec{0}$
Donc $\boxed{\vec{L_0} = \vec{0}}$

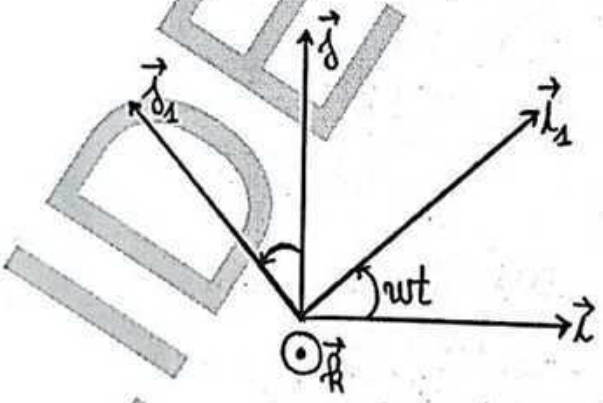
b) le poids de M



$\vec{P} = -mg\ \vec{k_1}$(voir figure)

c) Les forces d'inertie.

* $\vec{F_e} = -m\vec{\delta_e}$
avec $\vec{\delta_e} = \vec{\delta}(O/R) + \frac{d\Omega(R_1/R)}{dt/R} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge (\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{OM})$



D'après la figure, $\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\ \vec{k}$
Comme $\vec{k_1} = \vec{k} \Rightarrow \vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\ \vec{k}$
$\vec{\delta}(O/R) = \vec{0}$ car 0 est lié à R
$\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt/R} = \vec{0}$ car $\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\vec{k_1}$ et ω et $\vec{k_1}$ sont constants dans R

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{OM} = \omega\vec{k_1} \wedge r(t)\ \vec{u_1} = w\, r(t)\ \sin\alpha\ \vec{j_1}$
$\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge [\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{OM}] = \omega\ \vec{k_1} \wedge (w\, r(t)\ \sin\alpha\ \vec{j_1}) = -\omega^2\, r(t)\ \sin\alpha\ \vec{i_1}$

Donc $\boxed{\delta_e = -\omega^2\, r(t)\ \sin\alpha\ \vec{i_1}}$

$\Rightarrow \vec{F_e} = m\,\omega^2\, r(t)\ \sin\alpha\ \vec{i_1}$

* $\vec{F_c} = -m\ \vec{\delta_c}$ avec $\delta_c = 2\ \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}(M/R_1)$
$\vec{\delta_c} = 2\,\omega\ \vec{k_1} \wedge [\ \dot{r}(\sin\alpha\ \vec{i_1} + \cos\alpha\ \vec{k_1})\ ] = 2\,\omega\,\dot{r}\ \sin\alpha\ \vec{j_1}$

$\Rightarrow \vec{F_c} = -2\,m\,\omega\,\dot{r}\ \sin\alpha\ \vec{j_1}$

2. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le R_1, déterminons la réaction $\vec{R}$ exercée par la tige sur le point M.

$\dfrac{d\vec{L_0}(M/R_1)}{dt/R_1} = \vec{m_0}(\vec{P}) + \vec{m_0}(\vec{R}) + \vec{m_0}(\vec{F_e}) + \vec{m_0}(\vec{F_c})$ avec $\vec{m_0}(\vec{F_i})$ le moment de la force $\vec{F_i}$

* $\vec{m_0}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = [r\ \sin\alpha\ \vec{i_1} + r\ \cos\alpha\vec{k_1}] \wedge (-mg\ \vec{k_1})$
$\vec{m_0}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = m\,g\,r\sin\alpha\ \vec{j_1}$

* $\vec{m_0}(\vec{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R}$
$= r\,\vec{u_1} \wedge (R_2\,\vec{u_2} + R_3\,\vec{u_3})$
$= r\,R_2\,\vec{u_3} - r\,R_3\,\vec{u_2}$

Avec $\vec{R} = R_1\,\vec{u_1} + R_2\,\vec{u_2} + R_3\,\vec{u_3}$ et mouvement sans frottement donc $R_1 = 0$

* $\vec{m_0}(\vec{F_c}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F_c} = m\,r^2\,\omega^2\ \sin\alpha\ \cos\alpha\ \vec{j_1}$

* $\vec{m_0}(\vec{F_c}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F_c} = -2\,m\,\dot{r}\,\omega\,r\ \sin\alpha\,\vec{u_2}$

$\dfrac{d}{dt/R_1}\vec{L_0}(M/R_1) = \vec{0} \Rightarrow m\ g\ r\ \sin\alpha\vec{j_1} + r\ R_2\ \vec{u_3} - r\ R_3\ \vec{u_2} +$
$m\,r^2\,\omega^2\ \sin\alpha\ \cos\alpha\ \vec{j_1} - 2\,m\,\dot{r}\,\omega\,r\ \sin\alpha\ \vec{u_2} = \vec{0}$

Or $\vec{j_1} = -\vec{u_3} \Rightarrow -m\,g\,r\ \sin\alpha\vec{u_3} + r\ R_2\ \vec{u_3} - r\ R_3\ \vec{u_2} - m\,r^2\,\omega^2\ \sin\alpha\ \cos\alpha\ \vec{u_3} -$
$2\,m\,\dot{r}\,\omega\,r\ \sin\alpha\ \vec{u_2} = \vec{0}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow R_2 = m\,g\,\sin\alpha + m\,r\,\omega^2\,\sin\alpha\,\cos\alpha$
$\Rightarrow R_3 = -2\,m\,\omega\,\dot{r}\,\sin\alpha$

3. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère R_1, déterminons l'équation différentielle du mouvement de M.

$$\frac{dE_c(M/R_1)}{dt} = P(\vec{P}/R_1) + P(\vec{P}/R_1) + P(\vec{F_c}/R_1)$$

* $P(\vec{P}/R_1) = \vec{P}.\vec{V}(M/R_1)$
$= -m\,g\,k_1(\dot{r}\,\sin\alpha\,\vec{i_1} + \dot{r}\,\cos\alpha\,\vec{k_1})$
$= -m\,g\,\dot{r}\,\cos\alpha$

* $P(\vec{P}/R_1) = 0$

* $P(\vec{F_c}/R_1) = \vec{F_c}.\vec{V}(M/R_1) = m\,r\,\omega^2\,\sin\alpha\,\vec{i_1}(\dot{r}\,\sin\alpha\,\vec{i_1} + \dot{r}\,\cos\alpha\,\vec{k_1})$

$P(\vec{F_c}/R_1) = m\,r\,\dot{r}\,\omega^2\,\sin^2\alpha$

$E_c(M/R_1) = \frac{1}{2}\,m\,\vec{V}(M/R_1)^2 \rightarrow E_c(M/R_1) \asymp \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2$

$\Rightarrow \frac{d(E_c(M/R_1))}{dt} = m\,\dot{r}\,\ddot{r}$

$\Rightarrow m\,\dot{r}\,\ddot{r} = -m\,g\,\dot{r}\,\cos\alpha + m\,r\,\dot{r}\,\omega^2\,\sin^2\alpha$

$\Rightarrow \ddot{r} - \omega^2\,\sin^2\alpha\,r = -g\,\cos\alpha$ est l'équation différentielle du mouvement de M. Cette équation différentielle est une équation différentielle avec second membre. On obtient après résolution:

$$r(t) = A\,e^{-\omega_0 t} + B\,e^{\omega_0 t} + \frac{g\,\cos\alpha}{\omega_0^2}$$

avec $\omega_0^2 = \omega^2\,\sin^2\alpha$

4. Calculons en fonction de r l'énergie potentielle de M par rapport au repère R_1

On a $x_1 = r\,\sin\alpha \Longrightarrow \vec{F_c} = m\,\omega^2\,x_1\,\vec{i_1} \Longrightarrow \overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F_c} \Rightarrow E_{p_c}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$dE_{p_e} = -dW(\vec{F}_e/R_1) = -\vec{F}_e\, d\overrightarrow{OM}$$
$$= -m\,\omega^2\, x_1\, \vec{i}_1(dx_1\, \vec{i}_1 + dy_1\, \vec{j}_1 + dz\, \vec{k}_1)$$
$$= -m\,\omega^2\, x_1\, dx_1$$
$$\Longrightarrow E_{p_e} = -\frac{1}{2}\, m\,\omega^2\, x_1^2 + Cte \Rightarrow E_{p_e} = -\frac{1}{2}\, m\,\omega^2\, r^2\, \sin^2\alpha + Cte$$

$$dE_{p_g} = -dW(\vec{P}/R_1) = -\vec{P}\, d\overrightarrow{OM}$$
$$= mg\, \vec{k}_1(dx_1\, \vec{i}_1 + dy_1\, \vec{j}_1 + dz\, \vec{k}_1)$$
$$\Rightarrow dE_{p_g} = mg\, dz_1 \Rightarrow E_{p_g} = mgz_1 + cte$$

$$z_1 = r\cos\alpha \Rightarrow E_{p_g} = mgr\cos\alpha + cte$$

$$\Longrightarrow \boxed{E_p(M/R_1) = mgr\cos\alpha - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \sin^2\alpha + cte}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Licence 1 Actuariat 1 2016 - 2017
Examen initiation à l'informatique
Session 1 semestre 1 durée 1 h 30

Exercice 1 : culture informatique

1. Donner les fonctions d'un système d'exploitation et citer un nom de système d'exploitation
2. Expliquez pourquoi, plus la fréquence augmente plus l'ordinateur est rapide. Illustrer en donnant un exemple
3. Donner les composants d'un ordinateur selon l'architecture de Von Neumann et donner le rôle de chaque composant

Exercice 2 : Conversions et calculs

2.1. 55 cm= (?) ''; 4.7Go=(?)Mo; 2560 Go= (?)To
2.2. Réaliser les conversions suivantes : $(64,75)_{10}$=(?)$_2$; $(31,4)_8$=(?)$_{10}$; $(1100010)_2$=(?)$_{16}$; $(1101010)_2$=(?)$_8$; $(BC5)_{16}$=(?)$_2$; $(110,01)_2$=(?)$_{10}$; $(11)_2$=(?)$_{8421}$; $1BE_{16}$= (?)$_{10}$; 453_8 = (?)$_{10}$
2.3. Effectuer les opérations suivantes :$(1AB/B)_{16}$, , $(2BC + DAF)_{16}$, $(2ECx F5)_{16}$ $(1101/101)_2$ à 2 chiffres près ; $(1101x101)_2$; $(1101-111)_2$; $(1101+101)_2$

Exercice 3 : systèmes de numération

On donne $A=48_{10}$, $B=24_{10}$, $C=83,75_{10}$
3.1. Effectuer A- B en complément à 10 et A- C en complément à 9
3.2. Convertir A et B en octal, puis effectuer B- A en complément restreint
3.3. Convertir A et B en DCB, puis effectuer A+ B en DCB
3.4. Peut-on représenter -3A sur 8 bits ? Justifier votre réponse
Pour la suite on considère que les codes sont sur une longueur 8.
3.5. Convertir A et B en binaire
3.6. Coder -A selon le mode signe et valeur absolue, selon le mode complément à un, puis selon le mode complément à deux.
3.7. Effectuer si possible B - A dans le codage signe et valeur absolue, dans le codage complément à un puis dans le codage complément à deux.

NB : les calculatrices ne sont pas autorisées lors de l'épreuve

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR MI
Licence 1
Année : 2016 - 2017

INITIATION A L'INFORMATIQUE
Examen écrit : session 2 : durée 1 h 30

Exercice 1 : culture informatique

1. Expliquez la différence entre une mémoire ROM et une mémoire RAM.
2. Convertir 1,5 To en Go, 55cm en pouces, 2 picosecondes en secondes.
3. Classifier l'écran. le clavier le disque dur. le microprocesseur dans les cinq blocs fonctionnels de Von Neumann
4. Compter 20 nombres en hexadécimal à partir du nombre hexadécimal 129.

Exercice 2 : systèmes de numération

2. Manipuler des systèmes de numération en réalisant les conversions suivantes :

a) $(32,75)_{10} = (\ ?\ )_2$ b) $(25,4)_8 = (\ ?\ )_{10}$ c) $(11101010)_2 = (\ ?\ )_{16}$
d) $(1ABC)_{16} = (\ ?)_2$ e) $(FG)_{16} = (\ ?)_{10}$ f) $(11101010)_2 = (\ ?\ )_8$ g) $(11101010)_2 = (\ ?\ )_3$
h) $(ACx\ 2D)_{16}$ j) $(1011 / 11)_2$ (1 chiffre près) j) $(AC5 - 5EF)_{16}$

Exercice 3 : Problème

1. On donne $A = (37)_{10}$ et $B = (26)_{10}$
1.1. Effectuer B-A en complément vrai
1.2. Convertir A et B en base 8 puis effectuer A+B, AxB, A/B (2 chiffres près), B-A en complément restreint.
1.3. Convertir A et B en DCB puis effectuer A+B
1.4. Coder si possible A en binaire sur 4 bits. Justifier votre réponse
1.5. Effectuer en binaire A+B et
AxB
Dans le système binaire, on suppose que les codes ont pour longueur 8.
1.6. Coder -A selon le mode signe et valeur absolue, selon le mode complément à un, puis selon le mode complément à deux.
1.7. Effectuer en binaire si possible B - A dans le codage signe et valeur absolue, dans le codage complément à un puis dans le codage complément à deux.
1.8. Effectuer en binaire A-B en complément vrai et en complément restreint

NB : les calculatrices ne sont pas admises au cours de l'épreuve

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

UFR MI Licence 1 2017 - 2018

Examen initiation à l'informatique

Session 1 semestre 1 durée 1 h 30

Exercice 1 : culture informatique

1. Donner les fonctions d'un système d'exploitation et citer un nom de système d'exploitation
2. Expliquez pourquoi, plus la fréquence augmente plus l'ordinateur est rapide. Illustrer en donnant un exemple
3. Donner les composants d'un ordinateur selon l'architecture de Von Neumann et donner le rôle de chaque composant

Exercice 2 : Conversions et calculs

2.1. 75 cm= (?) ''; 3.7Go=(?)Mo; 2560 Go= (?)To

2.2. Réaliser les conversions suivantes : $(64,75)_{10}$=(?)$_2$; $(31,4)_8$=(?)$_{10}$; $(1100010)_2$=(?)$_{16}$; $(1101010)_2$=(?)$_8$; $(BC5)_{16}$=(?)$_2$; $(110,01)_2$=(?)$_{10}$; $(11)_2$=(?)$_{8421}$; $1BE_{16}$= (?)$_{10}$; 453_8 = (?)$_{10}$

2.3. Effectuer les opérations suivantes :$(1AB/B)_{16}$, , $(2BC + DAF)_{16}$, $(2ECx\ F5)_{16}$ $(1101/101)_2$ à 2 chiffres près ; $(1101x101)_2$; $(1101-111)_2$; $(1101+101)_2$

Exercice 3 : systèmes de numération

On donne A=38 $_{10}$, B=14 $_{10}$, C=73,75$_{10}$

3.1. Effectuer A- B en complément à 10 et A- C en complément à 9

3.2. Convertir A et B en octal, puis effectuer B- A en complément restreint

3.3. Convertir A et B en DCB, puis effectuer A+ B en DCB

3.4. Peut-on représenter -4A sur 8 bits ? Justifier votre réponse

Pour la suite on considère que les codes sont sur une longueur 8.

3.5. Convertir A et B en binaire

3.6. Coder -A selon le mode signe et valeur absolue, selon le mode complément à un, puis selon le mode complément à deux.

3.7. Effectuer si possible B - A dans le codage signe et valeur absolue, dans le codage complément à un puis dans le codage complément à deux.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR MI

LICENCE 1

Année : 2017-2018

INITIATION A L'INFORMATIQUE

Examen écrit : deuxième session 1h30

Exercice 1 : Culture informatique

1. Expliquez la différence entre une mémoire ROM et une mémoire RAM
2. Un ordinateur de rêve a un processeur dont le cycle de traitement est de 1.5 picosecondes. Trouver la fréquence de ce processeur.
3. Classifier l'écran, le clavier, le disque dur, le microprocesseur dans les cinq blocs fonctionnels de Von Neumann

Exercice 2 : Systèmes de numération

1. Compter 20 nombres en hexadécimal à partir du nombre hexadécimal 129
2. Manipuler des systèmes de numération en réalisant les conversions suivantes :
   a) $(42{,}75)_{10} = (?)_2$ b) $(25{,}2)_8 = (?)_{10}$ c) $(11101010)_2 = (?)_{10}$ d) $(4AC5)_{16} = (?)_2$ e) $(1CD)_{16} = (?)_{10}$ f) $(11101010)_2 = (?)_8$ g) $(11101010)_2 = (?)_3$
   h) $(AC5 \times 2D)_{16}$ i) $(6521/72)_8$ (1 chiffre près) j) $(AC5 - 82D)_{16}$

Exercice 3 : Problème

1. On donne A = $(47)_{10}$ et B= $(36)_{10}$.
   - 1.1 Effectuer B-A en complément vrai
   - 1.2 Convertir A et B en base 6 puis effectuer A+B, A×B, A/B (2 chiffres près) et B-A en complément restreint.
   - 1.3 Convertir A et B en DCB puis effectuer A+B.
   - 1.4 Coder si possible A en binaire sur 4 bits. Justifier votre réponse.
   - 1.5 Effectuer en binaire A+B, A×B, A/B (2 chiffres près)
     Dans le système binaire, on suppose que les codes ont pour longueur 8
   - 1.6 Coder -A selon le mode signe et valeur absolue, selon le mode complément à un puis selon le mode complément à deux.
   - 1.7 Effectuer en binaire si possible B-A en dans le codage signe et valeur absolue, dans le codage complément à un puis dans le codage complément à deux.
   - 1.8 Effectuer en binaire A-B en complément vrai et en complément restreint

NB : Les calculatrices ne sont pas admises au cours de l'épreuve

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Licence 1 Tronc Commun
Année : 2018 – 2019
Examen Semestre 1 Session 2 durée 1h30

INITIATION A L'INFORMATIQUE

Les calculatrices ne sont pas admises lors de l'épreuve

Exercice 1 : culture informatique

1.1. Définir les trois grandes familles de logiciels et donner un exemple de chacune d'elle.
1.2. Citer les cinq blocs fonctionnels de l'architecture de Von Neumann et donner leur rôle
1.3. compter 20 nombres hexadécimaux à partir de $1EF_{16}$
1.3.Donner une signification des expressions ci-dessous :

Expressions	Signification	Expressions	Signification
pixel		dpi	
RAM		USB	
AMD E-450 1.65 GHz		Blog	

Exercice 2 : Conversions et calculs

2.1. 19''= (?) cm ; 2560 Go= (?)To
2.2. Réaliser les conversions suivantes : $(54,75)_{10}$=(?)$_2$; $(42,4)_8$=(?)$_{10}$; $(1101010)_2$=(?)$_{16}$; $(1101011)_2$=(?)$_8$; $(1C5)_{16}$=(?)$_2$; $(101,01)_2$=(?)$_{10}$; $(101)_2$=(?)$_{8421}$; $1AC_{16}$= (?)$_{10}$; 243_8 = (?)$_{10}$
2.3. Effectuer les opérations suivantes :$(1A/C)_{16}$, $(2BC + DAE)_{16}$, $(1BCx\ A1)_{16}$ $(1011/101)_2$ à 2 chiffres près ; $(1011x101)_2$; $(1101\text{-}111)_2$; $(1101+1001)_2$

Exercice 3 : systèmes de numération

On donne $A=49_{10}$, $B=32_{10}$, $C=53,75_{10}$
3.1. Effectuer A- B en complément à 10 et A- C en complément à 9
3.2. Convertir A et B en octal, puis effectuer B- A en complément restreint
3.3. Convertir A et B en DCB, puis effectuer A+ B en DCB
Pour la suite on considère que les codes sont sur une longueur 8.
3.4. Convertir A et B en binaire
3.5. Coder –A selon le mode signe et valeur absolue, selon le mode complément à un, puis selon le mode complément à deux.
3.6. Effectuer si possible B - A dans le codage signe et valeur absolue, dans le codage complément à un puis dans le codage complément à deux.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

INITITIATION A L'INFORMATIQUE

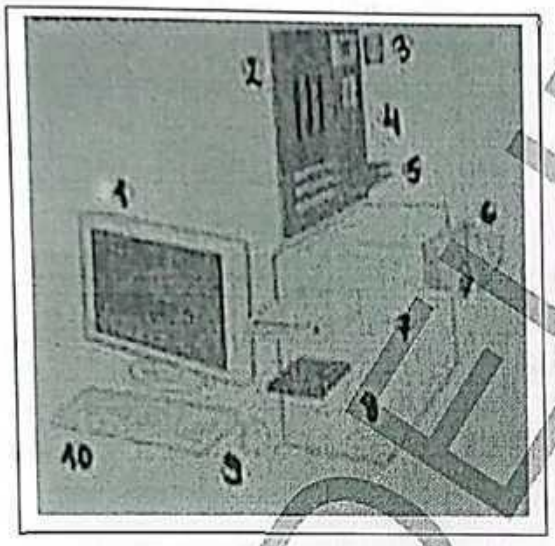
EXAMEN ECRIT : SESSION 1 2019-2020

EXERCICE 1 : Culture Informatique

1.1 Expliquez la différence entre une mémoire ROM et une mémoire RAM
1.2 Convertir 1.5 To en Go ; 55 cm en pouces
1.3 Citer les cinq blocs fonctionnels de Von Neumann
1.4 Remplir le tableau :

Expressions	Signification	Expressions	Signification
pixel		USB	
AMD E-450 1.65 GHz		Blog	

EXERCICE 2 : Matériel Informatique



1. Tenant compte de la figure ci-contre et attribuer des numéros aux composants suivants : Ecran, Carte mère, CPU (Microprocesseur), Mémoire vive (RAM) , Cartes de périphériques, Alimentation , Lecteur de disques (CD) , Disque dur ,Souris , Clavier .
2. Comment démarrer un ordinateur
3. Donner la différence entre Windows et Microsoft office
4. Donner le nom d'un fabricant de microprocesseur

EXERCICE 3 : Systèmes de numérotation

3.1. Manipuler des systèmes de numérotation en réalisant les conversions suivantes :

a) $a)\ (32{,}75)_{10} = (?)_2$; $b)\ (25{,}4)_8 = (?)_{10}$; $c)\ (11101010)_2 = (?)_{14}$; $d)\ (1ABC)_{14} = (?)_2$

$e)\ (FG)_{16} = (?)_{18}$; $f)\ (11101010)_2 = (?)_8$; $g)\ (11101010)_2 = (?)_8$; $h)\ (1010)_2 \times (101)_2$

$i)\ \left(^{1011}/_{11}\right)_2$ $(1\ chiffre\ près)$; $j)(ACS - 5EF)_{14}$; $k)\ (00110111)_{DCB} + (00100110)_{DCB}$

3.2 On donne $A = (37)_{10}$ et $B = (26)_{10}$. Dans le système binaire, on suppose que les codes ont pour longueur B . Effectuer en binaire $B - A$ dans le codage en complément à 1

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Licence 1 Tronc commun
EXAMEN D'INITIATION A L'INFORMATIQUE SANS CALCULATRICE
Semestre 1 Session 1 durée: $1h30$
Année : $2019 - 2020$

Exercice 1: QCM

Recopier le texte sur votre copie et mettez V si la phrase est juste et F si la phrase est fausse :

a) Windows 10 est un SE qui gère les CPU multi-coeurs
b) Linux nécessite Windows 10 pour être installé
c) Windows 10 proffesional est plus rapide que Windows 10 Home
d) Ms DOS est un SE multi-tâches
e) Le système d'exploitation ne gère que la RAM
f) Les systèmes d'exploitation linux ne possèdent pas de bibliothèque DLL
g) Le formatage bas niveau sert à restructurer le disque en zone système et zone de données
h) La réinstallation du système Windows ne supprime pas vos données sauvegardées
i) La mise à niveau d'un système supprime vos dossiers et fichiers existants
j) La mise en veille prolongée sauvegarde une image du contenu de la RAM dans le disque dur

Exercice 2: culture informatique

1. Expliquer la différence entre un système d'exploitation et un logiciel d'application. Illustrer cela à l'aide d'un exemple.
2. Convertir 17 pouces en centimètres et convertir 4.7 To en Go
3. En observant le schéma de l'architecture d'un ordinateur selon Von Neumann, donner le rôle de chaque bloc fonctionnel.

Exercice 3: systèmes de numérotation

2.1. Réaliser les conversions suivantes : a) $(74)_{10} = (?)_4$ b) $(26,4)_8 = (?)_{10}$ c) $(1101010)_2 = (?)_{16}$ d) $(1101010)_2 = (?)_8$ e) $(1BC5)_{16} = (?)_2$, $(25,4)_8 = (?)_{10}$, $(8740)_{10} = (?)_{DCB}$

2.2. Effectuer les opérations suivantes: $(5C1/4)_{16}$, $(B6F - 1A)_{16}$, $(5C1 \times E2)_{16}$

2.3. On donne $A = 50_{10}$, $B = 20_{10}$, $C = 85_{10}$

2.3.1. Effectuer A-B en complément en vrai

2.3.2. Convertir A et B en octal puis effectuer A-B en complément à 7

2.3.3. Convertir A et B en base 6 puis effectuer $A \times B$ et A/B (un chiffre près)dans cette base

2.3.4. Convertir A et C en DCB puis effectuer $A + C$ en DCB

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

2.3.5. Convertir A et B en binaire puis effectuer $A+B$ $A-B$, $A \times B$, A/B
Dans le sytème binaire, on suppose que les codes sont représentés sur 8 bits
2.3.6. Coder $-A$ selon le mode signe et valeur absolue, selon le mode complément à un, puis selon le mode complément à deux.
2.3.7 Effectuer si possible B-A dans le codage signe et valeur absolue, dans le codage complément à un puis dans le codage complément à deux.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN D'INITIALISATION EN INFORMATIQUE
PREMIERE SESSION (2016-2017)

EXERCICE 1 : Questions de cours(voir cours).
EXERCICE 2 : Conversions et Calculs.

2.1)

* $17'' = (?)cm$. On a :$1'' = 2.54\,cm$, donc $\underline{17'' = 43.18\,cm}$
* $4.7\,Go = (?)Mo$. On a : $1024\,Mo = 1\,Go$ donc $\underline{4.7Go = 4812.8\,Mo.}$
* $2048\,Go = (?)To$. On a :$1024\,Go = 1\,To$, donc $\underline{2048\,Go = 2\,To.}$

2.2) Réalisation des conversions.

* $(64.75)_{10} = (?)_2$. On a : $(64)_{10} = 1000000_2$ et$(0.75)_{10} = 0.11_2$, donc $\underline{(64.75)_{10} = 1000000.11_2.}$
* $(31.4)_8 = (?)_{10}$. On a : $\underline{(31.4)_8 = 25.5_10}$
* $(1100010)_2 = (?)_{16}$.On a :$(1100010)_2 = \underbrace{0110}_{6}\,\underbrace{0010}_{2} = 62_{16}$, donc $\underline{(1100010)_2 = 62_{10}.}$
* $(1101010)_2 = (?)_8$. On a :$(1101010)_2 = \underbrace{001}_{1}\,\underbrace{101}_{5}\,\underbrace{010}_{2} = (152)_8$,donc $\underline{(1101010)_2 = (152)_8}$
* $(BC5)_{16} = (?)_2$.On a :$B_{16} = 1011_2, C_{16} = 1100_2$ et$5_{16} = 0101_2$, Alors $\underline{(BC5)_{16} = (101111000101)_2}$
* $(110.01)_2 = (?)_{10}$. On a :$1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 6.25$. donc $\underline{(110.01)_2 = (6.25)_{10}.}$
* $(11)_2 = (?)_{8421}$. On a :$\underline{(11)_2 = (0011)_{8421}}$
* $(1BC)_{16} = (?)_{10}$.On a :$1 \times 16^2 + 11 \times 16^1 + 12 \times 16^0 = 444$. donc $\underline{(1BC)_{16} = 444_{10}.}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

* $(253)_8 = (?)_{10}$.On a :$2\times8^2+5\times8^1+3\times8^0 = 171$,donc $\underline{(253)_8 = 171_{10}}$.

2.3) Effectuons les opérations suivantes :

* $(1AB/C)_{16} = (?)_{16}$,$(2BC+FAE)_{16} = (?)_{16}$,$(2BC\times F1)_{16} = (?)_{16}$,$(1101/101)_2$ à 2 chiffres près

* $(1AB/C)_{16} = 23_{16}$ car

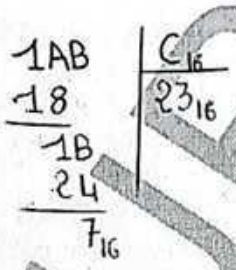


FIGURE 1 – RESULTAT

* $(1101/101)_2 = 1,10_2$ à 2chiffres près car

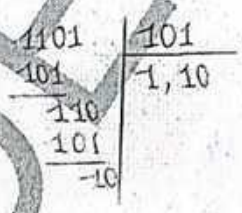


FIGURE 2 – RESULTAT

$$* (2BC+FAE)_{16} \Rightarrow \begin{array}{cccc} & 2 & B & C_{16} \\ + & F & A & E_{16} \\ \hline 1 & 2 & 6 & A_{16} \end{array} \quad ; * (2BC\times F1)_{16} \Rightarrow \begin{array}{cccc} & & 2 & B & C_{16} \\ \times & & & F & 1_{16} \\ \hline & & 2 & B & C \\ 2 & 9 & 0 & 4 & . \\ \hline 2 & 9 & 2 & F & C_{16} \end{array}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

* $(1101\times101)_2 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1 \\ \times\quad 1\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 0\ 1\ .\ . \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

; * $(1101-111)_2 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1 \\ -\quad 1\ 1\ 1 \\ \hline 0\ 1\ 1\ 0 \end{array}$$

* $(1101+101)_2 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1 \\ +\quad 1\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

EXERCICE 3 : Système de numeration
On donne $A = 59_{10}, B = 31_{10}$ et $C = 83.75_{10}$

3.1) Effectuons : $A-B$ en complement à 10 et $A-C$ en complement à 9

* On a : $\overline{B}_{10}^{10} = 10^2 - 31 = 69, A + \overline{B}_{10}^{10} = 128$. Il ya une retenue de dépassement,on l'ignore et par conséquent $A - B = 28_{10}$.

* $A - C$ en complement à 9.
On a : $A = 59.00_{10}$ et $C = 83.75_{10}$. On a : $\overline{C}_{10}^{9} = 10^2 - 10^{-2} - 83.75 = 16.24_{10}$.
On a : $A + \overline{C}_{10}^{9} = 75.24_{10}$. Pas de depassement, donc on complemente le resultat puis l'affecté un signe$(-)$.
On a : $\overline{75.24}_{10}^{9} = 10^2 - 10^{-2} - 75.24 = 24.75_{10}$. Ainsi $\underline{A - C = -24.75_{10}}$.

3.2) Convertissons A et B en octal,puis $B - A$ en complement restreint.

$A = (59)_{10} = (?)_8$, On a : $\underline{A = 73_8}$ car

$$\begin{array}{r|l} 59 & 8 \\ \hline 56 & 7 \mid 8 \\ \hline 3 & 0 \mid 0 \\ & 7 \end{array}$$

FIGURE 3 – RESULTAT

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

. $B = 31_{10} = (?)_8$,On a : $\underline{B = 37_8}$ car

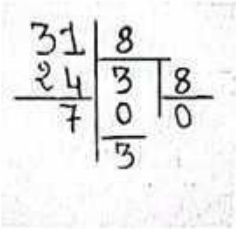


FIGURE 4 – RESULTAT

* $B - A$ en complement restreint (c'est-à-dire en complement à 7)
On a : $\overline{A}_8^7 = (8^2)_{10} - 8^0 - 73_8 = 64_{10} - 74_8 = 100_8 - 74_8 = 4_8$ car

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 0_8 \\ - & & 7 & 4_8 \\ \hline & . & . & 4_8 \end{array}$$

On a : $B + \overline{A}_8^7 = \begin{array}{cccc} & & 3 & 7_8 \\ - & & & 4_8 \\ \hline & & 4 & 3_8 \end{array}$ pas de depassement,on complémente le resultat puis on ajoute un signe " − "
$\overline{43}_8^7 = (8^2)_{10} - 8^0 - 43_8 = 34_8$ d'où $\underline{B - A = -34_8}$

3.3) Convertissons A et B en DCB puis $A + B$ en DCB.
On a : $A = 59_{10} = 01011001_{DCB}$ et $B = 31_{10} = 00110001_{DCB}$

$$\begin{array}{cccccccccc} & & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1_{DCB} \\ & + & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1_{DCB} \\ \hline (A+B)_{DCB} \Rightarrow & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & + & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0_{DCB} \end{array}$$

(Le bloc 1010 n'a pas de correspondant en DCB donc on lui ajoute 0110).
D'où $\underline{(A+B)_{DCB} = 10010000_{DCB} = 90_{10}}$.
On suppose maintenant que les codes sont sur une longueur 8.

3.4) Convertissons A et B en binaire.

* $A = 59_{10}$. Ainsi $A = 111011_2 = 00111011_2$; $B = 11111_2 = 00011111_2$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

3.5) Codons $-A$ selon le mode signe et valeur absolue (SVA),selon le mode complement à un (C_1) puis selon le mode complement à deux (C_2)

$A = 00111011_2$

	SVA	C_1	C_2
-A	10111011	11000100	11000101

$C_2(N) = C_1(N) + 1_2$. $C_1(N)$ s'obtient en faisant $(1 = 0 et 0 = 1 dans\ N)$

3.6) Effectuons $B - A$ dans le codage :

* SVA(Signe et Valeur Absolue) si possible

On a : $B - A = B + (-A)$,or $-A = 10111011$ et $B = 00011111$

donc $B + (-A) \Rightarrow$

	0	0	0	1	1	1	1	1
+	1	0	1	1	1	0	1	1
	(?)	1	0	1	1	0	1	0

Impossible

,car on ne peut décider le signe.

* C_1(complement à un).

On a : $-A = 11000100$ donc $B - A = B + (-A) \Rightarrow$

	0	0	0	1	1	1	1	1
+	1	1	0	0	0	1	0	0
	1	1	1	0	0	0	1	1

pas de depassement,donc on complemente le resultat.

On a : $\overline{11100011}_2^1 = 00011100_2$. Donc $\underline{B - A = -00011100_2}$.

* C_2(complement à deux).

On a : $-A = 11000101$,donc $B - A = B + (-A) \Rightarrow$

	0	0	0	1	1	1	1	1
+	1	1	0	0	0	1	0	1
	1	1	1	0	0	1	0	0

pas de depassement,donc on complemente le resultat.

On a : $\overline{11100100}_2^2 = \overline{11100100}_2^1 + 1_2 = 00011011_2 + 1_2 = 00011100_2$

D'où $\underline{B - A = -00011100_2}$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI Année 2017-2018

INITIATION A L'INFORMATIQUE
SESSION 1 SEMESTRE 1

EXERCICE 1 :culture informatique.

1. Donnons les fonctions d'un système d'exploitation
   . Il garde une trace des ressources utilisées par chaque application.
   . Il permet à l'utilisateur d'éffectuer plusieurs tâches.
   . Il est responsable de la communication entre l'application et le matériel.
   . Le système d'exploitation contrôle entièrement les ressources matérielles locales.

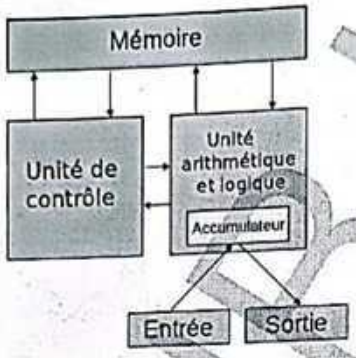
   Citons un nom de système d'exploitation :
   . Android
   . iOS
   . BlackBerry OS
   . Symbian
   . Meego...

2. Expliquons pourquoi plus la fréquence augmente plus l'ordinateur est rapide.
   Lorsque la fréquence du processeur est élevée, l'ordinateur éffectue des tâches rapidement. Plus la fréquence est élevée plus un processus peut faire un grand nombre d'opérations par séconde.
   EX : La compression d'un fichier.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

3. Donnons les composants d'un ordinateur selon l'architecture de Von Neumann.



Schématisation de l'architecture de von Neumann.

Donnons le rôle de chaque composant :
. L'unité arithmétique et logique (UAL) effectue les opérations de base.
. L'unité de contrôle est chargée du sequençage des opérations.
. La mémoire qui contient à la fois les données et le programme qui indiquera à l'unité de contrôle quels sont les calculs à faire sur ces données. La mémoire permanente.
. Les dispositifs d'entrée-sortie permettent de communiquer avec le monde extérieur.

EXERCICE 2 : Conversions et Calculs.

2.1) $75'' = (?)cm$. On a :$1'' = 2.54\,cm$, donc $\underline{75'' = 190.5\,cm}$
$3.7\,Go = (?)Mo$. On a : $1024\,Mo = 1\,Go$ donc $\underline{3.7Go = 3788.8\,Mo.}$
$2560\,Go = (?)To$. On a :$1024\,Go = 1\,To$, donc $\underline{2560\,Go = 2.5\,To.}$

2.2) Réalisons les conversions :
$(64.75)_{10} = (?)_2$. On a : $(64)_{10} = 1000000_2$ et$(0.75)_{10} = 0.11_2$, donc $\underline{(64.75)_{10} = 1000000.11_2}$.
$(31.4)_8 = (?)_{10}$. On a : $\underline{(31.4)_8 = 25.5_{10}}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$(1100010)_2 = (?)_{16}$.On a :$(1100010)_2 = \underbrace{0110}_{6}\ \underbrace{0010}_{2} = 62_{16}$, donc $\underline{(1100010)_2 = 62_{10}}$.

$(1101010)_2 = (?)_8$. On a :$(1101010)_2 = \underbrace{001}_{1}\ \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{010}_{2} = (152)_8$, donc

$\underline{(1101010)_2 = (152)_8}$

$(BC5)_{16} = (?)_2$.On a :$B_{16} = 1011_2, C_{16} = 1100_2$ et$5_{16} = 0101_2$,
Alors $\underline{(BC5)_{16} = (101111000101)_2}$

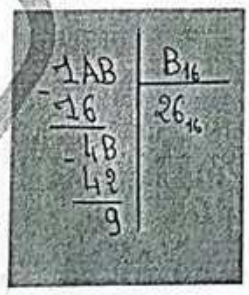
$(110.01)_2 = (?)_{10}$.
On a :$1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 6.25$. Donc
$\underline{(110.01)_2 = (6.25)_{10}}$.

$(11)_2 = (?)_{8421}$. On a :$\underline{(11)_2 = (0011)_{8421}}$

$(1BE)_{16} = (?)_{10}$.On a :$1 \times 16^2 + 11 \times 16^1 + 14 \times 16^0 = 446$. Donc
$\underline{(1BC)_{16} = 446_{16}}$.

$(453)_8 = (?)_{10}$.On a :$4 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 3 \times 8^0 = 299$, donc $\underline{(453)_8 = 299_{10}}$.

2.3) Effectuons les opérations suivantes :
$(1AB/B)_{16} = (?)_{16}$,$(2BC+DAF)_{16} = (?)_{16}$,$(2EC \times F5)_{16} = (?)_{16}$,$(1101/101)_2$ à 2 chiffres près
$(1AB/B)_{16} = 26_{16}$ car



$26 \mid 11$
$22 \mid 2$
4

$(1101/101)_2 = 1,10_2$ à 2 chiffres près car

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

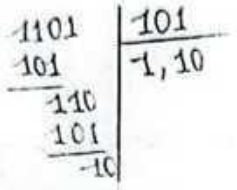


FIGURE 1 – RESULTAT

$$(2BC+DAF)_{16} \Rightarrow \begin{array}{rcccc} & 2 & B & C_{16} \\ + & D & A & F_{16} \\ \hline 1 & 1 & 6 & B_{16} \end{array} \quad ; * (2EC \times F5)_{16} \Rightarrow \begin{array}{rcccc} & & 2 & E & C_{16} \\ \times & & & F & 5_{16} \\ \hline & & E & 9 & C \\ 2 & B & D & 4 & . \\ \hline 2 & C & B & D & C_{16} \end{array}$$

$$(1101 \times 101)_2 \Rightarrow \begin{array}{rcccccccc} & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \times & & & & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 & 0 & 1 & . & . \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad ; * (1101-111)_2 \Rightarrow \begin{array}{rcccc} & 1 & 1 & 0 & 1 \\ - & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$(1101+101)_2 \Rightarrow \begin{array}{rcccc} & 1 & 1 & 0 & 1 \\ + & & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

EXERCICE 3 : Système de numération

On donne $A = 38_{10}, B = 14_{10}$ et $C = 73.75_{10}$

3.1) Effectuons : $A-B$ en complement à 10 et $A-C$ en complement à 9

* On a : $\overline{B}_{10}^{10} = 10^2 - 14 = 86, A + \overline{B}_{10}^{10} = 124$. Il ya une retenue de dépassement,on l'ignore et par conséquent $A - B = 24_{10}$.

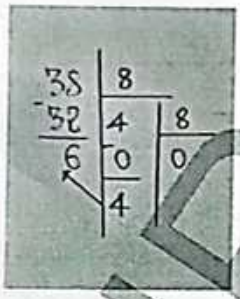
* $A - C$ en complément à 9.
  On a : $A = 38_{10}$ et $C = 73.75_{10}$. On a : $\overline{C}_{10}^{9} = 10^2 - 10^{-2} - 73.75 = 26.24_{10}$.
  On a : $A + \overline{C}_{10}^{9} = 64.24_{10}$. Pas de dépassement, donc on complémente le resultat puis l'affecté un signe$(-)$.
  On a : $\overline{64.24}_{10}^{9} = 10^2 - 10^{-2} - 64.24 = 35.75_{10}$. Ainsi $\underline{A - C = -35.75_{10}}$.

VALIDEUR LMD

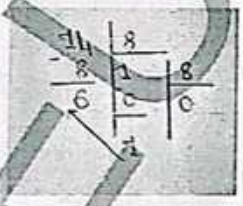
Scanné avec CamScanner

3.2) Convertissons Aet$B$ en octal,puis $B-A$ en complément restreint.

. $A=(38)_{10}=(?)_8$,On a : $\underline{A=46_8}$ car



. $B=14_{10}=(?)_8$,On a : $\underline{B=16_8}$ car



2.jpg

* $B-A$ en complément restreint (c'est-à-dire en complément à 7)

On a : $\overline{A_8}^7=(8^2)_{10}-8^0-46_8=64_{10}-46_8=100_8-46_8=31_8$

$$\text{car } \begin{array}{r} 1\ 0\ 0_8 \\ -\quad 4\ 7_8 \\ \hline .\ 3\ 1_8 \end{array}$$

On a : $B+\overline{A_8}^7=\begin{array}{r} 1\ 6_8 \\ +\ 3\ 1_8 \\ \hline 4\ 7_8 \end{array}$ pas de dépassement,on complémente le resultat puis on ajoute un signe $(-)$

$\overline{47_8}^7=(8^2)_{10}-8^0-47_8=16_8$ d'où $\underline{B-A=-16_8}$

3.3) Convertissons Aet$B$ en DCB puis $A+B$ en DCB.

On a : $A=38_{10}=00111000_{DCB}$ et $B=14_{10}=00010100_{DCB}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$(A+B)_{DCB} \Rightarrow \begin{array}{r} 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ +\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ \hline 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0_{DCB} \end{array}$$

Pour la suite de l'exercice,on considère que les codes sont sur une longueur de 8.

3.5) Convertissons A et B en binaire.

* $A = 38_{10}$. Ainsi $A = 100110_2 = 00100110_2$; $B = 1110_2 = 00001110_2$.

3.6) Codons $-A$ selon le mode signe et valeur absolue (SVA),selon le mode complément à un (C_1), puis selon le mode complément à deux (C_2).

$A = 00100110_2$

	SVA	C_1	C_2
-A	10100110	11011001	11011010

3.7) Effectuons $B - A$ dans le codage :

* SVA(Signe et Valeur Absolue) si possible

On a : $B - A = B + (-A)$,or $-A = 10100110$ et $B = 00001110$

donc $B + (-A) \Rightarrow \begin{array}{r} 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ +\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ \hline (?)\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \end{array}$ Impossible

,car on ne peut pas décider le signe.

* C_1(complément à un).

On a : $-A = 11011001$ donc $B-A = B+(-A) \Rightarrow \begin{array}{r} 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ +\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \end{array}$

pas de dépassement,donc on complémente le resultat.

On a : $\overline{11100111}_2^1 = 00011000_2$. Donc $\underline{B - A = -00011000_2}$.

* C_2(complément à deux).

On a : $-A = 11011010$,donc $B-A = B+(-A) \Rightarrow \begin{array}{r} 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ +\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \end{array}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

pas de dépassement,donc on complémente le resultat.
On a : $\overline{11101000}_2^2 = \overline{11101000}_2^1 + 1_2 = 11101001_2$
Donc $\underline{B - A = -11101001_2}$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Année 2017-2018

UFR-MI

INITIATION A L'INFORMATIQUE
SESSION 2 SEMESTRE 1

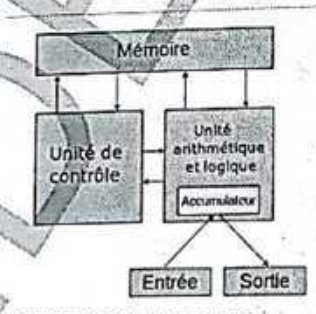
EXERCICE 1 :culture informatique.

1. La différence entre une mémoire RAM et ROM

   La mémoire ROM(Read Only Memory) est appelé mémoire morte,elle est utilisé pour stocker des instructions ou programmes figés. La RAM sert à stocker en temps réel des informations pendant le fonctionnement de l'ordinateur.

2. Trouvons la fréquence de ce processeur.
   On sait que $F = \frac{1}{T}$ avec 1 picoseconde correspond à 10^{-12}
   D'où $F = \frac{1}{1,5.10^{-12}}$ Hz.

3. Classifions l'écran, le clavier, le disque dur, le microprocesseur dans 5 blocs fonctionnels de Von Neumann.



Schématisation de l'architecture de von Neumann.

Les entrées-sorties : l'écran ;
Unité de contrôle : le clavier ;
Mémoire : Le processeur ;

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

4. Comptons 20 membres en hexadécimal à partir du nombre hexadécimal 129.
   $129 ; 82 ; 83 ; 84 ; 85 ; 86 ; 87 ; 88 ; 89 ; 8A ; 8B ; 8C ; 8D ; 8E ; 8F ; 90 ; 91 ; 92 ; 93 ; 94 ; 95.$

EXERCICE 2 :Système de numération.

2) Manipulation des systèmes de numération en réalisant des conversions :

a) $(42.75)_{10} = (?)_2$
On a : $(42)_{10} = 101010_2$ et $(0.75)_{10} = 0.11_2$
Donc $\underline{(42.75)_{10} = 101010.11_2}$

b) $(25.2)_8 = (?)_{10}$
$(25.2)_8 = 2 \times 8 + 5 \times 8^0 + 2 \times 8^{-1} = (21.25)_{10}$
Donc $\underline{(25.2)_8 = (21.25)_{10}}$

c) $(11101010)_2 = (?)_{16}$
$(11101010)_2 = \underbrace{1110}_{E}\underbrace{1010}_{A} = EA_{16}$
Donc $\underline{(11101010)_2 = EA_{16}}$

d) $(4AC5)_{16} = (?)_2$
On a : $4_{16} = 100_2$; $A_{16} = 1010_2$; $C_{16} = 1100_2$; $5_{16} = 101_2$
Donc $\underline{(4AC5)_{16} = 100101011100101_2}$

e) $(1CD)_{16} = (?)_{10}$
$(1CD)_{16} = 1 \times 16^2 + C \times 16 + D \times 16^0 = 461_{10}$
Donc $\underline{(1CD)_{16} = 461_{10}}$

f) $(11101010)_2 = (?)_8$
$(11101010)_2 = \underbrace{011}_{3}\underbrace{101}_{5}\underbrace{010}_{2} = 352_8$
Donc $\underline{(11101010)_2 = 352_8}$

g) $(11101010)_2 = (?)_3$
$(11101010)_2 = 22200_3$

h) $(AC5 \times 2D)_{16}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\begin{array}{rcccc} & & A & C & 5_{16} \\ \times & & & 2 & D_{16} \\ \hline & 8 & 2 & A & 1 \\ & F & 8 & A & . \\ \hline 1 & 7 & A & E & 1_{16} \end{array}$$

i) $(6521/72)_8$ (1 chiffre près)

$$\begin{array}{r|l} 6521 & 72_8 \\ \hline -626 & 72,1 \\ \hline 201 & \\ 64 & \\ \hline 130 & \\ 72 & \\ \hline 30 & \end{array}$$

j) $(AC5 - 82D)_{16}$

$$\begin{array}{rcccc} & A & C & 5_{16} \\ - & 8 & 2 & D_{16} \\ \hline & 2 & 9 & 2_{16} \end{array}$$

EXERCICE 3 :Problème.

1. On donne $A = (47)_{10}$ et $B = (36)_{10}$

1.1) Effectuons $B - A$ en complément vrai.
On a : $\overline{A}_{10}^{10} = 10^2 - 47 = 53_{10}$, $B + \overline{A}_{10}^{10} = 89_{10}$
Il n'ya pas de dépassement, donc on complémente le resultat puis on ajoute un signe $(-)$.
$\overline{89}_{10}^{10} = 10^2 - 89 = 11_{10}$ D'où $\underline{B - A = -11_{10}}$

1.2) Convertissons A et B en base 6.
On a : $A = (47)_{10} = 115_6$ et $B = (36)_{10} = 100_6$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Effectuons $A+B$, $A\times B$,A/B (2 chiffres près) , $B-A$ en complément restreint.

On a : $A+B=215_6$ car;
$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 5_6 \\ +\ 1\ 0\ 0_6 \\ \hline 2\ 1\ 5_6 \end{array}$$

On a :$A\times B=1150_6$ car;
$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 5_6 \\ \times\quad 1\ 0\ 0_6 \\ \hline 0\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 5 \\ \hline 1\ 1\ 5\ 0_6 \end{array}$$

On a : $A/B=1.15_6$ car;

$$\begin{array}{r|l} 115 & 100_6 \\ -100 & \hline 150 & 1,15_6 \\ -100 & \\ \hline 500 & \\ -500 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$B-A$ en complément restreint :

$\overline{115}^5_6 = 6^3 - 6^0 - 115 = 100_6$
On a : $B+\overline{A}^5_6 = 200_6$. Pas de dépassement ,donc on complémente le resultat puis l'affecté d'un signe $(-)$.
$\overline{200}^5_6 = 6^3 - 6^0 - 200 = 15_6$. Ainsi $\underline{B-A=-15_6}$.

1.3) Convertissons A et B en DCB puis éffectuons $A+B$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

On a : $A = (47)_{10}$ et $B = (36)_{10}$
$A = 01000111_{DCB}$ et $B = 00110110_{DCB}$

$$(A+B)_{DCB} \Rightarrow \begin{array}{cccccccc} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ + & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1_{DCB} \end{array}$$

Donc $\underline{(A+B)_{DCB} = 01111100_{DCB}}$

1.4) Codons si possible A en binaire sur 4 bits.

$A = (47)_{10} = (?)_2$
D'après la division successive de 47 par 2, on obtient : $A = 101111_2$.
Donc impossible de coder A sur 4 bits.

1.5) Effectuons en binaire $A+B$, $A \times B$, puis B/A $(2chiffres près)$
$A = 101111_2$; $B = 100000_2$

On a : $A + B = 1001111_2$ car ;

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ + & & & & & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1_2 & \end{array}$$

On a : $A \times B = 10111100000_2$
On a : $B/A = 0.10_2$ car ;

$$\begin{array}{l|l} 1000000 & 101111_2 \\ -0000000 & \hline 0,10_2 \\ \hline 1000000 & \\ -101111 & \\ \hline 00100010 & \\ -000000 & \\ \hline 100010 & \end{array}$$

Dans le système binaire, on suppose que les codes ont pour longueur 8.

1.6) Codons $-A$ selon SVA, C_1, puis C_2.
$A = 00101111_2$

	SVA	C_1	C_2
-A	10101111	11010000	11010001

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

1.7) Effectuons en binaire si possible $B - A$ dans le codage SVA , C_1 et C_2.

* SVA si possible
On a : $B - A = B + (-A)$, or $-A = 10101111_2$ et $B = 00100000_2$

Donc $B + (-A) \Rightarrow$

		0	0	1	0	0	0	0	0
+		1	0	1	0	1	1	1	1
	(?)	1	0	0	1	1	1	1_2	

Impossible car on ne peut pas décider le signe.

* C_1 (Complément à un)
On a : $-A = 11010000$

$B + (-A) \Rightarrow$

	0	0	1	0	0	0	0	
+	1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0_2	

Pas de dépassement, donc on complémente le resultat

On a : $\overline{11110000}_2^1 = 00001111_2$
Donc $B - A = -00001111_2$

* C_2 (Complément à deux)
On a : $-A = 11010001_2$

D'où $B + (-A) \Rightarrow$

	0	0	1	0	0	0	0	0
+	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1_2	

Pas de dépassement, donc on complémente le resultat.
$\overline{11110000}_2^2 = \overline{11110000}_2^1 + 1_2 = 11110010_2$
Donc $B - A = -11110010_2$

1.8) Effectuons en binaire $A - B$ en complément vrai et complément restreint.
On a : $B = 00100000$

	SVA	C_1	C_2
-B	10100000	11011111	11100000

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

* $A - B$ en complément vrai

$$A + (-B) \Rightarrow \begin{array}{r} 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ +\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1_2 \end{array}$$

On ignore le dépassementt donc $A - B = 00001111_2$

* $A - B$ en complément restreint

$$A + (-B) \Rightarrow \begin{array}{r} 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ +\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0_2 \end{array}$$

On ignore le dépassement donc $A - B = 00001110_2$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

CORRECTION INITIATION À L'INFORMATIQUE SESSION 1 2018-2019

Exercice 1 : Culture Informatique (Voir cours)

Exercice 2 : Convertissons et calcul

2.1) 17 ''= (?) cm . On a 1''=2.54cm donc 17''=43,18cm

4.5 Go = (?) Mo ; On a 1024 Mo = 1 Go donc 4.5 Go =4608 Mo

2.2) Réalisons les conversions

- $(64,75)_{10}=(?)_2$; On a $(64)_{10}=1000000_2$ et $(0,75)_{10}=0,11_2$ donc

$(64,75)_{10}=1000000,11_2$

- $(31,4)_8 =(?)_{10}$, On a : $(31,4)_8 = (25.5)_{10}$
- $(1100010)_2 =(?)_{16}$. On a : $1100_2=6_{16}$ et $0010_2=2_{16}$ donc
- $(1100010)_2=62_{16}$
- $(1101010)_2 = (?)_8$. On a : $001_2=1_8$ $101_2=5_8$ $010_2 = 2_8$ donc

$(1101010)_2 = (152)_8$

- $(BC5)_{16} = (?)_2$. On a : $B_{16}=1011_2$,$C_{16}=1100_2$,$5_{16}=0101_2$

$(BC5)_{16} = (101111000101)_2$

- $(110.01)_2=(?)_{10}$

On a : $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 6.25$ donc

$(110.01)_2= (6.25)_{10}$

- $(11)_2=(?)_{8421}$. On a : $(11)_2=(0011)_{8421}$
- $(1BC)_{16}=(?)_{10}$. On a $1 \times 16^2 + 11 \times 16^1 + 12 \times 16^0 = 444$ donc $(1BC)_{16}=(444)_{10}$.
- $(253)_8=(?)_{10}$. On a $2 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 3 \times 8^0 = 171$ donc $(253)_8=(171)_{10}$

2.3) Effectuons les opérations suivantes :

$(1AB/C)_{16} = 23_{10}$ car

$1AB$	C_{16}
18	23_{16}
$1B$	
24	
7_{16}	

$(2BC+FAE)_{16} = 126A_{16}$ →

$$\begin{array}{r} 2BC_{16} \\ +\ FAE_{16} \\ \hline 126A_{16} \end{array}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$(2BC_{16} \times F1_{16}) = 292FC_{16}$ car

$2BC_{16}$
$\times\ F1_{16}$
2BC
2904
$292FC_{16}$

$(1101+101)_2=10010_2$ car

1101
+ 101
10010

$(1101-111)_2=0110_2$

1101
- 111
0110_2

$(1101/101)_2=1.10_2$

1101	101
10	1.10
110	
101	
10	

$(1101 \times 101)_2=1000001_2$

1101
$\times$ 101
1101
0000
1101
1000001

Exercice 3 : Système de numération
On donne $A=59_{10}$, $B=31_{10}$ et $C=83.75_{10}$

3.1) Effectuons A-B en complément à 10 et A-C en complément à 9
On a : $-\bar{B}_{10}^{10}=10^2-31=69$, $A+\bar{B}_{10}^{10}=128$. Il y a une retenu de dépassement, On l'ignore et par conséquent et par conséquent A-B = 28_{10}

A-C en complément à 9
On a : $A=59_{10}$ et $C=83.75_{10}$.
On a : $\bar{C}_{10}^{9}=10^2-10^{-2}=83,75=16,24_{10}$, $A+\bar{C}_{10}^{9}=75,24_{10}$. Pas de dépassement, donc complétons le résultat et affectons le signe (-).
On a : $\overline{75.24}_{10}^{9}=10^2-10^{-2}-75.24=24,75_{10}$. Ainsi A-C = -24.75_{10}

3.2) Convertissons A et B en Octal, puis B-A en complément restreint.

A= $(59)_{10}=(?)_8$; On a : $A=73_8$ car

59	8
56	7 | 8
3	0 0
	7

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Suite exercice 3

$C_2(N) = C_1(N) + 1_2.C_1(N)$ s'obtient en
(1=0 et 0=1 dans N)

31	8	
24	3	8
7	0	0
↖ 3		

- B-A en complément restreint (c'est-à-dire en complément à 7)

On a : $\overline{A_8^7} = (8^2)_{10} - 8^* - 73_8 = 64_{10} - 74_8 = 100_8 - 74_8 = 4_8$

Car : 100_8

$- \ 74_8$

4_8

on a: $B + \overline{A_8^7} = 37_8$ Pas de dépassement, on complémente le résultat puis on ajoute un signe (-)

$- \ 4$

43_8

$\overline{43_8^7} = (8^2)_{10} - 8^* - 43_8 = 34_8$ d'où $B-A = -34_8$

3.3) Convertissons A et B en BCD puis A+B en DCB

On a : $A = 59_{10} = 01011001_{DCB}$ et $B = 31 = 00110001_{DCB}$

$(A+B)_{DCB} = 01011001_{DCB}$

$+ \ 00110001_{DCB}$

10001010 Le bloc 1010 n'a pas de correspondent en DCB donc o lui ajoute 0101

$+ \quad 0101$

10010000_{DCB}

D'où $\underline{(A+B)_{DCB} = 10010000_{DCB} = 90_{10}}$

On suppose maintenant que les codes sont sûr une longueur 8

3.4) Convertisson A et B en binaire

$A = 59_{10}$ ainsi $A = 111011_2 = 00111011_2$; $B = 11111_2 = 00011111_2$

3.5) Codons A selon le mode signe et valeur absolue (SVA), selon le complément (C_1) puis selon le mode complément à deux (C_2).

$A = 00111011_2$

	SVA	C_1	C_2
-A	10111011	11000100	11000101

3.6) Effectuons B-A dans le codage

- SVA (Signe et Valeur Absolue) si possible

On a: B-A= B+(-A), or -A= 10111011 et B= 00011111

Donc: B+(-A) => 00011111

$+10111011$ Impossible

(?)1011010

Car on ne peut décider le signe.

C_1 (complément à un)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

On a : -A= 11000100 donc

B-A= B+(-A) => 00011111

+11000100

11100011

Pas de dépassement donc on complémente le résultat

On a : $\overline{11100011}^{1}_{2}$= 00011100_2 ; donc B-A= -00011100_2

- C_2 (Complet à deux)

On a : -A= 11000101, donc B-A= B+(-A)

⇨ 00011111

+11000101

11100100

Par de dépassement, donc on complémente le résultat.

On a : $\overline{11100100}^{2}_{2}$= $\overline{11100100}^{1}_{2}$+$1_2$= 00011100_2

D'où B-A= -00011100_2

3.7) Effectuons si possible C-A dans le codage complément vrai puis dans le codage complément restreint

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY
FELIX HOUPHOUET BOIGNY
UFRMI

Année 2016 - 2017

PREMIRE SESSION

Epreuve Informatique - Bureautique
(L1)

Questions de cours :

Répondre en choisissant la ou les bonnes réponses

Quelle est la composition de l'architecture d'un ordinateur selon VON NEUMAN

a) UCC, UAL, E/S, ROM, RAM, BUS
b) UC, ECRAN, CABLE, SOURIS
c) UCC, USB, BUS, RAM

Dans la catégorie de systèmes d'exploitation, on trouve :

a) Unix, Windows 8, Open Office
b) Unix Linux, Windows, Mac Os
c) Microsoft Windows, Microsoft Office, Libre Office
d) Android, Unix, WindowsXP

Structure et fonctionnement :

Répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse:

1.Un ordinateur ne peut fonctionner sans imprimante.
2.La mémoire centrale d'un ordinateur conserve les données temporairement
3. Un ordinateur peut fonctionner sans processeur.
4. Les mots, ordinateur et computer désignent la même chose.

Environnement Windows

Répondre en choisissant la ou les bonnes réponses

1- L'informatique est

A. un ordinateur qui traite l'information
B. la science du traitement des connaissances
C. la science du traitement rationnel de l'information

2- La mémoire RAM est

A. non volatile
B. souple
C. volatile

3- Quelle est l'unité utilisée pour la mesure de la taille d'un écran

A- Le pied
B - Le nez
C – Le pouce
D – Le coude

4- À l'origine, Windows nécessitait la présence de MS-DOS.

A. Vrai
B. Faux

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Traitement de Texte

1) Quelles sont les fonctions d'un logiciel de traitement de texte ?

A. Mise en page d'un texte
B. Compilation d'un texte
C. Présentation d'un texte sous forme de diaporama
D. Edition d'un texte

2) Pour enregistrer un document pour la première fois, nous utilisons :

A. Fichier/Nouveau
B. Fichier/Enregistrer
C. Fichier/Enregistrer-sous
D. Fichier/Enregistrer en tant que page Web

3) Insérer des lignes supplémentaires dans un tableau Word :

A. Cela n'est pas possible et il faut calculer dès le départ le nombre de lignes nécessaires.
B. Peut se faire à n'importe quel moment en allant dans la dernière cellule du tableau et en appuyant sur la touche Espace.
C. Peut se faire à n'importe quel moment en utilisant le menu Tableau - Insérer Lignes.
D. Peut se faire à n'importe quel moment en allant dans la dernière cellule du tableau et en appuyant sur la touche Entrer.

4) Pour créer un tableau Word il faut :

A. Cliquer sur le menu Insertion
B. Cliquer sur le menu Tableau
C. Cliquer sur l'icône tableau de la barre d'outils standard
D. Cliquer sur le menu Format

5) Quel chemin doit-on suivre pour insérer une image dans un texte?

A. Édition, insertion d'image
B. Format, Image
C. Insertion, Image
D. Aucune de ces réponses

Excel

1) La cellule F2 désigne :

A. Ligne F colonne 2
B. Colonne F ligne 2
C. La touche du clavier F2
D. Aucune des trois réponses.

2) Qu'est- ce qu'une cellule :

A. La cellule est une colonne.
B. La cellule est une ligne.
C. Aucune des deux réponses.

3) Quand vous tapez une équation dans une cellule Excel, la première chose à faire est d'introduire :

A. Une parenthèse.
B. Le signe égal.
C. Un double apostrophe.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY
FELIX HOUPHOUET BOIGNY
UFR MI

Année 2017-2018

PREMIERE SESSION

Epreuve Informatique – Bureautique (L1)

Question de cours

Répondre en choisissant la ou les bonnes réponses

Quelle est la composition de l'architecture d'un ordinateur selon JOHN VON NEUMAN

a) UCC, UAL, E/S, ROM, RAM, BUS
b) UC,ECRAN,CABLE,SOURIS
c) UCC,USB,BUS,RAM

Dans la catégorie de système d'exploitation, on trouve :

a) Unix, Windows 8, Open Office
b) Unix Linux, Windows, Mac Os
c) Microsoft Windows, Microsoft Office, Libre Office
d) Android, Unix, Windows XP

Structure et fonctionnement

Répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse :

1) Un ordinateur ne peut fonctionner sans imprimante. F
2) La mémoire centrale d'un ordinateur conserve les données temporairement V
3) Un ordinateur peut fonctionner sans processeur. F
4) Les mots, ordinateur et computer désignent la même chose. V

Environnement Windows

Répondre en choisissant la ou les bonnes réponses

1- L'information est :

A. Un ordinateur qui traite l'information
B. La science du traitement des connaissances
C. la science du traitement rationnel de l'information

2- La mémoire RAM est :

A. non volatile
B. souple
C. volatile

3- Quelle est l'unité utilisée pour la mesure de la taille d'un écran ?

A. Le pied
B. Le nez
C. Le pouce
D. Le coude

4- A l'origine, Windows nécessitait la présence de MS-DOS.

A. Vrai
B. Faux

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Traitement de texte

1) **Quelles sont les fonctions d'un logiciel de traitement de texte ?**
   A. Mise en page d'un texte
   B. Compilation d'un texte
   C. Présentation d'un texte sous forme de diaporama
   D. Edition d'un texte

2) **Pour enregistrer un document pour la première fois, nous utilisons :**
   A. Fichier/Nouveau
   B. Fichier/Enregistrer
   C. Fichier/Enregistrer-sous
   D. Fichier/Enregistrer en tant que page Web

3) **Insérer des lignes supplémentaires dans un tableau.**
   A. Cela n'est pas possible et il faut calculer dès le départ le nombre de lignes nécessaires.
   B. Peut se faire à n'importe quel moment en allant dans la dernière cellule du tableau et en s'appuyant sur la touche Espace.
   C. Peut se faire à n'importe quel moment en utilisant le menu Tableau – Insérer Lignes
   D. Peut se faire à n'importe quel moment en allant dans la dernière cellule du tableau et en appuyant sur la touche Entrer.

4) **Pour créer du tableau Word, il faut :**
   A. Cliquer sur le menu Insertion
   B. Cliquer sur le menu Tableau
   C. Cliquer sur l'icône tableau de la barre d'outils standard
   D. Cliquer sur le menu Format

5) **Quel chemin doit-on suivre pour insérer une image dans un texte ?**
   A. Edition, insertion d'image
   B. Format, Image
   C. Insérer, Image
   D. Aucune de ces réponses

Excel

1) **La cellule F2 désigne :**
   A. Ligne F colonne 2
   B. Colonne F ligne 2
   C. La touche du clavier F2
   D. Aucune des trois réponses

2) **Qu'est-ce qu'une cellule ?**
   A. Ligne F colonne 2
   B. Colonne F ligne 2
   C. La touche du clavier F2
   D. Aucune des deux réponses

3) Quand vous tapez une équation dans une cellule Excel, la première chose à faire est d'introduire :
   A. Une parenthèse
   B. Le signe égal
   C. Un double apostrophe

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY
FELIX HOUPHOUET BOIGNY
UFRMI

Année 2018 - 2019

PREMIERE SESSION

Epreuve de Bureautique
(L1)

A- Questions de cours

1) Quelle est la signification des mots suivants
   1- CPU
   2- UAL
   3- RAM
   4- ROM
   5- USB

2) Un ami veut assembler un ordinateur, il vous demande de lui citer les principales caractéristiques pour l'achat des périphériques suivants : Processeur, Disque Dur, carte Mère

3) Mettez *V* si la phrase est juste et *F* si la phrase est fausse.

Dans la catégorie de systèmes d'exploitation, on trouve :

a) Unix,
b) Windows 8, Open Office
c) Unix Linux, Windows, Mac Os
d) Microsoft Windows, Microsoft Office, Libre Office
e) Androïde, Unix Windows

B- Structure et fonctionnement :

Mettez *V* si la phrase est juste et *F* si la phrase est fausse.

1. Un ordinateur ne peut fonctionner sans imprimante.
2. La mémoire centrale d'un ordinateur ne conserve les données que momentanément
3. Un ordinateur peut fonctionner sans processeur.
4. Les mots, ordinateur et computer désignent la même chose.

C- Environnement Windows

Répondre brièvement à chaque question :

1) Windows est-il un système d'exploitation mono tache ou multi taches ?
2) Comment faire pour déplacer complètement un fichier nom << monfichier>> du répertoire X vers le répertoire Y Citer deux façons de le faire.
3) Comment le système d'exploitation reconnait-il un fichier Word, Excel ?

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

D- Traitement de Texte

1) Répondre brièvement :

Dans le menu **Fichier** de Word, quand est-ce on utilise la commande **Enregistrer** ou **Enregistrer sous** ?

Mettez *V* si la phrase est juste et *F* si la phrase est fausse.

1) Quelles sont les fonctions d'un logiciel de traitement de texte ?

a) Mise en page d'un texte
b) Compilation d'un texte
c) Présentation d'un texte sous forme de diaporama
d) Edition d'un texte

2) Pour enregistrer un document pour la première fois, nous utilisons :

a) Fichier/Nouveau
b) Fichier/Enregistrer
c) Fichier/Enregistrer-sous
d) Fichier/Enregistrer en tant que page Web

3) Pour créer un tableau Word il faut :

a) Cliquer sur le menu Insertion
b) Cliquer sur le menu Tableau
c) Cliquer sur l'icône tableau de la barre d'outils standard
d) Cliquer sur le menu Format

4) Quel chemin doit-on suivre pour insérer une image dans un texte?

a) Édition, insertion d'image
b) Format, Image
c) Insertion, Image
d) Aucune de ces réponses

Excel

1-Mettez *V* si la phrase est juste et *F* si la phrase est fausse.

a) Excel est un programme de calcul
b) Excel n'est pas un programme de calcul
c) Excel peut être utilisé comme un programme de calcul scientifique
d) Excel ne peut pas être utilisé comme un programme de calcul scientifique

2- Mettez *V* si la phrase est juste et *F* si la phrase est fausse.

La cellule F2 désigne :

a) La Ligne F colonne 2
b) La Colonne F ligne 2
c) La touche du clavier F2
d) Aucune des trois réponses.

3- Mettez *V* si la phrase est juste et *F* si la phrase est fausse.

Qu'est- ce qu'une cellule :

a) La cellule est une colonne.
b) La cellule est une ligne.
c) Aucune des deux réponses.

4- Mettez *V* si la phrase est juste et *F* si la phrase est fausse.

Quand vous tapez une équation dans une cellule Excel, la première chose à faire est d'introduire :

a) Une parenthèse.
b) Le signe égal.
c) Une double apostrophe.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY
FELIX HOUPHOUET BOIGNY
UFRMI

Année 2019 - 2020

Epreuve de Bureautique
(L1)

A- Questions de cours

1) **Quelle est la signification des mots suivants**
   1- CPU
   2- UAL
   3- RAM
   4- ROM
   5- USB

2) Un ami veut assembler un ordinateur, il vous demande de lui citer les principales caractéristiques pour l'achat des périphériques suivants : Processeur, Disque Dur, carte Mère

3) Mettez *V* si la phrase est juste et *F* si la phrase est fausse.

Dans la catégorie de systèmes d'exploitation, on trouve :

a) Unix,
b) Windows 8, Open Office
c) Unix Linux, Windows, Mac Os
d) Microsoft Windows, Microsoft Office, Libre Office
e) Androïde, Unix Windows

B- Structure et fonctionnement :

Mettez *V* si la phrase est juste et *F* si la phrase est fausse.

1.Un ordinateur ne peut fonctionner sans imprimante.
2.La mémoire centrale d'un ordinateur ne conserve les données que momentanément
3. Un ordinateur peut fonctionner sans processeur.
4. Les mots, ordinateur et computer désignent la même chose.

C-Environnement Windows

Répondre brièvement à chaque question :

1) Windows est-il un système d'exploitation mono tache ou multitaches ?
2) Comment faire pour déplacer complètement un fichier nom <<monfichier>> du répertoire X vers le répertoire Y Citer deux façons de le faire..
3) Comment le système d'exploitation reconnait-il un fichier Word, Excel ?

D- Traitement de Texte

1) Répondre brièvement :

Dans le menu **Fichier** de Word, quand est-ce on utilise la commande **Enregistrer** ou **Enregistrer sous ?**

Mettez*V* si la phrase est juste et *F* si la phrase est fausse.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

1) **Quelles sont les fonctions d'un logiciel de traitement de texte ?**
   a) Mise en page d'un texte
   b) Compilation d'un texte
   c) Présentation d'un texte sous forme de diaporama
   d) Edition d'un texte

2) **Po... enregistrer un document pour la première fois, nous utilisons :**
   a) Fichier/Nouveau
   b) Fichier/Enregistrer
   c) Fichier/Enregistrer-sous
   d) Fichier/Enregistrer en tant que page Web

3) **Pour créer un tableau Word il faut :**
   a) Cliquer sur le menu Insertion
   b) Cliquer sur le menu Tableau
   c) Cliquer sur l'icône tableau de la barre d'outils standard
   d) Cliquer sur le menu Format

4) **Quel chemin doit-on suivre pour insérer une image dans un texte?**
   a) Édition, insertion d'image
   b) Format, Image
   c) Insertion, Image
   d) Aucune de ces réponses

Excel

1-Mettez *V* si la phrase est juste et *F* si la phrase est fausse.
   a) Excel est un programme de calcul
   b) Excel n'est pas un programme de calcul
   c) Excel peut être utilisé comme un programme de calcul scientifique
   d) Excel ne peut pas être utilisé comme un programme de calcul scientifique

2- Mettez*V* si la phrase est juste et *F* si la phrase est fausse.

La cellule F2 désigne :
   a) La Ligne F colonne 2
   b) La Colonne F ligne 2
   c) La touche du clavier F2
   d) Aucune des trois réponses.

3- Mettez*V* si la phrase est juste et *F* si la phrase est fausse.

Qu'est- ce qu'une cellule :
   a) La cellule est une colonne.
   b) La cellule est une ligne.
   c) Aucune des deux réponses.

4- Mettez*V* si la phrase est juste et *F* si la phrase est fausse.

Quand vous tapez une équation dans une cellule Excel, la première chose à faire est d'introduire :
   a) Une parenthèse.
   b) Le signe égal.
   c) Une double apostrophe.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FELIX
HOUPHOUET BOIGNY

UFRMI

OUTILS BUREATIQUES
PREMIERE SESSION ANNEE 2020-2021
L1

I- ARCHITECTURE

Exercice 1 (0.5 x 8 + 2)

Quelle est la signification des acronymes suivants :

1) CPU : .....

2) UAL : .....

3) RAM : .....

4) ROM : .....

5) USB : .....

6) INTERNET.....

7) INTRANET.....

8) SITE WEB .....

9) Différence entre RAM et ROM (2)

Exercice 2 : Choisissez-les ou la bonne réponse (0,5 x 5)

Le microprocesseur comprend l'UAL ou l'UCC Le microprocesseur comprend l'unité arithmétique et logique Le microprocesseur comprend unité de commande et de contrôle Le microprocesseur comprend l'UAL et l'UCC Aucune bonne réponse
Les périphériques d'entrée effectuent les instructions de lecture Les périphériques d'entrée effectuent les instructions d'écriture Les périphériques d'entrée effectuent les instructions de lecture et d'écriture
Le clavier, scanner, microphone : sont des périphériques d'entrée Le clavier, scanner, microphone : sont des périphériques de sortie Le clavier, scanner, microphone : sont des périphériques d'entrée / sortie
Le clavier est un périphérique qui effectue les instructions de lecture Le clavier est un périphérique qui effectue les instructions d'écriture Le clavier est un périphérique d'entrée Aucune bonne réponse

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

L'ordinateur est une machine intelligente L'ordinateur est une machine programmable et intelligente L'ordinateur est une machine programmable et rapide Aucune bonne réponse

II- LOGICIELS D'EXPLOITATION

***Exercice 1* (0,5 x 4)**

Relier entre les mots de la première colonne et leurs correspondants dans la deuxième colonne.
Compléter avec ce qui convient

1- Linux	a- est un SE mono-tâche
2- DOS	b- est la partie software nécessaire pour faire fonctionner un ordinateur
3- Windows 7	c- est un SE qui gère les CPU
4- Le SE	d- est un SE open source

***Exercice 2* : (0,5 x 5)**

Répondez brièvement à chaque question :

1) Windows est-il un système d'exploitation mono tâche ou multi tâches ? Expliquer ?
2) Comment faire pour démarrer rapidement l'application « calculatrice », si son raccourci a été supprimé du menu « accessoires » dans « Tous mes programmes » ?
3) Comment faire pour déplacer complètement un fichier nommé « mon fichier » du répertoire X vers le répertoire Y ? Citer deux façons pour le faire.
4) Comment le système d'exploitation reconnaît qu'un fichier Word doit être ouvert par « Ms Word » ?
5) Comment le système d'exploitation reconnaît qu'un fichier Excel doit être ouvert par « Ms Excel » ?

***Exercice 3* : (0,5 x3)**

Cocher la ou les bonne(s) réponse(s) si elle(s) existe(nt)

Dans Windows, le bureau est une image Dans Windows, le bureau est un répertoire Dans Windows, le bureau est un fichier Dans Windows, le bureau est un dossier Aucune bonne réponse
Windows est un logiciel de bureautique Windows est un système d'exploitation Windows est un ensemble de fichiers et de programmes

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Un système d'exploitation est un ensemble de programmes pour écrire nos documents.
Un système d'exploitation est un ensemble de programmes destinés à gérer une machine.
Un système d'exploitation gère le processeur, la mémoire et les fichiers

III- Logiciels de bureautique

word

Exercice 1 : (0,5 x3)

Relier entre les mots de la première colonne et leurs correspondants dans la deuxième colonne. Compléter avec ce qui convient :

1- Un Formateur de texte ..... a- produit un document brut
2- Un Editeur de texte ..... b- produit un document non éditable
3- Un traitement de texte ..... c- ne nécessite pas un éditeur de texte externe

Exercice 2 (1)

Pour créer un tableau Word il faut :
A. Cliquer sur le menu Insertion
B. Cliquer sur le menu Tableau.
C. Cliquer sur l'icône tableau de la barre d'outils standard
D. Cliquer sur le menu Format

Exercice 3 (1)

Quel chemin doit-on suivre pour insérer une image dans un texte ?
A. Édition, insertion d'image
B. Format, Image
C. Insertion, Image
D. Aucune de ces réponses

EXCEL

EXERCICE (0,5 x 6)

Excel est un document de Microsoft office
Excel est un Tableur.
Excel est un Chiffrier
Excel est un logiciel pour créer des tableaux, traceur des graphes, faire des calculs, ...
Aucune bonne réponse

Un fichier Excel est appelé classeur.
Un classeur Excel peut contenir plusieurs feuilles
Une feuille Excel comporte plusieurs pages
Une page Excel est un ensemble de cellules numérotées
Aucune bonne réponse

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Ms Excel est un programme de calcul Ms Excel n'est pas un programme de calcul Ms Excel peut être utilisé comme calculatrice scientifique Ms Excel ne peut pas être utilisé comme calculatrice scientifique
Dans Word Pour Copier on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+V Dans Word Pour Couper on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+X Dans Word Pour Copier on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+C. Dans Word Pour Couper on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+V
L'extension d'un fichier Excel est xsl ou xslx L'extension d'un fichier Excel est doc ou docx L'extension d'un fichier Excel est xls ou xlsx.
On peut copier un tableau d'Excel et le coller dans Word. On peut copier un tableau de Word et le coller dans Excel. On ne peut pas copier un tableau de l'un et le coller dans l'autre.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY
FELIX HOUPHOUET BOIGNY
UFR MI

Année 2017-2018

PREMIERE SESSION

Epreuve Informatique – Bureautique (L1)

Question de cours

La ou les bonnes réponses :

L'architecture d'un ordinateur selon JOHN VON NEUMAN

a) **UCC, UAL, E/S, ROM, RAM, BUS**

Dans la catégorie de système d'exploitation, on trouve :

d) **Android, Unix, Windows XP**

Structure et fonctionnement

1) Faux ; l'ordinateur peut bien fonctionner sans imprimante car l'imprimante n'est qu'un périphérique de sortie dont l'ordinateur peut s'en passer pour fonctionner.
2) Vrai ; car elle constitue le point de transit de toute information à faire traiter par l'ordinateur
3) Faux ; car le processeur est le cœur même de l'ordinateur
4) Vraie ; car ordinateur c'est en français puis computer en anglais.

Environnement Windows

1) L'information est : **C.la science du traitement rationnel de l'information**
2) La mémoire RAM est : **C. volatile**
3) L'unité utilisée pour la mesure de la taille d'un écran est : **C. le pouce**
4) A l'origine, Windows nécessitait la présence de MS-DOS. **A. Vrai**

Traitement de texte

1) Les fonctions d'un logiciel de traitement de texte. **A&D**
2) Pour enregistrer un document pour la première fois, nous utilisons : **C. Fichier/Enregistrer-sous**
3) Insérer des lignes supplémentaires dans un tableau. **C. Peut se faire à n'importe quel moment en utilisant le menu Tableau – Insérer Lignes**
4) Création du tableau Word : **B. Cliquer sur le menu Tableau**
5) Le chemin à suivre pour insérer une image dans un texte est : **C. Insérer, Image**

Excel

1) La cellule F2 désigne : **B. la colonne F ligne 2**
2) Une cellule est : **C. Aucune des deux réponses**
3) Quand l'on tape une équation dans une cellule Excel, la première chose à faire est d'introduire : **B. le signe égal**

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

	2020
UFRMI L1	
L1 Epreuve de Outil Bureautique	

CORRECTION

A – QUESTION DE COURS

1) Quelle est la signification des mots suivants :
   1. CPU : Central Processing Unit
   2. UAL : Unité Arithmétique et Logique
   3. RAM : Random Access Memory
   4. ROM : Read Only Memory
   5. USB : Universal Serial Bus
2) Les principales caractéristiques pour l'achat des périphériques suivants :
   - Processeur :
     - Gamme (Intel, AMD, ...)
     - Vitesse en GHz
     - Mémoire cache L1 et L2
   - Disque Dur :
     - Marque (Seagate, Samsung, ...)
     - Capacité en Go
     - Vitesse de Rotation
     - Connexion norme SATA (Serial ATA (Serial Advanced Technology Attachment : vitesse de transfert = 150 Mo/s) ou PATA (IDE) (Parallel Advanced Technology Attachment : vitesse de transfert = 133 Mo/s)
   - Carte mère :
     - Vitesse de son Bus
     - Compatibilité avec les différents types de processeurs (Intel, AMD, ...)
     - Nombre de slot pour RAM
     - Nombre de slot PCI Express
     - Nombre de connecteurs USB
     - Connecteurs IDE et SATA

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

3) Mettez **V** si la phrase est juste et **F** si la phrase est fausse :

a. V
b. F
c. F
d. F
e. F

B – STRUCTURE ET FONCTIONNEMENT

Mettez **V** si la phrase est juste et **F** si la phrase est fausse :

1. F
2. V
3. F
4. V

C – ENVIRONNEMENT WINDOWS

1) Windows est un système d'exploitation multitâche.
2) Deux façons pour déplacer un fichier :

❖ Première façon :

- Faire un contrôle **(Ctrl) A** pour sélectionner le fichier dans le répertoire **X**, puis contrôle **(Ctrl) C** pour copier. Ensuite on part dans le répertoire **Y** puis contrôle **(Ctrl) V** pour coller le fichier.

❖ Deuxième façon :

- Faire un contrôle **(Ctrl) A** pour sélectionner le fichier dans le répertoire **X**, puis contrôle **(Ctrl) X** pour couper. **Ensuite** on part dans le répertoire **Y** puis contrôle **(Ctrl) V** pour coller le fichier.

3) Le système d'exploitation reconnait un fichier Word et Excel par leurs extensions (**docx** pour Word et **xlsx** pour Excel).

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

D – TRAITEMENT DE TEXTE

1) Répondre brièvement :

- Dans le menu fichier de Word, on utilise **Enregistrer sous** si l'on veut enregistrer son document pour la première fois (en lui donnant un nom et un emplacement).
- Dans le menu fichier de Word, on utilise **Enregistrer** si l'on veut enregistrer son travail courant.

Mettez **V** si la phrase est juste et **F** si la phrase est fausse :

1) Quelles sont les fonctions d'un logiciel de traitement de texte ?
   a. V
   b. F
   c. F
   d. V
2) Pour enregistrer un document pour la première fois, nous utilisons :
   a. F
   b. F
   c. V
   d. F
3) Pour créer un tableau sur Word, il faut :
   a. F
   b. V
   c. F
   d. F
4) Quel chemin doit-on suivre pour insérer une image dans un texte ?
   a. F
   b. F
   c. V
   d. F

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXCEL

1) Mettez **V** si la phrase est juste et **F** si la phrase est fausse :
   a. F
   b. V
   c. V
   d. F
2) Mettez **V** si la phrase est juste et **F** si la phrase est fausse :
   La cellule **F2** désigne :
   a. F
   b. V
   c. F
   d. F
3) Qu'est-ce qu'une cellule ?
   a. F
   b. F
   c. V
4) Mettez **V** si la phrase est juste et **F** si la phrase est fausse :
   Quand vous tapez une équation dans une cellule Excel, la première chose à faire est d'introduire :
   a. F
   b. V
   c. F

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

UFR MI

CORRECTION OUTILS BUREAUTIQUES
PREMIERE SESSION ANNEE 2020 – 2021

I – ARCHITECTURE

Exercice 1 (0,5 x8 + 2)

Quelle est la signification des acronymes suivants :

1) **CPU** : Central Processing Unit
2) **UAL** : Unité Arithmétique et Logique
3) **RAM** : Random Access Memory
4) **ROM** : Read Only Memory
5) **USB** : Universal Serial BUS
6) **INTERNET** : INTERnational NETwork
7) **INTRANET** : Réseau informatique qui est développé au sein d'une entreprise et réservé aux collaborateurs de celle-ci, qui est similaire à internet.
8) **SITE WEB** : World Wide Web
9) Différence entre **RAM** et **ROM** : La RAM est une mémoire vive tandis que la ROM est une mémoire morte.

Exercice 2 : Choisissez-les ou la bonne réponse (0,5 x5)

☐ Le microprocesseur comprend l'UAL ou l'UCC ☒ Le microprocesseur comprend l'unité arithmétique et logique ☒ Le microprocesseur comprend unité de commande et de contrôle ☒ Le microprocesseur comprend l'UAL et l'UCC ☐ Aucune bonne réponse
☒ Les périphériques d'entrée effectuent les instructions de lecture ☐ Les périphériques d'entrée effectuent les instructions d'écriture ☐ Les périphériques d'entrée effectuent les instructions de lecture et écriture
☒ Le clavier, scanner, microphone : sont des périphériques d'entrée ☐ Le clavier, scanner, microphone : sont des périphériques de sortie ☐ Le clavier, scanner, microphone : sont des périphériques entrée / sortie
☒ Le clavier est un périphérique qui effectue les instructions de lecture ☐ Le clavier est un périphérique qui effectue les instructions d'écriture ☒ Le clavier est un périphérique d'entrée ☐ Aucune bonne réponse
☐ L'ordinateur est une machine intelligente ☐ L'ordinateur est une machine programmable et intelligente ☒ L'ordinateur est une machine programmable et rapide ☐ Aucune bonne réponse

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

II – LOGICIELS D'EXPLITATION

Exercice 1 (0,5 x 4)

Relions les mots de la première colonne à leurs correspondants dans la deuxième colonne.

1 - Linux	**d**
2 - DOS	**a**
3 - Windows	**c**
4 - Le SE	**b**

Exercice 2 (0,5 x 5)

Répondons brièvement à chaque question

1) Windows est-il un système d'exploitation (SE) mono tâche ou multi tâches ? Justifier votre réponse ?

Réponse : C'est un SE multi tâche, parce qu'on peut lancer plusieurs applications en même temps.

2) Comment faire pour démarrer rapidement l'application « calculatrice », si son raccourci a été éliminé du menu « accessoires » dans « Tous mes programmes » ?

Réponse : On clique sur **Démarrer** → **Exécuter** puis on tape le mot « calc ».

3) Comment faire pour déplacer complètement un fichier nommé « monfichier » du répertoire X vers le répertoire Y ? Citer deux façons pour le faire ?

Réponse : On va dans le répertoire X, puis on sélectionne le fichier et dans la barre de menu on clique sur **Edition**

→ **Couper** ; ensuite on se place dans le répertoire Y, on clique sur **Edition** → **Coller.**

On peut aussi dans X, cliquer sur le fichier avec le bouton droit de la souris, choisir **Couper,** ensuite dans Y, cliquer avec le bouton droit de la souris et choisir **Coller.**

4) Comment le système d'exploitation reconnaît qu'un fichier Word doit être ouvert par « Ms Word » ?

Réponse : Grâce à son extension « .doc » ou « .docx ».

5) Comment le système d'exploitation reconnaît qu'un fichier Excel doit être ouvert par « Ms Excel » ?

Réponse : Grâce à son extension « .xls » ou « .xlsx ».

Exercice 3 (0,5 x 3)

- ☐ Dans Windows, le bureau est une image
- ☒ Dans Windows, le bureau est un répertoire
- ☐ Dans Windows, le bureau est un fichier
- ☒ Dans Windows, le bureau est un dossier
- ☐ Aucune bonne réponse

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

☐ Windows est un logiciel de bureautique
☒ Windows est un system d'exploitation
☒ Windows est un ensemble de fichiers et de programmes

☐ Un système d'exploitation est un ensemble de programmes pour écrire nos documents
☒ Un système d'exploitation est un ensemble de programmes destinés à gérer une machine
☒ Un système d'exploitation gère le processeur, la mémoire et les fichiers

III – LOGICIELS DE BUREAUTIQUE

WORD

Exercice 1 (0,5 x 3)

Relions les mots de la première colonne à leurs correspondants dans la deuxième colonne.

1 – Un Formateur de texte **b**

2 – Un éditeur de texte **a**

3 – Un traitement de texte **c**

Exercice 2 (1)

Pour créer un tableau Word il faut :

A. F

B. V

C. F

D. F

Exercice 3 (1)

Quel chemin doit-on suivre pour insérer une image dans un texte ?

A. F

B. F

C. V

D. F

EXCEL

Exercice (0,5 x 6)

☐ Excel est un document de Microsoft office
☒ Excel est un Tableur
☒ Excel est un Chiffrier
☒ Excel est un logiciel pour créer des tableaux, tracer des graphes, faire des calculs, …
☐ Aucune bonne réponse

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

☒ Un fichier Excel est appelé classeur ☒ Un classeur Excel peut contenir plusieurs feuilles ☒ Une feuille Excel comporte plusieurs pages ☒ Une page Excel est un ensemble de cellules numérotées ☐ Aucune bonne réponse
☐ Ms Excel est un programme de calcul ☒ Ms Excel n'est pas un programme de calcul ☒ Ms Excel peut être utilisé comme calculatrice scientifique ☐ Ms Excel ne peut pas être utilisé comme calculatrice scientifique
☐ Dans Word Pour Copier on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+V ☒ Dans Word Pour Couper on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+X ☒ Dans Word Pour Copier on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+C ☐ Dans Word Pour Couper on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+V
☐ L'extension d'un fichier Excel est xsl ou xslx ☐ L'extension d'un fichier Excel est doc ou docx ☒ L'extension d'un fichier Excel est xls ou xlsx
☒ On peut copier un tableau d'Excel et le coller dans Word ☒ On peut copier un tableau de Word et le coller dans Excel ☐ On ne peut pas copier un tableau de l'un et le coller dans l'autre

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY
UFRMI L1 TRONC COMMUN

ANNEE 2016-2017

1ère SESSION D'EVALUATION
EPREUVE DE L'UE LOGIQUE
Durée: 2 heures

Exercice 1

1) Soient p, q, r des propositions.
Montrer que la proposition $[p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)]$ est équivalente à: $[(p \text{ et } q) \Longrightarrow r]$.
2) Soient p, q, r, s des propositions.
a) Par un développement, trouver une proposition équivalente à:

$$A : (p \text{ ou } q) \text{ et } (r \text{ ou } s).$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation:

$$|(x-1)(y-2)| + |(x-2)(y-3)| = 0$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes:
1) f est majorée;
2) f n'est pas positive;
3) f s'annule en un seul point;
4) f est constante;
5) f est injective;
6) f n'est pas surjective.

Exercice 3

Soient E un référentiel, A, B et C des parties de E. On désigne par $\overline{X}$ le complémentaire d'une partie quelconque X de E.
1) Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2) Simplifier l'expression: $\overline{\overline{A} \cup B} \cup \overline{A \cup B}$.

Exercice 4

1) Soient les applications f et g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies $\forall n \in \mathbb{N}$ par:

$$f(n) = 2n; \quad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est est impair} \end{cases}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

a) f est-elle injective? surjective?
b) g est-elle injective? surjective?
c) Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

2) Soit E un ensemble non vide f et g des applications dans E. On suppose que:

$$g \circ f = Id_E \text{ et } f \circ g \neq Id_E.$$

a) Montrer que f est injective et g surjective.
b) Montrer que f n'est pas surjective et g n'est pas injective.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Examen de Elements de Logique 1 2017-2018 Session 1 Licence 1

Exercice 1 :
On désigne par $\bar{T}$, la négation d'une proposition quelconque T. Soient les propositions p, q et r suivantes :

p : "tu réussiras dans la vie"

q : "tu travailles régulièrement"

p : "tu es honnête"

Traduire à l'aide des connecteurs $et, ou, \Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$ et des propositions p, q, r ou leurs négations les assertions suivantes :
A : "Tu réussiras dans la vie si tu travailles régulièrement et si tu es honnête"
B : "Si tu échoué dans la vie, c'est que tu n'as pas travaillé régulièrement et que tu n'as été honnête"
C : "Si tu as échoué dans la vie,c'est que tu n'as pas travaillé régulièrement ou que tu n'as été honnête"
D : "Si tu ne travailles pas régulièrement et si tu n'es pas honnête,tu ne réussiras pas dans la vie
lesquelles des assertions A, B, C, D sont équivalentes ?

Exercice 2 :
1) On considère les 4 ensembles suivants :

$$\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

a) Donner 1 élément de chaque ensemble.
b) Donner la définition de deux ensembles équipotents
c) Montrer que $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ sont équipotents
2) La famille $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ avec $A_n = \{n, n+2\}$ est-elle une partition de $\mathbb{N}$? (seule la jusfication est notée)
3) Soient A, B et D des ensembles. Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses
a)$(A \cap B \subset D) \Rightarrow (A \subset D \text{ ou } B \subset D)$;
b)$(D \subset A \cup B) \Rightarrow (D \subset A \text{ ou } D \subset B)$;
(seule la preuve d'une implication vraie ou la production d'un contre-exemple d'une implication fausse est notée)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 3 :

Soient E et F des ensembles non vides, $f : E \mapsto F$ une application.
On définit sur E la relation binaire $\mathcal{R}_f$ par :
$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

1) Montrer que $\mathcal{R}_f$ est une relation d'équivalence
$\mathcal{R}_f$ est appelée une relation d'équivalence associée à f.

2) On note $\bar{x}$ la classe d'équivalence d'un élément quelconque x de E, et $E/\mathcal{R}_f$ l'ensemble quotient.
On définit

$$\begin{aligned} \bar{f} : E/\mathcal{R}_f &\to F \\ \bar{x} &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Montrer que $\bar{f}$ est une application bien définie et injective.

3) Application :Soit $\Im$ la relation définie sur $\mathbb{N}^2$ par :

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^2, (a,b)\Im(c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c$$

a) Montrer que $\Im$ est une relation d'équivalence
b) Montrer que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^2/\Im &\to \mathbb{Z} \\ \overline{(a,b)} &\mapsto a-b \end{aligned}$$

est une bijection

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN SESSION 1 – ELEMENT DE LOGIQUE 2018-2019

EXERCICE 1

Soit $a \in \mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, *l'entier* $(a+1)^{n+1} - a(n+1) - 1$ est multiple de a^2.
2) Démontrer par une autre méthode que $\forall\, n \geq 0$, *l'entier* $(a+1)^{n+1} - a(n+1) - 1$ est multiple de a^2.

EXERCICE 2

Soient P *et* Q des propositions

(i) Donner la table de vérité de la proposition logique

$$\neg(P \vee Q) \vee (\neg(P) \wedge Q)$$

(ii) Donner une proposition logique équivalente ne faisant pas intervenir la proposition Q.

$(\neg(P)$ *désigne la négation de* $P)$

EXERCICE 3

Soient E un ensemble non vide. Si A est une partie de E, on appelle fonction indicatrice de A, la fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, notée χ_A, definie sur E par :

$$\forall x \in E, \chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases},$$

(1) Soient A *et* B des parties non vides de E. Montrer que pour tout $x \in E$, on a :

(i) $\chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$,ou $\bar{A}$ est le complémentaire de A dans E.

(ii) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$

(iii) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x).\chi_B(x)$

(iv) $\chi_{A\Delta B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x).\chi_B(x)$
Ou $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$

(2) On suppose à présent que E est un ensemble fini
Montrer que :$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$
(On pourra utiliser la question 1) (ii))

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI:L1 Maths-Info 2018-2019

EXAMEN ELEMENT DE LOGIQUE

SESSION 2

Exercice 1

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On désigne par P la proposition suivante: n^2 impair $\Rightarrow$ n impair.

(a) Démontrer cette proposition par l'absurde.

(b) Démontrer la proposition P par un autre type de raisonnement.

Exercice 3

Soit $\ll$ la relation définie sur $\mathbb{N}^2$ par:

$$(a,b) \ll (a',b') \Leftrightarrow \begin{cases} a < a' \\ \text{ou} \\ a = a' \text{ et } b \leq b' \end{cases}$$

Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre total.

Exercice 4

a) Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application. Soient également A et B deux parties de F.

(i) Démontrer que $A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$

(ii) Démontrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

b)On considère l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 5$. Soit $D = [-7, 4]$

(i) Déterminer l'image directe de D par g.

(ii) Déterminer l'image réciproque de D par g.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphout Boigny/ UFR-MI. Année 2019-2020, Licence 1 Maths-Info.

Durée: 2 heures
NB: La clarté de la rédaction sera notée!

Examen.
(*Éléments de logique mathématique*)

Exercice 1
pour tout entier naturel $n > 0$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$$

1) Donner les valeurs de S_0, S_1, S_4.
2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n > 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Exercice 2

Soient P et Q des propositions logiques.

1) Exprimer sans connecteur $\Rightarrow$ ni $\Leftrightarrow$ la proposition suivante:

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

2) Établir la table de vérité de la proposition suivante:

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$$

3) On considère la proposition suivante

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$$

Vérifie si cette proposition est une tautologie. Justifier la réponse. (on rappelle qu'une tautologie est une proposition qui ne prend que la valeur VRAI)

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Exprimer à l'aide des quantificateurs logiques et de symboles mathématiques les affirmations suivantes:

(1) La fonction f est positive sur l'intervalle $[2, 9]$.

(2) La fonction f n'est pas constance sur l'intervalle $[2, 9]$

(3) La fonction f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$.

(4) La fonction f n'est pas continue au point $x_0 = 5$.

(5) La fonction f s'annule uniquement aux points $x_0 = -3$ et $y_0 = 5$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny d'Abidjan/Maths-Info/2020 – 2021

Licence 1 Maths-Info
Durée: 2 heures
NB: la clarté de la rédaction sera notée !

Examen (1ère Session)
(Elément de Logique mathématique)

Exercice 1

On note P et Q les affirmations suivantes:
P: Jean est fort en Maths
Q: Jean est fort en Chimie.

Repreésenter les affirmations suivantes sous forme symbolique, à l'aide des lettres P et Q et des connecteurs logiques usuels.
1) Jean est fort en Maths mais faible en Chimie.
2) Jean est fort en Maths ou il est à la fois fort en chimie et faible en Maths.
3) Jean n'est fort ni en Maths ni en Chimie.
4) Jean est fort en Maths s'il est fort en Chimie.

Exercice 2

P, Q et R étant des propositions données, établir les tables de vérité des formes propositionnelles suivantes:
1) $\overline{\overline{P} \vee \overline{Q}}$
2) $(P \wedge Q) \Rightarrow \overline{Q}$
3) $P \vee \overline{Q \wedge R}$.

Exercice 3

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n =]\frac{1}{n}, n+1[$, intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On considère les sous-ensemble

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n \text{ et } H = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$$

1) Montrer que $D =]0, +\infty[$.

2) Déterminer de façon explicite le sous-ensemble H. (Justifier votre réponse !)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 4

On munit l'ensemble $E = \mathbb{N}^*$ de la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante.

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^*,\ p\mathcal{R}q \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*,\ p = q^k$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E. L'ordre est-il total ? (Justifier)

2) On convient que l'élément $p \in \mathbb{N}^*$ est plus petit que l'élément $q \in \mathbb{N}^*$ relativement à la relation d'ordre $\mathcal{R}$ si $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = \{2, 4, 8, 16, 64\}$.

   (a) Vérifier si l'ensemble A admet un plus petit élément relativememt à la relation $\mathcal{R}$.

   (b) Vérifier si l'enssemble A admet un plus grand élément relativement à la relation $\mathcal{R}$.
   (Si oui, préciser ces éléments !).

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny d'Abidjan/Maths-Info/2020 – 2021

Licence 1 Maths-Info
Durée: 2 heures
NB: la clarté de la rédaction sera notée !

Examen - Elément de logique mathématique - Session 2

Exercice 1

Déterminer la négation de chacune des assertions suivantes:

1. Tout triangle rectangle possède un angle droit.
2. Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.
3. Jean est fort en Maths ou il est à la fois fort en Chimie et faible en Maths.
4. Jean n'est fort ni en Maths ni en Chimie.
5. Jean est fort en Chimie s'il est fort en Maths.
6. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ |x - \frac{7}{5}| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 7| < \varepsilon.$

Exercice 2

1) Soient A, B et D des parties quelconques d'un ensemble E. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Dire si les implications ou équivalences suivantes sont vraies ou fausses (Justifier les réponses!)

(i) $D \subseteq A \cap B \Rightarrow D \subseteq A$ ou $D \subseteq B$.

(ii) $D \subseteq A \cap B \Rightarrow D \subseteq A$.

(iii) $D \subseteq A \cup B \Rightarrow D \subseteq A$ ou $D \subseteq B$.

(iv) $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$.

(v) $A = B \Leftrightarrow A \Delta B = \emptyset$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 3

une tautologie est une proposition intrinsèquement vraie. Par exemple, si P est une proposition et $\overline{P}$ est la négation de P, la connection $P \vee \overline{P}$ est une tautologie.
Soient P, Q, R des propositions. On considère les deux propositions suivantes.

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R) \quad (1)$$

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow [(P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R)] \quad (2)$$

(a) Sans utiliser de table de vérité, montrer que la proposition (1) est une tautologie.

(b) Vérifier si la proposition (2) est une tautologie.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

PROPOSITION DE CORRECTION DE L'EXAMEN DE LOGIQUE L1 2016-2017

Exercice 1

1- Soient P,Q et R sont des propositions.
Montrons que $[P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [(PetQ) \Rightarrow R]$
Soit la table de vérité suivante :

P	Q	R	Q ⇒ R	[P ⇒ (Q ⇒ R)]	P et Q	[(P et Q) ⇒ R]
V	F	F	V	V	F	V
V	V	F	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V

Ainsi d'après la table de vérité on a : $[P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [(PetQ) \Rightarrow R]$

2- Soient P,Q,R et S sont des propositions.

a- Par un développement trouvons une proposition équivalente à A : $(P \vee Q) \wedge (R \vee S)$

Nous utiliserons les notations ≪ "et" $= \wedge$ et "ou" $= \vee$ ≫.

On a $(P \vee Q) \wedge (R \vee S) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge R) \vee ((P \vee Q) \wedge S)$
$(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
$(P \vee Q) \wedge S \Leftrightarrow (P \wedge S) \vee (Q \wedge S)$
D'où :
$A \Leftrightarrow [(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)] \vee [(P \wedge S) \vee (Q \wedge S)]$

b- Résolution dans $\mathbb{R}^2$ de l'équation : $|(x-1)(y-2)| + |(x-2)(y-3)| = 0$

$$|(x-1)(y-2)| + |(x-2)(y-3)| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |(x-1)(y-2)| = 0 \\ |(x-2)(y-3)| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \ ou \ y = 2 \\ x = 2 \ ou \ y = 3 \end{cases}$$

Ainsi on a , $|(x-1)(y-2)| + |(x-2)(y-3)| = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \ et \ y = 3)$ ou $(x = 2 \ et \ y = 2)$
Par conséquent $S_{\mathbb{R}} = \{(1,3),(2,2)\}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.

Exprimons à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes :

1- f est majorée : $\exists\, M \in \mathbb{R} : \forall\, x \in \mathbb{R}\ f(x) \leq M$,

2- f n'est pas positive $\exists\, x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 0$,

3- f s'annule en un seul point : $\exists!\, x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0$,

4- f est constante : $\exists\, c \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = c$,

5- f est injective : $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$,

6- f n'est pas surjective : $\exists\, y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq y$

Exercice 3

Soit E un référentiel. A,B $\subset$ E.

1- Montrons que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

* Soit $x \in E$

On a :

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \bar{A} \text{ et } x \in \bar{B} \\ &\Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B} \end{aligned}$$

D'où $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

2- Simplifions l'expression $\overline{\bar{A} \cup B} \cup \overline{A \cup B}$

En appliquant le résultat précédent on obtient :

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\begin{aligned}
\overline{\bar{A}\cup B}\cup\overline{A\cup B} &= (\bar{\bar{A}}\cap\bar{B}\cup\bar{A}\cap\bar{B}\\
&= (A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap\bar{B})\ car\ (\bar{\bar{A}}=A.\\
&= [(A\cap\bar{B})\cup\bar{A}]\cap[(A\cap\bar{B})\cup\bar{B}]\ (par\ distributivite)\\
&= [(A\cap\bar{B})\cup\bar{A}]\cap\bar{B}\ (car\ (A\cap\bar{B})\subset\bar{B}\ donc\ (A\cap\bar{B})\cup\bar{B}=\bar{B})\\
&= ((A\cup\bar{A})\cap(\bar{B}\cup\bar{A}))\cap\bar{B}\ (par\ distributivite)\\
&= E\cap((\bar{B}\cup\bar{A})\cap\bar{B})(car A\cup\bar{A}=E)\\
&= (\bar{B}\cup\bar{A})\cap\bar{B}(car((\bar{B}\cup\bar{A})\cap\bar{B})\subset E\\
&= \overline{B\cap A}\cap\bar{B}\ (car\ on\ montre\ comme\ en\ 1)que\ \bar{A}\cup\bar{B}=\overline{B\cap A}\\
&= \overline{B\cup(A\cap B)}\ (d'aprs\ la\ question\ 1)\\
&= \bar{B}\ (car A\cap B\subset B\ donc\ B\cup(A\cap B)=B)
\end{aligned}$$

$$\overline{\bar{A}\cup B}\cup\overline{A\cup B}=\bar{B}$$

Exercice 4

Soient les applications f et g définies de N dans N par :

f(n) = 2n et $g(n)=\begin{cases}\frac{n}{2}\ si\ n\ est\ pair\\ 0\ sinon\end{cases}$

a - f est-elle injective ? surjective ?

• f est-elle injective ?

Soient k, N ∈ N : f(k) = f(N) ⇔ 2k = 2N ⇔ k = N, alors f est injective.

•f est-elle surjective ?

non, car 3 n'a pas d'antécédant par f. En effet les nombres impairs n'ont pas d'antécédants par f.

b- g est-elle injective ? surjective ?

• g est-elle injective ?

Non car g(0) = g(3) = 0.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

• g est-elle surjective ?
oui, car $\forall\, x \in \mathbb{N}$ $2x$ est un antécédant de x par g c'est-à-dire $g(2x) = x$

c- Calculons $f \circ g$ et $g \circ f$

• $g \circ f$
L'application $g \circ f$ est définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par : $n \mapsto (g \circ f)(n) = g[f(n)] = g(2n) = n \Rightarrow g \circ f = Id_N$

• $f \circ g$
L'application $f \circ g$ est également définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$(f \circ g)(n) = f[g(n)] = \begin{cases} f(\frac{n}{2}) \text{ si } n \text{ est pair} \\ f(0) \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} n \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Donc $\forall\, x \in \mathbb{N} : (f \circ g)(n) = \begin{cases} n \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Soient E un ensemble non vide et f,g : E → E deux applications.
Supposons que $f \circ g \neq Id_E$ et $g \circ f = Id_E$

a- Montrons que f est injective et g est surjective

• Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$
On a $f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow x = y$ car $(g \circ f) = Id_E$
Donc f est injective.

• Soit $y \in E$,$\exists ?\ x \in E$ tel que $y = g(x)$.
On a $(g \circ f)(y) = g(f(y)) = y$ car $g \circ f = Id_E$. En posant $x = f(y)$ on a $g(x) = y$. D'où g est surjective.

b- Montrons que f n'est pas surjective et que g n'est pas injective

• Supposons que f est surjective alors $\forall\, y \in E$, $\exists\, x \in E$ tel que $f(x) = y$

Ce qui donne $g(f(x)) = g(y) \Rightarrow g(y) = x$ car $g \circ f = Id_E \Rightarrow f(g(y)) = f(x) = y \Rightarrow (f \circ g)(y) = y$ ce qui est absurde car $f \circ g \neq Id_E$. Par conséquent f n'est pas surjective.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI Année 2018-2019

CORRECTION D'ELEMENT DE LOGIQUE
SESSION 1 LICENCE 1

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{N}$

1. Par recurrence, montrons que pour tout $n \geq 0$
   $(a+1)^{n+1} - a(n+1) - 1$ est un multiple de a^2
   $(a+1)^{n+1} - a(n+1) - 1$ est un multiple de a^2 signifie qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $(a+1)^{n+1} - a(n+1) - 1 = ka^2$.
   Soit la propriété P_n définie par : $\forall n \geq 0$ $(P_n) : (a+1)^{n+1} - a(n+1) - 1$ est multiple de a^2. C'est à dire $(P_n) : (a+1)^{n+1} - a(n+1) - 1 = ka^2, k \in \mathbb{N}$

   - Vérifions que P_o est vraie
     On a : $(a+1)^{0+1} - a(0+1) - 1 = a + 1 - a - 1 = 0 = 0 \times a^2$. D'où P_o est vrai.

   - Supposons que $(a+1)^{n+1} - a(n+1) - 1 = ka^2, k \in \mathbb{N}$ pour $n \geq 0$ puis montrons que $(a+1)^{n+1} - a(n+1) - 1 = ka^2, k \in \mathbb{N}$.
     On a : $(a+1)^{n+1} - a(n+1) - 1 = ka^2$
     $(a+1)^{n+2} - a(n+1)(a+1) - (a+1) = ka^2(a+1)$
     $(a+1)^{n+2} - a(n+2) = [k(a+1)+n+1]a^2$. Posons $h' = k(a+1)+n+1$
     $(a+1)^{n+2} - a(n+2) - 1 = k'a^2$. D'où P_{n+1} est vraie. Ainsi P_n aussi.
     Conclusion : Pour $a \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq 0$, $(a+1)^{n+1} - a(n+1) - 1$ est multiple de a^2
     * Méthode 2 : Binôme de Newton.

Exercice 2

(i) La table de vérité de la proposition logique. $\neg(P \vee Q) \vee (\neg(P) \wedge Q)$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg(P) \wedge Q$	$\neg(P \vee Q) \vee (\neg(P) \wedge Q)$
V	F	F	V	F	F	F
V	V	F	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V	V

(ii) Une proposition équivalente de $\neg(P \vee Q) \vee (\neg(P) \wedge Q)$ ne faisant pas intervenir la proposition Q est $\neg P$. C'est-à-dire, on a d'après la table de vérité. $\neg(P \vee Q) \vee (\neg(P) \wedge Q) \iff \neg P$

Exercice 3

Soit E un ensemble non vide et A une partie de E. On définit :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases} \quad \forall x \in E$$

1. A et B sont deux parties non vides de E. Soit $x \in E$ montrons que :

(i) $\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$.
On a : Si $x \in A$ alors $\chi_A(x) = 1$ et $\chi_{\overline{A}}(x) = 0$
Sinon $x \in \overline{A}$ et on a : $\chi_{\overline{A}}(x) = 1$ et $\chi_A(x) = 0$
Dans tous les cas $\chi_A(x) + \chi_{\overline{A}}(x) = 1 \Rightarrow \chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$

(ii) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x)$.

– 1er cas : Supposons que $x \in A \cup B$ c'est-à-dire $\chi_{A \cup B}(x) = 1$ et montrons que $\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x) = 1$
$x \in A \cup B \Rightarrow (x \in A et x \in B)$ ou $(x \in A et x \notin B)$ ou $(x \notin A et x \in B)$

1er sous cas : supposons que $x \in A$ et $x \in B$. Alors, on a :
$\chi_A(x) = 1, \chi_B(x) = 1, \chi_{A \cap B}(x) = 1$
Ainsi, on a : $\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x) = 1 + 1 - 1 = 1 = \chi_{A \cup B}(x)$.

2e Sous cas : supposons que $x \in A$ et $x \notin B$ alors $x \notin A \cap B$.
Donc $\chi_A(x) = 1, \chi_B(x) = 0, \chi_{A \cap B}(x) = 0$
Ainsi, on a : $\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x) = 1 + 0 - 0 = 1 = \chi_{A \cup B}(x)$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

3e Sous cas ; supposons que $x \notin A$ et $x \in B$. Ce cas rejoint le cas précédent. $\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) = 0 + 1 - 0 = 1 = \chi_{A\cup B}(x)$

- 2e Cas : Supposons que $x \notin A \cup B$ c'est-à-dire $\chi_{A\cup B}(x) = 0$
$x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ et $x \notin B$. Ainsi,on a : $\chi_A(x) = 0, \chi_B(x) = 0$ et $\chi_{A\cap B}(x) = 0$. D'où $\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) = \chi_{A\cup B}(x)$

Conclusion : Dans tous les cas possibles,on a : $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$

(iii) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x).\chi_B(x)$

1er Cas : Supposons que $x \in A \cap B$. Alors $\chi_{A\cap B}(x) = 1$
On a : $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ et $x \in B$ donc $\chi_A(x) = 1, \chi_B(x) = 1$
Ainsi $\chi_A(x).\chi_B(x) = 1 \times 1 = 1 = \chi_{A\cap B}(x)$

2e Cas : Supposons que $x \notin A \cap B$. C'est-à-dire $\chi_{A\cap B}(x) = 0$
On a : $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ ou $x \notin B$ or si $x \notin A$ ou $x \notin B$.
On a : $\chi_A(x).\chi_B(x) = 0 = \chi_{A\cap B}(x)$

Conclusion : Dans tous les cas $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x).\chi_B(x)$

(iv) $\chi_{A\Delta B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x).\chi_B(x)$
On a : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ donc
$\chi_{A\Delta B}(x) = \chi_{(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})}(x) = \chi_{(A\cap\overline{B})}(x) + \chi_{B\cap\overline{A}}(x) - \chi_{(A\cap\overline{B})\cap(B\cap\overline{A})}(x)$ d'après (ii).

Or $(A\cap\overline{B})\cap(B\cap\overline{A}) = \varnothing$. Donc $\chi_{(A\cap\overline{B})\cap(B\cap\overline{A})}(x) = \chi_\varnothing(x) = 0$. Ainsi,
$\chi_{A\Delta B}(x) = \chi_A(x).\chi_{\overline{B}}(x) + \chi_B(x).\chi_{\overline{A}}(x) - \chi_\varnothing(x)$ $(d'après(iii))$
$= \chi_A(x)(1 - \chi_B(x)) + \chi_B(x)(1 - \chi_A(x)) - 0$ $(d'après(i))$
$= \chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x) + \chi_B(x) - \chi_B(x)\chi_A(x)$
$\chi_{A\Delta B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x).\chi_B(x)$

Conclusion : $\chi_{A\Delta B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x).\chi_B(x)$

2. E étant de cardinal fini, $A \cup B$ aussi et on a :

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$Card(A \cup B) = \sum_{x \in E} \chi_{A \cup B}(x) = \sum_{x \in E} (\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x)) \text{ d'après(ii)}$$
$$= \sum_{x \in E} \chi_A(x) + \sum_{x \in E} \chi_B(x) - \sum_{x \in E} \chi_{A \cap B}(x)$$
$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI:L1 Maths-Info 2018-2019

CORRECTION ELEMENT DE LOGIQUE

SESSION 2

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. $P : n^2$ impair $\Rightarrow n$ impair.

(a) Démontrons cette proposition par l'absurde.
Supposons n^2 impair et n pair.
n pair $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$; $n = 2k$, C'est-à-dire $n^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2) = 2K$, avec $K = 2k^2$, $n^2 = 2K \Rightarrow n^2$ est pair. Ce qui est absurde car n^2 est supposé impair.
On conclut donc que n^2 impair $\Rightarrow n$ impair.

(b) Raisonnement par contraposé.
Supposons n pair et montrons que n^2 est pair.
n pair $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$; $n = 2k$, C'est-à-dire $n^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2) = 2K$, avec $K = 2k^2$, $n^2 = 2K \Rightarrow n^2$ est pair.
Par conséquent n pair $\Rightarrow n^2$ pair.
Donc par contraposition, n^2 impair $\Rightarrow n$ impair.

Exercice 3

Reflexivité

$$\begin{cases} a = a \\ b = b \end{cases} \Rightarrow a = a \text{ et } b \leq b \text{ donc } \begin{cases} a < a \\ \text{ou} \\ a = a \text{ et } b \leq b \end{cases}$$

D'où $(a, b) \ll (a, b)$. Par conséquent $\ll$ est réflexive.

Antisymétrique

$$\begin{cases} (a,b) \ll (a',b') \\ (a',b') \ll (a,b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < a' \text{ ou } (a = a' \text{ et } b \leq b') \\ a' < a \text{ ou } (a' = a \text{ et } b' \leq b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a < a' \\ a' < a \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a < a' \\ a' = a \text{ et } b' \leq b \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = a' \text{ et } b \leq b' \\ b' < b \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = a' \text{ et } b \leq b' \\ a' = a \text{ et } b' \leq b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = a' \text{ et } b \leq b' \\ a' = a \text{ et } b' \leq b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \Rightarrow (a,b) = (a',b').$$

Par conséquent $\ll$ est antisymétrique.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Transitivité

Si $(a,b) \ll (a',b')$ et $(a',b') \ll (a'',b'')$ alors $\begin{cases} a < a' \\ \text{ou} \\ a = a' \text{ et } b \leq b' \end{cases}$ et $\begin{cases} a' < a'' \\ \text{ou} \\ a' = a'' \text{ et } b' \leq b'' \end{cases}$

Si $a < a'$ et $a' < a''$ alors $a < a''$donc $(a,b) \ll (a'',b'')$
Si $a < a'$ et $a' = a''$ et $b' \leq b''$alors $a < a''$ donc $(a,b) \ll (a'',b'')$
Si $a = a'$ et $b \leq b'$ et $a' < a''$ alors $a < a''$ donc $(a,b) \ll (a'',b'')$
Si $a = a'$ et $b \leq b'$ et $a' = a''$ et $b' \leq b''$ alors $a = a''$ et $b \leq b''$ donc $(a,b) \ll (a'',b'')$
Par conséquent $\ll$ est transitive.

Soient (a_1,b_1) et (a_2,b_2) deux couples de $\mathbb{R}^2$.

Relation binaire

Si $a_1 < a_2$ ou si $a_2 < a_1$ alors $(a_1,b_1) \ll (a_2,b_2)$ ou $(a_2,b_2) \ll (a_1,b_1)$.
Si $a_1 = a_2$ alors soit $b_1 \leq b_2$ soit $b_2 \leq b_1$ donc $(a_1,b_1) \ll (a_2,b_2)$ ou $(a_2,b_2) \ll (a_1,b_1)$.

La relation $\ll$ est donc une relation d'ordre totale.

Exercice 4

a) E et F sont deux ensembles, $f : E \to F$ une application et A, B deux parties de F.

(i) Démontrons que: $A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.
Supposons que $A \subseteq B$
Par définition, on a: $f^{-1}(A) = \{x \in E / f(x) \in A\}$
Soit $x \in f^{-1}(A)$. On a donc $f(x) \in A$. Or $A \subseteq B$, donc $f(x) \in B$
$\Longrightarrow x \in f^{-1}(B)$
Ainsi, $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$

(ii) Démontrons que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Soit $x \in E$. On a:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ et } x \in f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

(b) On considère l'application $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto x^2 + 5$. Soit $D = [-7, 4]$.

(i) Image directe de D par g:
$g(D) = g([-7, 4]) = [21, 54]$.

(ii) Image réciproque de D par g:
$g^{-1}(D) = \{x \in \mathbf{R} / -7 \leq x^2 + 5 \leq 4\}$, On a: $\forall x \in \mathbf{R},\ x^2 + 5 > 4$
Donc $g^{-1}(D) = \emptyset$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

NB : La clarté de la rédaction sera notée !

Correction Examen logique 2019-2020

(Eléments de logique mathématique)

Exercice 1

Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$$

1) Donner les valeurs de S_0, S_1, S_4.

Réponse : $S_0 = 0$, $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_4 = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} = \frac{13}{8}$

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n > 0$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Réponse : Pour $n > 0$, notons $P(n)$ l'assertion suivante :

$$S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Pour $n = 0$, $S_1 = \frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1}$, Donc $P(1)$ est vraie.

Fixons $n > 0$. Supposons que $P(n)$ est vraie.

Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 + \frac{n+1-2n-4}{2^{n+1}}$$

$$S_{n+1} = 2 - \frac{(n+3)}{2^{n+1}}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

En conclusion, par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n > 0$, C'est-à-dire

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}, \quad pour\ tout\ n > 0.$$

Exercice 2

Soient P et Q des propositions logiques.

1) Exprimer sans connecteur $\Rightarrow$ ni $\Leftrightarrow$ la proposition suivante :
$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$

Réponse : On part du fait que : $P \Rightarrow Q \equiv \neg P$ ou Q.

D'où $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q \equiv \neg(\neg P \vee Q) \vee Q$

$\equiv (P \wedge \neg Q) \vee Q$

2) Etablie la table de vérité de la proposition suivante : $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$

Réponse :

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

3) On considère la proposition suivante : $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$

Vérifie si cette proposition est une tautologie. Justifier la réponse. (On rappelle qu'une tautologie est une proposition qui ne prend que la valeur VRAI)

Réponse : $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

P	Q	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V

D'après la table de vérité la proposition $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$ est toujours vrai donc C'est une Tautologie.

Exercice 3

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Soit $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Exprimer à l'aide des quantificateurs logiques et de symboles mathématiques les affirmations suivantes :

(1) La fonction f est positive sur l'intervalle $[2,9]$.

Réponse : $\forall x \in [2,9], f(x) \geq 0$

(2) La fonction f n'est pas constante sur l'intervalle $[2,9]$.

Réponse : $\exists x, y \in [2,9] \times [2,9] \mid f(x) \neq f(y)$

(3) La fonction f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$.

Réponse : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > \mathbb{R} \mid f(x) > y$

(4) La fonction f n'est pas continue au point $x_0 = 5$.

Réponse : $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, |x-5| < \delta \text{ et } |f(x) - f(5)| \geq \varepsilon$

(5) La fonction f s'annule uniquement aux points $x_0 = -3$ et $y_0 = 5$.

Réponse : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -3$ et $y_0 = 5$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

CORRECTION ELEMENT LOGIQUE MATHEMATIQUE 2021
SESSION 2

EXERCICE 1

Déterminer les négations de chaque assertion.

1. Il existe un triangle rectangle qui n'a pas d'angle droit.

2. Il existe une écurie dans laquelle il y a au moins un cheval dont la couleur n'est pas noire.

3. Jean n'est fort ni en Maths ni en Chimie.

4. Jean est fort en Maths mais faible en Chimie.

5. $\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0 \left(\left| x - \frac{7}{5} \right| < \alpha \text{ et } |f(x) - 7| \geq \varepsilon \right)$

EXERCICE 2

1) Soient A, B et D des parties quelconques d'un ensemble E. On note $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E.

Donc la proposition $\overline{P \Longrightarrow Q}$ est fausse et par conséquent $P \Longrightarrow Q$ est vraie c'est-à-dire $D \subseteq A \cap B \Longrightarrow D \subseteq A$ ou $D \subseteq B$

(ii) $D \subseteq A \cap B \Longrightarrow D \subseteq A$: Vraie

Contraposé : $D \nsubseteq A \Longrightarrow D \nsubseteq A \cap B$ ce qui est toujours vraie

(iii) $D \subseteq A \cup B \Longrightarrow D \subseteq A$ ou $D \subseteq B$: Fausse

Contrexemple : $A = \{1, 2\}$ et $B = \{3, 4\}$, $D = \{2, 3\}$

On a bien $D \subseteq A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ mais on n'a ni $D \subseteq A$ ni $D \subseteq B$

(iv) $A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$: Vraie

Il s'agit d'une loi de Morgan

(v) $A = B \Leftrightarrow A \,\Delta\, B = \emptyset$: Vraie

Démonstration par double implication.

- Supposons $A = B$.

Alors $A \cup B = A$ et $A \cap B = A \Longrightarrow A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \setminus A = \phi$

Donc $A = B \Longrightarrow A \,\Delta\, B = \phi$.

- Supposons, à présent que $A \,\Delta\, B = \phi$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

On a : $A \Delta B = \phi \Rightarrow (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \phi$

$A \Delta B = \phi \Rightarrow A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$

EXERCICE 3

On considère les deux propositions

$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ (1)

$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow [(P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R)]$ (2)

(a)

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R) \Leftrightarrow [(\bar{P} \vee Q) \wedge (\bar{Q} \vee R)] \Rightarrow (\bar{P} \vee R)$$
$$\Leftrightarrow \overline{[(\bar{P} \vee Q) \wedge (\bar{Q} \vee R)]} \vee (\bar{P} \vee R)$$
$$\Leftrightarrow \overline{(\bar{P} \vee Q)} \vee \overline{(\bar{Q} \vee R)} \vee (\bar{P} \vee R)$$
$$\Leftrightarrow (P \wedge \bar{Q}) \vee (Q \wedge \bar{R}) \vee (\bar{P} \vee R)$$

On a :

$$(P \wedge \bar{Q}) \vee (Q \wedge \bar{R}) \Leftrightarrow \big((P \wedge \bar{Q}) \vee Q\big) \wedge \big((P \wedge \bar{Q}) \vee \bar{R}\big)$$
$$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \big((P \vee \bar{R}) \wedge (\bar{Q} \vee \bar{R})\big)$$
$$(P \vee \bar{Q}) \vee (Q \vee \bar{R}) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \bar{R}) \wedge (\bar{Q} \vee \bar{R})$$

Alors :

$$(1) \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee \bar{R}) \wedge (\bar{Q} \vee \bar{R})] \vee (\bar{P} \vee R)$$
$$\Leftrightarrow (\bar{P} \vee R) \vee [(P \vee Q) \wedge (P \vee \bar{R}) \wedge (\bar{Q} \vee \bar{R})]$$
$$(1) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee R \vee P \vee Q) \wedge (\bar{P} \vee R \vee P \vee \bar{R}) \wedge (\bar{P} \vee R \vee \bar{Q} \vee \bar{R})$$

Les termes $(\bar{P} \vee R \vee P \vee Q)$, $(\bar{P} \vee R \vee P \vee \bar{R})$ et $(\bar{P} \vee R \vee \bar{Q} \vee \bar{R})$ contiennent respectivement $(\bar{P} \vee P)$, $(R \vee \bar{R})$ et $(R \vee \bar{R})$ qui sont des littéraux complémentaires. Donc ils sont toujours vrais et donc (1) est une tautologie.

(b) Vérifions si la proposition (2) est une tautologie.

$$(2) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \Rightarrow \overline{[(P \vee R)} \vee (Q \vee R)]$$
$$\Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \Rightarrow [\,(\bar{P} \wedge \bar{R}) \vee (Q \vee R)]$$
$$\Leftrightarrow \overline{(P \vee Q)} \vee [(\bar{P} \wedge \bar{R}) \vee (Q \vee R)] \Leftrightarrow (P \wedge \bar{Q}) \vee [\,(\bar{P} \wedge \bar{R}) \vee (Q \vee R)]$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Table de vérité

P	$\bar{P}$	Q	$\bar{Q}$	R	$\bar{R}$	$P \wedge \bar{Q}$	$\bar{P} \wedge \bar{R}$	$Q \vee R$	$(\bar{P} \wedge \bar{R}) \vee (Q \vee R \vee)$	(2)
V	F	V	F	V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	V

D'après la table, (2) est toujours vraie. Donc elle est bien une tautologie.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

STRUCTURES ALGÉBRIQUES

Pour effectuer des calculs portant sur une loi interne qui n'est pas une loi usuelle.

Bien détailler chaque étape de raisonnement ou de calcul, car les automatismes de calcul acquis dans les classes antérieures sur les opérations usuelles sur les nombres ne sont pas, a priori, valables pour des lois internes quelconques.

Pour montrer qu'une loi interne est commutative, ou est associative, ou admet un neutre, ou que certains éléments admettent un symétrique.

Revenir aux définitions.

Pour montrer qu'une loi interne $*$ dans un ensemble E n'est pas commutative.

Trouver $(a, b) \in E^2$ tel que $a * b \neq b * a$.

Pour montrer qu'une loi interne $*$ dans un ensemble E n'est pas associative.

Trouver $(a, b, c) \in E^3$ tel que $(a * b) * c \neq a * (b * c)$.

Pour simplifier par un élément dans un calcul, par exemple, pour passer de $a * x = a * y$ à $x = y$.

Essayer de :

- ✓ Montrer que a admet un symétrique a^{-1} et composer par a^{-1} à gauche.
- ✓ Montrer que l'application $\gamma_a : E \to E, x \to a * x$ est injective.

Pour montrer qu'un ensemble E muni d'une loi $*$ est un groupe.

Ne pas oublier de montrer que $*$ est interne dans E.

- ✓ Si la loi $*$ n'est pas une loi usuelle, revenir à la définition d'un groupe : montrer que $*$ est associative, que E admet un neutre pour $*$, et que tout élément de E admet un symétrique pour $*$.

- ✓ Si la loi $*$ est une loi usuelle, essayer de montrer que $(E,*)$ est un sous-groupe d'un groupe usuel $(G,*)$: montrer que $E \subset G$, que le neutre de $(G,*)$ est dans E, que, pour tout $(x, y) \in E^2, x * y \in E$, et que, pour tout $x \in E$, le symétrique x^{-1} de x dans G est dans E.

- ✓ Essayer de trouver un isomorphisme de $(E,*)$ sur un groupe connu, ou un morphisme d'un groupe connu sur $(E,*)$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Pour montrer qu'une partie H d'un groupe $(G,\cdot)$ est un sous-groupe de G.

Essayer de :

- ✓ Revenir à la définition de sous-groupe : montrer que $H \subset G$, que le neutre de G est dans H, que, pour tout $(x,y) \in H^2$, $xy \in H$, et que, pour tout x ∈ H, le symétrique x^{-1} de x dans G est dans H
- ✓ Montrer que H est le sous-groupe de G engendré par une certaine partie de G.

Pour manipuler des sous-groupes d'un groupe.

Utiliser la définition de sous-groupe d'un groupe.

Pour montrer qu'une application $f : (G,*) \to (G,.)$ est un morphisme de groupes.

Revenir à la définition : montrer que :

$\forall (x,y) \in G^2, f(x * y) = f(x) \top f(y)$.

Pour montrer que deux groupes sont isomorphes.

Trouver un isomorphisme de l'un des deux groupes sur l'autre.

Pour montrer que deux groupes (G,*), (G , ⊤) ne sont pas isomorphes.

Raisonner par l'absurde : supposer qu'il existe un isomorphisme de groupes $f : (G,*) \to (G,\top)$ et amener une contradiction.

Lorsqu'une hypothèse est faite pour tout élément d'un anneau.

Penser à appliquer cette hypothèse à x, à y, à $x + y$, à $1 + x$, ...

Pour étudier une loi interne * sur un ensemble fini E.

Il peut être utile de considérer, pour a ∈ E fixé, les applications

$\gamma_a : E \to E, \quad x \to a * x.$

$\delta_a : E \to E, \quad x \to x * a.$

En particulier, si γ_a est injective, alors γ_a est surjective (car E est supposé fini).

Pour étudier des propriétés d'un groupe fini.

Penser à utiliser des arguments de dénombrement, de comptage

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB
UFR-MI
Licence 1
Année académique 2016 – 2017

EXAMEN de Structures algébriques : session1, (2 Heures)

Exercice : 1 : (3-points) .
Etudier la loi de composition interne $*$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$a * b = Min\{a, b\}.$$

Exercice : 2 : (6-points) . Soient $A = \{a, b\}$ et le groupe $(\mathcal{P}(A), \triangle)$. où $\triangle$ est la loi différence symétrique.

1. Déterminer $\mathcal{P}(A)$.
2. Quels sont les cardinaux possibles des différents sous-groupes de $\mathcal{P}(A)$?.
3. Montrer que $\mathcal{H} = \{\varnothing, A\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{P}(A)$.
4. Déterminer le groupe quotient $\frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{H}}$.
5. Ecrire la table de sa loi quotient.

Exercice : 3 : (6-points)
Dans $\mathbb{R}[X]$,

1. Effectuer la division euclidienne de $X^{12} + 1$ par $X^3 + 1$.
2. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $2X + 1$, par $3X^2 + 2X + 1$ à l'ordre 6.

Exercice : 4 : (5-points) .
Soit l'anneau quotient $A = \frac{\mathbb{Z}}{11\mathbb{Z}}$.

1. Déterminer le groupe multiplicatif $\mathcal{U}(A)$ de A.
2. Déterminer tous les cardinaux possibles des sous-groupes du groupe multiplicatif.
3. Déterminer tous les sous-groupes du groupe multiplicatif.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB
UFR-MI
Licence 1
Année académique 2016 – 2017

EXAMEN de Structures algébriques : session 2, (2 Heures)

Exercice : 1 : (6-points)
Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. Ecrire la table d'une loi de composition interne sur E, qui soit commutative , admette l'élément 3 comme élément neutre, et telle que chaque élément soit son propre symétrique.
2. Muni d'une telle loi, E est-il un groupe ?

Exercice : 2 : (8-points)
On considère le produit cartésien de groupes

$$G = \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}.$$

1. Quels sont les cardinaux possibles des différents sous-groupes de G ?.
2. Déterminer le plus petit sous-groupe de G contenant l'élément $(\bar{1}, \bar{1})$.
3. Déterminer le plus petit sous-groupe de G contenant l'élément $(\bar{1}, \bar{2})$.
4. Le groupe G est-il isomorphe au groupe quotient $\frac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}$?

Exercice : 3 : (6-points)
Soient $\mathbb{K}$ le corps $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes sur $\mathbb{K}$.

1. Ecrire les tables de l'addition et de la multiplication de $\mathbb{K}$.
2. Dans $\mathbb{K}[X]$, effectuer la division euclidienne de
$$X^8 + X^7 + X + \bar{1} \text{ par } X^3 + X + \bar{1}.$$
3. Dans $\mathbb{K}[X]$, effectuer la division suivant les puissances croissantes de
$$X^8 + X^7 + X + \bar{1} \text{ par } X^3 + X + \bar{1} \text{ à l'ordre 5.}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Examen Structure Algébrique 2017-2018 Session 1-Licence 1 2H

Exercice 1 :3 points Soit $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
1. Combien de lois de composition internes commutatives y a-t-il sur E?
2. Ecrire la table d'une loi de composition interne sur E,qui soit commutative et admette l'élément 0 comme élément neutre et telle que chaque élément ait son **propre opposé** pour symétrie.

Exercice 2 :3 points Etudier la lois de composition interne $\oplus$ définie sur suivante :

$$a \oplus b = (a-1)(b-1)+1$$

Exercice 3 :6 points
On considère le produit cartésien

$$G = \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$$

1. Quels sont les cardinaux possibles des différents sous-groupe de G?
2. Déterminer un sous-groupe propre de G contenant l'élément $(\bar{0}, \bar{1})$.
3. Déterminer un sous-groupe propre de G contenant l'élément $(\bar{1}, \bar{0})$.
4. Déterminer un sous-groupe propre de G contenant l'élément $(\bar{1}, \bar{1})$.

Exercice 4 : 8 points
Soit $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$
1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 2 ;
2. Montrer que $\mathcal{C}$ n'est pas intègre.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$ est un idéal de $\mathcal{C}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI : L1 Année 2017-2018

EXAMEN STRUCTURE ALGEBRIQUE SESSION 2 DUREE : 2H00

EXERCICE 1 : (8 points)

Soit $E = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ le produit cartésien de l'anneau quotient $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ par lui-même.
On munit E de laloi de composition interne $*$ suivante :

$$(\dot{x}, \dot{y}) * (\dot{a}, \dot{b}) = (\dot{x} + \dot{y}.\dot{a}, \dot{y}.\dot{b})$$

l'addition et la multiplication étant celle de l'anneau $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

1. Ecrire les tables de l'addition et la multiplication de l'anneau $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.
2. Ecrire la table dela loi de $*$.
3. la loi $*$ est-elle commutative ?
4. Déterminer l'élément neutre de la loi $*$ s'il existe.
5. Quels sont les éléments de E qui admettent un symétrique ?

EXERCICE 1 : (5-points)

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle :

$$\frac{X^6 - 1}{(X^2 - X + 1)^3}$$

EXERCICE 1 : (7-points)

On considère l'ensemble

$$\mathbb{Z}[\sqrt{17}] = \{a + b\sqrt{17}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{17}]$ est un sous-anneau du corps $(\mathbb{R}, +, .)$.
2. Si $z = a + b\sqrt{17}$, on note $\hat{z} = a - b\sqrt{17}$.
   Montrer que $z\hat{z}' = \hat{z}.\hat{z}'$ et $z.\hat{z} \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer que si z est inversible alors $\hat{z}$ est inversible et $z\hat{z} \in \{-1, 1\}$.
4. Déterminer six éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{17}]$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB
UFR-MI
Licence 1
Année académique 2018 – 2019

Examen de Structures algébriques : première session (2 Heures)

Exercice : 1 : (6-points) .

1. Donner deux exemples de groupes de 4 éléments.
2. Soit l'ensemble $E = \{0, 1, 2\}$. Ecrire la table d'une loi de composition interne $*$ qui fait de E, un groupe.

Exercice : 2 : (7-points) .

On considère le groupe additif des nombres réels $(\mathbb{R}, +)$, et pour $r \in \mathbb{R}$, on note $r\mathbb{Z}$ l'ensemble

$$\{rm\ ,\ m \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $r\mathbb{Z}$ est **un sous-groupe** du groupe $(\mathbb{R}, +)$.
2. Soient p et q deux nombres rationnels.
   Montrer que $p\mathbb{Z} \cap q\mathbb{Z}$ est sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
3. Déterminer exactement le sous-groupe $\frac{3}{4}\mathbb{Z} \cap \frac{4}{5}\mathbb{Z}$.

Exercice : 3 : (7-points) .

On considère l'anneau des polynômes $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}[X]$.

1. Ecrire les tables de l'addition et de la multiplication de l'anneau quotient $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$
2. Dans $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}[X]$, effectuer la division euclidienne de $X^7 + X^2 + \bar{1}$ par $\bar{2}X^2 + \bar{1}$.
3. Dans $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}[X]$, effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 4, de $X^6 + \bar{2}X^2 + \bar{1}$ par $X^2 + \bar{2}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI
Licence 1 :
Année académique 2018 – 2019

Examen de Structures algébriques : deuxième session
2-heures

Exercice 1 : (8-points) Soit $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \longmapsto z + \bar{z}$

1. Montrer que g est une application bien définie.
2. Montrer que g est un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$.
3. Donner 3 parties stables de $(\mathbb{C}, +)$, non contenues ans $\mathbb{R}$.
4. Montrer que si B est une partie stable de $\mathbb{R}$, alors $g^{-1}(B)$ est une partie non vide.
5. En déduire que si B est une partie stable de $\mathbb{R}$, alors $g^{-1}(B)$ est une partie stable de $\mathbb{C}$.

Exercice 2 :(8-points) .

Soient A l'anneau quotient $\frac{\mathbb{Z}}{24\mathbb{Z}}$

1. Déterminer **tous les sous-groupes du groupe additif** $(A, +)$.
2. Déterminer le groupe multiplicatif $\mathcal{U}(A)$ de l'anneau A.
3. Déterminer le cardinal de $\mathcal{U}(A)$, puis tous ses sous-groupes.
4. Résoudre dans A l'équation :

$$x^3 + \bar{12}x = \bar{1}$$

Exercice 3 :(4-points) .

1. Effectuer la **division suivant les puissances croissantes** de $X^2 + 1$, par $X^2 + X + 1$ **à l'ordre** 6.
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fractions rationnelle :

$$\frac{X^2 + 1}{(1 + X + X^2)X^6}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny
UFR-MI
Licence 1 :
Année académique 2019 – 2020

Examen de Strutures algébriques :
(session de novembre, 2h)

Exercice 1 : (6-points) . Etudier la loi $*$ dont la table est ci-dessous, donner les éléments qui ont un symétrique.

$*$	-2	-1	0	1	2
-2	-1	-2	2	-2	0
-1	-2	-1	0	1	2
0	2	0	-1	2	-2
1	-2	1	2	-1	1
2	0	2	-2	1	-1

Exercice 2 :(6-points)

Soient G le groupe quotient $\frac{\mathbb{Z}}{27\mathbb{Z}}$

1. Quel est le cardinal de G ?
2. Quels sont les cardinaux possibles des sous-groupes de G ?
3. Déterminer tous ses sous-groupes. On notera H_k le sous-groupe de k éléments.

Exercice 3 :(8-points) Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif unitaire.
Soient a b deux éléments de A.

1. Calculer $(a+b)^3$.
2. On suppose que $a^2 = 0_A$, calculer $(a+b)^{2020}$.
3. On suppose que $a \cdot b = 0_A$, calculer , pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $(a+b)^n$
4. On suppose que $a + a = 0_A$, calculer $(a+b)^2$, $(a+b)^4$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny

UFR-MI

Licence 1 :

Année académique 2020-2021

Examen de Structures Algébriques :

(Première Session 2heures)

Exercice 1 : (7-points).

Soit l'ensemble $E = \{1,2,3,4,5\}$.

1. Construire sur E deux l.c.i **(loi de composition interne)** commutatives, admettant respectivement 3 et 5 comme éléments neutres.
2. Construire sur E une l.c.i **non commutative, non associative,** admettant 1 comme élément neutre.
3. Construire sur E une l.c.i commutative, associative, admettant 1 comme élément neutre, et telle que chaque élément admette un symétrique..

Exercice 2 : (7-points) On considère l'anneau quotient $A = \frac{\mathbb{Z}}{16\mathbb{Z}}$.

1. Déterminer les classes d'équivalences de 33^{2021} et de 31^{2021} dans A.
2. A est-il commutatif, unitaire, intègre ?
3. Déterminer $\mathcal{U}(A)$ l'ensemble des éléments inversibles de A.
4. Déterminez tous les sous-groupes du groupe $\mathcal{U}(A)$.

Exercice 3 : (6-points)

On considère l'anneau quotient $\mathbb{K} = \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{K}[X]$, l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Ecrire les tables de l'addition et de la multiplication de l'anneau quotient $\mathbb{K}$.
2. Effectuer dans $\mathbb{K}[X]$, la division euclidienne de $P(X) = X^5 + 2X^4 + 3X^3 + 4X + 1$ par $Q(X) = 4X^3 + X^2 + X + 4$.
3. Effectuer dans $\mathbb{K}[X]$, **si possible,** la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 3, de : $P(X) = X^5 + 2X^4 + 3X^3 + 4X + 1$ par $Q(X) = 4X^3 + X^2 + X + 4$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny, UFR-MI
Licence 1, Année académique 2020-2021.

Examen de Structures algébriques : (Deuxième session *1h30*min)

Exercice : 1 : (15-points)
Répondre par **vrai** ou par **faux** à chacune des propositions suivantes :
Notez bien : 1,5-points pour une bonne réponse et -0,5 si non.

1. Sur tout ensemble d'au moins 2 éléments, on peut définir une loi de composition interne (l.c.i) non commutative.
2. Toute l.c.i commutative est associative.
3. Il y'a des l.c.i qui sont ni associatives, ni commutatives, mais admettent un élément neutre.
4. Un même éléments peut être neutre pour 2 lois de compositions internes différentes sur un ensemble E.
5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il y a des groupes finis de n éléments..
6. Si H est un sous-groupe de 2 éléments d'un groupe fini G, alors le cardinal de G est pair.
7. Il y a des groupes infinis qui ont des sous-groupes de 2 éléments.
8. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il y a des groupes abéliens de 2^n éléments.
9. Dans un anneau commutatif unitaire, l'ensemble de tous les éléments inversibles est un groupe.
10. Les idéaux de l'anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ sont exactement ses sous-groupes.

Exercice : 2 : (5-points) On considère le produit cartésien de l'anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ par lui-même : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On rappelle que $(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$ et $(a,b).(a',b') = (a.a', b.b')$.
Soient

$$I = \{(n,n), n \in \mathbb{Z}\} \text{ et } J = \{(n,3m), n, m \in Z\}$$

1. Montrer que I est stable pour + et pour. .
2. I est-il un idéal de l'anneau $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?
3. Montrer que J est un idéal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Correction Examen de Structure Algébrique 2017-2018 Session 1 Licence 1

Exercice 1 :

$E = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ $card(E) = 5$

1)Nombre de lois de composition internes commutatives sur E

Pour définir une loi de composition interne commutative,on doit :

-définir les resultats des opérations de la forme $x * x$,ce qui revient à dénombrer le nombre d'applications de E dans E. il y en a :5^5

-définir les resultats des opérations de la forme $x * y$ (avec $x \neq y$).

Soit E' l'ensemble des paires $\{x, y\}$. On a :

$$Card(E') = C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5*4}{2} = 10$$

ce qui revient à dénombrer le nombre d'applications de E' dans E,il y en a :5^{10}

Donc,le nombre de lois de compositions internes commutatives sur E est égal à $5^5 * 5^{10} = 5^{15}$

2)Table d'une loi de composition interne sur E

*	-2	-1	0	-1	2
-2	-2	1	-2	-1	0
-1	1	-1	-1	0	-2
0	-2	-1	0	1	2
1	-1	0	1	1	2
2	0	-2	2	2	2

Exercice 2 :

Etude de la loi $\oplus$

$a \oplus b = (a-1)(b-1) + 1$

*Commutativité

$a \oplus b = (a-1)(b-1) + 1 = (b-1)(a-1) + 1$

car la muliplication dans $\mathbb{N}$ est commutative

$a \oplus b = b \oplus a$. Alors $\oplus$ est commutative.

*Associativité

on a :

$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus [(b-1)(c-1) + 1] = (a-1)[(b-1)(c-1) + 1 - 1] + 1$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$= (a-1)(b-1)(c-1)+1$

De plus

$(a \oplus b) \oplus c = [(a-1)(b-1)+1] \oplus c = [(a-1)(b-1)+1-1](c-1)+1$

$= (a-1)(b-1)(c-1)+1$

Alors $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$

D'où $\oplus$ est associative

*Element neutre

Soit e l'élément neutre de $\oplus$

On a : $a \oplus e = a, \forall a \in \mathbb{N}^*$

$(a-1)(e-1)+1 = a \Leftrightarrow (a-1)(e-1) = a-1$

$\Leftrightarrow (a-1)(e-1)-(a-1) = 0$

$\Leftrightarrow (a-1)[(e-1)-1] = 0$

$\Leftrightarrow (a-1)(e-2) = 0$

$\Leftrightarrow a = 1 \; ou \; e = 2$

Comme a est quelconque,alors $\boxed{e=2}$.

*Element symétrique

Soit $a \in \mathbb{N}^*$, et $b \in \mathbb{N}^*$ son symétrique

$$a \oplus b = 2 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)+1 = 2$$
$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 1$$
$$\Leftrightarrow b-1 = \frac{1}{a-1}, a \neq 1$$
$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{a-1}+1, a \neq 1$$
$$\Leftrightarrow \boxed{b = \frac{a}{a-1}}, a \neq 1$$

Tous les éléments de $\mathbb{N}^*$ n'ont pas de symétrique par $\oplus$

Exercice 3 :

$G = \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$

1)$Card(G) = Card\left(\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}\right) = Card\left(\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}\right) \times Card\left(\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}\right) = 5 \times 5 = 25$

Les cardinaux des différents sous-groupes de G divisent le card(G). Or les diviseurs de 25 sont :1 ;5 et 25.Les cardinaux possibles sont :1 ;5 et 25

2)Sous-groupe propre de G contenant l'élément $(\bar{0}, \bar{1})$

$H_1 = \{(\bar{0},\bar{0}) ; (\bar{0},\bar{1}) ; (\bar{0},\bar{2}) ; (\bar{0},\bar{3}) ; (\bar{0},\bar{4})\}$(Vérifier bien sur que c'est un sous-groupe)

3)sous-groupe propre de G contenant l'élément $(\bar{1}, \bar{0})$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$H_2 = \{(\bar{0},\bar{0});(\bar{1},\bar{0});(\bar{2},\bar{0});(\bar{3},\bar{0});(\bar{4},\bar{0})\}$
4)sous-groupe propre de G contenant l'élément $(\bar{1},\bar{1})$
$H_3 = \{(\bar{0},\bar{0});(\bar{1},\bar{1});(\bar{2},\bar{2});(\bar{3},\bar{3});(\bar{4},\bar{4})\}$

Exercice 4 :
$C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R} \right\}$
1)Montrer que C est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in C \quad (a=0; b=0)$
$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \in C$
$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a' & b-b' \\ b-b' & a-a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \in C$
avec $c = a - a'$ $d = b - b'$
Donc C est un sous-groupe de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
$*\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C$
*Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \in C$
$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix}$
car + dans est commutative.

$$= \begin{pmatrix} a' & a'' \\ a'' & a' \end{pmatrix} \text{ avec } a' = ac+bd \text{ et } a'' = ad+bc$$

Par conséquent, c'est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
*Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \in C$
On a : $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix}$
car + dans est commutative.
Donc $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$
,Ainsi C est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2)montrer que C n'est pas intègre

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

*Soit $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} \in C$

$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

Donc C n'est pas intègre

3)Montrer que $I = \{\begin{pmatrix}a&a\\a&a\end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\}$ est un idéal de C.

On a : $I \subset C$

$\cdot \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \in I$

$\cdot \begin{pmatrix}a&a\\a&a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b&b\\b&b\end{pmatrix} \in I$

$\begin{pmatrix}a&a\\a&a\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}b&b\\b&b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-b&a-b\\a-b&a-b\end{pmatrix} \in I$

I est un sous-groupe de $(C,+)$

*Soit $\begin{pmatrix}a&a\\a&a\end{pmatrix} \in I, \begin{pmatrix}b&c\\c&b\end{pmatrix} \in C$

$\begin{pmatrix}b&c\\c&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&a\\a&a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ba+ca&ba+ca\\ca+ba&ca+ba\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ab+ac&ab+ac\\ab+ac&ab+ac\end{pmatrix} \in I$

Donc I est un idéal de C

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB
UFR-MI
Licence 1
Année académique 2017-2018

Corrigé de l'Examen de Structure algébrique : deuxième session

Exercice 1 : (8-points)

$E = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ le produit cartésien de l'anneau quotient $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ par lui-même.
E est muni de la loi de composition interne * suivante :

$$(\dot{x}, \dot{y}) \times (\dot{a}, \dot{b}) = (\dot{x} + \dot{y}.\dot{a}, \dot{y}.\dot{b})$$

L'addition et la multiplication étant celles de l'anneau $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

1. Les tables de l'addition et la multiplication de l'anneau sont les suivantes :

+	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{0}$

×	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$

2× (1pt)

2. on a le tableau suivant :

+	$(\dot{0},\dot{0})$	$(\dot{0},\dot{1})$	$(\dot{1},\dot{0})$	$(\dot{1},\dot{1})$
$(\dot{0},\dot{0})$	$(\dot{0},\dot{0})$	$(\dot{0},\dot{0})$	$(\dot{0},\dot{0})$	$(\dot{0},\dot{0})$
$(\dot{0},\dot{1})$	$(\dot{0},\dot{0})$	$(\dot{0},\dot{1})$	$(\dot{0},\dot{0})$	$(\dot{1},\dot{1})$
$(\dot{1},\dot{0})$	$(\dot{1},\dot{0})$	$(\dot{1},\dot{0})$	$(\dot{1},\dot{0})$	$(\dot{1},\dot{0})$
$(\dot{1},\dot{1})$	$(\dot{1},\dot{0})$	$(\dot{1},\dot{1})$	$(\dot{1},\dot{0})$	$(\dot{0},\dot{1})$

(3pts)

3. la loi * **n'est pas commutative.** 0.5-pt.

4. $(\dot{0},\dot{1})$ est l'élément neutre de la loi *. (1-pt)

5. Les éléments $(\dot{0},\dot{1})$ *et* $(\dot{1},\dot{1})$ sont les seuls de E qui admettent un symétrique, ils sont égaux à leurs propres symétriques. 2× (1 pt)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 2 : (5-points)

Dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle :

$$\frac{X^6-1}{(X^2-X+1)^3}$$

Se décompose en éléments simples comme suit :

$$\frac{X^6-1}{(X^2-X+1)^3} = 1 + \frac{2X}{(X^2-X+1)} - \frac{X+2}{(X^2-X+1)^2}$$

1-point pour écriture formelle de la décomposition, **1-point** pour la partie entière, 3-points pour le reste.

Exercice 3 : (7-points)

On considère l'ensemble

$$A = \mathbb{Z}[\sqrt{17}] = \{a + b\sqrt{17}, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

1. (i)- Montrons que $\mathbb{Z}[\sqrt{17}]$ est un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R}; +)$.
   (a) $0 = 0 + 0\sqrt{17} \in A$,(0.5pt)
   (b) $(a + b\sqrt{17}) - (a' + b'\sqrt{17}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{17} \in A$, (0.5pt)
   (c) $-(a + b\sqrt{17}) = (-a) + (-b)\sqrt{17} \in A$, (0.5pt)

   (ii)-

   (a) $1 = 1 + 0\sqrt{17} \in A$, (0.5 pt) $(a a' + 17 bb') + (a' b + ab')\sqrt{17} \in A$
   (b) $(a + b\sqrt{17}).(a' + b'\sqrt{17}) = (aa' + 17bb') + (a'b + ab') \in A$, (0.5pt)
2. Si $z = a + b\sqrt{17}$, on note $\hat{z} = a - b\sqrt{17}$, on voit clairement que $\widehat{z+z'} = \hat{z} + \hat{z'}$,(0.5pt), $\widehat{z.z'} = \hat{z}.\hat{z'}$,(0.5pt) et $\hat{z}.\hat{z'} = a^2 - 17b^2 \in \mathbb{Z}$, $(0.5pt)$.
3. Si z est inversible, il existe $z' \in A$ tel que $zz' = 1$. Il vient alors que $\widehat{z.z'} = \hat{z}.\hat{z'} = 1$, donc $\hat{z}$ est inversible. Par ailleurs on a :
   $$(z.z').(\hat{z}.\hat{z'}) = (z.\hat{z}).(z'.\hat{z'}) = 1$$
   avec $z.\hat{z} \in \mathbb{Z}$ et $z'.\hat{z'} \in \mathbb{Z}$ alors $z\hat{z} \in \{-1,1\}$, 1-point
   Il est évident que si $z.\hat{z} \in \{-1,1\}$, z *et* $\hat{z}$ sont inversibles, et sont :
   Soit inverse l'un de l'autre, soit l'inverse de l'opposé de l'autre.
4. Avec le critère ci-dessus $1, -1, 4 + \sqrt{17}, 4 - \sqrt{17}, -4 + \sqrt{17}, -4 - \sqrt{17}$ sont six éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{17}]$. $1 - point.$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE STRUCTURE ALGEBRIQUE 2019 -2020

EXCERCICE 1

On a la loi $(E,*)$ avec $E = \{-2,-1,0,1,2\}$

- **Loi de composition interne?**
  On remarque à travers le tableau que :
  $\forall (x,y) \in E \times E, x * y \in E = \{-2,-1,0,1,2\}$.
  Donc on a une loi de composition interne sur E .
- **Elément neutre ?**
  Grace à la 3^{eme} ligne et à la 3^{eme} colonne on constate que :
  $\forall x \in E, x * (-1) = (-1) * x = x$
  Ainsi -1 est l'élément neutre.
- **Associativité ?**
  A travers le tableau : $(0 * (-2)) * 1 = 2 * 1 = 1$ et $0 * ((-2) * 1) = 0 * -2 = 2$
  $\Longrightarrow (0 * -2) * 1 \neq 0 * ((-2) * 1$
  Donc pas d'associativité.
- **Connectivité ?**
  Il s'agit ici d'un tableau symétrique par rapport à la diagonale
  $i.e$: $\forall (x,y) \in E \times E, x * y = y * x$
  Ainsi la loi est commutative.
- **Symétrie ?**
  La diagonale est composée que de -1 qui est l'element neutre, donc chaque element de E est son propre symétrique.

EXCERCICE 2

Soit $G = \frac{\mathbb{Z}}{27\,\mathbb{Z}}$

(1) Cardinal de G :

On a : $card(G) = 27$

$G = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{27}\}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

(2) D'après Lagrange, les cardinaux possibles des sous-groupes de G sont les diviseurs de 27.

Soit l'ensemble suivant : {1,3,9,27}

(3)Le groupe quotient G compte :

- 1 seul groupe de 1 élément : $H_1 = \{\bar{0}\}$
- 1 seul groupe de 3 éléments : $H_3 = \{\bar{0}, \bar{9}, \overline{18}\}$
- 1 seul groupe de 9 éléments : $H_9 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{24}\}$
- 1 seul groupe de 27 éléments, le groupe G lui-même.

EXCERCICE 3

$(A, +, °)$ Un anneau commutatif unitaire

(1) Calculons$(a+b)^3$ pour a, b ∈ A

Comme A est un anneau commutatif unitaire alors en utilisant le binôme de newton.

On trouve : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

(2) On donne $a^2 = 0_A$, calculons $(a+b)^{2020}$

On a : $(a+b)^{2020} = \sum_{k=0}^{2020} C_{2020}^k b^{2020-k} a^k$

$$(a+b)^{2020} = b^{2020} + 2020ab^{2019} + \sum_{k=2}^{2020} C_{2020}^k b^{2020-k} a^k$$

On a : $a^2 = 0_A \Longrightarrow a^k = 0_A \ \forall k \geq 2.$

Ainsi $\sum_{k=2}^{2020} C_{2020}^k b^{2020-k} a^k = 0_A$

$$(a+b)^{2020} = b^{2020} + 2020ab^{2019}$$

(3) On donne $a.b = 0_A$

On a : $(a+b)^n = a^n + c_n^1 a^{n-1}b + \cdots + c_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n$

$$= a^n + b^n \ car \ a.b = 0_A \ et \ \forall x \in A, x + O_A = x$$

$(4)(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = b^2 \ car \ a + a = 0_A \Longrightarrow a = 0_A$

Et $(a+b)^4 = (a+b)^2.(a+b)^2 = b^2.b^2 = b^4$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Correction du sujet de structure algébrique

Exercice 1

1)

- Table d'une loi de composition interne admettant 3 comme élément neutre

Notons * cette loi de composition interne

En effet, $\forall x \in E, x * 3 = 3 * x = x$

*	1	2	3	4	5
1	2	5	1	4	3
2	4	1	2	2	2
3	1	2	3	4	5
4	5	3	4	1	1
5	1	5	5	5	4

- Table d'une loi de composition interne admettant 5 comme élément neutre

Notons Δ cette loi de composition interne

En effet, $\forall x \in E, x\Delta 5 = 5\Delta x = x$

Δ	1	2	3	4	5
1	4	5	2	3	1
2	3	1	3	4	2
3	2	3	5	5	3
4	1	5	4	2	4
5	1	2	3	4	5

2)

- Table d'une loi de composition interne non commutative, non associative admettant 1 comme élément neutre.

Notons □ cette loi de composition interne

□	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	3	5	2	3
3	3	4	5	2	1
4	4	1	2	2	5
5	5	4	1	4	3

On a : $3\square 2 = 4$ et $2\square 3 = 5$, donc □ n'est pas commutative.

$(3\square 2)\square 4 = 2$ et $3\square(2\square 4) = 4$,

Donc □ n'est pas associative.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

3) Table d'une LCI associative, commutative, admettant 1 comme élément neutre, et celle que chaque élément admette un symétrique.
Notons 'T' cette loi de composition interne

T	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	1	1	1
3	3	1	1	1	1
4	4	1	1	1	1
5	5	1	1	1	1

Exercice 2

$A = \frac{\mathbb{Z}}{16\mathbb{Z}}$

1) Déterminons les classes d'équivalence de 33^{2021} et de 31^{2021} dans A.

On a : $33 = 16 \times 2 + 1 \Leftrightarrow 33 \equiv 1[16]$

$\Leftrightarrow 33^{2021} \equiv 1^{2021}[16]$

$\Leftrightarrow 33^{2021} \equiv 1[16]$ comme $0 \leq 1 \leq 16$

Ainsi $\bar{1}$ est la classe d'équivalence de 33^{2021} dans A.

On a : $31 = 16 \times 2 - 1 \Leftrightarrow 31 \equiv -1[16]$

$\Leftrightarrow 31^{2021} \equiv (-1)^{2021}[16]$

$\Leftrightarrow 31^{2021} \equiv -1[16]$

Or $-1 \equiv 15[16]$, d'où $31^{2021} \equiv 15[16]$ et comme $0 \leq 15 < 16$

Ainsi $\overline{15}$ est la classe d'équivalence de 31^{2021} dans A.

2) A est-il commutatif, unitaire, intègre ?

$A = \frac{\mathbb{Z}}{16\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}\}$

Soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in A^2$

On a : $\bar{x} \times \bar{y} = \overline{xy} = \overline{yx} = \bar{y} \times \bar{x}$

Ainsi A est commutative.

De plus, $\bar{1} \times \bar{x} = \overline{1 \times x} = \overline{x \times 1} = \bar{x}$

Ainsi A est unitaire d'élément neutre 1.

Mais $\bar{2} \times \bar{8} = \overline{16} = \bar{0}$ d'où A n'est pas intègre.

En conclusion : A est commutative, unitaire et non intègre.

3) Déterminons $\mathcal{U}(A)$.

$\mathcal{U}(A) = \{\bar{x} \in A, pgcd(x, 16) = 1\}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$\mathcal{U}(A) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{15}\}$

4) Déterminons tous les sous-groupes de groupe $\mathcal{U}(A)$.

On sait que les cardinales des sous-groupes de $\mathcal{U}(A)$ doivent divisés le cardinal de $\mathcal{U}(A)$.

Comme $card(\mathcal{U}(A)) = 8$, alors les cardinaux possibles sont : 2,4 *et* 8.

- Les sous-groupes à 2 éléments sont :
  $\{\bar{1}, \bar{7}\}, \{\bar{1}, \bar{9}\}, \{\bar{1}, \overline{15}\}$
- Sous-groupe à 4 éléments :
  $\{\bar{1}, \bar{3}, \overline{11}, \bar{9}\}$
- Sous-groupe à 8 éléments :
  $\mathcal{U}(A)$

Exercice 3

1) Table de l'addition et de la multiplication de l'anneau quotient $\mathbb{K}$.

$\mathbb{K} = \frac{\mathbb{K}}{5\mathbb{K}} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\}$

+	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$

×	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	5
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

2) La division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ de $P[X]$ par $Q[X]$.

Ainsi $P(X) = Q(X).(\dot{4}X^2 + \dot{2}X + \dot{3}) + \dot{4}X^2 + \dot{3}X + \dot{4}$

3) Division suivants la puissance croissantes, à l'ordre 3 de $P(X)$ par $Q(X)$

Par suite : $P(X) = Q(X).(\dot{4} + \dot{4}X^2 + \dot{2}X^3) + X^3(X + \dot{3}X^2 + \dot{2}X^3)$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB Maths-Info 2020-2021

CORRECTION STRUCTURE ALGEBRIQUE

SESSION 2

Exercice 1

1- Vrai
2- Faux
3- Vrai
4- Vrai
5- Vrai
6- Vrai
7- Vrai
8- Faux
9- Vrai
10- Faux

Exercice 2

$I = \{(n,n);\ n \in \mathbb{Z}\}$ et $J = \{(n,3m);\ n,m \in \mathbb{Z}\}$

1. Montrons que I est stable pour la loi $+$ et la loi $\bullet$
Soient $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ et $(a',b') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

À t-on $(a,b)+(a',b') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$?

$(a,b)+(a',b') = (a+a', b+b')$ avec $a+a' \in \mathbb{Z}$ et $b+b' \in \mathbb{Z}$ d'où $(a+a', b+b') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ donc I est stable pour la loi $+$.

À t-on $(a,b).(a',b') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$?

$(a,b).(a',b') = (a+a', b+b')$ avec $a.a' \in \mathbb{Z}$ et $b.b' \in \mathbb{Z}$ d'où $(a.a', b.b') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ donc I est stable pour la loi $\bullet$.

2. Vérifions si I est idéal de l'anneau $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Nous avons montré que I est stable pour la loi $+$ et la loi $\bullet$ à la question 1). Donc il suffit de vérifier que I admet un élément neutre et chaque

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

nfo 2020-2021

JE

$b + b' \in \mathbb{Z}$ d'où

d'où

oi • à la question
neutre et chaque

éléments de I admet un symétrie.

Vérifions que I admet un élément neutre

Soit (e, e') l'élément neutre de I et soit $(a, b) \in I$ alors, on a:
$(a, b) + (e, e') = (a, b)$
$(e, e') = (a, b) - (a, b)$
$(e, e') = (0, 0)$
$\Rightarrow e = 0$ et $e' = 0$ d'où l'élément neutre de I est $(0, 0)$ alors I admet effectivement un élément neutre.

Vérifions que chaque éléments de I admet un élément symétrie.

Soit (a_1, b_1) le symétrie du couple (a, b) avec $(a_1, b_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
On a donc $(a, b) + (a_1, b_1) = (0, 0)$
$(a + a_1\,,\, b + b_1) = (0, 0)$

$$\begin{cases} a + a_1 = 0 \\ b + b_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -a \\ b_1 = -b \end{cases}$$

D'où l'élément symétrie du couple (a, b) est $(-a, -b)$. Donc chaque élément de I admet un symétrie.
Conclusion: I est belle et bien un idéal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

3. Montrons que J est un idéal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Vue la question 1), il est trivial de montrer que J est stable pour la loi $+$ et la loi $\bullet$

Montrons que J admet un élément neutre

Soit $(\varepsilon, \varepsilon')$ l'élément neutre de J, alors on a:
$(n, 3m) + (\varphi, \varphi') = (n, 3m)$
$(n + \varpi, 3m + \varphi') = (n, 3m)$

$$\Rightarrow \begin{cases} n + \varphi = n \\ 3m + \varphi' = 3m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi' = 0 \end{cases}$$

D'où l'élément neutre de J est $(0, 0)$

VALIDEUR LMD
Scanné avec CamScanner

Montrons que chaque éléments de J admet un symétrie

Soit (d, g) le symétrie de $(n, 3m)$ alors on a:
$(n, 3m) + (d, g) = (0, 0)$
$(n + d, 3m + g) = (0, 0)$

$$\begin{cases} n + d = 0 \\ 3m + g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -n \\ g = -3m \end{cases}$$

D'où le symétrie du couple $(n, 3m)$ est $(-n, -3m)$. Donc chaque élément de J admet un symétrie.

Conclusion: Au regard de ce qui précède on a montré que J est un idéal de l'anneau $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN / SESSION 1 **Durée : 2 heures** **LICENCE 1 / MATH & INFO**

.....

EXERCICE 1 : **Sélectionnez le pronom il lorsqu'il est employé dans une tournure impersonnelle. (5.5 Pts) (En mentionnant le numéro de la phrase et en relevant le mot qui le suit immédiatement) Ex : p2 il (nous)**

1) Il y a de nombreux touristes cette année.
2) Il nous annonce sa venue.
3) Il faudra s'informer rapidement.
4) Il a neigé très tôt cet hiver.
5) Il faut rentrer les géraniums avant les premières gelées.
6) Il vous a préparé une surprise.
7) Il arrive qu'il soit à l'heure.
8) Il neige depuis qu'il est arrivé.
9) Il se prépare un évènement.
10) Il s'agit d'une espèce rare.
11) Il semble que rien ne pourra l'arrêter.

EXERCICE 2 : Découper les mots suivants en syllabes : comme le montre l'exemple Bou / ton. **(3 pts)**

1) Marcher	5) Parler	9) Demain
2) Toujours	6) Cinéma	10) Eléphant
3) Domicile	7) Médicament	11) Kiwi
4) Hameau	8) Marronner	12) Luthette

EXERCICE 3 : Répondre par vrai ou faux. **(4 pts)**

1) Il existe deux niveaux de langue.
2) Le langage familier s'utilise surtout à l'écrit.
3) Le langage courant s'emploie dans la vie de tous les jours.
4) Pour adresser une lettre à un médecin, on utilise le langage soutenu.
5) Quand on parle à ses amis, on utilise le langage soutenu.
6) Le langage courant peut s'utiliser pour parler à un inconnu.
7) Il existe trois registres pour s'exprimer.
8) Le registre soutenu s'emploie pour parler à une personne importante.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 4 : Mettre les phrases dans le bon ordre pour reconstituer le texte. (2.5 pts)

1- Enfin, certains pensent aussi qu'ils nous protègent de la folie.
2- De plus, les rêves semblent fixer les souvenirs et faciliter l'apprentissage.
3- En effet, on croit qu'ils aident à trouver des solutions à nos problèmes.
4- Tout le monde s'accorde pour dire que les rêves sont utiles.
5- Donc, on peut dire que le rêve est un ami précieux.

EXERCICE 5 : Répondez aux questions suivantes en vous appuyant sur le texte en dessous.

1. Quel est le thème présenté dans ce texte ? (3 pts)
2. Formulez explicitement la thèse défendue. (4 pts)
3. Relevez les arguments avancés par l'auteur pour justifier son jugement. (4 pts)
4. Sur le modèle de Maupassant et en utilisant les mêmes procédés, défendez la thèse selon laquelle la tour Eiffel est une œuvre d'art qui fait rêver, à travers un texte argumentatif d'une dizaine de 10 ligne. (12 pts)
5. Présentation du texte argumentatif (2 pts)

Depuis un mois, tous les journaux illustrés nous présentent l'image affreuse et fantastique d'une tour de fer de trois cents mètres qui s'élèvera sur Paris comme une come unique et gigantesque.

Ce monstre poursuit les yeux à la façon d'un cauchemar, hante l'esprit, effraie d'avance les pauvres gens naïfs qui ont conservé le goût de l'architecture artiste, de la ligne et des proportions.

Cette pointe de fonte épouvantable n'est curieuse que par sa hauteur. Les femmes colosses ne nous suffisent plus ! Après les phénomènes de chair, voici les phénomènes de fer. Cela n'est ni beau, ni gracieux, ni élégant, c'est grand, voilà tout. On dirait l'entreprise diabolique d'un chaudronnier atteint du délire des grandeurs.

Pourquoi cette tour, pourquoi cette come? Pour étonner ? Pour étonner qui ? Les imbéciles. On a donc oublié que le mot art signifie quelque chose.

Guy de Maupassant, « La tour... Prends garde »,
Gil Blas, 19 octobre 1886.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN TEF / SESSION 1 Durée : 2 heures LICENCE 1 / MATH & INFO

2018-2019

EXERCICE 1 (6 pts)

4. Reformulez les phrases suivantes en français courant, en donnant les équivalents des mots en gras :

1. Ce costume est **désuet.**
2. J'ai **loupé** mon examen.
3. Cette **besogne** me convient.
4. Il est très **épris** d'elle.
5. C'est un grand **gosse** d'une dizaine d'années.
6. *Nous avons* **demeuré** à Paris pendant plusieurs années.

EXERCICE 2 (5 pts)

À quel registre de langue appartiennent les phrases ci-dessous ?

1. Est-ce que vous voulez un café ?
2. Ce léger croquis d'une jeunesse, où vous devinez d'innombrables élégies, était nécessaire pour expliquer l'influence qu'elle exerça sur mon avenir.
3. À la mort d'Ernest Hemingway, en 1961, le président Kennedy, qui était l'un de ses grands admirateurs, avait aidé sa veuve, Mary, à récupérer ses effets restés à Cuba.
4. T'as entendu la nouvelle ? Le prof est absent !
5. À son retour dans ce palais formidable, bâti par le plus belliqueux de ses ancêtres, Fabrice ne savait rien au monde que faire l'exercice et monter à cheval.
6. J'suis partie à l'arrache ce matin.
7. Nous partons en vacances au Sénégal cette année. Je suis pressé d'y être !
8. - Nico, tu sais à quelle heure il part, le train ?
   - Nan, je sais pas, et je trouve pas ma brosse à dents !
9. Veuillez prendre place. Désirez-vous quelque chose à boire ?
10. Demain, le soleil brillera sur le bassin méditerranéen et il y aura quelques averses en Bretagne.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 3 (3 pts)

Décompez les mots suivants en syllabes en tenant compte qu'ils se trouvent en fin de ligne

1. Rhinocéros	2. Récréation	3. Hippopotame	4. Marmelade
5. Garnement	6. Vidéocassette	7. Prodigue	8. Perplexe
9. Imparfait	9. Amphibie	10. Estampille	

EXERCICE 4

a) Remplacez les pointillés par les connecteurs adéquats : *ainsi, d'autre part, en premier lieu, d'une part, de même, également, premièrement (6 pts)*

Pour faire un bon pot-au-feu, je te conseille..... de choisir une viande d'excellente qualité, ..., n'hésite pas à aller acheter tes légumes chez le petit primeur du coin car..... ils seront plus frais que ceux de l'hypermarché et..... , ils seront plus goûteux. Le temps de cuisson,..... , est la clé de la réussite. Laisse ta préparation mijoter pendant cinq heures à feu doux. ..... les convives ne pourront que te féliciter.

b) Indique les relations qu'expriment les propositions soulignées. (2 pts)

2. Napoléon s'est couronné lui-même et le pape lui a donné sa bénédiction.
3. Parce qu'il a aperçu les trois cochons, le boucher téléphone à l'abattoir.
4. Napoléon détenait l'autorité suprême, voilà pourquoi il s'est couronné lui-même.
5. Uranus est très éloignée du soleil mais cet éloignement ne suffit pas à expliquer sa température glaciale.

EXERCICE 5 (11 pts)

Mettez en ordre les lignes de ce paragraphe de sorte à le reconstituer. (Les numéroter avant de les recopier. (Ex : 1. Le ciel redevenu bleu après la

2. .....
3. .....
4. ..... etc.)

NB : La proposition en exemple peut être ou ne pas être une bonne réponse du point de vue de son choix en première position.

laissa rouler sur le dos. Des mouettes
Lorsque Robinson reprit
déferla sur la grève mouillée et
figure dans le sable. Une vague
vint lui lécher les pieds. Il se
connaissance, il était couché , la
le ciel redevenu bleu après la
noires et blanches tournoyaient dans
effort et ressentit une vive
douleur à l'épaule gauche. ,
tempête. Robinson s'assit avec

EXERCICE 6 (5 pts)

Dites si ces verbes sont essentiellement pronominaux ou accidentellement pronominaux

1. S'en aller 2. S'endormir 3. S'enfuir 4. S'ennuyer 5. S'enquérir
6. S'évanouir 7. S'exclamer 8. Se lamenter 9. Se moquer 10. Se taire

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN TEF / SESSION 1 Durée : 2 heures LICENCE 1 / MATH & INFO

2019-2020

EXERCICE 1 (6 pts)

Indiquez les registres pour chacun des mots.

1. Embêter
2. Se geurer
3. Egueulasse
4. La flotte
5. Ennuyer
6. Se tromper
7. Sale
8. L'eau
9. Importuner
10. Se méprendre
11. Répugnant
12. Onde

EXERCICE 2 (5 pts)

Mettre les verbes donnés à la forme pronominale, même temps, même personne.

1. Tu salis
2. Vous nourrissiez
3. Elle déplaça
4. Nous obligeons
5. Ils échangent
6. Je suis interrogé
7. Elle était trempée
8. Nous serons ennuyé
9. Tu es détendu
10. Vous étiez changés

EXERCICE 3 : (5 pts)

Dites si les verbes des phrases sont à la forme pronominale réfléchi ou réciproque.

1) Ma sœur se peigne longuement tous les matins.
2) Ces enfants se disputent souvent.
3) Alain et son frère s'affrontent à l'escrime.
4) Cette personne s'écoute parler en société.
5) Je m'enlève une écharde du pied.
6) Mes parents s'entraident à la cuisine.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN TEF / SESSION 1 Durée : 2 heures LICENCE 1 / MATH & INFO

2019-2020

EXERCICE 1 (6 pts)

Indiquez les registres pour chacun des mots.

1. Embêter
2. Se gourer
3. Egueulasse
4. La flotte
5. Ennuyer
6. Se tromper
7. Sale
8. L'eau
9. Importuner
10. Se méprendre
11. Répugnant
12. Onde

EXERCICE 2 (5 pts)

Mettre les verbes donnés à la forme pronominale, même temps, même personne.

1. Tu salis
2. Vous nourrissiez
3. Elle déplaça
4. Nous obligeons
5. Ils échangent
6. Je suis interrogé
7. Elle était trempée
8. Nous serons ennuyés
9. Tu es détendu
10. Vous étiez changés

EXERCICE 3 : (5 pts)

Dites si les verbes des phrases sont à la forme pronominale réfléchi ou réciproque.

1) Ma sœur se peigne longuement tous les matins.
2) Ces enfants se disputent souvent.
3) Alain et son frère s'affrontent à l'escrime.
4) Cette personne s'écoute parler en société.
5) Je m'enlève une écharde du pied.
6) Mes parents s'entraident à la cuisine.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

7) Tu t'appliques un nouveau produit de beauté.
8) Les deux adversaires se regardent méchamment.
9) Tu te soucies peu de ton avenir.
10) Vous vous dénoncez sans le savoir.

EXERCICE 4 : (5 pts)

Dites si ces verbes sont essentiellement pronominaux ou accidentellement pronominaux.

1. S'absenter	2. S'affaiblir	3. S'arroger	4. S'enfuir	5. S'enquérir
6. S'ensuivre	7. S'entraider	8. S'envoler	9. S'étonner	10. S'évanouir
12. S'exclamer	13. Se féliciter	14. Se formaliser	15. S'immiscer	16. S'insurger
17. Se méprendre	18. Se plaindre	19. Se presser	20. Se saisir	

EXERCICE 5 (5 pts)

Identifiez la valeur des connecteurs logiques employés dans chacune des phrases.

1. Hortense a appris sa leçon donc elle a eu une très bonne note.
2. Barnabé est tombé. En effet, il a glissé sur une plaque de verglas.
3. Hortense prendra le bus ou le train pour partir en vacances.
4. Certes, il fait beau...
5. J'aime les betteraves et les choux.
6. Hortense a menti à ses parents car elle avait peur de se faire disputer.
7. Je connais ma leçon par cœur. Toutefois, je redoute l'interrogation.
8. La fourmi a mis de la nourriture de côté, ainsi elle ne mourra pas de faim en hiver.
9. Barnabé n'aimait ni la lecture, ni le calcul, ni le dessin, ni la musique.
10. J'aime les betteraves, cependant je n'ai pas souvent l'occasion d'en manger.

EXERCICE 6 :

Sujet : Avec Internet, la notion de frontière n'a plus de sens.

L'internet aujourd'hui devient l'invention la plus disponible pour tout le monde et partout. Cette invention représente un regard panoramique sur le monde et la fenêtre ouverte à

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

l'information, mais à travers cette définition est ce qu'il existe une vue plus loin et peut être sans limite.

Nous débuterons cette argumentation par les choix multiples que l'internet nous offre pour démontrer que l'internet avec ses fonctions assez nombreuses est sans limites et enfin nous nous pencherons sur comment l'internet change notre style de vie.

Personnellement, je pense qu'au Maroc l'internet signifie l'invention de la liberté c'est-à-dire la notion de frontière n'a plus de sens.

Tout d'abord, on peut dire que l'internet nous donne un passe-temps agréable et d'amuser, c'est grâce à la possibilité de télécharger confortablement les vidéos, les films et de plus le. .hes audios aussi le document lisible et les ouvrages en version PDF et aussi il nous permet de suivre l'actualité.

Ainsi l'internet est une sorte de communication moderne parce qu'il nous permet de découvrir le monde et de s'exprimer via les sites sociaux et contacter l'entourage par l'email aussi passé des appels en vidéo.

En outre c'est une source riche d'informations, en effet il met le chercheur devant une rivière pas d'eau mais d'information.

Enfin, l'internet véritablement change beaucoup dans notre style de vie, par exemple nous pouvons faire des courses et recevoir notre achat par livraison à domicile tout à fait par internet et plus que cela, le paiement est en ligne et par carte bancaire.

En conclusion, l'internet sans doute est comme l'univers, c'est pourquoi il faudra bien profiter au maximum de cette liberté illimité.

Apres l'exploitation du texte ci-dessus

1. Identifiez le thème. **(2pts)**
2. Qu'elle en est la thèse associée ? **(2pts)**
3. Formulez le problème qui est traité dans ce texte argumentatif. **(2pts)**
4. Formulez-le ou les différents axes qui sous-tendent ce texte argumentatif. **(2pts)**
5. Identifiez les principales parties du texte en les délimitant clairement. (Ex : L... à L... : **titre de la séquence**). **(2pts)**
6. Identifier dans un tableau toutes les idées, tous les arguments et toutes les illustrations du texte. **(4pts)**

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY-ABIDJAN ANNEE UNIVERSITAIRE 2016-2017

UFR DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

LICENCE I^e ANNEE

ECONOMIE

Durée : 2 H

EXAMEN 1^ère session 2017

I. Questions de cours (7points)

Définissez les notions suivantes :

1. le taux marginal de substitution ;
2. la fonction d'utilité ;
3. la droite de budget ;
4. le taux marginal de substitution technique ;
5. la fonction de production ;
6. la fonction de coût ;
7. le revenu.

II Exercices d'application

Exercice 1 (6 points)

On dispose des deux informations suivantes :

$Q = L^{0,5}K^{\beta}$

$Q = L = K = X_0$ en un point de la surface de production

1- Calculer la valeur de (β) et donner sa signification

2- Quelle la nature des rendements d'échelle?

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

3- Quelle sera le pourcentage d'augmentation de la production, si on laisse inchangée la valeur de (K) et si on augmente la quantité de ressources (L) de 10%

4- Calculer l'élasticité de substitution de L à Ket en déduire la nature des relations entre les facteurs de production.

Exercice 2 (7 points)

Mr Koffi est un consommateur rationnel dont la fonction d'utilité est U(X,Y)= XY+X où X et Y sont les quantités d'igname et de riz en kg consommées par unité de temps respectivement. Le prix de l'igname est Px=400F/kg et le prix du riz est Py=200F/kg ; le revenu nominal de Mr Koffi est R=200.000F par unité de temps.

1) Supposons que Mr Koffi décide d'acheter uniquement les ignames ; quel est son pouvoir d'achat ?

2) Pour obtenir le maximum de satisfaction, il consomme les deux biens X et Y.

Déterminer le niveau d'utilité maximale atteint par Mr Koffi.

Déterminer les équations de la courbe consommation-revenu et des courbes d'ENGEL.

3) Déterminer la nature de l'igname et celle du riz pour Mr Koffi.

Bonne chance

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY-ABIDJAN ANNEE UNIVERSITAIRE 2017-2018
UFR DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE
LICENCE 1

ECONOMIE

Durée : 2H
EXAMEN première session 2018

I. Questions de cours (4points)

Définissez les notions suivantes :

1. le taux marginal de substitution ;
2. la fonction d'utilité ;
3. la droite de budget
4. le taux marginal de substitution technique.

II. Exercices d'application

Exercice 1 (8 points)

Le producteur brave paysan produit la banane et l'igname selon la fonction de production suivante : $Q = 6T^{1/3}L^{2/3}$ où L représente le nombre de travailleurs et T la surface en hectares.
Nous noterons P_L le prix du travail, P_T le prix de la terre et C le coût de production pour la firme.
Nous supposerons que : $P_L = 4$, $P_T = 2$ et C=300.

1. Quelle est la nature des rendements d'échelle ?
2. Donnez l'équation de coût de ce producteur.
3. Déterminez l'équation du sentier d'expansion et donnez sa définition.
4. Quelle est la fonction de coût total, la fonction de coût marginal et la fonction de coût moyen de cette firme lorsque l'on se trouve en courte période et que le facteur terre est fixe : $T = 4$? Définissez les notions de coût marginal et de coût moyen.
5. Supposons que soyons maintenant en longue période.
   a) Expliquez ce que cette notion de longue période signifie.
   b) Quelles seront les quantités de facteurs utilisées à l'optimum pour ce producteur ?
   c) Quel sera alors son niveau de production ?
6. Si ce producteur souhaite tripler sa production, de combien doit-il augmenter ses facteurs de production ? S'agit-il ici de rendement d'échelle ou de rendement de facteurs ? Expliquez.

Exercice 2 (8 points)

Mr Koffi est un consommateur rationnel dont la fonction d'utilité est $U(X,Y) = XY + X$ où X et Y sont les quantités d'igname et de riz consommées par unité de temps respectivement.
Le prix de l'igname est $P_X = 400F/kg$ et le prix de riz est $P_Y = 200F/kg$; le revenu nominal de Mr Koffi est R=200.000F par unité de temps.

1. Supposons que Mr Koffi décide d'acheter uniquement les ignames ; quel est son pouvoir d'achat ?
2. Pour obtenir le maximum de satisfaction, il consomme les deux bien X et Y.
   Déterminer le niveau d'utilité maximum atteint par Mr Koffi.
   Déterminer les équations de la courbe consommation-revenu et des courbes d'ENGEL.
3. Déterminer la nature de l'igname et celle du riz pour Mr Koffi.

Bonne chance

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY-ABIDJAN ANNEE UNIVERSITAIRE 2018-2019

UFR DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

LICENCE I^e ANNEE

ECONOMIE

Durée : 2 H
EXAMEN 1^ère session 2019

I QUESTIONS A CHOIX MULTIPLES (QCM)

Indiquez la (les) réponse(s) correcte(s) à chaque QCM)

1. L'élasticité-prix directe de la demande, pour une fonction de demande de la forme $q(p) = \alpha.p^{-a}$. (avec $\alpha>0$ et $a>0$) est égale à :
a)-pa
b) α
c) -a

2.. La courbe d'Engel indique les différentes quantités d'un bien que le consommateur désire acheter à différents niveaux de son revenu....
a) pour chaque accroissement du prix du bien
b) pour chaque accroissement de l'utilité totale
c) toutes choses égales par ailleurs

3.. Un bien Giffen est un bien dont :
a) la demande diminue quand son prix augmente
b) la demande augmente quand son prix augmente
c) la demande augmente quand son prix diminue

4. La notion de « rendement à l'hectare » utilisée en agriculture est assimilable à
a) la productivité physique totale
b) la productivité marginale
c) la productivité physique moyenne
d) la productivité physique marginale

5. La productivité moyenne est croissante lorsque
a) la productivité marginale lui est inférieure.
b) la productivité marginale lui est supérieure.
c) la production est croissante.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

II Exercices d'application

Exercice 1 (7,5 points)

Une entreprise utilise le travail comme seul facteur de production pour produire q selon la fonction de production q = 8L. Le salaire horaire est de 16 F.

1) Quelle est la quantité de travail nécessaire à une production de 8 ? de 64 ? Plus généralement, quelle est la quantité de travail nécessaire à la production de q unités ? En déduire que la fonction de coût de l'entreprise est C(q) = 2q.

2) Donner la définition, puis l'équation, puis enfin représenter graphiquement les fonctions de coût moyen et de coût marginal. Que peut-on en dire ? Cela vous étonne-t-il ?

3) L'entreprise vend son produit sur un marché concurrentiel au prix unitaire de P = 3 francs

a. Quel est le montant de son profit si elle vend q = 10 unités ? Représentez- le graphiquement.

b. Donner, dans le cas général, les conditions de maximisation du profit. Peut-on déterminer ici la quantité à produire qui maximise le profit ? Quelle quantité l'entreprise devrait-elle choisir de produire ?

Exercice 2 (7,5 points)

Un consommateur possède la fonction d'utilité suivante : $U(x, y) = x^2y + 4$ où x et y correspondent respectivement aux quantités de biens X (banane) et Y (igname) qu'il achète chez brave paysan. Initialement, le prix du bien X est de p francs et le prix du bien Y est de 4 francs. De plus nous savons qu'il dispose d'un revenu de 24 francs.

1. Etablir l'équation des courbes d'indifférence pour un niveau d'utilité donné U_0.

Par la méthode du lagrangien, déterminer :

2. le lagrangien et les conditions de 1er ordre,
3. l'équation du chemin d'expansion du revenu,
4. les coordonnées des points optimaux.
5. *Lorsque p = 2 francs*, calculer l'utilité totale associée au point optimal (noté A), puis en *déduire l'équation de la courbe* d'indifférence associée (notée U_1)
6. *Calculer à l'aide de deux méthodes* le TMS en A. Raisonnant à partir de l'optimum, s'il souhaitait réduire sa consommation de banane de 0,5 unité, de combien devrait-il faire varier sa consommation d'igname pour maintenir le même niveau d'utilité ?

Bonne chance

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

UNIVERSITE DE COCODY-ABIDJAN/ ANNEE UNIVERSITAIRE 2019-2020
UFR DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE
LICENCE I' ANNEE

ECONOMIE

EXAMEN, session 2020 Durée : 2 H

I QUESTIONS A CHOIX MULTIPLES (QCM) (5 points)

Indiquez la (les) réponse(s) correcte(s) à chaque QCM)

1.1. L'expression « ceteris paribus » est utilisée lorsque l'on étudie l'influence :

a) de plusieurs facteurs, en décidant d'en laisser un seul à son niveau initial.
b) de plusieurs facteurs, en décidant d'en laisser quelques-uns à leur niveau initial.
c) d'un seul facteur, en décidant de laisser tous les autres à leur niveau initial.

1.2. La courbe d'Engel indique les différentes quantités d'un bien que le consommateur désire acheter à différents niveaux de son revenu

a) pour chaque accroissement du prix du bien
b) pour chaque accroissement de l'utilité totale
c) toutes choses égales par ailleurs

1.3. Un bien Giffen est un bien dont :
a) la demande diminue quand son prix augmente
b) la demande augmente quand son prix augmente
c) la demande augmente quand son prix diminue

1.4. La notion de « rendement à l'hectare » utilisée en agriculture est assimilable à :
a) la productivité physique totale.
b) la productivité marginale
c) la productivité physique moyenne
d) la productivité physique marginale

1.5. La productivité moyenne est croissante lorsque
a) la productivité marginale lui est inférieure.
b) la productivité marginale lui est supérieure.
c) la production est croissante.

II Questions de réflexion (4 points)

2.1 Déterminer si les fonctions d'utilité suivantes vérifient l'hypothèse de non-saturation :
a) $U(x, y) = xy^2 + x^2y$
b) $V(x, y) = \ln x + y$

2.2 Démontrer à l'aide d'un graphique que deux courbes d'indifférence ne peuvent pas se couper.

Scanné avec CamScanner

III Exercices d'application

3.1 Exercice 1 (7 points)

Louis possède la fonction d'utilité suivante: $U(x,y) = x\,y - 2$ où x et y correspondent respectivement aux quantités de biens X et Y. Louis dispose d'un revenu R, exclusivement consacré à l'achat des biens X et Y, dont les prix sont respectivement px et py.

1. Établir l'équation des courbes d'indifférence pour un niveau d'utilité donné U_0, et l'équation de la droite de budget pour un revenu donné R.,

3.1.2. À l'aide du lagrangien, déterminer les conditions du I" ordre.

3.1.3. Déterminer l'équation du sentier d'expansion du revenu.

3.1.4. Puis déterminer les coordonnées des points optimaux (notées x• et y•).

3.1.5. Lorsque px = 6 F, py = 3 F et R = 24 F, calculer :

- les coordonnées de l'optimum (noté Z),
- l'équation du sentier d'expansion,
- l'équation de la droite de budget (notée D1),
- l'équation de la courbe d'indifférence associée à l'optimum (notée U)

3.2 Exercice 2 (4 points)

Supposez qu'un fabriquant de chaises produise à court terme (avec son équipement et son installation actuelle). Le fabricant a constaté les niveaux de production suivants, correspondant à différents nombres de travailleurs:

Nombre de travailleurs par mois	Nombre de chaises en unités par mois	Productivité moyenne	Productivité marginale
0	0		
1	10		
2	18		
3	24		
4	28		
5	30		
6	28		
7	25		

a. Calculez la productivité moyenne et la productivité marginale du travail pour cette fonction de production.

b. Cette fonction de production présente-t-elle des rendements du travail décroissants ?

c. Expliquez intuitivement ce qui pourrait rendre négative la productivité marginale du travail.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY-ABIDJAN ANNE UNIVERSITAIRE 2020 – 2021
UFR DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

ECONOMIE
Durée: 2H
EXAMEN, 2ème session 2021

I QUESTIONS A CHOIX MULTIPLES (QCM) (8 points)

Indiquez la (les) réponse(s) correcte(s) à chaque QCM

1.1. L'expression ≪ ceteris paribus ≫ est utilisée lorsque l'on étudie l'influence :
a) de plusieurs facteurs, en décidant d'en laisser un seul à son niveau initial.
b) de plusieurs facteurs, en décidant d'en laisser quelques-uns à leur niveau initial.
c) d'un seul facteur, en décidant de laisser tous les autres à leur niveau initial.
1.2. La courbe d'Engel indique les différentes quantités d'un bien que le consommateur désire acheter à différents niveaux de son revenu.
a) pour chaque accroissement du prix du bien
b) pour chaque accroissement de l'unité totale
c) toutes choses égales par ailleurs 1.3. un bien Giffen est un bien dont :
a) la demande diminue quand son prix augmente
b) la demande augmente quand son prix augmente
c) la demande augmente quand son prix diminue
1.4. La notion de ≪ rendement à l'hectare ≫ utilisée en agriculture est assimilable à:
a) la productivité physique totale
b) la productivité marginale
c) la productivité physique moyenne
d) la productivité physique marginale 1.5. La productivité moyenne est croissante lorsque
a) la productivité marginale lui est inférieure.
b) la productivité marginale lui est supérieure.
c) la production est croissante.

II Exercices d'application

2.1 Exercice 1 (7 points)

Louis possède la fonction d'utilité suivante : $U(x, y) = xy - 2$ où x et y correspondent respectivement aux quantités de biens X et Y. Louis dispose d'un revenu R, exclusivement consacré à l'achat des biens X et Y, dont les

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

prix sont respectivement px et py.

2.1.1. Etablir l'équation des courbes d'indifférence pour un niveau d'utilité donnée U_0 et l'équation de la droite de budget pour un revenu donné R.

2.1.2. À l'aide du lagrangien, déterminer les conditions du l'ordre.

2.1.3. Déterminer l'équation du sentier d'expansion du revenu.

2.1.4. Puis déterminer les coordonnées des points optimaux (notées $x\bullet$ et $y\bullet$).

2.1.5. Lorsque $px = 6F$, $py = 3F$.et $R = 24F$, calculer:

- les coordonnées de l'optimum (noté Z),
- l'équation du dentier d'expansion,
- l'équation de la droite de budget (notée D_1),
- l'équation de la courbe d'indifférence associée à l'optimum (notée U)

2.2 Exercice 2 (8 points)

Supposez qu'un fabriquant de chaises produise à terme (avec son équipement et son installation actuelle). Le fabriquant a constaté les niveaux de production suivants, correspondant à différents nombres de travailleurs :

Nbr de travailleurs/mois	Nbr de chaises en unités/mois	Product moy	Product marginale
0	0		
1	10		
2	18		
3	24		
4	28		
5	30		
6	28		
7	25		

Product moy:Productivité moyenne, Product marginale:Productivité marginale

a) Calculez la productivité moyenne et la productivité marginale du travail pour cette fonction de production.

b) Cette fonction de production présente-t-elle des rendements du travail décroissants ?

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY-ABIDJAN ANNE UNIVERSITAIRE 2020 – 2021
UFR DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

ECONOMIE
Durée: 2H
EXAMEN, session 2021

I QUESTIONS A CHOIX MULTIPLES (QCM) (8 points)

Indiquez la (les) réponse(s) correcte(s) à chaque QCM

1.1. L'expression ≪ ceteris paribus ≫ est utilisée lorsque l'on étudie l'influence :
a) de plusieurs facteurs, en décidant d'en laisser un seul à son niveau initial.
b) de plusieurs facteurs, en décidant d'en laisser quelques-uns à leur niveau initial.
c) d'un seul facteur, en décidant de laisser tous les autres à leur niveau initial.
1.2. La courbe d'Engel indique les différentes quantités d'un bien que le consommateur désire acheter à différents niveaux de son revenu.
a) pour chaque accroissement du prix du bien
b) pour chaque accroissement de l'unité totale
c) toutes choses égales par ailleurs 1.3. un bien Giffen est un bien dont :
a) la demande diminue quand son prix augmente
b) la demande augmente quand son prix augmente
c) la demande augmente quand son prix diminue
1.4. La notion de ≪ rendement à l'hectare ≫ utilisée en agriculture est assimilable à:
a) la productivité physique totale
b) la productivité marginale
c) la productivité physique moyenne
d) la productivité physique marginale 1.5. La productivité moyenne est croissante lorsque
a) la productivité marginale lui est inférieure.
b) la productivité marginale lui est supérieure.
c) la production est croissante.
1.6. Les coûts économiques: a) Incluent le coût des inputs, plus le coût d'opportunité.
b) Incluent le coût des facteurs fixes et variables.
c) Incluent le coût explicite des inputs ainsi que les coûts irrécupérables des actifs pour lesquels il n'existe pas d'autres usages.
d) Excluent le coût explicite des facteurs, maisincluent les coûts d'opportunité.
1.7. Si le coût total d'une entreprise est de 500F lorsque la production est égale à 0, $1000F$ lorsque la production est de 10 et 1400F quand la

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

production est de 20, le coût est égal à:
a) 1000F.
b) 900F.
c) 500F.
d) Aucune de ces réponses.

1.8. À long terme :
a) Tous les inputs à l'exception du travail peuvent varier; le coût variable reste donc inchangé, mais le coût fixe est égal à zéro
b) Tous les points, comme le travail, les équipements, les bureaux ou les usines, peuvent varier; le coût fixe moyen est donc plus faible.
c) Tous les inputs, comme le travail, les équipements, les bureaux ou les usines, peuvent varier; les coûts variables et les coûts fixes baissent donc.
d) Tous les inputs, comme le travail, les équipements, les bureaux ou les usines, peuvent varier; le coût variable est donc égal au coût total puisque le coût fixe est nul.

II Exercices d'application

Exercice 1 (5 points)

La demande d'un bien Q est fonction duprix du bien (P), des prix des autres biens (Pi) et du revenu (R).
1. Comment appelle-t-on les indicateurs qui permettent de rendre compte du changementen pourcentage de la demande du bien Q en fonction du changement en pourcentage de (P), de (Pi), de (R) ?
2. On suppose que la demande de Q s'exprime par la relation:

$$Q = P^{-0,3} P_i^{0,1} R^{0,4}$$

Quelle sera la modification en pourcentage enregistrée dans la demande de Q si :
- P croît de 10%, Pi et R restant inchangés ?
- Pi croît de 5%, P et R restant inchangés ?
- R décroît de 10%, P et Pi restant inchangés ?

Exercice 2 (7 points)

La pâtisserie *Choco* est réputée pour ses fameux soufflés au chocolat. Son propriétaire nous apprend que la fonction de production pour les soufflés est la suivante :
$Q = 50K^{0,4} L^{0,6}$ où Q est la quantité produite de soufflés au chocolat;
K est la quantité de capital utilisé;
L est le nombre d'heures travaillées par les employés.
A) Ecrivez l'équation de l'isocoût de la pâtisserie *Choco* à un coût total de

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

600F si le prix du capital (PK) est égal à 2F et celui du travail (PL) est égal à 6F

B) Quel est le TMDT de la pâtisserie *Choco* ?
C) Quelle est la combinaison optimale de facteurs de production K et L à un coût total de 600F ? Combien d'unités seront produites ? Représentez graphiquement le choix optimal. (Prenez soin de bien identifier vos axes, la valeur de l'abscisse et de l'ordonnée à l'origine, les quantités optimales de K et L, le niveau de production, ainsi que toutes autres fonctions présentes sur votre graphique)

D) La production de soufflés au chocolat affiche-t-elle des rendements à l'échelle croissants, décroissants ou constant ? Expliquez.
E) A court terme, la loi des rendements marginaux décroissants s'applique-t-elle à la production de soufflés au chocolat lorsqu'on ajoute des travailleurs ? Expliquez.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

CORRECTION ECONOMIE GENERALESESSION 1 2016-2017

QUESTIONS DE COURS

Définissons les notions suivantes :

1. Le taux marginal de substitution du X au bien Y est la quantité du bien Y à laquelle il faut renoncer pour obtenir une unité supplémentaire du bien X, tout en gardant le même niveau de satisfaction.

2. La fonction d'utilité est une relation mathématique entre les quantités des biens consommés et le niveau de satisfaction du consommateur. Elle indique les préférences du consommateur.

3. La droite de budget est le lieu géométrique des paniers de biens que le consommateur peut acheter compte tenu de son revenu et des prix monétaires des biens.

4. Le taux marginal de substitution technique du facteur travail au facteur capital est la quantité de facteur capital à laquelle il faut renoncer pour utiliser une unité supplémentaire du facteur travail tout en gardant le même niveau de production.

5. La fonction de production est une relation mathématique qu'établit le producteur entre les combinaisons factorielles optimales et le revenu maximum de production que chacune d'elles permet d'obtenir pour un état donné de technique de production.

6. La fonction de coût est une relation mathématique entre le niveau minimum ou coût de production et la quantité de production,étant donné les prix des facteurs de production.

7. Le niveau est tout montant d'argent,toute ressource monétaire ou le pouvoir d'achat du consommateur lui permettant d'acquérir une certaine quantité de bien ou de service qu'il désire consommer.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 1

$Q = L^{0,5}K^{\beta}$
$Q = L = K = X_0$ en un point de la surface de production.

1)On peut donc écrire : $X_0 = X_0^{0,5}X_0^{\beta}$ d'où $X_0 = X_0^{(0,5+\beta)}$
$\Rightarrow \beta = 1 - 0,5 = 0,5$
L'écriture de la fonction de production sera par conséquent $Q = L^{0,5}K^{0,5}$.
Elle signifie : lorsque le facteur capital augmente de 1%,la production augmente de $0,5\%$ toutes choses égales par ailleurs.

2) Le pourcentage d'augmentation de la production ,si on laisse inchangée la valeur de K et si on augmente la quantité de ressources L est obtenue à partir de l'élasticité de production par rapport au facteur travail (L). Dans ce cas de la production envisagée,l'élasticité de la production par rapport au facteur travail est : $\varepsilon_{Q/L} = (\Delta Q/Q)/(\Delta L/L) = 0,5\%$ et $\Delta/L = 10\%$ l'accroissement de la production sera de $\Delta Q/Q = 0,5\% \times 10\% = 5\%$

3) Calcul de l'élasticité de substitution
$P_{mL} = \delta Q/\delta L = 05L^{-0,5}K^{0,5}$
$P_{mL} = \delta Q/\delta K = 0,5L^{0,5}K^{-0,5}$
$TMST_{L/K} = \frac{\delta Q/\delta L}{\delta Q/\delta K} = K/L$
Posons : $k = K/L$ et $t = TMST_{L/K}$
$\sigma = \frac{\delta(K/L)(K/L)}{\delta(TMSTLK)/TMST}$
$\sigma = (\delta k/\delta t)(t/k)$
$t = TMST_{L/K} = K/L = k$ d'où $k = 1$
$\delta k/\delta t = 1$ et $t/k = 1$
L'élasticité de substitution est donc : $\sigma = \frac{\delta(K/L)(K/L)}{\delta(TMST)/TMST} = (\delta k/\delta t)(t/k)$
$\sigma = (1)(1) = 1$
Q appartient à une catégorie particulière de fonction dite à $\ll$ élasticité de substitution constante $\gg$ (CES).
L'élasticité est égale à 1 donc les facteurs K et L sont substituables.

Exercice 2

1. Déterminons le pouvoir d'achat de M.Koffi
On a : $U(X,Y) = XY + X$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$P_X = 400F, P_Y = 200F$ et $R = 200.000F$
Soit n le pouvoir d'achat de M.Koffi.
On sait que $R = n \times P_X \Rightarrow n = \frac{R}{P_X}$
A.N : $n = \frac{200.000}{400} = 500$.

2. Déterminons le niveau d'utilité maximale atteint par M.Koffi
On a : $\begin{cases} max\, U(X,Y) & = XY + X \\ S/C : R & = XP_X + YP_Y \end{cases}$
Le Lagrangien s'écrit : $L(X,Y,\lambda) = U(X,Y) + \lambda(R - XP_X - YP_Y)$
D'après $CNPO$,On a : $\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta X} = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta Y} = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y + 1 - \lambda P_X = 0 \\ X - \lambda P_Y = 0 \\ R - XP_X - YP_Y = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} Y + 1 & = \lambda P_X\,(1) \\ X & = \lambda P_Y\,(2) \\ R - XP_X - YP_Y & = 0\,(3) \end{cases}$
$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{P_X}{P_Y} = \frac{Y+1}{X} \Rightarrow Y = \frac{XP_X}{P_Y} - 1(4)$

* Déterminons X^α
Remplaçons (4) dans (3).On a : $R - 2 \times P_X + P_Y = 0 \Rightarrow X^* = \frac{R+R_Y}{2P_X}$
A.N : $X^* = \frac{200.000+200}{2\times 400} \Rightarrow X^* = 250,25$.

* Déterminons Y^*
$Y^* = \frac{R+P_Y}{2P_Y} - 1$
A.N : $Y^* = \frac{200.000+200}{2\times 200} - 1$
$Y^* = 499,5$.
Ainsi le niveau d'utilité maximale atteint par M.Koffi est :
$U(X^*,Y^*) = (250,25 \times 499,5) + 250,25$
Soit $U(X^*,Y^*) = 1,25.10^5$

* Déterminons les équations de la courbe de consommation-revenu et des courbes d'Engel.

* Equation de la courbe consommation-revenu :
$Y = \frac{XP_X}{P_Y} - 1 = \frac{X(400)}{200} - 1$
$y = 2X - 1$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB Maths-Info 2020-2021

CORRECTION ECONOMIE

SESSION 1

QCM

1- c
2- c
3- b
4- b
5- c
6- c-d
7- c
8- d

Exercice 1

1. Les élasticités
   - Elasticité prix- direct
   - Elasticité prix- indirect
   - Elasticité revenu

2. On suppose la demande Q

$$Q = P^{-0,3}\, P_i^{0,3}\, R^{0,4}$$

Quels sont les modifications ?

• Si P croit de 10% et P_i et R restent inchanger.

$Q' = (P + 10\%\ P)^{-0,3}\, P_i^{0,3}\, R^{0,4}$

$Q' = (1,1\ P)^{-0,3}\, P_i^{0,3}\, R^{0,4}$

$Q' = (1,1)^{-0,3}\, P^{-0,3}\, P_i^{0,3}\, R^{0,4}$

$Q' = (1,1)^{-0,3}\, Q$ donc Q augmente de $(1,1)^{-0,3}$ fois.

• Si P_i croit de 5% et P et R restent inchanger

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$Q' = P^{-0,3}(P_i + 0,05\ P_i)^{0,3}\ R^{0,4}$
$= P^{-0,3}(1,05\ P_i)^{0,3}\ R^{0,4}$
$Q' = (1,05)^{0,3}\ Q$
Donc Q augmente de $(1,05)^{0,3}$ fois.

• Si R décroit de 10%

$Q' = P^{-0,3}\ P_i^{0,3}(R - 0,1\ R)^{0,4}$
$= P^{-0,3}\ P_i^{0,3}(0,9\ R)^{0,4}$
$= (0,9)^{0,4}\ P^{-0,3}\ P_i^{0,3}\ R^{0,4}$
$Q' = (0,9)^{0,4}\ Q$
Donc Q augmente de $0,9$

Exercice 2

A- Equation d'isocoût

On sait que : $C_T = P_K\ K + P_L\ L$ Or on a: $P_K = 2F$ et $P_L = 6F$
Donc $C_T = 2K + 6L = 600$. D'où $\boxed{K + 3L = 300}$ est l'équation d'isocoût.

B- Calculons le TMST

$$TMST = \frac{P_m L}{P_m K} \text{ or: } \begin{cases} P_m L = \dfrac{dQ}{dL} = 30K^{0,4}\ L^{-0,4} \\ P_m K = \dfrac{dQ}{dK} = 20K^{-0,6}\ L^{0,6} \end{cases}$$

Donc $TMST = \dfrac{30K^{0,4}\ L^{-0,4}}{20K^{-0,6}\ L^{0,6}} = \dfrac{30\ K}{20\ L}$

$$\boxed{TMST = \frac{15\ K}{10\ L}}$$

C- On a: $TMST = \dfrac{15\ K}{10\ L}$ or à l'équilibre, $TMST = \dfrac{K}{L} = \dfrac{6}{2} = 3$
Donc $\dfrac{15\ K}{10\ L} = 3 \Leftrightarrow K = 2L$
D'où le système: $\begin{cases} K + 3L = 300 \\ K = 2L \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow 2L + 3L = 300$
$\Leftrightarrow 5L = 300$
$\Leftrightarrow L = 60 \quad (1)$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

(1) dans (2) donne: $K = 2 \times 60 = 120$ d'où: $\begin{cases} L = 60 \\ K = 120 \end{cases}$

Remplaçons dans Q.
$Q^* = 50(120)^{0,4}\ (60)^{0,6} =$

D- Le rendement.
On a:$\lambda = \alpha + \beta = 0,4 + 0,6 = 1$ donc le rendement à l'échelle est constant car Q est du type Cobb Douglass

E-
On a: $\frac{dQ}{dL} = 30K^{0,4}\ L^{-0,4} = Q'$ et $\frac{dQ'}{dL} = -12K^{0,4}\ L^{-1,4}$

Comme $Q'' < 0$ alors la loi des rendements marginaux s'applique.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY-ABIDJAN ANNE UNIVERSITAIRE 2020 – 2021
UFR DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

CORRECTION ECONOMIE
Durée: 2H
EXAMEN, 2ème session 2021

I QUESTIONS A CHOIX MULTIPLES (QCM) (8 points)

1.1) c
1.2) c
1.3) b
1.4) b
1.5) c

II Exercices d.application

2.1 Exercice 1 (7 points)

Soit U_0 le niveau d'utilité.
On a: $U(XY) = U_0 \Leftrightarrow XY - 2 = U_0$

$$\Leftrightarrow XY = U_0 + 2$$

$\boxed{Y = \frac{1}{X}(U_0 + 2)}$ est l'équation des courbes d'indifférences.

* L'équation de la droite de budget pour R.

On a: $XP_X + YP_Y = R \Leftrightarrow YP_Y = R - XP_X$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{R}{P_Y} - X\frac{P_X}{P_Y}$$

$\Leftrightarrow \boxed{Y = -\frac{P_X}{P_Y}X + \frac{R}{P_Y}}$ est l'équation de la droite de budget.

2) A l'aide du Lagrangien, déterminons les conditions de l'ordre.

* Formulons le Lagrangien

On a: $\mathcal{L}(X, Y, \lambda) = U(XY) + \lambda\,[R - XP_X - YP_Y]$
$\mathcal{L}(X, Y, \lambda) = XY - 2 + \lambda\,[R - XP_X - YP_Y]$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

C.I.O

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(X,Y,\lambda)}{\partial X} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(X,Y,\lambda)}{\partial Y} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(X,Y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y - \lambda P_X = 0 \\ X - \lambda P_Y = 0 \\ R - XP_X - YP_Y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = \lambda P_X \\ X = \lambda P_Y \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases}$$

3) Déterminons l'équation du sentier d'expression.
L'équation du sentier d'expression étant déterminer à l'équilibre.

$$\text{On a: } \begin{cases} Y = \lambda P_X & (1) \\ X = \lambda P_Y & (2) \\ R = XP_X + YP_Y & (3) \end{cases}$$

En faisant $\frac{(1)}{(2)}$, on obtient l'équation du sentier d'expenssion

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{Y}{X} = \frac{\lambda P_X}{\lambda P_Y} \Leftrightarrow \frac{Y}{X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Y = \frac{P_X}{P_Y} X} \text{ est l'équation du sentier d'expension.}$$

4) Déterminons les coordonnées des points optimaux.

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow Y = \frac{P_X}{P_Y} X \quad (a) \quad \text{et } X = \frac{P_Y}{P_X} Y \quad (b)$$

$$(3) \Leftrightarrow R = XP_X + YP_Y$$

(a) dans (3) donne: $R = XP_X + \frac{XP_X}{P_Y} P_Y$ d'où $R = 2XP_X$

Donc $\boxed{X^\bullet = \frac{R}{2P_X}}$

(b) dans (3) donne: $R = \frac{YP_Y}{P_X} P_X + YP_Y$ d'où $R = 2YP_Y$

Donc $\boxed{Y^\bullet = \frac{R}{2P_Y}}$

5) Lorsque $P_X = 6F$, $P_Y = 3F$ et $R = 24F$

Calculons :

* Les coordonnées de l'optimum noté Z

On a: $X^\bullet = \frac{24}{2 \times 6} = 2$; $Y^\bullet = \frac{24}{2 \times 3} = 4$ Donc $Z(2,4)$

* L'équation de la droite de budget noté D_1

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

On a: $Y = -\frac{P_X}{P_Y}X + \frac{R}{P_Y}$

A.N: $Y = -\frac{6}{3}X + \frac{24}{3} = -2X + 8$

$(D_1) : \underline{Y = -2X + 8}$

•L'équation de la courbe d'indifférence

On a: $U = U(X^\bullet; Y^\bullet)$

$= X^\bullet Y^\bullet - 2$

$= 2 \times 4 - 2$

$= 8 - 2$

$U = 6$

Donc $Y = \frac{1}{X}(6+2) \Rightarrow \boxed{Y = \frac{8}{X}}$

Exercice 2

a) Calculons la productivité moyenne et marginale du travail pour cette fonction.

Soit P_mL : productivité marginale

P_ML : productivité moyenne

$$P_ML = \frac{\text{Nombre de chaises}}{\text{Nombre de travailleurs}}$$

$P_mL = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$ avec L le facteur capital.

nbre de travailleur/mois	nbre de chaise en unité/mois	P_ML	P_mL
0	0	-	-
1	10	10	-
2	18	9	8
3	24	8	6
4	28	7	4
5	30	6	2
6	28	4,67	-2
7	25	3,57	-3

b) Cette fonction de production présente t-elle des rendements du travail décroissant ?

La fonction de production présente des rendements du travail décroissant car au fur et à mesure que le nombre de travailleurs augmente, la productivité diminue.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

SEMESTRE 2

www.gvivaservices.com

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB
UFR Maths-Info

U.E: Analyse Réelle

Première Session: Janvier 2018
Durée: 2h30
Niveau: L1

Exercice 1 (4 points)
Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse. Une bonne réponse sans justification ou avec une justification fausse est nulle.
On considère la fonction $f : x \mapsto x$ sur l'intervalle $I = [0; 2]$

1. $\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n}$ est une somme de Riemann associée à f sur I.
2. $\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur I.
3. $\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur I.
4. $\sum_{i=1}^{n} \frac{4i}{n^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur I.

Exercice 2 (3 points)
Soit $0 < a < b$. On considère $I = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{lnx}{1+x^2} dx$.

1. Montrer que $\int_1^a \frac{lnx}{1+x^2} dx = -\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{lnx}{1+x^2} dx$
   On pourra utiliser le changement de variable $x = \frac{1}{t}$
2. En déduire la valeur de I.

Exercice 3(3 points)

1. Enoncer la première formule de la moyenne.
2. En utilisant la première formule de la moyenne, calculer $lim_{x \to 1+} \int_x^{x^2} \frac{cos(\pi t)}{lnt} dt$

Exercice 4 (4 points)
On considère la fonction $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{1-x}}$

1. Déterminer le domaine de définition de f

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

2. Calculer $lim_{x \to 1^-} f(x)$
3. Montrer que f est équivalente à la fonction ln au voisinage de 0.
4. Déduire des questions précedentes que l'intégrale $\int_0^1 \frac{lnx}{\sqrt{1-x}}$ converge.

Exercice 5 (6 points)
Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y'' - 5y' + 6y = -e^{2x}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$
2. $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$ pour $x \in]0, \pi[$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB
UFR Maths-Info

U.E: Analyse Réelle

Première Session: Janvier 2019
Durée: 2h30
Niveau: LT'

Exercice 1 (2,5 points) Determiner la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite u_n définie par: $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$

Exercice 2 (2,5 points) Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{5ch x+3sh x+4}$ en utilisant le changement de variable $t = e^x$.

Exercice 3 (5 points) Soit F la fonction définie pour tout $x \geq 1$ par:

$$F(x) = \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{dt}{ln(1+t)}$$

1. Enoncer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n .
2. A l'aide de la formule de Taylor avec reste integral montrer que pour $t > 0$
$$t - \frac{1}{t^2} < ln(1+t) < t$$
3. En déduire que pour $x \in]1, \sqrt{3}[$
$$ln(1+x) \leq F(x) \leq ln(1+x) + ln(\frac{|x-3|}{|x^2-3|})$$
4. En déduire la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
5. Calculer pour $x > 1$, $F'(x)$
6. En déduire que pour tout $x > 1$, $F(x) > ln2$

Exercice 4 (5 points)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

1. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{1+t^4}$. (on pourra remarquer que $\frac{1}{1+t^4} = \frac{1}{(1+t^2)^2-2t^2}$)
2. Calculer $\int \frac{arctan(t^2)}{t^2} dt$
3. Justifier que $lim_{t\to 0} \frac{arctan(t^2)}{t^2} = 1$
4. En déduire la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{arctan(t^2)}{t^2} dt$
5. Pour $x > 1$, calculer $F(x) = \int_1^x \frac{arctan(t^2)}{t^2} dt$
6. En déduire la nature de $\int_1^x \frac{arctan(t^2)}{t^2} dt$
7. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{arctan(t^2)}{t^2} dt$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 5 (5 points)

Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $x'' - 5x' + 6x = -e^{2t}$ avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$
2. $y'' + 4y = \frac{1}{tan(x)}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

U.E: Analyse Réelle

Deuxieme Session: Mars 2019
Durée: 2h30
Niveau: L1

Exercice 1 (3 points)

1. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwartz
2. Enoncer la première formule de la moyenne
3. Enoncer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n.

Exercice 2 (4 points)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

1. On suppose que $\forall(\alpha, \beta) \in [a, b]^2; \int_\alpha^\beta f(t)dt = 0$.
   Montrer que $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.
2. On suppose que $\forall x \in [a, b]; f(a + b - x) = f(x)$.
   Montrer que $\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

Exercice 3(4 points)

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

1. Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. A l'aide du changement de variable $u = -t$, étudier la parité de F.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $0 < F(x) < \frac{1}{2x}$; En déduire la limite de F en $+\infty$
4. Calculer la dérivée de F.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 4 (3,5 points)

On considère la fonction $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{1-x}}$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Calculer $lim_{x \to 1^-} f(x)$
3. Montrer que f est équivalente à la fonction ln au voisinage de 0.
4. Déduire des questions précedentes que l'intégrale $\int_0^1 \frac{lnx}{\sqrt{1-x}}$ converge.

Exercice 5 (5,5 points)

Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $2y' + y^2 = -\frac{1}{x^2}$ (On vérifiera que $y = \frac{1}{x}$ est une solution particulière).
2. $y'' + 3y' + 2y = 2xe^{-3x} + 3sin(5x)$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB
UFR Maths-Info

U.E: Analyse Réelle

Première Session: Janvier 2020
Durée: 2h30
Niveau: L1

Exercice 1 (3 points)
Questions de Cours: Enoncer:

1. Le théorème de la moyenne
2. Le théorème de la moyenne généralisé
3. La formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 2 (3 points) On rappelle que, si la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors

$$\int_a^b f(x)dx = lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

Calculer les limites des suites (a_n) et (b_n) définies par:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}; b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$$

Exercice 3(6 points)

1. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $f(x_0) = x_0$.
2. Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on pose

$$I(p, q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

a Montrer que si $p \in \mathbb{N}^*$, alors

$$I(p,q) = \frac{p}{1+q} I(p-1, q+1)$$

b En déduire que $I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$

c Déduire des questions précédentes la valeur de $J = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5(t)cos^3(t)dt$.

Exercice 4 (5 points) Intégrer l'équation différentielle suivante

$$y'' + y = x^2 e^x + \frac{1}{sin^3 x}$$

Exercice 5 (3 points)
Soit a un nombre réel strictement positif.

1. Calculer $J(a) = \int_0^a \frac{x}{(1+x)^2} dx$
2. Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^2} dx$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB
UFR Maths-Info

U.E: Analyse Réelle

Deuxièeme Session: Mars 2020
Durée: 2h00
Niveau: L1

Exercice 1 (5 points)

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 4}}$$

1. Montrer que F est une fonction impaire.
2. Montrer que F est dérivable puis calculer $F'(x)$ pour tout réel x et déterminer le signe de F'.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a:

$$0 \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 4}}$$

4. Déduire de ce qui précède que F est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (5 points)

1. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégrale, montrer que: $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, on a $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
2. A l'aide de la formule de la moyenne généralisée, calculer la limite suivante:

$$\lim_{x \to 1^+} \int_x^{x^2} \frac{\cos \pi t}{\ln t} dt$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 3(6 points)

Intégrer l'équation différentielle suivante:

$$y'' + 4y = (3t - 1)e^{2t} + \frac{1}{tan(t)}$$

Exercice 4(4 points)

Etudier la convergence des intégrales suivantes:

1. $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$
2. $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD

Université FHB
UFR Maths-Info

U.E: Analyse Réelle

Première Session: Decembre 2020
Durée: 2h00
Niveau: L1

Exercice 1 (2 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse. Une bonne réponse sans justification ou avec une justification fausse est nulle.
On considère la fonction $f : x \mapsto x$ sur l'intervalle $I = [0; 2]$

1. $\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n}$ est une somme de Riemann associée à f sur I.
2. $\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur I.
3. $\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur I.
4. $\sum_{i=1}^{n} \frac{4i}{n^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur I.

Exercice 2 (3 points)

Questions de Cours: Enoncer:

1. L'inégalité de Cauchy-Schwartz
2. Le théorème de la moyenne généralisé
3. La formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 3(5 points)

1. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles. On suppose que $\forall(\alpha, \beta) \in [a, b]^2; \int_\alpha^\beta f(t)dt = 0$. Montrer que $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.
2. On donne $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$

a. Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n.

Scanné avec CamScanner

b. Calculer I_3.

Exercice 4 (4 points)
On considère la fonction $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{1-x}}$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Calculer $lim_{x \to 1^-} f(x)$
3. Montrer que f est équivalente à la fonction ln au voisinage de 0.
4. Déduire des questions précedentes que l'intégrale $\int_0^1 \frac{lnx}{\sqrt{1-x}}$ converge.

Exercice 5 (6 points)

Intégrer l'équation différentielle suivante

$$y'' + y = x^2 e^x + \frac{1}{sin^3 x}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD

Université FHB
UFR Maths-Info

U.E: Analyse Réelle
Session 1: Août 2021
Durée : 2*h*30
Niveau : L1

Exercice 1

Analyse Réelle

1. Calculer $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$
2. Calculer la limite, si elle existe, de la suite $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}}$

Exercice 2 Soit $I =]1, +\infty[$. On désigne par f l'application de I dans $\mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in I$, par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{(t-1)^2} dt$$

1. Déterminer le signe de $f(x)$
2. Justifier la dérivabilité de f sur I et montrer que $f'(x) = -\frac{\ln(x)}{(x+1)^2}$ pour tout $x \in I$.
3. Montrer que pour tout $t \in I$

$$t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} \leq \ln(t) \leq t - 1$$

On pourra utiliser la formule de Taylor Lagrange entre 1 et t

4. Montrer que $\ln(x+1) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq \ln(x+1)$
5. En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

Scanné avec CamScanner

UFHB
UFR Maths Info
Année: 2020-2021

Analyse Réelle
Durée: 2h00
Niveau: Licence 1

Exercise 1

1. Calculer $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx$ (3pts)

2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ converge et calculer sa valeur. (2pts)

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et paire.

1. Montrer que $\int_0^{\pi} xf(cosx)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(cosx)dx$. (On pourra poser $x = \pi - t$) (2pts)

2. Calculer alors $I = \int_0^{\pi} \frac{xcos^2x}{1+cos^2x}dx$ (2pts)

Exercice 3

1. Montrer que $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq ln(x+1) \leq x$ (2pts)

2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \Pi_{k=1}^{n}(1 + \frac{i}{k^2+n^2})^n$ (2pts)

Exercice 4 Resoudre les équations différentielles suivantes

1. $y'' - 4y' + 3y = x^2e^x + xe^{2x}cosx$ (4,5pts)

2. $y'' + y = \frac{1}{sin^3x}$ (2,5pts)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 3 (6points)

Intégrer les équations différentielles suivantes :

1. $x'' + ax' + 4x = \cos(2t)$ avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = \frac{1}{\alpha}$ avec $\alpha \in]0, 4[$
2. $y'' + y = cotan(x)$
3. $x^2y'' - 3xy' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}^+$. Poser $t = \ln(x)$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

URFMI L1

PROPOSITION DE CORRECTION D'ANALYE REELLE 1erSESSION 2016-2017

EXERCICE 1

Si on coupe l'intervalle en n parties égales, une somme de Rieman associée à f sur $[a;b]$ est :

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n}) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{n} = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n} = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

si $a=0, b=2$ et $f(x)=x$
De plus $S_n = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{4}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2} = 2\frac{(n+1)}{n} \longrightarrow 2 = \int_0^2 x dx$

1. Faux car :
   $\sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} i = \frac{1}{n}\times\frac{2n(2n+1)}{2} = 2n+1 \longrightarrow +\infty$
   Cette somme ne tend pas vers 2, ce n'est pas une somme de Rieman de f sur I.
2. Vu ainsi cela ne ressemble pas à la remarque préliminaire, pourtant, en utilisant le $\boxed{1}$, la somme est équivalente à celle-ci-dessus diviser par n et donc tend vers 2. Cela ne suffit pas à dire qu'il s'agit d'une somme de Riemann de f sur I, mais on va regarder de plus près.
   On coupe l'intervalle en $2n$ parties égales. $S_n = \frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{2n} f(a+i\frac{b-a}{2n}) = \frac{2}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{2i}{2n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{2i}{2n} = \sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n^2}$
   D'où la proprosotion est vraie.
3. D'après la remarque préliminaire :

$$S_n = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = 4\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}$$

   Donc $2\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}$ n'est pas une somme de Riemann de f sur I.
   La proposition est donc fausse.
   Remarque : On aurait pu calculer ma limite de $2\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}$ et voir qu'elle vaut $1 \neq 2$.

4. D'après la remarque preliminaire la proposition est vraie.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2 Remarque : Les trois intégrales de cet exercice sont définies car $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

1. Montrons que $\int_1^a \frac{\ln x}{1+x^2}dx = -\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx$
   On pose $x = \frac{1}{t} \leftrightarrow t = \frac{1}{x}$ d'où $dx = -\frac{dt}{t^2}$
   Pour $x = 1, t = 1$; $x = \frac{1}{a}, t = a$; donc
   $\frac{\ln x}{1+x^2} = \frac{\ln \frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{t^2(-\ln t)}{1+t^2}$
   Donc $\int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_1^a \frac{t^2(-\ln t)}{1+t^2}\frac{dt}{t^2} = -\int_1^a \frac{\ln t}{1+t^2}dt = -\int_1^a \frac{\ln x}{1+x^2}dx$
   d'où $\int_1^a \frac{\ln x}{1+x^2}dx = -\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx$

2. Déduction de la valeur de I
   $I = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_a^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = -\int_1^a \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$
   d'où $\boxed{I=0}$

EXERCICE 3

1. La première formule de la moyenne.
   Soit g une fonction positive sur I et f continue sur I alors d'après la première formule de la moyenne $\exists c \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$ avec $[a,b] \subset$I.

2. Calcul de $\lim_{x\to 1^+} \int_x^{x^2} \frac{\cos(\pi t)}{\ln t}dt$.
   Soit $g(x) = \frac{1}{\ln x}$ et $f(x) = \cos(\pi x)$
   $\forall x > 1, g(x) > 0$ et f est continue sur $[x, x^2]$. D'après la 1ere formule de la moyenne, $\exists c \in [x, x^2]$ tel que : $\int_x^{x^2} \frac{\cos(\pi t)}{\ln t}dt = f(c)\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt$
   on a $c \in [x, x^2]$
   $\lim_{x\to 1^+} \int_x^{x^2} \frac{\cos(\pi t)}{\ln t}dt = \lim_{x\to 1^+}(-\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt)$
   Soit $g_1(x) = 1$ et $h(x) = \frac{1}{\ln t}$
   d'après la 1^{ere} formule de la moyenne, $\exists c \in [x, x^2]$tel que $\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt = \frac{1}{\ln c}\int_x^{x^2} dt$
   Ainsi $-\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt = -\frac{1}{\ln c}\int_x^{x^2} dt = -\frac{x^2-x}{\ln c}$
   $\int_x^{x^2} \frac{\cos(\pi t)}{\ln t}dt = \cos(\pi c)\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt = \cos(\pi c)\frac{1}{\ln c}(x^2 - x)$

   Donc $\lim_{x\to 1^+} \int_x^{x^2} \frac{\cos(\pi t)}{\ln t}dt = 0$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 4

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}$

1. Domaine de définition de f.
   $f(x)$ ∃ si et seulement si $x > 0$ et $1 - x > 0$
   $f(x)$ ∃ si et seulement si $x > 0$ et $x < 1$
   Ainsi $f(x)$ ∃ si seulement si $x \in]0;1[\longrightarrow \mathcal{D}_f =]0;1[$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$
   On a $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}$
   Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} [(\sqrt{1-x})\frac{\ln x}{1-x}]$
   On a : $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \sqrt{1-x} = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{\ln x}{1-x} = -1 \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = 0$
3. Montrons que f est équivalent à la fonction ln au voisinagne de 0.
   On a : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$
   or $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1-x} = 1$ d'où $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$ Alors f est bien équivalent à la fonction ln au voisinage de 0.
4. On a $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt \underset{0}{\sim} \int_0^{\frac{1}{2}} \ln t dt$
   or $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln t dt$ Converge et $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt$converge car $\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ est prolongeable par continuité en 1. d'où $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt$ qui converge

EXERCICE 5

Resolvons les équations différentielles suivantes :

2) Resolvons $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x} (E)$ La solution (E_H) est $y_H = A\cos x + B\sin x$,$A,B \in \mathbb{R}$ Cherchons une solution particulière. Les solutions $y_1 = \sin x$ et $y_2 = \cos x$ sont independantes, en effet leur Wronskien vaut $W(x) = -1$ Cherchons une solution sous forme $y_p = A(x)\cos x + B\sin x$ avec $A'y_1 + B'y_2 = 0$, A',B' sont solution à

$$\begin{cases} A'\sin x + B'\cos x = 0 \\ A'\cos(x) - B'\sin x = \frac{1}{\sin^3 x} \end{cases}$$

donc $A' = \frac{1}{W(y_1;y_2)} \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \frac{1}{\sin^3 x} & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$B' = \frac{1}{W(y_1;y_2)}\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \frac{1}{\sin^3 x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

avec les primitives $A = -\frac{1}{2\sin^2 x}$, $B = \frac{\cos x}{\sin x}$

On a donc la solution particulière $y_p = -\frac{1}{2\sin x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\cos 2x}{2\sin x}$ et la solution générale $y = y_p + y_H$

soit $y = \frac{\cos 2x}{2\sin x} + A\cos x + B\sin x$; $A,B \in \mathbb{R}$

1. $(E) : y" - 5y' + 6y = -e^{2x}$ avec $y(0)$ et $y'(0) = 0$.
   L'equation caracteristique $r^2 - 5r + 6 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes $r_1 = 2, r_2 = 3$. La solution général de (E_H)est donc $y : x \mapsto \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$
   Puisque le second membre de (E) est de la forme $P(x)e^{mx}$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ et $m = 2$. Comme 2 est solution de (E_r) l'equation caractéristique alors une solution particulière de (E) est de la forme $y : x \mapsto Q(x)e^x$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $deg(Q) = deg(P) + 1$.
   Notons $Q = ax$ où $a \in \mathbb{R}$ est à trouver on a :
   $y(x) = axe^{2x}$
   $y'(x) = (2ax + a)e^{2x}$
   $y"(x) = (4a + 4ax)e^{2x}$
   d'où : $y"(x) - 5y'(x) + 6y(x) = (4a + 4ax + 6ax - 10ax - 5a)e^{2x}$
   $\Longrightarrow y"(x) - 5y'(x) + 6y(x) = (-a)e^{2x}$
   Pour que y soit solution de (E) il suffit que $-a = -1$ soit $a = 1$.
   $y_p = xe^{2x}$
   Alors la solution générale est $y = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x} + xe^{2x}$
   on a : $y(0) = 0$et$y'(0) = 0 \Longrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 1 = 0 \end{cases}$$

   $\Longrightarrow \alpha = -\beta$ d'où $\Longrightarrow -2\beta + 3\beta + 1 = 0$
   $\beta = -1$ et $\alpha = 1$ Ainsi $y = e^{2x} - e^{3x} + xe^{2x}$
   Soit $y = (1 + x)e^{2x} - e^{3x}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Année 2018-2019

UFR-MI : L1

CORRECTION : ANALYSE REELLE SESSION 1

EXERCICE 1 :(Question de cours)

EXERCICE 2

Calculons les limites des suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}; b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}^2}$. On remarque que (a_n) est une somme de Riemann de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0:1]$ relativement à la subdivision $X_n = \frac{k}{n}$ avec $0 \leq k \leq n$. g est continue sur $[0:1]$ donc Riemann intégrable sur $[0:1]$ et par conséquent :
$\lim_{n\to+\infty} a_n = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$
$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$

$b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}$. On remarque que (b_n) est une somme de Riemann de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{X}$ sur $[0:1]$ relativement à la subdivision $X_n = \frac{k}{n}$ avec $0 \leq k \leq n$. f est continue sur $[0:1]$ donc Riemann intégrable sur $[0:1]$ et par conséquent :
$\lim_{n\to+\infty} b_n = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx = [\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{2}{3}$
$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{2}{3}$

EXERCICE 3

1. Montrons qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) = x_0$
   On a : $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2} = 0$, or $\frac{1}{2} = \int_0^1 xdx$.
   D'où $\int_0^1 (f(x) - x)dx = 0 \quad (*)$
   $(*) \quad \Rightarrow \exists x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) - x_0 = 0$. Donc $f(x_0) = x_0$.

2. Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on pose $I_{(p,q)} = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$

   a) Montrons que si $p \in \mathbb{N}^*$ alors $I_{(p,q)} = \frac{p}{1+q} I_{(p-1,q+1)}$
   Intégration par parties ,

   Posons $\begin{cases} u = x^p \\ v' = (1-x)^q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = px^{p-1} \\ v = -\frac{1}{1+q}(1-x)^{q+1} \end{cases}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$I_{(p,q)} = [uv]_0^1 - \int_0^1 vu'dx = \frac{p}{1+q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+1}dx = \frac{p}{1+q}I_{(p-1,q+1)}$.

b) Déduisons que $I_{(p,q)} = \frac{p!q!}{p+q+1}!$
On a $I_{(p,q)} = \frac{p(p-1)(p-2)\times\cdots\times1}{(q+1)(q+2)\times\cdots\times(q+p+1)}I_{(0,p+q)}$.
Or $I_{(0,p+q)} = \int_0^1 x^0(1-x)^{p+q}dx = -[\frac{1}{p+q+1}(1-x)^{p+q+1}]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$.
D'où $I_{(p,q)} = \frac{p(p-1)(p-2)\times\cdots\times1}{(q+1)(q+2)\times\cdots\times(q+p+1)}\left(\frac{1}{q+p+1}\right) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$

c) Déduisons la valeur de $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(t)\cos^3(t)dt$
Posons $x = \sin(t) \Rightarrow dx = \cos(t)dt$.
Alors $I = 2\int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin^5(t)\cos^2(t)\cos(t)dt = 2\int_{\sin(0)}^{\sin(\frac{\pi}{2})} x^5(1-x^2)dx$
car $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$.
D'où $I = 2I_{(5,1)}$, $p = 5$ et $q = 1$.
D'après 2-a) $I_{(p,q)} = \frac{p}{1+q}I_{(p-1,q+1)}$
donc $I_{(5,1)} = \frac{5}{2} \times I_{(4,2)}$ et d'après 2-b) $I_{(4,2)} = \frac{4!\times2!}{(4+2+1)!} = \frac{1}{105}$.
Par conséquent $I = 2 \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{105} = \frac{1}{21}$.

EXERCICE 4

$y'' + y = x^2e^x + \frac{1}{sin^3(x)}$
Intégrons cette équation différentielle.
Soit $\begin{cases}(E_1) : y'' + y = x^2e^x \\ (E_2) : y'' + y = \frac{1}{sin^3(x)}\end{cases}$

Résolvons (E_1)

— Équation homogène (E_H) :
$(E_H) : y'' + y = 0$
Équation caractéristique :
$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = i$ ou $r = -i$
D'où $y_H = A\cos(x) + B\sin(x)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

— Cherchons une solution particulière
y_{P_1} est de la forme $x^sP(x)e^x$ et comme i n'est pas solution alors $s = 0$.
Ainsi $y_{P_1} = P(x)e^x$ avec $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Par identification on a $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = \frac{1}{2}$. On en déduit que $y_{P_1} = (\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2})e^x$.
D'où :
$y_{G_1} = y_H + y_{P_1} = A\cos(x) + B\sin(x) + (\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2})e^x, \quad A, B \in \mathbb{R}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Résolvons (E_2)

Pour la méthode de résolution voir le cours (méthode du Wronskien).

Par cette méthode on obtient : $y_{P_2} = \frac{\cos(2x)}{2\sin(x)}$. Ainsi,

$y_{G_2} = A\cos(x) + B\sin(x) + \frac{\cos(2x)}{2\sin(x)}, \quad A, B \in \mathbb{R}$

Conclusion :

$$\boxed{y_G = y_{G_1} + y_{G_2} = 2A\cos(x) + 2B\sin(x) + \frac{\cos(2x)}{2\sin(x)} + (\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2})e^x, \quad A, B \in \mathbb{R}.}$$

EXERCICE 5

Soit a un réel strictement positif.

1. Calculons $I(a) = \int_0^a \frac{x}{(1+x)^2}dx$

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^a \frac{x}{(1+x)^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^a \frac{2x}{x^2+2x+1} \\ &= \frac{1}{2}[\int_0^a \frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx - 2\int_0^a \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}] \\ &= \frac{1}{2}[\ln|x^2+2x+1| - 2(\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}})]_0^a \end{aligned}$$

$$I(a) = \frac{1}{2}\ln|a^2+2a+1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2(a+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{3\sqrt{3}}{3} + C.$$

2. Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^2}dx$

On a $\lim_{a\to+\infty} I(a) = +\infty$.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^2}dx$ diverge.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI : L1 Année 2018-2019

CORRECTION : ANALYSE REELLE SESSION 2

EXERCICE 1

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+4}}$$

1. Montrons que F est une fonction impaire.
   On a $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+4}}$. Posons $u = -t \Rightarrow dt = -du$.
   D'où $F(-x) = \int_x^{2x} -\frac{du}{\sqrt{u^4+u^2+4}} = -F(x)$. Donc F est impaire
2. Montrons que F est dérivable puis calculons $F'(x)$.
   Soit $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+4}}$
   La fonction $t \mapsto t^4+t^2+4$ est continue dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.
   La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
   La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Ainsi, entant que composée de ces fonctions est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Soit G la primitive de g.
   Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = G(2x) - G(x)$. Cela dit, F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car G l'est aussi.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F'(x) = [G(2x) - G(x)]' = 2G'(2x) - G'(x)$$

$$F'(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+4}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4x^4+x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+4}}$$

$$F'(x) = \frac{3(x^4-1)}{(\sqrt{4x^4+x^2+1}+\sqrt{x^4+x^2+4})(\sqrt{4x^4+x^2+1}-\sqrt{x^4+x^2+4})}$$

Le signe de $F'(x)$ dépend donc de celui de x^4-1
$\forall x \in \mathbb{R}, -x^4+1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$
$\forall x \in]-\infty, -1[, F'(x) < 0$
$\forall x \in [-1, 1], F'(x) > 0$
$\forall x \in]1, +\infty[, F'(x) < 0$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

3. Montrons que $\forall x > 0, 0 \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+4}}$.
Soit $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+4}}$
g est décroissante. Donc d'après l'inégalité de la moyenne on a :

$$\inf[g(x), g(2x)] \leq \frac{1}{2x-x}\int_x^{2x} g(t)dt \leq \sup[g(x), g(2x)]$$

$$g(2x) \leq \frac{1}{x}\int_x^{2x} g(t)dt \leq g(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{16x^4+4x^2+4}} \leq \frac{1}{x}(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+4}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{16x^4+4x^2+4}} \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+4}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{16x^4+4x^2+4}} \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{x}{\sqrt{16x^4+4x^2+4}} \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+4}}.$$

Alors, $\forall x > 0, 0 \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+4}}$.

4. Déduisons que F est bornée.
D'après 3), $0 \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+4}}$.

— $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^4+x^2+4 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^4+x^2+4} > x$
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+4}} < \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+4}} < 1.$
Donc, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+4}} < 1 \Rightarrow 0 \leq F(x) < 1$. F est donc bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.
— Si $x = 0$ on a $F(0) = \int_0^0 g(t)dt = 0$. F est bornée.
— Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$, comme F est impaire on $F(-x) = -F(x)$ or $-x \in \mathbb{R}_+^*$ donc d'après ce qui précède $0 \leq F(-x) < 1$. Ainsi $-1 < F(x) \leq 0$:F est donc bornée sur $\mathbb{R}_-^*$.
Par conséquent, F est bornée sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2

1. Montrons que $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, on a : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
La fonction $f(x) = \sin x$, est de classe C^4. Donc on a
$\sin x = f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \frac{1}{3!}\int_0^x (x-t)^3 f^{(4)}(t)dt$
$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 \sin t dt$
$\sin x - (x - \frac{x^3}{6}) = \frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 \sin t dt$
On a : $\forall t \in [0, x]$, $(x-t)^3 \sin t \geq 0$ donc $\int_0^x (x-t)^3 \sin t dt \geq 0$.
Par conséquent $\sin x - (x - \frac{x^3}{6}) \geq 0$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}], \sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$
On en déduit que $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}], x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

2. $\lim\limits_{x\to 1^+} \int_x^{x^2} \frac{\cos \pi t}{\ln t} dt$
On a : $\int_x^{x^2} \frac{\cos \pi t}{\ln t} dt = \int_x^{x^2} \frac{t\cos \pi t}{t\ln t} dt$
Soient $f(t) = t\cos \pi t$ et $g(t) = \frac{1}{t\ln t}$. f est continue sur $[x, x^2]$ et g est continue et positive sur $[x, x^2]$ alors $\exists c \in [x, x^2]$ tel que
$\int_x^{x^2} f(t)g(t)dt = f(c)\int_x^{x^2} g(t)dt$.
Donc $\int_x^{x^2} \frac{\cos \pi t}{\ln t} dt = c\cos(\pi c)\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t} dt$, où $c \in [x, x^2]$
Or $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t} = \ln 2$
Par conséquent $\int_x^{x^2} \frac{\cos \pi t}{\ln t} dt = c\cos(\pi c)\ln 2$
Conclusion $\lim\limits_{x\to 1^+} \int_x^{x^2} \frac{\cos \pi t}{\ln t} dt = \lim\limits_{c\to 1^+} c\cos(\pi c)\ln 2 = -\ln 2$

EXERCICE 3

$y'' + 4y = (3t-1)e^{2t} + \frac{1}{\tan t}$
Soit $\begin{cases} (E_1) : y'' + 4y = (3t-1)e^{2t} \\ (E_2) : y'' + 4y = \frac{1}{\tan t} \end{cases}$

Résolvons (E_1)

• Équation homogène (E_H) :
$(E_H) : y'' + 4y = 0$
Équation caractéristique : $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = 2i$ ou $r = -2i$
$\boxed{y_H = A\cos(2t) + B\sin(2t) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}}$
• Cherchons une solution particulière y_{p_1} de (E_1)
y_{p_1} est de la forme $t^s P(t)e^{2t}$ et comme $2i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique alors $s = 0$.
Ainsi $y_{p_1} = P(t)e^{2t}$ avec $P(t) = at + b$.
Par identification on obtient $\begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = -\frac{1}{4}. \end{cases}$
On en déduit que $y_{p_1} = (\frac{3t}{4} - \frac{1}{4})e^{2t}$.
$\boxed{y_{G_1} = y_H + y_{p_1} = A\cos(2t) + B\sin(2t) + (\frac{3t}{4} - \frac{1}{4})e^{2t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}}$

Résolvons (E_2)

On a $y_H = A\cos(2t) + B\sin(2t) avec A, B \in \mathbb{R}$
• Le Wronskien vaut -2 (pour la méthode de résolution voir le cours)
Donc $y_{p_2} = A(t)\cos(2t) + B(t)\sin(2t)$
Déterminons les fonctions A et B en résolvant le système suivant :

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} A'\sin(2t) + B'\cos(2t) = 0 \\ 2A'\cos(2t) - 2B\sin(2t) = \frac{1}{\tan t} \end{cases}$$

$$A' = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \cos(2t) \\ \frac{1}{\tan t} & -2\sin(2t) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \frac{\cos(2t)}{\tan t}$$

$$A = \frac{1}{2}\int \frac{\cos t \cos(2t)}{\sin t}dt = \frac{1}{2}\int \frac{\cos t(\cos^2 t - \sin^2 t)}{\sin t}dt = \frac{1}{2}\int \frac{\cos^3 t}{\sin t}dt - \frac{1}{2}\int \cos t \sin t dt$$

$$B' = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sin(2t) & 0 \\ 2\cos(2t) & \frac{1}{\tan t} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\sin(2t)}{\tan t}$$

$$B = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin(2t)}{\tan t}dt = -\int \cos^2 t dt = -\int \frac{1+\cos(2t)}{2}$$

Terminer le calcul des intégrales de A et de B.

$y_{G_2} = y_H + y_{p_2}$

Conclusion : $\boxed{y_G = y_{G_1} + y_{G_2}}$

EXERCICE 4

1. $\int_0^\infty te^{-t}dt$

Posons $\begin{cases} u = t \\ v' = e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -e^{-t} \end{cases}$

D'où

$$\int_0^\infty te^{-t}dt = [-te^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}dt$$

$$= [\frac{-t}{e^t}]_0^\infty + [-e^{-t}]_0^\infty = 0 + 1$$

$$\int_0^\infty te^{-t}dt = 1.$$

Par conséquent $\int_0^\infty te^{-t}dt$ est convergente.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN D'ANALYSE REELLE 2019-2020

Exercice 1

Voir Valideur 1ère session 2016-2017

Exercice 2

Voir cours

Exercice 3

1) Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ à valeurs réelles. On suppose que $\forall(\alpha,\beta) \in [a;b]^2$; $\int_\alpha^\beta f(t)dt = 0$

Montrons que $f(x) = 0, \forall x \in [a;b]$

Supposons que f est nulle sur $[a;b]$

Alors $\exists x_0 \in [a;b], f(x) > 0$

$\forall \epsilon > 0, \exists \gamma > 0, tq\ ]x_0 - \beta; \gamma[$

$\forall x \in]x_0; -\gamma[, |f(x_0) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$

Posons $\epsilon = \frac{f(x)}{2}$

$\exists [\alpha;\beta]\ C\ [a;b], tq\ \forall x \in [\alpha;\beta]$

$|f(x_0) - f(x)| < \frac{f(x)}{2}$

$\Rightarrow -\frac{f(x)}{2} < f(x_0) - f(x) < \frac{f(x)}{2}$

$\Rightarrow f(x) > -\frac{f(x)}{2} + f(x_0)$

D'où $\int_\beta^b f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(x)dx +$

$\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx = 0$

Or $\forall x \in [\alpha;\beta], f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$

$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_a^\alpha f(x)dx = 0$

$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx > (\beta - \alpha)\left(\frac{f(x_0)}{2}\right) > 0$

Alors $\int_a^b f(x)dx > 0$ ce qui est absurde

Par conséquent, $f(x) = 0$

2) On donne $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$

a) Etablissons une relation entre I_{n+1} et I_n

$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx = \int_0^1 \frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^n}dx$

$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}dx - \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx$

$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n}dx - \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx$

$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$

$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx$

Intégration par partie

$U = x \qquad U' = 1$

$V' = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{(x^2+1)^{n+1}}\right) \qquad V = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{n(x^2+1)^n}\right)$

$I_{n+1} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{n(x^2+1)^n}\right)\right]_0^1 + \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$

$I_{n+1} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{-x}{n(x^2+1)^n}\right)\right]_0^1 + \frac{1}{2n}I_n$

$I_{n+1} = I_n + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n(x^2+1)^n}\right)\right]_0^1 - \frac{1}{2n}I_n$

b) Calculons I_3

$I_3 = \frac{1}{16} + \left(\frac{3}{2}I_2\right)$

$I_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}I_1$ or $I_1 = [\arctan(x)]_0^1$

$I_2 = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4}$

$donc\ I_3 = \frac{1}{16} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\right)$

$I_3 = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}$

Exercice 4

Voir Valideur 1er Session 2016-2017 page 431

Exercice 5

Intégrons l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y = x^2e^x + \frac{1}{(sinx)^3}$$

Equation homogène

$y'' + y = 0$

Equation caractéristique

$r^2 + 1 = 0$

$r = i\ ou\ r = -1$

$y_H = Acosx + Bsinx, A, B \in \mathbb{R}.$

Recherche de solution particulière

$$\begin{cases} y_{P1} = y''_{P_1} + y_{,P_1} = x^2e^x \\ y_{P2} = y''_{P_2} + y'_{P_2} = \frac{1}{(sinx)^3} \end{cases}$$

y_{P_1} s'écrit sous la forme de $y_{P_1} = (ax^2 + bx + c)e^x$

Posons $p(x) = ax^3 + bx + c$, d'où $y_{P_1} = p(x)e^x$

$y_{P_1} = p(x)e^x; y_{P_2} = (p'(x) + p(x))e^x;$

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

$y''_{P_1} = (p''(x) + 2p'(x) + p(x))e^x$

$y''_{P_1} + y_{P_1} = (2ax^2 + (2b + 4a)x + 2a + 2b + 2c)e^x = x^2e^x$

$y''_{P_1} + y_{P_1} = (2ax^2 + (2b + 4a)x + 2a + 2b + 2c) = x^2$

Par identification

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b + 4a = 0 \\ 2a + 2b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$y_{P_1} = \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right)e^x$

$y_{P2} = y''_{P_2} + y'_{P_2} = \frac{1}{(sinx)^3}$

Cherchons une solution particulière

$y_{1P_1} = sinx$ et $y_{1P_2} = cosx$ sont indépendants

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} sinx & cosx \\ cosx & -sinx \end{vmatrix} = -(sinx)^2 - (cosx)^2 = -1$$

Leur wronskien vaut $W(x) = -1$

L'équation s'écrit sous la forme de :

$y_{P_2} = A(x)\cos(x) + B(x)\sin(x)$ avec $A'y_1 + By'_2 = 0$

A', B' sont solution du système

$$\begin{cases} A'sinx + B'cosx = 0 \\ A'cosx + B'sinx = \frac{1}{(sinx)^3} \end{cases}$$

Donc $A' = \frac{1}{W(Y_1,Y_2)} \begin{vmatrix} 0 & cosx \\ \frac{1}{(sinx)^3} & -sinx \end{vmatrix} = \frac{cosx}{(sinx)^3}$

$$B' = \frac{1}{W(Y_1Y_2)} \begin{vmatrix} sinx & 0 \\ cosx & \frac{1}{(sinx)^3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{(sinx)^3}$$

Avec les primitives

$$A = -\frac{1}{(sinx)^2}; B = \frac{cosx}{(sinx)^2}$$

La solution générale de l'équation est :

$$y_G = Acosx + Bsinx + \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right)e^x + \frac{cos2x}{2sinx}, A, B \in \mathbf{R}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

CORRECTION EXAMEN ANALYSE REEL 2021
SESSION 1

EXERCICE 1

1) Calculons $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

Soit $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

Posons $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Leftrightarrow t^2 = \frac{1-x}{1+x}$

$$\Leftrightarrow 1-x = t^2(1+x)$$
$$\Leftrightarrow 1-x = t^2 + xt^2$$
$$\Leftrightarrow 1-t^2 = x(t^2+1)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Donc $dx = \frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt$

$$= \frac{2t(1+t^2+1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt$$
$$dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt$$

- Pour $x = 0$, $t = 1$
- Pour $x = 1$, $t = 0$

I devient donc : $I = \int_1^0 t \times \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt$

On a : $I = \int_1^0 \frac{-4t^2}{(1+t^2)^2}dt$

$$= \int_1^0 \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}dt$$

$$I = \int_1^0 2t \times \frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Posons $u(t) = 2t$ $\quad u'(t) = 2$

$v'(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$ $\quad v(t) = -\frac{1}{1+t^2}$

Donc $I = \left[\frac{-2t}{1+t^2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$

$$= \left[-\frac{2t}{1+t^2} + 2\,arctan(t)\right]_0^1$$

D'où $\boxed{I = -1 + \frac{\pi}{2}}$

2) Calculons la limite si possible de :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}}$$

Soit $v_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n\left(1-{}^{k}/_{n}\right)}{n^3\left(1+{}^{k}/_{n}\right)}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1-{}^{k}/_{n}}{1+{}^{k}/_{n}}}$$

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{1-{}^{k}/_{n}}{1+{}^{k}/_{n}}}$$

Posons $f(x) = \sqrt{\frac{1-{}^{k}/_{n}}{1+{}^{k}/_{n}}}$

Donc $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$v_n = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\frac{1-0}{n}\right)$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

(v_n) est du type $v_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + b\frac{b-a}{n}\right)$ avec $b = 1$ et $a = 0$

(v_n) est donc une somme de Riemann associé à f sur $[0;1]$ relativement à la subdivision $\frac{k}{n}; 0 \leq b \leq n.$

Comme f est continue sur $[0;1]$ alors elle est Riemann intégrable sur $[0;1]$. On obtient donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}} = 1 - \frac{\pi}{2}}$$

EXERCICE 2

Soit $I =]1, +\infty[$. On désigne par f l'application de I dans $\mathbb{R}$, définie pour tout $x \in I$, par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}$$

Il faut noter que f est bien définie. En effet $\forall x \in I,\ x > 1 \Longrightarrow \forall x \in [x, x^2]$,

$1 < x < 1 \Longrightarrow t - 1 \neq$ et comme $t \geq x > 1 > 0,\ \ t > 0$ et donc on peut prendre le logarithme (ln) de t. Ainsi la fonction $[x, x^2] \ni t \mapsto \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}$ est continue sur $[x, x^2]$ et donc elle est intégrable.

1) Déterminer le signe de $f(x)$.

On a : $\forall x \in I$, et $\forall t \in [x, x^2], 1 < x \leq t$

$\Longrightarrow 1 < t \Longrightarrow \ln(1) < \ln(t)$ (car la fonction ln est croissante sur $]0, +\infty[$)

Alors $0 = \ln(1) < \ln(t) \Longrightarrow \ln(t) > 0, \forall t \in [x, x^2]$

Aussi, $\forall x \in I,\ \forall t \in [x, x^2], (t-1)^2 > 0$

$$\Longrightarrow \frac{\ln(t)}{(t-1)^2} > 0 \Longrightarrow f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{(t-1)^2} > 0$$

Conclusion, $\forall x \in I, f(x) > 0$ et donc f est positive.

Scanné avec CamScanner

2)

$\forall x \in I,\ g:]1,+\infty[\to \mathbb{R}$

$t \mapsto \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}$ est continue. De plus les fonctions $\alpha : I \to \mathbb{R}$ et $\beta : I \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$ $x \mapsto x$

sont dérivables car ce sont des polynômes.

Donc $F : I \mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{(t-1)^2} = \int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} g(t)dt$ est dérivable sur I.

$\forall x \in I,\ f'(x) = g(\alpha(x))\alpha'(x) - g(\beta(x))\beta'(x)$

$$f'(x) = \frac{\ln(x^2)}{(x^2-1)^2} \times 2x - \frac{\ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{4x\ln(x)}{(x+1)^2(x-1)^2} - \frac{\ln(x)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}\left[\frac{4x\ln(x)}{(x+1)^2} - \ln(x)\right] = \frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{4x\ln(x) - (x+1)^2\ln(x)}{(x+1)^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{4x\ln(x) - x^2\ln(x) - 2x\ln(x) - \ln(x)}{(x+1)^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{2x\ln(x) - x^2\ln(x) - \ln(x)}{(x+1)^2}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{(x-1)^2\ln(x)}{(x+1)^2}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{\ln(x)}{(x-1)^2},\ \forall x \in I$$

3) Montrer que $\forall t \in I; t-1-\frac{(t-1)^2}{2} \leq \ln(t) \leq t-1$

Soit $h:\ [1,t] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(x)$

Alors h est de classe C^∞ sur $[1,t]$ car la fonction logarithme l'est.

Alors la formule de Taylor Lagrange nous donne que : $\exists C \in]1,t[$ tel que :

$$h(t) = h(1) + \frac{t-1}{1!}h(1)' + \frac{(t-1)^2}{2!}h(1)'' + \frac{(t-1)^3}{3!}h(1)^{(3)}\ (C)$$

$\forall x \in]1,t[, h'(x) = \frac{1}{x}$, $h''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $h^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow h(t) = t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{(t-1)^3}{3\,C^3}$ avec $h(t) = \ln(t)$

Alors $\ln(t) - \left(t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2}\right) = \frac{(t-1)^3}{3\,C^3} > 0$

Car $\forall t \in I,\ t > 1 \Rightarrow t - 1 > 0 \Rightarrow (t-1)^3 > 0$

$\forall C \in]1, t[, C > 0 \Rightarrow 3\,C^3 > 0$

$\Rightarrow \frac{(t-1)^3}{3\,C^3} > 0$

Donc $\forall t \in I,\ t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} \leq \ln(t)$ (1)

De même, on a : $h(t) = h(1) + \frac{t-1}{1!}\,h'(1) + \frac{(t-1)^2}{2!}\,h^{(2)}\ (C)$

$$h(t) = t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2\,C^2}$$

$$\ln(t) - (t-1) = -\frac{(t-1)^2}{2\,C^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \ln(t) - (t-1) \leq 0 \Rightarrow \ln(t) \leq (t-1) \quad (2)$$

Finalement, (1) et (2) nous donne le résultat.

4) Montrer que $\ln(x+1) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq \ln(x+1)$

D'après 3), $\forall t \in I, t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} \leq \ln(t) \leq t - 1$

Comme $\forall t \in I, (t-1)^2 > 0, \frac{1}{(t-1)^2} > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{(t-1)^2}\left[t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2}\right] \leq \frac{\ln(t)}{(t-1)^2} \leq \frac{t-1}{(t-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \leq \frac{\ln(t)}{(t-1)^2} \leq \frac{1}{t-1}$$

En appliquant l'intégrale partout sur $[x, x^2]$, on a :

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} - \int_x^{x^2} \frac{dt}{2} \leq f(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$$

$[\ln(t-1)]_x^{x^2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \leq f(x) \leq [\ln(t-1)]_x^{x^2}$ D'où le résultat.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

5) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

D'après la 4), $\forall x \in I,\ \ln(x+1)+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq \ln(x+1)$

Posons $\gamma(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}$; $\sigma(x)=\ln(x+1)$

On a : $\lim\limits_{x\to 1^+}\gamma(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sigma(x)=\ln(2)$

Comme $\lim\limits_{x\to 1^+}\gamma(x) \leq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \leq \lim\limits_{x\to 1^+}\sigma(x)$, on en déduire que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ existe et en appliquant le théorème des Gendarmes, on a :

$\ln(2) \leq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \leq \ln(2) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\ln(2)$

EXERCICE 3

Intégrons les équations différentielles :

1) $x''+ax'+4x=\cos(2t)$ avec $x(0)=0$ et $x'(0)=\frac{1}{a}$

Soit (E_1) : $x''+ax'+4x=\cos(2t)$

- Equation homogène (E_{1H}) associée à (E_1).

(E_{1H}) : $x''+ax'+4x=0$

- Equation caractéristique (E_C).

(E_C) : $r^2+ar+4=0$

$\Delta = a^2-16$ or $a \in]0\,;4[$ donc $\Delta<0$

d'où $r_1=\frac{-a-i\sqrt{16-a^2}}{2}$ et $r_2=\frac{-a+i\sqrt{16-a^2}}{2}$

$r_1=-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}i\sqrt{16-a^2}$ et $r_2=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}i\sqrt{16-a^2}$

- Solution homogène x_H

$x_H=\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right)+\mathrm{B}\sin\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right)\right]e^{-\frac{1}{2}at}$ avec $A,B \in \mathbb{R}$

- Equation particulière x_P

(E_1) est une équation différentielle du second ordre avec pour second membre $\cos(2t)$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Donc une solution particulière de (E_1) est de la forme :

$x_P = t^s(V(t)\ \cos(2t) + T(t)\ \sin(2t))\ e^{at}$ avec $\deg V = \deg T = 0$ donc $V(t) = c$ et $T(t) = d$; c et $d \in \mathbb{R}$.

Comme $2i$ n'est pas solution de notre équation caractéristique alors $s = 0$

d'où $x_P = c\ \cos(2t) + d\ \sin(2t)$. x_P étant une solution particulière de (E_1) alors :

$$x_p'' + ax_p' + 4x_p = \cos(2t)$$

$$x_P = \mathrm{c}\cos(2t) + d\ \sin(2t)$$

- $4x_P = 4c\cos(2t) + 4d\ \sin(2t)$

$$x_p' = -2\mathrm{c}\sin(2t) + 2d\ \cos(2t)$$

- $ax_p' = -2\mathrm{ac}\sin(2t) + 2ad\ \cos(2t)$
- $x_p'' = -4\mathrm{c}\cos(2t) - 4d\ \sin(2t)$

On obtient : $(-4c + 2ad + 4c)\ \cos(2t) + (-4d - 2ac + 4d)\ \sin(2t) = \cos(2t)$

$$2ad\cos(2t) - 2ac\ \sin(2t) = \cos(2t)$$

Par identification : $\begin{cases} 2ad = 1 \\ -2ac = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{1}{2a} \\ c = 0 \end{cases}$

Donc $x_P = \frac{1}{2a}\ \sin(2t)$

- Solution générale x_G

La solution générale de (E_1) est d. La forme $x_G = x_H + x_P$

Donc $x_G = \left[A\cos\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right)\right]e^{-\frac{1}{2}at} + \frac{1}{2a}\sin(2t)$ avec $A; B \in \mathbb{R}$

$$x'(t) = x_G' = \left[-\frac{A\sqrt{16-a^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right)\right.$$
$$+\frac{B\sqrt{16-a^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right) - \frac{Aa}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right)$$
$$\left.-\frac{Ba}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right)\right]e^{-\frac{1}{2}at} + \frac{1}{a}\cos(2t)$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$x'(0) = \frac{B\sqrt{16-a^2}}{2} - \frac{Aa}{2} + \frac{1}{a}$$

$$x(0) = x_G(0)$$

$$\begin{cases} x'(0) = \frac{1}{a} \\ x(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{B\sqrt{16-a^2}}{2} - \frac{Aa}{2} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \\ A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \frac{B\sqrt{16-a^2}}{2} = 0 \end{cases}$$

D' où $x = \frac{1}{2a}\sin(2t)$

2) $y'' + y = cotan(x)$

Soit (E_2) : $y'' + y = cotan(x)$

- Equation homogène (E_{2H})

(E_{2H}) : $y'' + y = 0$

- Equation caractéristique (E_C)

(E_C) : $r^2 + 1 = 0$

Donc $r = i$ ou $r = -i$

- Solution homogène y_H

$y_H = A\cos(x) + B\sin(x)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

- Solution particulière y_P

- Déterminons le Wronskien $w(x)$

$$w(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix}$$

$$= cos^2(x) + sin^2(x)$$

$w(x) = 1 \neq 0$, donc les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont libres. D'où une solution particulière de (E_2) est la forme $y_P = A(x)\cos(x) + B(x)\sin(x)$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

On ressourd le système suivant :

$$\begin{cases} A'(x)\cos(x) + B'(x)\sin(x) = 0 \\ -A'(x)\sin(x) + B'(x)\cos(x) = cotan(x) \end{cases}$$

$$A'(x) = \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ cotan(x) & \cos(x) \end{vmatrix}$$

$$= -cotan(x)\sin(x)$$

$$= -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \times \sin(x)$$

$$A'(x) = -\cos(x)$$

$$A(x) = \int -\cos(x)\, dx$$

$$A(x) = -\sin(x) + C$$

Pour $C = 0$; $A(x) = -\sin(x) + C$

$$B'(x) = \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & cotan(x) \end{vmatrix}$$

$$= cotan(x) \times \cos(x)$$

$$B'(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}$$

$$B(x) = \int \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\, dx$$

$$= \int \frac{1 - \sin^2(x)}{\sin(x)}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin(x)}\, dx - \int \sin(x)\, dx$$

$$= \int \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)}\, dx - \int \sin(x)\, dx$$

$$B(x) = \int \frac{\sin(x)}{1 - \cos^2(x)}\, dx - \int \sin(x)\, dx$$

- $\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + C_1$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Pour $C_1 = 0$ on a : $\int \sin(x)\ dx = -\cos(x)$

$$I = \int \frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)}\ dx$$

Posons $t = \cos(x) \Leftrightarrow dt = -\sin(x)\ dx$

$$I = -\int \frac{dt}{1-1^2}$$

$$I = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C_2$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \text{ pour } C_2 = 0$$

$$I = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}\right|$$

Donc $B(x) = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}\right| + \cos(x)$

D'où : $y_P = -\sin(x)\ \cos(x)\ -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}\right|\ \sin(x) + \cos(x)\ \sin(x)$

$$y_P = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}\right|$$

- Solution générale y_G

y_G est de la forme : $y_G = y_H + y_P$

$$y_G = A\cos(x) + B\sin(x) - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}\right| \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

3) $x^2y''(x) - 3xy'(x) + y(x) = x^2$

Soit $(E_3) = x^2y''(x) - 3xy'(x) + y(x) = x^2$

Posons $t = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^t$

On obtient donc :

$$e^{2t}y''(e^t) - 3e^ty'(e^t) + y(e^t) = e^{2t} \qquad (1)$$

Posons $z = y(e^t)$

$$z' = e^ty'(e^t)$$

$$z'' = e^ty'(e^t) + e^{2t}y''(e^t)$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$z'' = z' + e^{2t}y''(e^t)$$

$$z'' - z' = e^{2t}y''(e^t) \qquad (2)$$

(2) dans (1) donne :

$$z'' - z' - zz' + z = e^{2t}$$

$$z'' - 4z' + z = e^{2t} \qquad (E_4)$$

- Equation homogène associé a (E_4) : (E_H)

(E_H) : $z'' - 4z' + z = 0$

- Equation caractéristique (E_C)

(E_C) : $r^2 - 4r + r = 0$

$\Delta = 16 - 4 = 12$

$$r_1 = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} \quad et \quad r_1 = \frac{4 + \sqrt{12}}{2}$$

- Solution homogène z_H

$$z_H = C_1 e^{\frac{4-\sqrt{12}}{2}t} + C_2 e^{\frac{4+\sqrt{12}}{2}t} \quad ; \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Solution particulière z_P

(E_4) est une équation avec second membre de type exponentielle polynôme donc z_P est de la forme : $z_P = R(t)\,e^{2t}$ or 2 n'est pas solution de (E_C) donc $\deg R = 0$

d'où $z_P = ae^{2t}, a \in \mathbb{R}$ et comme $z_P'' - 4z_P' + z_P = e^{2t}$

$z_P = ae^{2t}$

$z_P' = 2ae^{2t}$

$-4\,z_P' = -8ae^{2t}$

$z_P'' = 4ae^{2t}$

On obtient : $ae^{2t} - 8ae^{2t} + 4ae^{2t} = e^{2t}$

$$-3ae^{2t} = e^{2t} \Leftrightarrow -3a = 1$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

d'où $z_P = -\frac{2}{3}\,e^{2t}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

- Solution générale de (E_4)

$z_G = z_H + z_P$

$$z_G = C_1 e^{\frac{4-\sqrt{12}}{2}t} + C_2 e^{\frac{4+\sqrt{12}}{2}t} - \frac{2}{3} e^{2t} \quad ; \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Solution générale y_G de (E_3)

On a : $z(t) = y(e^t)$

$z(\ln(x)) = y(x)$

$$y(x) = C_1 e^{\frac{4-\sqrt{12}}{2}\ln(x)} + C_2 e^{\frac{4+\sqrt{12}}{2}\ln(x)} - \frac{2}{3} e^{2\ln(x)}$$

$$y_x = C_1 \frac{4-\sqrt{12}}{2} + C_2 \frac{4+\sqrt{12}}{2} - \frac{2}{3} x^2 \; ; \; (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXERCICE
INTEGRALES

1. $A = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ Posons $t = x + \sqrt{x^2+x+1}$

$\Rightarrow t - x = \sqrt{x^2+x+1}$
$\Rightarrow t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + x + 1$
$\Rightarrow t^2 - 2tx = x + 1$
$\Rightarrow t^2 - 1 = x + 2tx$
$\Rightarrow t^2 - 1 = x(1+2t)$
$\Rightarrow x = \frac{t^2-1}{(1+2t)}$
$\Rightarrow dx = \frac{2t(1+2t)-2(t^2-1)}{(1+2t)^2}dt$
$\Rightarrow dx = \frac{2t+4t^2-2t^2+2}{(1+2t)^2}dt$
$\Rightarrow dx = \frac{2t+2t^2+2}{(1+2t)^2}dt$
$\Rightarrow dx = 2\frac{(t+t^2+1)}{(1+2t)^2}dt$
$A = 2\int \frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt$

décompositions en éléments simple de $\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}$

On à : $\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+2t} + \frac{c}{(1+2t)^2}$
$\Rightarrow t^2 + t + 1 = a(1+2t)^2 + bt(1+2t) + ct$
$\Rightarrow t^2 + t + 1 = a + 4at + 4t^2 + bt + 2bt^2 + ct$
$\Rightarrow t^2 + t + 1 = (4+2b)t^2 + (b+4a+c)t + a$

Par identification on a :

$$\begin{cases} 4+2b = 2 \\ b+4a+c = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

On à donc : $(-3/2) + 4 + c = 1$
$\Rightarrow c = -3/2$
Ainsi $\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2} = \frac{1}{t} - \frac{3}{2} * \frac{1}{1+2t} - \frac{3}{2} * \frac{1}{(1+2t)^2}$
$\Rightarrow A = \int (\frac{2}{t} - \frac{3}{1+2t} - \frac{3}{(1+2t)^2})dt$
$A = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1+2t| + \frac{3}{2(1+2t)} + k$
$A = 2\ln|x+\sqrt{x^2+x+1}| - \frac{3}{2}\ln|1+2(x+\sqrt{x^2+x+1})| + \frac{3}{2}\frac{1}{1+2(x+\sqrt{x^2+x+1})} + k$
$B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x \cos x dx}{\cos x + \sin x}$
$B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2 x)\cos x dx}{\cos x(1+\tan x)}$
$B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan x * dx}{1+\tan x}$
Posons $t = \tan x$
$\Rightarrow dt = (1+\tan^2 x)dx$
Finalement $B = [\ln|1+t|]_0^1$
$B = \ln 2$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

2. $\lim_{\to+\infty}\int_{n^2+1}^{n^2+n+1}\frac{\arctan^2 x\,dx}{\sqrt{x}}$
on à la fontion $\arctan^2 x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc continue sur $[n^2+1; n^2+n+1]$.
De plus la fonction f par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ est positive sur $[n^2+1; n^2+n+1]$. Alors
$\exists c \in [n^2+1; n^2+n+1]$ tel que :
$I=\int_{n^2+1}^{n^2+n+1}\frac{\arctan^2 x\,dx}{\sqrt{x}}$
$I=\arctan^2 c\int_{n^2+1}^{n^2+n+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$
$I=\arctan^2 c\,[2\sqrt{x}]_{n^2+1}^{n^2+n+1}$
$I=2\arctan^2 c\,(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1})$
$I=2\arctan^2 c\,\frac{n^2+n+1-n^2-1}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}}$
$\lim_{\to+\infty} I=\arctan^2 c$

EXERCICE2

(a) Soit f la fontion definie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{\exp(-\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x})}{x}$
Posons : $X=\frac{1}{x}$
$f(\frac{1}{X})=X(\exp(-X)-\cos(X))$

$f(\frac{1}{X})=X(1-X+\frac{X^2}{2}-\frac{X^2}{2}-\frac{X^3}{6}-1-\frac{X^2}{2})$

$f(\frac{1}{X})=X(-X-\frac{X^3}{6})$

$f(\frac{1}{X})=-X^2+\epsilon(X^3)$

(b) Déduisons une équivalence de F au voisinage de ∞.
son équivalence est donc : $-\frac{1}{x^2}$

(c) Nature de l'integrale.
Soit $B=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}(\exp(-\frac{1}{t})-\cos(\frac{1}{t}))dt$
D'après la question 2),on à : $B\approx\int_1^{+\infty}-\frac{1}{x^2}dx$.
D'après Riemann B est convergente.

EXERCICE 3

Résolvons (E)

(d) $(E): 2x^2y'=(x-1)y^2+2xy-x^3+x^2\ \forall\in]0;+\infty[$
$(E)\Leftrightarrow y'=\frac{x-1}{2x^2}y^2+\frac{1}{x}y+\frac{x^2-x^3}{2x^2}$.
Ce qui donne une équatoin de Ricatti.
Posons $y=y_p+\frac{1}{t}$ avec $y_p=x$
$\Rightarrow y=x+\frac{1}{t}$
$(E)\Leftrightarrow 1-\frac{t'}{t^2}=\frac{x-1}{2x^2}(x+\frac{1}{t})^2+\frac{1}{x}(x+\frac{1}{t})+\frac{x^2-x^3}{2x^2}$
$\Rightarrow -\frac{t'}{t^2}=\frac{1}{t}+\frac{x-1}{2x^2t^2}$
$\Leftrightarrow t'+t=\frac{1-x}{2x^2}$
On obtient une équation linéaire de première ordre.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Résovons l'équation $(E) : t' + t = \frac{1-x}{2x^2}$
On à : $(E_H) : t' + t = 0$
Solutons de (E_H) sont de la forme $t_H = k\exp(-x)$, $k \in \mathbb{R}$
t_p est une solution particulière.
On à : $t_p = k(x)\exp(-x)$
Donc $t'_p = k'(x)\exp(-x) - k(x)\exp(-x)$
On à : $t'p + t_p = \frac{1-x}{2x^2} \Leftrightarrow (k'(x) - k(x))\exp(-x) + k(x)\exp(-x) = \frac{1-x}{2x^2}$
$\Rightarrow k'(x)\exp(-x) = \frac{1-x}{2x^2}\exp(x)$
$\Rightarrow k(x) = \int \frac{1-x}{2x^2}\exp(x)dx$
$\Rightarrow k(x) = -\frac{1}{2x}(1-x)\exp(x) - \int \frac{x\exp(x)}{2x}dx$
$\Rightarrow k(x) = -\frac{1}{2x}\exp(x)$
Donc $t_p = -\frac{1}{2x}$.
L'ensemble des solutions vérifiant (E') est : $t = k\exp(x) - \frac{1}{2x}, k \in \mathbb{R}$.
On en deduit que l'ensemble des solution de (E) est : $y = x + \frac{1}{(k\exp(x) - \frac{1}{2x})}$; $k \in \mathbb{R}$.

(c) $(E) : y'' + y' - 2y = \exp(t)\sin(t) + t + 1$
L'equation homogène est : $(E_H) : y'' + y' - 2y = 0$
Determinons y_H.
Le polynome caracteristique $P = X^2 + X - 2$
$\Delta = 9 > 0$ Donc P admet deux racines distincts.
$X_1 = \frac{-1-3}{2}$ et $X_2 = \frac{-1+3}{2}$
$X_1 = -2$ et $X_2 = 1$
D'où : $y_H = A\exp(-2x) + B\exp(x)$, $A, B \in \mathbb{R}$
Soit $(E_1) : y'' + y' - 2y = \exp(t)\sin(t)$ et $(E_2) : y'' + y' - 2y = t + 1$
Recherche d'une solution particulière.
Une solution particulière de (E_1) est de la forme $y_{P_1} = (a\cos(t) + b\sin(t))\exp(t)$
-Determinons a et b.
On à : $y'_{P_1} = (-a\sin(t) + b\cos(t))\exp(t) + (a\cos(t) + b\sin(t))\exp(t)$
$y'_{P_1} = ((b+a)\cos(t) + (b-a)\sin(t))\exp(t)$
$y''_{P_1} = (-2a\sin(t) + 2b\cos(t))\exp(t)$. Dans (E_1) on à :
$y''_{P_1} + y'_{P_1} - 2y_{P_1} = \exp(t)\sin(t)$
$\Leftrightarrow (-2a\sin(t) + 2b\cos(t))\exp(t) + ((b+a)\cot(t) + (b-a)\sin(t))\exp(t) + (-2a\cos(t) -$
$\Leftrightarrow ((3b-a)\cos(t) - (3a+b)\sin(t))\exp(t) = \sin(t)\exp(t)$
Par identification : $\begin{cases} 3b - a = 0 \\ -3a - b = 1 \end{cases}$

. $\Rightarrow \begin{cases} 3b - a = 0 \\ -10a = 3 \end{cases}$
. $\Rightarrow a = \frac{3}{10} et b = \frac{1}{10}$.
Donc $y_{P_1} = (\frac{3}{10}\cos(t) + \frac{(1}{10}\sin(t))\exp(t)$
Une solution particulière de (E_2) est de la forme $y_{P_2} = (at + b)\exp(t)$
Soit $y_{P_2} = at + b$
On à : $y'_{P_2} = a$ et $y''_{P_2} = 0$
$y''_{P_2} + y'_{p_2} - 2y_{P_2} = t + 1 \Leftrightarrow a - 2(at + b) = t + 1$
$\Leftrightarrow -2at + a - 2b = t + 1$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Par identification on à :

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ a - 2b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

. Donc $y_{p_2} = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$

L'ensemble des solutions de l'équation de (E) est :

$y = A\exp(-2t) + B\exp(t) + (\frac{3}{10}\cos(t) + \frac{1}{10}\sin(t))\exp(t) - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}$; $A, B \in \mathbb{R}$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFRM1	2017
QCM réponse juste +1 *réponse fausse -0,5* *sans réponse 0* *PS : La similitude n'est pas toujours une égalité.*	**L1** **Algorithme** **Examen - session1** **Duree : 1H15**

QCM répondre en recopiant la bonne réponse

Q1 Quel est le résultat de l'exécution de :

```
a<---5
ib<--2
ecrire ('a+ib')
```

a) 5+2
b) 7
c) 5+i2
d) a+ib

Q2 l'initialisation valide de la variable produit (p) pour calculer le produit des 10 premiers entiers non nul

a) p←0
b) p←1
c) p←1.0
d) p←produit

Q3 soit l'extrait de l'algorithme et la saisie des valeurs de 'sexe' et 'etat':

```
si (sexe='M')alors ecrire(' monsieur', nom)
 sinon
          si (etat='C')alors
ecrire(' mademoiselle',nom)
             sinon ecrire ('bonjour Madame', nom);
         finsi
finsi
```



Le programme affichera :

a) bonjour monsieur TANOH
b) mademoiselle TANOH
c) bonjour madame TANOH
d) Bonjour mademoiselle TANOH
e) Rien

Q4
```
carlu←' '  { c est à dire espace}
Tant que carlu<>'.' Faire
  Lire (carlu)
```

Combien d itérations seront faites pour '.elle est petite.' ?

a) 0
b) 17
c) 1
d) vrai

Q5 Soit l'extrait de l'algorithme qui permet de ranger dans un tableau les nombres générés (de 1 à 6) de manière aléatoire par random(6)+1

Scanné avec CamScanner

```
pour i<--1 a nblancer faire
      lancer[i]<-- random(6)+1
    finpour
   Ecrire('Génération réussie pour ', nblancer)
```

Quel est le type de la variable lancer ?

a) Fonction
b) Procédure
c) Tableau
d) ensemble

Q6 Soit une fonction qui recherche le nombre de zéro présent dans un tableau à une dimension, son entête peut être :

```
a) Fonction recherchezero()
b) Fonction recherchermax(t:tableau[1..10] de entier) : entier
c) Fonction recherchermax(t:tableau[1..10] de entier) : booleen
d) Procedure rechercher(zero):entier
```

EXERCICE 1

```
C:\TPW\NONAME00.EXE
Initialisation
saisir l'élément1
25
saisir l'élément2
65
saisir l'élément3
96
saisir l'élément4
54
saisir l'élément5
97
```

Soit L'exécution du programme ci-dessus :
1°) Quelle est la structure de donnée (L) utilisée pour enregistrer les éléments saisis ?
2°) expliquer le principe de la recherche du minimum
3°) Ecrire l'algorithme de recherche du minimum dans L(on supposera le tableau non saisi)
4°) Ecrire une fonction qui recherche le minimum de L et l'appeler dans un programme principal

EXERCICE 2

Écrire un programme qui estime la valeur de la constante mathématique e en utilisant la formule.

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{1\times 2\times 3\times 4} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Pour cela, définissez la fonction factorielle et, dans votre programme principal, saisissez l'ordre n et affichez l'approximation correspondante de e.

6 - 8 - 6

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFRMI	2018
QCM *réponse juste +1* *réponse fausse -0,5* *sans réponse 0*	**L1 Algorithme** **Examen - session -Durée : 1H00** 1

QCM répondre en recopiant la bonne réponse

Q1

Dans l'algorithme de résolution d'une équation du second degré avec a,b,c non nuls, quel peut être l'identificateur valide pour le discriminant ?	a) 2delta b) Δ c) delta d) bb-4ac

Q2

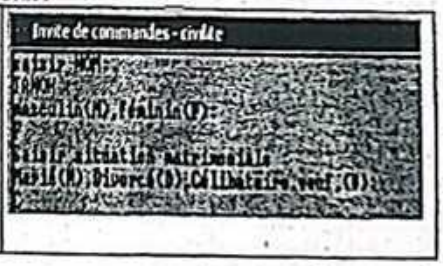
Quel est le résultat de l'exécution ?
`ai<---5`
`b<--2`
`ecrire (ai+b)`
	a) 5+2
	b) 7
	c) 5+i2
	d) a+ib

Q3

Soit la variable fact de type ENTIER permettant de calculer n! grâce à un algorithme. Quelle est la bonne initialisation pour fact?
L'instruction clé se trouve dans une boucle :
`pour i<--2 jusqu'à n faire`
`  fact<--fact*i`
`fin pour i`
	a) `Fact<--0`
	b) `fact<--1.0`
	c) `fact<---1`
	d) `fact<---n!`

Q4 Soit l'extrait de l'algorithme et la saisie des valeurs de 'sexe' et 'état':

```
si (sexe='M')alors ecrire('monsieur',nom)
 sinon
    si (etat='C')alors
ecrire('mademoiselle',nom)
        sinon ecrire ('bonjour Madame',
nom);
    finsi
finsi
```



Le programme affichera :

a) bonjour monsieur TANOH
b) mademoiselle TANOH
c) bonjour madame TANOH
d) Bonjour mademoiselle TANOH
e) Rien

Q5

Quelle est la valeur de la variable booléenne cont après l'exécution?
`secret<---100`
`nombreprop<--- (-1)`
`essai<---0`
`cont<--- (nombreprop <> secret) ET (essai>0)`
	a) vrai
	b) et
	c) faux
	d) ou
	e) non(ou)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

Q6

Soit l'extrait de l'algorithme qui permet de ranger dans un tableau les nombres générés (de 1 à 6) de manière aléatoire par random(6)+1

```
Nblancer <--- 6
pour i<--1 a nblancer faire
     lancer[i]<-- random(6)+1
   finpour
Ecrire('Génération réussie pour ',
nblancer)
```

Quel est le contenu possible pour lancer[ ] ?

a) 2 9 8 1 5 5
b) 0 1 2 3 4 5
c) 1 2 3 4 5 6
d) 1 2 2 5 5 6

Q7

Soit le sous algorithme de détermination du nombre de moyennes supérieures à 10 dans un tableau, son entête peut être :

a) `Fonction Moyenne10sup() : reel`
b) `procedure MOYsup10(t:tableau[1..10] de reel)`
c) `Fonction MoyenneSup(t:tableau[1..10] de réel) : entier`
d) `Procedure rechercher(dix):entier`

Q8

soit la fonction :

```
fonction  estplusgrand(a,b:
entier):booleen
variable
  res : booleen
debut
  res <---- a>b
  returner(res)
fin
```

On qualifie res de :

a) variable local
b) paramètre formel
c) paramètre effectif
d) variable global

EXERCICE

```
C:\TP\A\NONAME00.EXE
Initialisation
saisir l'élément1
25
saisir l'élément2
65
saisir l'élément3
96
saisir l'élément4
54
saisir l'élément5
97
```

la méthode de tri par sélection dont le principe est le suivant:

On parcourt le tableau pour rechercher le plus petit élément. On le permute avec le premier élément du tableau. On effectue le même traitement avec le tableau privé de son premier élément. Et on répète l'opération jusqu'à ce que tout le tableau soit trié.

Soit L'exécution du programme ci-dessus:

1°) Quelle est la structure de données (T) utilisée pour enregistrer les éléments saisis ?
2°) Ecrire la syntaxe de déclaration de T.
3°) Ecrire l 'algorithme d 'affichage des elements de T (on supposera le tableau non saisi T <---[25,65,96,54,97]).
4°) Ecrire l'algorithme de recherche du minimum de T
5°) Trier T
6°) Reprendre l'algorithme en utilisant la notion de fonction et de procedure.(affichage, tri puis affichage)

Scanné avec CamScanner

UFRMI	EXAMEN session1 2018/2019 L1 Algorithme *Durée : 1H30*

Exercice 1

a) Ecrire dans l'ordre les étapes de réalisation d'un programme

b)

```
Algorithme egypte
  variable
   X,y,p :entier
  debut
   lire(x,y)
   p←0
   tantque 0<y faire
     si (y mod 2=0) alors
       x ← 2*x
       y ← y div 2
     sinon
       p ← p+x
       y ← y-1
     finsi
   fintantque
   ecrire(p)
finalgorithme
```

1. Donner la trace de l'algorithme correspondant à une méthode de calcul égyptienne (env. 1650 avant JC) pour :
   5 et 3 - 4 et 5 - 100 et 0
2. Que fait l'algorithme ?
3. Ecrire une version plus simple

Exercice 2

Soit l'algorithme ci-dessous :

```
1  Algorithme PROG;
2  Variable
3  A : entier;
4   Procedure PROC(variable Z: entier)
5   Variable
6        Y:entier
7   Begin
8    Y ←   2*(Z-1)
9    Z ←  (Z*Z) div Y
10   Ecrire('Z: ',z)
11  fin // procedure
12 Begin
13 A← 5;
14                // activation
15                // affichage de la valeur de A
16 Fin
```

1. A quelles lignes sont mis en œuvre les concepts suivants :

   Déclaration de variable locale,

   Declaration de paramètre formel,

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Entête de sous algorithmes.

2. Ecrire les lignes 14 et 15 de l'algorithme
3. sachant que le mot clé Variable de la ligne 4 permet de garder la modification du paramètre effectif, donner l'exécution si la procédure est écrite avec ou sans ce mot

Exercice 3 : Suite de FIBONACCI

On veut calculer les n premiers termes de la suite de FIBONACCI :

$U_0=1$, $U_1=1$ et $\forall n$ appartient à IN $U_{n+2}=U_{n+1}+U_n$

Le pseudo code suivant a été écrit :

```
u ←u0
v ←u1
Pour i variant de 1 à n faire
    w ←u+v
    u ←v
    v ←w
```

1.1 Réécrire l'algorithme après une analyse des données utilisées .Insérer l'affichage du terme courant

1.2 Donner l'exécution du programme pour les dix premiers termes.

1.4 On veut insérer les termes dans un tableau de taille 50, ecrire l algorithme

1.5 en déduire une méthode de calcul du nombre d'or. Ecrire la fonction qui calcule le nombre d'or.

La suite de Fibonacci doit son nom au mathématicien italien Leonardo Fibonacci qui a vécut au XIIème et XIIIème siècle. Il est connu pour avoir introduit et popularisé en Europe et en Occident la numérotation indo-arabe qui a remplacé pour les calculs la notation romaine peu pratique aux opérations arithmétiques.

Mais il est aussi connu pour avoir mis en évidence une suite mathématique qui porte désormais son nom. Dans la suite de Fibonacci, il n'est pas nécessaire de mémoriser chacun des termes ou nombres de la suite (qui est d'ailleurs infinie). Il suffit de se rappeler sa règle de construction: **à l'exception des deux premiers, chaque terme de la suite est égal à la somme des deux termes qui le précèdent immédiatement**, dit autrement il s'agit d'une suite de nombres dans laquelle tout nombre (à partir du troisième) est égal à la somme des deux précédents:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,...

Il suffit de prendre deux nombres de départ. Les ajouter donne le troisième, puis le deuxième + le troisième donne le quatrième et ainsi de suite. Les termes de cette suite sont appelés **nombres de Fibonacci.**

La suite de Fibonacci possède de nombreuses propriétés très utilisées en mathématiques. Une d'entre elles est que le rapport de deux nombres consécutifs de la suite est alternativement supérieur et inférieur au nombre d'or, un nombre remarquable qui vaut exactement 1.61803398...

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

En effet: 13/8 = 1.625 ; 21/13 = 1.61538... ; 34/21 = 1.61904...et ainsi de suite...plus on avance dans la

Scanné avec CamScanner

suite de Fibonacci, plus l'écart s'amenuise, et plus le rapport des deux nombres successifs (le plus grand / le plus petit) tend vers la valeur du nombre d'or 1,61803...l

En géométrie, le nombre d'or est la valeur qui correspond au rapport entre deux longueurs a (la plus grande) et b (la plus petite) telles que **(a+b)/a = a/b.**

Le nombre d'or était déjà utilisé par les Grecs, comme par exemple dans le Parthénon (le temple que les Grecs consacraient à certains de leurs dieux) dont le fronton est inscrit dans un rectangle dont les longueurs des côtés adjacents ont le nombre d'or comme rapport. Les peintres et architectes comme Botticelli, Dali ou Le Corbusier, pour ne citer qu'eux, l'ont utilisé dans leurs oeuvres. Le nombre d'or est souvent associé à des qualités esthétiques particulières et à des proportions harmonieuses. On constate aussi généralement que le rapport de la taille d'une personne avec la hauteur de son nombril est proche du nombre d'or...

Dans la nature, on retrouve très souvent des motifs basé sur la suite Fibonacci et sur le nombre d'or. Il semblerait que la nature marque une prédilection pour la suite de Fibonacci et pour le nombre d'or.

- les pommes de pins (pives)
- les marguerites
- les ananas
- les tournesols
- les cactus
- les étoiles de mer
- les coquilles de mollusques
- les galaxies
- les cyclones météorologiques

Exercice 1 6pts
Exercice 2 4pts
Exercice 3 : 10 pts

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

	2018/2019
UFR DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE	*Algorithme* *Examen session2* *Durée 1H30min* *rendre la page 4*

Exercice 1 : COURS

C1 Parmi ces messages affichées par un algorithme lesquels peuvent provenir de l'instruction `Ecrire (a)` : 1 4.3 a saisir a 3.14 E+01 print(a)

C2 Evaluez l'expression. On suppose que le premier indice est 1.
`Palindrome ← (Palindrome) et ( mot[i]=mot[longueur-i+1])`
Pour mot='ELLA' sachant que palindrome a été initialisé à 'false'

C3 Donner l'evaluation de l'expression pour le mot '2020'.

C4 Pour le type Booléen, quel est le domaine de valeur et les opérations possibles ?

Exercice 2 : Suite de FIBONACCI

On veut calculer les n premiers termes de la suite de FIBONACCI :
$U_0=1$, $U_1=1$ et $\forall$ n appartient à IN $U_{n+2}=U_{n+1}+U_n$
Le pseudo code suivant a été écrit :

```
u←u0
v←u1
Pour i variant de 1 à n faire
        w←u+v
        u←v
        v←w
```

2.1 Réécrire l'algorithme après une analyse des données utilisées .Insérer l'affichage du terme courant
2.2 Donner l'exécution du programme pour les dix premiers termes.
2.3 On veut insérer les termes dans un tableau de taille 50, ecrire l algorithme
2.4 en déduire une méthode de calcul du nombre d'or. Ecrire la fonction qui calcule le nombre d'or.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Problème

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs (qui sont alors 1 et lui-même).

1°) Ecrire la fonction qui teste la primalité d'un nombre entier à partir du pseudo code suivant :

```
Fonction preml(n)
     assert n >= 2      // n doit etre superieur ou égal à 2
     Pour i de 2 à n -1
          Si i divise n
          Retourne faux
     Fin Pour
     Retourne vrai
```

2°) Dans un algorithle principal, activer la fonction pour un entier a saisi au clavier.
3°) Donner la trace pour a =13 puis pour a=25

4°) Soit le tableau (T [1..100] d'entier) contenant les entiers consecutifs de 1 à 100, écrire l'algorithme de création et d'initialisation du tableau T

1	2	3	.	.	.	.	98	99	100

5°) Utiliser dans un algorithme la fonction de test de primalité pour afficher les nombres premiers du tableau.
La methode ci dessus donne le même resultat que le crible d'Eratosthène avec moins d'efficacité.

Le crible d'Ératosthène est un procédé qui permet de trouver tous les nombres premiers inférieurs à un certain entier naturel donné *N*. L'algorithme procède par élimination :
il s'agit de supprimer d'une table des entiers de 2 à N tous les multiples d'un entier. En supprimant tous les multiples, à la fin il ne restera que les entiers qui ne sont multiples d'aucun entier, et qui sont donc les nombres premiers.
On commence par rayer les multiples de 2, puis à chaque fois on raye les multiples du plus petit entier restant.

On peut s'arrêter lorsque le carré du plus petit entier restant est supérieur au plus grand entier restant, car dans ce cas, tous les non-premiers ont déjà été rayés précédemment.

À la fin du processus, tous les entiers qui n'ont pas été rayés sont les nombres premiers inférieurs à N.

6°) Donner le debut (jusqu'à la cellule 20) du tableau pour les 4 premieres iterations a partir de 2.

	2	3																	

	2	3																	

Scanné avec CamScanner

Annexe : La suite de Fibonacci doit son nom au mathématicien italien Leonardo Fibonacci qui a vécut au XIIème et XIIIème siècle. Il est connu pour avoir introduit et popularisé en Europe et en Occident la numérotation indo-arabe qui a remplacé pour les calculs la notation romaine peu pratique aux opérations arithmétiques.

Mais il est aussi connu pour avoir mis en évidence une suite mathématique qui porte désormais son nom. Dans la suite de Fibonacci, il n'est pas nécessaire de mémoriser chacun des termes ou nombres de la suite (qui est d'ailleurs infinie). Il suffit de se rappeler sa règle de construction: **à l'exception des deux premiers, chaque terme de la suite est égal à la somme des deux termes qui le précèdent immédiatement**, dit autrement il s'agit d'une suite de nombres dans laquelle tout nombre (à partir du troisième) est égal à la somme des deux précédents:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,…

Il suffit de prendre deux nombres de départ. Les ajouter donne le troisième, puis le deuxième + le troisième donne le quatrième et ainsi de suite. Les termes de cette suite sont appelés **nombres de Fibonacci.**

La suite de Fibonacci possède de nombreuses propriétés très utilisées en mathématiques. Une d'entre elles est que le rapport de deux nombres consécutifs de la suite est alternativement supérieur et inférieur au nombre d'or, un nombre remarquable qui vaut exactement **1.61803398…**

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

En effet: 13/8 = 1.625 ; 21/13 = 1.61538… ; 34/21 = 1.61904…et ainsi de suite…plus on avance dans la suite de Fibonacci, plus l'écart s'amenuise, et plus **le rapport des deux nombres successifs (le plus grand / le plus petit) tend vers la valeur du nombre d'or 1,61803…!**

En géométrie, le nombre d'or est la valeur qui correspond au rapport entre deux longueurs a (la plus grande) et b (la plus petite) telles que (a+b)/a = a/b.

Le nombre d'or était déjà utilisé par les Grecs, comme par exemple dans le Parthénon (le temple que les Grecs consacraient à certains de leurs dieux) dont le fronton est inscrit dans un rectangle dont les longueurs des côtés adjacents ont le nombre d'or comme rapport. Les peintres et architectes comme Botticelli, Dali ou Le Corbusier, pour ne citer qu'eux, l'ont utilisé dans leurs oeuvres. Le nombre d'or est souvent associé à des qualités esthétiques particulières et à des proportions harmonieuses. On constate aussi généralement que le rapport de la taille d'une personne avec la hauteur de son nombril est proche du nombre d'or…

Dans la nature, on retrouve très souvent des motifs basé sur la suite Fibonacci et sur le nombre d'or. Il semblerait que la nature marque une prédilection pour la suite de Fibonacci et pour le nombre d'or.

- les pommes de pins (pives)
- les marguerites
- les ananas
- les tournesols
- les étoiles de mer
- les coquilles de mollusques
- les galaxies
- les cyclones météorologiques

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

iteration1		iteration2		iteration3		iteration4

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

UFRMI L1	Algorithme Examen 2020 Durée : 1H00
QCM réponse juste +1 *réponse fausse -0.5* *sans réponse 0*	

QCM

Q1 Quel est le résultat de l'exécution de :

```
a<---5
b<--2
ecrire (a.b)
```

a) 5.2
b) a.b
c) 10
d) Erreur

Q2 l'expression valide pour calculer le discriminant dans la résolution d'une équation de second degré en algorithme est :

a) b2-4ac
b) b*b-4ac
c) b*b-4*a*c
d) b2 -(4ac)

Q3 Soit l'extrait de l'algorithme et la saisie des valeurs de 'sexe' et 'etat'. Quelles sont les instructions pour initialiser les variables afin que l'algorithme soit fonctionnel ?

```
si (sexe='M')alors ecrire('bonjour monsieur',nom)
sinon
   si (etat='C')alors ecrire('bonjour mademoiselle',nom)
   sinon ecrire ('bonjour Madame', nom);
   finsi
finsi
```

a)	b)		c)
lire(sexe) lire(nom) ecrire (etat)	lire (nom) sexe ← 'm' Lire(etat)		Lire (nom) lire(sexe) lire(etat)

Q4 Evaluer l'expression suivante ((nombreprop<>secret) ET (essai>0)) sachant que nombreprop=-1 essai=0 secret=9050

a) et
b) faux
c) vrai
d) non(ou)

Q5 Soit l'extrait de l'algorithme qui permet de ranger dans un tableau 6 nombres générés (de 1 à 6) de manière aléatoire par random(6)+1. Quelle est la valeur de `nblancer` pour remplir le tableau ?

```
pour i<--0 a nblancer faire
    lancer[i]<-- random(6)+1
  finpour
  Ecrire('Génération reussie pour ', nblancer)
```


Scanné avec CamScanner

a) 2
b) indeterminé
c) 6
d) 5

Q6 Soit une fonction qui recherche le maximun dans un tableau tab à une dimension. On peut l'appeler dans un algorithme principal par :

a) `min<--- recherchermax(min)`
b) `min<----recherchermax(tab)`
c) `lire(min)`
d) `rechercher(tab):entier`

Q7 Soit le sous algorithme de détermination du nombre de moyennes supérieures à 10 dans un tableau, son entête peut être :

e) `Fonction Moyennel0sup() : reel`
f) `procedure MOYsup10(t:tableau[1..10] de reel)`
g) `Fonction MoyenneSup(t:tableau[1..10] de réel) : entier`
h) `Procedure rechercher(dix):entier`

Q8 soit la fonction :

```
fonction estplusgrand(a,b: entier):booléen
variable
  res: ....// ?
debut
  res <---- a>b
  retourner(res)
fin
```

Quel est le type de la variable locale **res** ?

a) entier
b) réel
c) booléen
d) vrai

EXERCICE1

```
Algorithme Égypte
 variable
  x,y,p :entier
 debut
  lire(x,y)
  p← 0
  tantque 0<y faire
   si (y mod 2=0) alors
    x ← 2*x
    y ← y div 2
   sinon
    p ← p+x
    y ← y-1
   finsi
  fintantque
  ecrire(p)
finalgorithme
```

Donner la trace de l'algorithme pour x=3 Et y=7.

EXERCICE2 The Gregory–Leibniz series

Utiliser cette formule pour écrire un algorithme itératif permettant de trouver une valeur approchée de Pi.

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 4\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots\right) = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ddots}}}}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFHB UFRMI	2021
	UE : Algorithme et programmation ECUE : Algorithme Examen Session 2 (Oct. 2021) Durée : 1 heure

COURS (QCM)

C1 Parmi ces valeurs affichées par un algorithme lesquelles peuvent provenir de l'instruction *Ecrire ('4*serie') ?*

a) 1
b) 4.3
c) 4*3.14
d) 4*serie
e) serie serie serie serie
f) Pi

C2 Evaluez l'expression et la valeur de palindrome à la fin de l'extrait de l'algorithme.

$Palindrome \leftarrow false$
$Mot \leftarrow 'ELLA'$
$Pour\ i \leftarrow 1\ jusqu'à\ longueur\ DIV\ 2\ faire$
    $Palindrome \leftarrow (Palindrome)\ and\ (mot[i] = mot[longueur - i + 1])$
$Fin\ pour$

a) Vrai
b) Non
c) Oui
d) Faux

C3 Pour le type Booléen, quel est le domaine de valeur et les opérations possibles ?

a) Oui, non, vrai faux
b) Vrai, faux, non, oui, et
c) Vrai, faux, et, non, ou
d) Non, oui, et, ou

C4 Soit la description de la recherche séquentielle dans un tableau de 20 cellules.

*Il s'agit de parcourir le tableau de la première à la dernière cellule en comparant l'élément recherché (x=97) à chacune des cellules. En cas d'égalité avec l'une des cellules, on affiche le message : **trouvé** puis on arrête la recherche.*

La structure de contrôle clé de recherche dans le tableau est :

a) $si\ (L[i] = x)\ alors\ ecrire\ ('Trouve')$
    $sinon\ ecrire\ ('Pas\ trouvé')$
b) $pour\ i \leftarrow 1\ jusqu'à\ 20\ faire$
    $si\ (L[i] = x)\ alors\ ecrire('Trouve')$
c) $tantque\ (L[i] <> x)\ et\ (i <= 5)\ faire$
    $1 \leftarrow l + 1\ fintantque$
d) $rechercher\ (L, x)$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

C5 Soit l'extrait de l'algorithme qui permet de remplir un tableau 3000 nombres générés (de 1 à 6) de manière aléatoire par random (6)+1. Le premier indice étant 0.

```
Lire (nblancer)
pour i← 0 à nblancer faire
        lancer [i] ← random (6) +1
finpour
Ecrire ('Generation reussie pour' , nblancer)
```

Quelle est la valeur de nblancer pour remplir le tableau ?

a. 2999
b. Indéterminée
c. 1/6
d. 3000
e. 123456

C6 Soit la fonction :

fonction minus2 (a, b: entier) : ……..// ?
début
  retourner (a > b)
fin

Quel est le type retourné par la fonction dans l'entête ?

a) Booléen
b) Réel
c) Entier
d) Indéterminé

C7 *Si…….Alors ……Sinon……..FinSi* permet de vérifier……?

a) Une seule condition
b) Deux conditions
c) Trois conditions
d) Plusieurs conditions

C8 Quelle est l'instruction erronée ?

a) $x \leftarrow x + 2/y$
b) $x \leftarrow x$
c) $5 \leftarrow x.$

C9 Un algorithme peut être de différentes structures (2 réponses attendues)

a) Automatique
b) Conditionnelle
c) Électronique.
d) Itérative
e) Électrique.

C10 Soit le sous algorithme de détermination de la plus grande moyenne dans un tableau, son entête peut être :

a) *Fonction Moyennesup() : booléen*
b) *Procédure MOYsup (t: tableau[1 … 100] de réel)*
c) *Fonction MoyenneSup (t: tableau[1 … 100] de réel) : réel*

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

d) *Procédure recherchermax* (t: *tableau*[1..100]) : *entier*

Exercice 1

Écrire un algorithme qui estime la valeur de la constante mathématique e en utilisant la formule.

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{1\times 2\times 3\times 4} + \cdots = \sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

Pour cela :

a) Définir (Ecrire) la fonction factorielle *factorielle* (x : *tentier*) : *entier*.

b) Dans votre algorithme principal, saisissez l'ordre n et affichez l'approximation correspondante de e.

c) Dans la pratique avec les entiers représentés en SVA sur un ordinateur 8 bits il est conseillé de saisir n inférieur à 10 factorielle (11) factorielle (11) =39 916 800 apparait comme une valeur négative et fait diverger le résultat. Expliquer pourquoi ? *factorielle*(11)

Exercice 2 : Suite de FIBONACCI

On veut calculer les n premiers termes de la suite de FIBONACCI.

$U_0 = 1, U_1 = 1$ et $\forall\, n$ appartient à $\mathbb{N}$: $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$

Le pseudo code suivant a été écrit :

$u \leftarrow u_0$

$v \leftarrow u_1$

Pour i variant de 1 à n *faire*

$w \leftarrow u + v$

$u \leftarrow v$

$v \leftarrow w$

2.1 Réécrire l'algorithme après une analyse des données utilisées.

2.2 Donner la trace pour les dix premiers termes.

2.3 On veut insérer les termes dans un tableau de taille 100, Ecrire l'algorithme.

2.4 Ecrire la fonction qui calcule le nombre d'or.

La suite de Fibonacci possède de nombreuses propriétés très utilisées en mathématiques. Une d'entre elles est que le rapport de deux nombres consécutifs de la suite est alternativement supérieur et inférieur au nombre d'or, un nombre remarquable qui vaut exactement : 1.61803398...

En effet : 13/8=1.625 ; 21/13=1.61538... ; 34/21=1.61904... et ainsi de suite... plus on avance dans la suite de Fibonacci, plus l'écart s'amenuise, et plus le rapport des deux nombres successifs (le plus grand/le plus petit) tend vers la valeur du nombre d'or 1,61803...!

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

CORRECTION PARTIELLE ALGO 2018-2019 SESSION 1

Exercice 1

a) Les étapes dans l'ordre de réalisation d'un programme

**identification de l'algorithme (algorithme : Identification)

**déclaration de constantes et de variables (constantes, variables globales, sous-algorithme)

**ouverture du corps de l'algorithme (DEBUT)

**déclaration de l'ensemble des instructions

**fermeture du corps de l'algorithme (FIN)

b)

1. La trace de l'algorithme correspondant à une méthode de calcul égyptienne (env. 1650 avant JC) pour :

**X= 5 et Y= 3

Instruction	p	X	Y	Test
Lire(X,Y) p <− 0	0	5	3	-
0 < Y				vrai
Y≡ 0[2]				faux
P <− p+X Y <− Y-1	5	5	2	-
0 < Y				vrai
Y≡ 0[2]				vrai
X <− 2*X Y <− Y/2	5	10	1	-
0 < Y				vrai
Y≡ 0[2]				faux
P <− p+X Y <− Y-1	15	10	0	-
0 < Y				Faux STOP.

**X=4 et Y=5

Instruction	p	X	Y	Test
Lire(X,Y) p <− 0	0	4	5	-
0 < Y				Vrai
Y≡ 0[2]				faux
P <− p+X Y <− Y-1	4	4	4	-
0 < Y				Vrai
Y≡ 0[2]				vrai
X <− 2*X Y <− Y/2	4	8	2	-
0 < Y				vrai
Y≡ 0[2]				vrai
X <− 2*X Y <− Y/2	4	16	1	-
0 < Y				vrai
Y≡ 0[2]				faux
P <− p+X Y <− Y-1	20	16	0	-
0 < Y				Faux STOP.

On sort de la boucle.

Ecrire(p)

**X=100 et Y=0

Instruction	p	X	Y	Test
Lire(X,Y) p <− 0	-	100	0	-
0 < Y				Faux STOP.

On sort de la boucle.

Ecrire(p)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

2. Le problème que résous l'algorithme :
   L'algorithme permet de faire le produit de deux entiers
3. Une version plus simple

```
Algorithme : produit_deux_entiers
Variables : r, n, m : entier.
Debut
    Ecrire('donner deux entiers')
    Lire(n,m)
    r <- n*m
    Ecrire ( 'le produit des deux entiers est :' r)

Fin.
```

Exercice 3

1.1 Analyse des données

- u_0, u_1, u, v, w, i, n sont des entiers
- u, v, w sont les termes de la suite
- w permet de calculer les termes u, v et trouver la somme de ces termes

Ecrivons l'algorithme

```
Algorithme : suite_de_Fibonaci
Variable : u, v, w, i, n entier
Debut
    u <- 1
    v <- 1
    pour i variant de 1 à n faire
    w <- u + v
    u <- v
    v <- w
      Ecrire (w)
      Fin pour i
Fin.
```

1.2 Exécution du programme pour les dix 1ers termes

w	-	2	3	5	8	13	21	34	55	89
u	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
v	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

1.4 L'Algorithme

```
Algorithme : suitedeFibonaci

Variable : u, v, w, i entier
tab= tableau[1, ... , 50] des entiers
Debut
    u <- u0 = 1
    v <- u1 = 1
    pour i variant de 1 à 50 faire
    w <- u + v
    u <- v
    v <- w
      Tab[i] <- u
      Fin pour i
Fin.
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

1.5 Méthode de calcul du nombre d'or.

Pour le calcul du nombre d'or, il suffit d'utiliser le programme précédent écrit à la question 1.4 en appliquant la formule suivant: $\frac{tab[n]}{tab[n-1]}$

***La fonction qui calcul le nombre d'or :

```
Fonction nbre_d_or (n :entier) :réel
Variable : u, v, w, i entier
tab= tableau[1, ... , n] des entiers
      l: reel
Debut
    u <- 1
    v <- 1
     Pour i allant de 1 à n faire
        w <- u + v
        u <- v
        v <- w
          Tab[i] <- u
          Fin pour i
      l <- tab[n]/tab[n-1]
    retourner (l)
Fin.
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFRMI L1	Algorithme Examen 2020 Durée : 1H00
QCM **réponse** juste +1 réponse fausse -0,5 sans réponse 0	

CORRECTION

QCM

Q1 Quel est le résultat de l'exécution de :

```
a ← 5
b ← 2
ecrire (a.b)
```

Réponse : a) 5.2

Q2 l'expression valide pour calculer le discriminant dans la résolution d'une équation de second degré en algorithme :

c) b*b-4*a*c

Q3 Soit l'extrait de l'algorithme et saisie des valeurs de 'sexe' et 'etat'. Quelles sont les instructions pour initialiser les variables afin que l'algorithme soit fonctionnel ?

```
si (sexe="M") alors ecrire ("Bonjour monsieur" , nom)
sinon
    si (etat="C") alors ecrire ("Bonjour mademoiselle" , nom)
    sinon ecrire ("Bonjour madame" , nom)
    finsi
finsi
```

Réponse : c) Lire (nom)
Lire (sexe)
Lire (etat)

Q4 Évaluer l'expression suivante ((nombreprop<>secret) ET (essai>0)) sachant que nombreprop = -1 essai = 0 secret = 9050

Réponse : b) faux

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Q5 Soit l'extrait de l'algorithme qui permet de ranger dans un tableau 6 nombres générées (de 1 à 6) de manière aléatoire par random(6)+1. Quelle est la valeur de **nblancer** pour remplir le tableau ?

```
pour i ← 0 a nblancer faire
        lancer [i] ← random (6)+1
finpour
Ecrire ('Génération reussie pour ' , nblancer)
```

Réponse : La valeur de **nblancer** est : c) 6 (qui la taille du tableau)

Q6 Soit une fonction qui recherche le maximum dans un tableau **tab** à une dimension. On peut l'appeler dans un algorithme principal par :

b) min ← recherchemax (**tab**)

Q7 Soit le sous algorithme de détermination du nombre de moyennes supérieures à 10 dans un tableau, son entête peut être :	**Réponse** : g) Fonction MoyenneSup(t:tableau[1..10] de réel) : entier

Q8 Soit la fonction : **fonction** estplusgrand (a, b : **entier**) : booléen variable res : ..... // ? debut res ← a > b retourner (res) fin	Quel est le type de la variable locale **res** ? a) entier b) réel c) booléen d) vrai **Réponse** : c) booléen

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 1

```
Algorithme Egypte
 variable
  x,y,p : entier
 debut
  lire(x,y)
  p ← 0
  tanque 0 < y faire
   si ( y mod 2 = 0) alors
     x ← 2*x
     y ← y div 2
   sinon
     p ← p+x
     y ← y-1
   finsi
  fintanque
  ecrire (p)
finalgorithme
```

Donner la trace de l'algorithme pour x=3 et y=7.

Réponse :

La trace :

x	y	p
3	7	0
3	6	3
6	3	3
6	2	9
12	1	9
12	0	21

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2 The Gregory-Leibniz series

Algorithme itératif permettant de trouver une valeur approchée de **Pi**.

Réponse :

Algorithme valeurApprocheePi

variable

i, somme, n : entier

debut

ecrire ("Entrer le nombre de termes : ")

lire (n)

somme = 0

pour i ← 1 **a** n **pas** [2] **faire**

$$\text{somme} = somme + \frac{4}{i} - \frac{4}{i+2}$$

finpour

ecrire ("La valeur approchée est : ", somme)

fin

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFHB UFRMI	2021
Licence 1	**UE : Algorithme et programmation** **ECUE : Algorithme** **Correction Examen Session 2**

COURS (QCM)

C1) **Réponse :** 4*serie

C2) **Réponse :** Faux

C3) **Réponse :** c) Vrai, faux, et , non, ou

C4) **Réponse :** b)

C5) **Réponse :** a) 2999

C6) **Réponse :** a) Booléen

C7) **Réponse :** a) Une seule condition

C8) **Réponse :** c) 5 ← x

C9) **Réponse :** b) Conditionnelle, d) Itérative

C10) **Réponse :** c) Fonction MoyenneSup(t :tableau[1..100] de réel) : réel

EXERCICE 1

a) Fonction factorielle

```
factorielle(x : entier) : entier
        variable
          fact, j : entier
        début
          Si (x = 0 ou x = 1) alors
             fact ← 1
          Sinon
             Pour j ← 2 jusqu'à x faire
                fact ← fact * j
             Finpour
          Finsi
        retourner fact
fin
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

b) L'algorithme principal

ALGORITHME

VARIABLE

approximation

```
n, i : entier
e : réel
```

DEBUT

```
Ecrire("Entrer l'ordre n : ")
Lire (n)

e = 0
Pour i ← 0 jusqu'à n faire
        e = e + (1/factorielle(i))
Finpour
Ecrire("L'approximation correspondante de e est : ", e)
```

FIN

EXERCICE 2 : Suite de FIBONACCI

2.1)

ALGORITHME

fibonacci

VARIABLE

```
u, v, w, i, n : entier
```

DEBUT

```
Ecrire("Entrer la valeur de n : ")
Lire(n)

u ← 1
v ← 1

Pour i variant de 1 à n faire
        w ← u + v
        Ecrire(u," ", v," ", w)

        u ← v
        v ← w

Finpour
```

FIN

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

2.2) La trace pour les 10 premiers termes

i	u	V	W
0	1	1	-
1	1	2	2
2	2	3	3
3	3	5	5
4	5	8	8
5	8	13	13
6	13	21	21
7	21	34	34
8	34	55	55
9	55	89	89
10	89	144	144

2.3)

```
ALGORITHME                                        tableau
VARIABLE
        tab : tableau[1 .. 100] de entier
        i : entier
DEBUT
        tab[1] ←1
        tab[2] ←1
        Pour i variant de 3 à 10 faire
                tab[i] ← tab[i-2]+tab[i-1]
        Finpour
        Pour i variant de 1 à 10 faire
                Ecrire(tab[i])
        Finpour
FIN
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

2.4)

```
Nombre_or(n : entier) : réel
    variable
        or, u, v, w, i : entier
    début
        u ←1
        v ← 1
        or ← 0
        Pour i variant de 1 à n faire
            w← u + v
            or ← w / u
            u ←v
            v ← w
        Finpour
    retourner or
fin
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFRMI L1	Programmation Python 2017 Examen session1 Durée 1H00

EXERCICE 1: *Questions de cours*

11 Parmi ces valeurs lesquelles ne sont pas des « ENTIER » : 1 -43 21.0 4E-06 5C

12 Traduire en python l'algorithme et donner le résultat de la ligne 11

```
1 ALGORITHME exemple5bis
2     VARIABLE a, b, c : reel
3 FONCTION Produit (x, y  : reel): reel { parametres }
4     DEBUT
5           retourner( x * y)
6     FIN
7 DEBUT
8     Ecrire ('a b ? ')
9     Lire (a, 'b')
10    c ← Produit (a, b)
11    ecrire(Produit (5, 10))
12    ecrire ('c = ',c);
13 FIN
```

13- Donner pour chaque donnée le type correspondant en python :
1.0
4
21.14192588
3.14 E+01
-100
[1, 12, 45, 66, 49, 64, 51]
« False »

14 for i in range (1,10) :
    print (i)
affiche quelle(s) valeurs de i ? justifier

15 Qu'est ce que le trans-typage ? Donner un exemple utilisé pendant la saisie des données en python.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2

```
1 def MaFonction(n): # definition de fonction
2       res = [ ]
3       k = n
4       iter = 0
5       while k > 0:
6               iter = iter + 1
7               res.append(k%2)
8               k = k//2
9       return res
10 #programme principal
11 tb=MaFonction(16)
12 print (tb)
```

2.1 Donner l'explication de chaque ligne
2.2 Donner la trace et le résultat d'exécution pour 4 ; 9 et 16.
2.3 En déduire ce que fait l'algorithme.
2.4 Les fonctions 'bin' et hex permettent de faire plus simple. Ecrire un programme qui demande un nombre et le convertit en binaire et en hexadécimal

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFRMI L1	*Programmation Python* 2018 *Examen session* *Durée 1H30* 1

EXERCICE 1

Soit l algorithme d'approximation de racine selon Héron d'Alexandrie:

```
algorithme carre1
variable
      a,a0,an: reel
      i:entier
debut
      ecrire('calcul de racine carrée de :')
      lire(a) // le nombre dont on cherche la racine carrée
      ecrire( 'le carré le plus proche')
      lire(a0)
      pour i<--1 jusqu'à 5 faire
            an<--(1/2)*(a0+a/a0)
            ecrire(an)
            a0<--an
      finpour
      ecrire(an)
fin
```

1.1Traduire l'algorithme en python.

1.2 Donner la trace et le résultat d'exécution pour 9 et 15. (faites au moins 5 itérations de la boucle en suivant les valeurs de i, a0, a et an)

1.3 Ecrire une version plus simple du programme en python en utilisant 'math'

1.4 Transformer le programme (2.2) en une fonction python *def carre1(n) : .....return an*

1.5 Ecrire un programme principal permettant de calculer la différence entre la valeur approchée et la valeur réelle.

EXERCICE 2

The Gregory–Leibniz series

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 4\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots\right) = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ddots}}}}$$

2.1Ecrire un programme permettant d'afficher pour n allant de 1 jusqu'à 10 les valeurs $(-1)^n$

2.2 Utiliser la formule de Leibniz pour écrire un programme itératif en python qui permettra d'avoir une valeur approchée de Pi.

Indications *:from math import * : à faire avant toute utilisation de fonction mathématique telles que : cos (n), abs(n), sin(n), sqrt(t),* math.pow(x,y) *Retourne x élevé à la puissance y*

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB COCODY	
UFRMI	2019
QCM(J=1 0 F=-1)	**Examen : Programmation**
Rendre la première feuille	**Niveau : Licence 1**
	Session : 1
	Durée : 1H30min

Q1- Pour produire un fichier « .py : » , on utilise un
- (a) Un éditeur
- (b) Un exécuteur
- (c) Un compilateur
- (d) Un traducteur

Q2- 2. python est un langage développée par
- (a) Hewlett-Packard
- (b) Steve Jobs
- (c) John von Neumann
- (d) Guido van Rossum
- (e) Bill gates

Q3 – L'instruction suivante , t= [4,6,5,8,7], crée :
- (a) un ensemble t
- (b) une itération t
- (c) une liste t
- (d) une table

Q4 – une fonction écrite en python contient obligatoirement ;
- (a) une itération
- (b) le mot clé 'function'
- (c) le mot clé return
- (d) une fonction procédure
- (e) end_fonction

Q5 - Que va afficher à la console le programme ci- dessous ?

```
x = int( 1)
if x>1 :
x = x+2
print(x)
```

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3

Q6- Lequel des mots réservés de python permet de forcer la sortie d'une boucle :

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

```
for i in range(10) :
        ...
```

(a) try .. catch
(b) break
(c) exception
(d) exit

Q7 Soit la fonction

```
def f ( x ) :
        ....
```

Comment peut-on l'appeler dans un programme principal?

(a) f(int x)
(b) f(a)
(c) f(a,b)
(d) f(10)

Q8

```
a=2
b=5
if a>8;
   b=10
elif a>6:
   b=3
```

Que vaut la valeur finale de la variable b ?

(a) Je ne sais pas
(b) 3
(c) 5
(d) 10

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 1 Soit le programme en python ci dessous :

```
def MaFonction(n): # définition de fonction
      res = []
      k = n
      iter = 0
      while k > 0:
            iter = iter + 1
            res.append(k%2)
            k = k//2
      return res
#programme principal
tb=MaFonction(16)
print tb
```

1°) Exécuter le programme pour 16, 4 et 9.
2°) En écrivant les tableaux résultats de la dernière cellule à la première, trouver ce que fait le programme.
3°) Ecrire plus simplement le programme en utilisant les fonctions prédéfinies : bin, hex, int...

EXERCICE 2

Soit l'algorithme de Héron d'Alexandrie permettant de calculer une valeur approchée de racine carrée de x

```
Algorithme carel
variable
   A,x0, xn: reel
   i:entier
debut
   Ecrire('calcul de racine de :')
   lire(A)
   Ecrire('saisir la racine carre
   la plus proche')
   lire(x0)
   pour i← 1 à 5 faire
      xn ← (1/2)*(x0+(A/x0))
      Ecrire(xn)
      x0←xn
   finpour
Fin// algorithme
```

```
C:\Documents and Settings\Administrateur\Mes d
calcul de racine de :
431
saisir le carre le plus proche 28
20.775000000000
20.760544523947
20.760539492828
20.760539492828
20.760539492828
```

1°) Traduire l'algorithme en python.
2°) Transformer le programme en une fonction en retirant l'ordre d'écriture de xn.
3°) en utilisant la fonction *sqrt(x)* de la bibliothèque *math* et la fonction écrite à la question précédente, écrire un programme qui permet d'afficher après 5 itérations l'écart entres la valeur trouvée par la méthode de Héron d'alexandrie et la fonction *sqrt(x)*

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

	2019
UFR DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE	programmation **Examen session2** **Durée 1H30min**

EXERCICE 1: Questions de cours

11 Parmi ces valeurs affichées par un programme en python, identifier les types

1 4.3 21.14192588 -100 3.14E+01

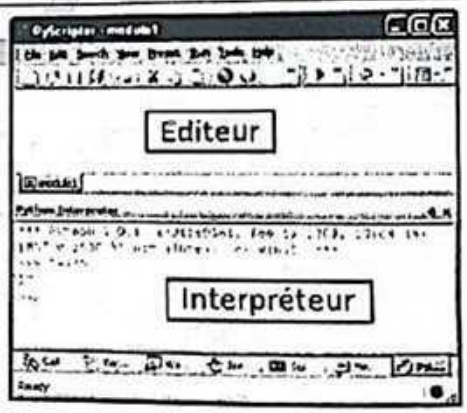
12 Soit l'instruction '`for j in range(n)`' si n est égal à 5 combien de répétitions seront exécutées par le programme

13 Quelle est la différence entre une procédure et une fonction en python?

14 Mettez dans le bon ordre les étapes de production de programme

```
Analyse (Algorithme)
Production (Programmation)
Spécification
Test et Debug
```

15 Quelle est la difference entre l 'interpreteur et l'editeur python ?



EXERCICE 2 :

EXERCICE 3 : Un peu d'approximation

L'approximation de Pi selon **Leibnitz** pour répondre aux questions :

1. Calculer le premier terme.
2. Afficher la série par série de 20 termes.
3. Montrer que la série est convergente.
4. Trouver la valeur de Pi

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 4\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots\right) = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ddots}}}}$$

EXERCICE 3

Soit l'algorithme suivant , il permet reconnaitre un palindrome.

```
Algorithme test_palindrome
Variable
      palindrome: booleen
      longueur, i : entier
      mot : chaine de caractère
Debut
      palindrome ← Vrai
      Ecrire('saisir mot à tester')
      Lire(mot)
      Longueur←length(mot)
      pour i←1 à (longueur div 2) faire
            palindrome←(Palindrome)and(mot[i]=mot[longueur-i+1])
      finpour i
      si(palindrome=vrai) alors ecrire(mot,'est un palindrome')
      sinon Ecrire('ce mot n''est pas un palindrome')
      finsi
Fin.
```

2.1 Quel type de donnée proposez vous pour representer la variable **mot** ?

2.2 Traduire en python

2.3 Donner la trace de l'algorithme pour le mot 'ELLE'.

2.4 Transformer le programme en une fonction apres avoir donner la signature(l'entête) ?

Ps : faire attention aux indices

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFRMI L1	2020
QCM reponse juste +1 *Fause -0.5* *Pas de reponse 0* *Recopier la bonne reponse*	**L1** **Examen programmation python** **durée : 1H00**

Q1- Python est un langage :
(a) Compilé
(b) Traduit
(c) transformé
(d) Interprété

Q2- Python est un langage développée par
(a) Hewlett-Packard
(b) Bill Gates
(c) Microsoft
(d) Guido van Rossum
(e) Steve jobs

Q3 – Les extensions de fichiers associes à python sont :

a) Py
b) pas
c) pptx
d) pi

Q4 – Lequel n'est pas une expression (de calcul) valide?
(a) x + 4
(b) 3 * (Y - 2) + 1 % 1
(c) (27 + 2 / 3) <= 3 - 1
(d) (2 == x - 7 * 3) + 1

Q5 - Que va afficher à la console le programme ci- dessous ?

```
x = 0
if x==0 :
   x = x+2
   print (x)
```

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

Q6- soit
```
def mafonct(x) :
    int b=1
    return x>b
```
On qualifie b de :
(a) Variable locale
(b) paramètre Formel
(c) paramètre Effectif
(d) variable globale

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Q7- Quelle est le nom de cette instruction écrite en python dans la cadre de la somme des dix premiers entiers non nuls.

```
s=int(0)
```

(a) Une incrémentation
(b) Une somme
(c) Une instanciation
(d) Une initialisation

Q8 Que représente la figure ci-dessous ?

```
Python 3.6.3 (v3.6.3:2c5fed8, Oct 3 2017, 17:26:49) [MSC v.1900
32 bit (Intel)] on win32
Type "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>>
```

a) Un compilateur
b) Un interpréteur
c) Un éditeur
d) Un exécuteur

EX01

*a)*Qu'est-ce que le transtypage ? Donner un exemple utilisé pendant la saisie des données.

b) Donner pour chacun le type correspondant en python

```
4
21.14192588
3.14 E+01
-100
[1, 12, 45, 66, 49, 64, 51]
« False »
```

C) donner la trace et le nom du programme suivant :

```
u=1
v=1
for i in range(1,10):
    w=u+v
    print ('U',i+1 ,' ',w)
    u=v
    v=w
```

EX02

a) Ecrire en python une fonction facto(x) qui, permet de calculer x !
b) Dans la réalité la bibliothèque math de python contient déjà une fonction
`math.factorial(x)`
Return x factorial. Raises `ValueError` *if x is not integral or is negative.*
Utiliser la pour calculer et afficher C(n,p)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFRMI
L_1

2020 – 2021

Programmation Python
Examen session 2
Durée: 1H15

EXERCICE 1: Questions de cours

11 Parmi ces valeurs lesquelles ne sont pas des entiers (int):
1 -43 21.0 $4E-06$ $5C$

12 Traduire en python l'algorithme et donner le résultat de la ligne 11

```
1 ALGORITHME exemple3bis
2   VARIABLE a, b, c : reel
3 FONCTION produit (x,y:reel): reel {parametres}
4   DEBUT
5     retourner(x • y)
6   FIN
7 DEBUT
8   Ecrire ('a,b')
9   Lire (a,b)
10  c← produit (a,b)
11  ecrire (produit (5, 10))
12  ecrire ('c=' c);
13FIN
```

13- for i in range (1.11);
print (i)
Quelle est la dernière valeur de i ? justifier.

14 Qu'est-ce que le transtypage ? Donner un exemple utilisé pendant la saisie des données en python.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

15 Soit l'exécution du programme

```
[1,  4,  −5,  0,  21,  58,  −69]
Le plus petit est: -69 indice: 6
```

Trouver les erreurs de syntaxe du programe ci-dessous

```
def recherchemin(t):
        min=int(t[1])
        i=1;
        while i <len(t)do:
                if min <= i + 1
                    i == i + 1
                else:
                    min=int (t[i])
        return (i)
#programme principal
tb= [1,  4,  −5,  0,  21,  58,  −69]
print (tb)
print("le plus petit est ", recherchemin(tb)),
'indice:', tb.index(recherchemin(tb))
```

EXERCICE 1

```
1 def MaFonction(n):# définition de fonction
2          res=[ ]
3          k=n
4          iter=0
5          while k>0
6              iter=iter+1
7              res.apprend(k%2)
8              k=k//2
9          return res
10 #programme principal
11 tb= MaFonction(16)
12 print(tb)
```

1.1 Donner l'explication de chaque ligne.
1.2 Donner la trace et le résultat d'exécution (le tableau) pour 4;9 et 16.
1.3 En déduire l,objectif de ce programme.
1.4 Les fonctions 'bin' et 'hex' permettent de faire plus simple. Ecrire un programme qui demande un nombre, le convertit en binaire et en hexadécimal.

EXERCICE 2

On veut tester la simulation d'un dé par un ordinateur. Pour cela on génère

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

dans un tableau des nombres compris entre 1 et 6 représentant les faces.

```
import random
i=input (random.randint(1,6))
print(1)
```

La déclaration des ressources est la suivante:

```
algorithme de_test;
type
tablo=tableau[1..1000] de entier;
variable
lancers:tablo;(*l'ensemble des lancer*)
nblancer,i,face:entier
```

procedure range_lance(t:tablo)//conserver les lancers dans le tableau(a)
//pour les 1000 cellules, générer le nombre compris entre 1 et 6 et le conserver dans la cellule constante

fonction probabilite_face(t:tablo, f:integer): réel (b)
//parcourir le tableau et rechercher les cellules qui contiennent la valeur f.
A chaque Egalité avec f.
//Augmenter le nombre d'apparition de la face par une incrémentation

2.1 Définir la procédure (a)
2.2 Définir la fonction (b)
2.3 Dans un programme principal, déclarer les variables globales
2.4 Remplir le tableau lancers [ ]
2.5 Tester la génération pour la face 1

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB COCODY	2019
UFRMI **QCM (J=1 ou F=-1)**	**Examen** : Programmation Python **Niveau** : Licence 1 **Session** : 1

Q1 – Pour produire un fichier « .py », on utilise un **(c) compilateur**

Remarque : les fichiers .py sont les fichiers python

Q2 – Python est un langage développé par **(d) Guido Van Rossum**

Q3 – L'instruction suivante, t = [4,6,5,8,7], crée **(c) une liste t**

Q4 – une fonction écrite en python contient obligatoirement **(c) le mot clé return**

Q5 – Le programme défini affiche à la console **(b) 1**

Q6 – Le mot réservé de python permettant de forcer la sortie de la boucle définie est **(b) break**

Q7 – Dans un programme principal, la fonction définie peut être appeler par **(d) f(10)**

Q8 – Selon le programme défini, la valeur finale de la variable b est **(c) 5**

EXERCICE 1

1) Exécution du programme pour 4

```
Entrée [18]: def MaFonction(n):
                 res=[]
                 k=n
                 iter=0
                 while k>0:
                     iter=iter+1
                     res.append(k%2)
                     k=k//2
                 return res


             print('rest(9):', MaFonction(9))
             print('rest(4):', MaFonction(4))
             print('rest(16):', MaFonction(16))

             rest(9): [1, 0, 0, 1]
             rest(4): [0, 0, 1]
             rest(16): [0, 0, 0, 0, 1]
```

2) Le programme converti les entiers en binaire

3) Ecriture plus simple du programme en utilisant les fonctions prédéfinies : bin, hex, int ...

```
Entrée [3]: a=int(input('a='))
            b=bin(a)
            print(b)

            a=9
            0b1001
```


Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2

1) Traduction de l'algorithme en python

```
Entrée [10]: print("Calcul de racine carrée de:")
A=float(input('A='))
float(input("Saisir la racine carrée la plus proche X0: "))
for i in range (1,6):
    Xn=(1/2)*(X0+(A/X0))
    print(Xn)
    X0=Xn
```

```
Calcul de racine carrée de:
A=431
Saisir la racine carrée la plus proche X0: 20
20.760539492026695
20.760539492026695
20.760539492026695
20.760539492026695
20.760539492026695
```

2) Transformation du programme en une fonction en retirant l'ordre d'écriture de Xn
Deux façon pour transformer le programme en une fonction

```
Entrée [5]: def racine_carree():
    print("Calcul de racine carrée de:")
    A=float(input('A='))
    X0=float(input("Saisir la racine carrée la plus proche X0: "))
    for i in range (1,6):
        X =(1/2)*(X0+(A/X0))

    return(X)
racine_carree()
```

```
Calcul de racine carrée de:
A=431
Saisir la racine carrée la plus proche X0: 20
Out[5]: 20.775
```

```
Entrée [6]: def racine_carree(Xn, X0):
    # Xn est la valeur dont on veut calculer la racine carrée
    # X0 est la racine carrée la plus proche
    for i in range (1,6):
        X =(1/2)*(X0+(Xn/X0))

    return(X)
racine_carree(431, 20)
```

```
Out[6]: 20.775
```

3) En utilisant la fonction ***sqrt(x)*** de la bibliothèque math et la fonction écrite à la question précédente, écriture d'un programme qui permet d'afficher après 5 itérations l'écart entre la valeur trouvée par la méthode de Héron d'alexandrie et la fonction ***sqrt(x)***

```
from math import sqrt
b=racine_carree(A, X0)
# A  et X0 sont les arguments de la fonction racine_carree précédemment définie
c=sqrt(A)
r=b-c
print(r)
```


VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFRMI L1	2020
QCM réponse juste +1 Fausse -0,5 Pas de réponse 0 Recopie la bonne réponse	**L1** **Examen programmation python** **durée : 1H00**

CORRECTION

Q1- Python est un langage :

(d) Interprété.

Q2- Python est un langage développé par :

(d) Guido van Rossum.

Q3- Les extensions de fichiers associés à python sont :

(a) Py (extension de scripts Python pour les fichiers textes).

Q4- Lequel n'est pas une expression (de calcul) valide :

(d) (2 == x - 7 * 3) + 1

Q5- Que va afficher à la console le programme ci-dessous :

```
x = 0
if x == 0 :
  x = x + 2
  print (x)
```

Réponse : le programme affichera à la console : (c) 2.

Q6- Soit def mafonct (x) :

```
int b=1
return x>b
```

On qualifie **b** de : (a) Variable locale.

Q7- Quel est le nom de cette instruction écrite en python dans le cadre de la somme des dix premiers entiers non nuls.

```
s=int(0)
```

Réponse : (d) Une initialisation

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Q8- Que représente la figure ci-dessous ?

```
Python 3.6.3 (v3.6.3:2c5fed8, Oct 3 2017, 17:26:49) [MSC v.1900
32 bit (Intel)] on win32
Type "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>>
```

Réponse : (d) Un exécuteur.

EXO 1

a) Qu'est-ce-que le transtypage ? Donner un exemple utilisé pendant la saisie des données.

Le transtypage correspond à un changement de type d'une variable.

Exemple : a = input("Entrer un nombre entier : ")

a = int(a)

Remarque : La fonction **input()** renvoie une chaîne de caractère dans la variable a.

Il faut donc utiliser la fonction **int()** qui permet d'obtenir un entier.

b) Donner pour chacun des valeurs le type correspondant en python :

4 : int

21. 14192588 : flaot

3. 14 E+01 : float

- 100 : int

[1, 12, 45, 66, 49, 64, 51] : list

<< False >> : bool

c) Donner la trace et le nom du programme suivant :

```
u=1
v=1
for i in range (1, 10) :
    w=u+v
    print ('U' , i+1 , ' ' ,w)
    u=v
    v=w
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Réponse :

La trace :

i	u	v	w	print
0 (initialisation)	1	1	--	--
1	1	2	2	U 2 2
2	2	3	3	U 3 3
3	3	5	5	U 4 5
4	5	8	8	U 5 8
5	8	13	13	U 6 13
6	13	21	21	U 7 21
7	21	34	34	U 8 34
8	34	55	55	U 9 55
9	55	89	89	U 10 89

Le nom du programme : La suite de Fibonacci (est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent.)

EXO 2

a) Écrire en python une fonction **facto**(x) qui permet de calculer x !

Réponse :

```
#coding : utf-8
def facto(x):
    if (x < 2):
        fact = 1
    else:
        fact = 1
        for i in range(2, x+1):
            fact*=i
    return fact
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

b) Dans la réalité, la bibliothèque **math** de python contient déjà une fonction **math.factorial(x)**.

Return x *factorial*. Raises valueError *if x is not integral or is negative.*

Utiliser la pour calculer et afficher C(n,p).

Réponse :

```
#coding : utf-8
from math import*
print('Programme combinaison de P éléments parmi n')
n=int(input('Entrer la valeur de n :'))
p=int(input(('Entrer la valeur de p :'))
if((p == 0) or (p == n)):
    cnp = 1
else:
    cnp = factorial(n)/factorial(p)*factorial(n-p)
print('Programme combinaison de' , P , 'dans' , n , ' est :' , cnp)
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

	2021
UFRMI L1	**Programmation Python** **Correction Examen Session 1 & 2** **Durée 1H15**

EXRERCICE 1 : Questions de cours

11 Les valeurs qui ne sont pas des entiers (int) sont : 21.0 ; 4E-06 ; 5C

12

- Traduction de l'Algorithme en Python

```
# Programme exemple5bis
def Produit (x, y) :
        return (x * y)
# Programme principale
a = float(input(" a = ? "))
b = float(input(" a = ? "))
c = Produit(a, b)
print("c = ", c)
# Fin du programme
```

- Le résultat de la ligne 11 sera : **50.0**

13 La dernière valeur de i est : **10**

14

- Définition

Le transtypage correspond à un changement de type de variable, comme transformer une variable de type **string** en **int**.

- Exemple :

```
nombre = input("Entrer un nombre : ")
nombre = int(nombre)
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

15 Les erreurs de syntaxe sont :

; (ligne 3) , **do** (ligne 4) , == (ligne 6) , (i) (ligne 9)

EXRERCICE 1

1.1 L'explication de chaque ligne

1 : Définition d'une fonction nommée **MaFonction** avec pour paramètre formel **n**
2 : Affectation à la variable **res** une **liste vide**
3 : Affectation à la variable **k** la valeur du paramètre **n**
4 : Affectation à la variable **iter** la valeur **0** (initialisation)
5 : Définition de la condition **k > 0** avec la structure itérative **while**
6 : Incrémentation de la variable **iter**
7 : Ajout du reste de la division de **k** par **2** dans la liste **res** avec la fonction **append**
8 : Affectation à la variable **k** la valeur de la division entière de **k** par **2** (condition d'arrêt de la structure itérative)
9 : La valeur retourner (**return**) par la fonction **MaFonction** est **res**
10 : Un commentaire pour marquer le début du programme principal
11 : Affectation à la variable **tb** la valeur retourner par la fonction **MaFonction** avec comme paramètre effectif **16** (appel de la fonction)
12 : Afficher la valeur de la variable **tb** avec la fonction **print**

1.2 La trace et le résultat d'exécution (le tableau) pour 4 ; 9 et 16

- Pour n = 4

iter	k	res
0	4	-
1	2	0
2	1	0
3	0	1

Le résultat de l'exécution est : [0, 0, 1]

- Pour n = 9

iter	k	res
0	9	-
1	4	1
2	2	0
3	1	0
4	0	1

Le résultat de l'exécution est : [1, 0, 0, 1]

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

- Pour n = 19

iter	k	res
0	16	-
1	8	0
2	4	0
3	2	0
4	1	0
5	0	1

Le résultat de l'exécution est : [0, 0, 0, 1]

1.3 L'objectif de ce programme : est de convertir est un nombre entier en binaire

1.4

```
# Programme conversion
n = int(input(" Entrer un nombre entier : "))
print(" La valeur binaire est : ", bin(n))
print(" La valeur hexadécimal est : ", hex(n))
# Fin du programme
```

EXRERCICE 2

2.1 La procédure (a)

```
def range_lance(t) :
        for i in range (0, 100) :
                t[i]=input(random.randint(1, 6))
```

2.2 La fonction (b)

```
def probabilite_face(t, f) :
        nblancer = 0
        for i in range(0, 100) :
                if f == t[i]
                        nblancer = nblancer + 1
        return nblancer
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

2.3

```
# Programme principal
lancers = [ ]
nblancer = 0
i = 0
f = 0
```

2.4

```
# Remplissage du tableau lancers [ ]
range_lance(lancers)
```

2.5

```
# Programme principal
nblancer = probabilite_face(lancers, 1)
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB
MATHS-INFO.

Année
2016-2017

Epreuve de Calcul matriciel
L1
2nde Session
Durée : 01h30'

Exercice 1(09 points)

On considère la matrice $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de la matrice D.
2. En déduire le déterminant de chacune des matrices suivantes à partir de D, sans calcul et justifier.

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -6 & -9 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ -6 & -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Exercice 2(11points)

Soient m, a, b, c des réels, et $(S_m) \Longleftrightarrow \begin{cases} mx + my + mz = a \\ x + my + z = b \\ x + y + mz = c \end{cases}$.

1. Donner la matrice du système (S_m) et déterminer son rang suivant m.
2. Déterminer les solutions de (S_m) suivant les valeurs de m, a, b, c.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

2017-2018

Universté FHB
UFR MATHS-INFO.

EXAMEN de Calcul Matriciel
Première session
Durée : 01H30
Licence 1

EXERCICE 1 : (07,50pts)
Répondre par vrai ou faux en justifiant.
1. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$.
2. $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.
3. Si on peut calculer le produit de deux matrices, alors on peut calculer leur somme.
4. Le déterminant d'une matrice antisymétrique réelle A(i.e.$({}^tA) = -A$) d'ordre impaire est nul.
5. Si une matrice A est de type (n, m) alors $rg(A) \leq m$.

EXERCICE 2 (12,50pts)
1. Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
2. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$
a) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
b) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 7 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 3y - z = 1 \end{cases}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Universté FHB
UFR MATHS-INFO.

2017-2018

EXAMEN de Calcul Matriciel

Seconde session

Durée : 01H30

Licence 1

EXERCICE 1(8 points) :

Choisissez la bonne réponse en justifiant.

Questionaires :

1. Soient deux matrices A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversibles et $C = ABA^{-1}B^{-1}$.
Le déterminant de C

☐ a) vaut 1 car C est I_n ☐ b) ne vaut 1 que si A et B commuent
☐ c) vaut toujours 1 ☐ d) ne peut pas être calculé en général.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{C})$ de déterminant égal à -1. Laquelle des matrices suivantes n'a pas le même déterminant que A.

☐ a) $({}^tA)$ ☐ b) A^{-1} ☐ c) $(-A)$ ☐ d) A^2.

EXERCICE 2(12 points)

1°) Inverser suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$;

la matrice : $A_m = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -m \\ m-4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

2°) Résoudre suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}\setminus\{1;-2\}$ dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$(\sum_m) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - z = -m \\ 3x + y - mz = -3 \\ (m-4)\ x - 2y - z = -1 \end{cases}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFHB :UFR-MI : L1 Année 2018-2019

EXAMEN de Calcul Matriciel
Première session
Durée : 01H30
Licence 1

EXERCICE 1 : (05 pts)
Répondre par vrai ou faux en justifiant.

1. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$.
2. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.
3. Si on peut calculer le produit de deux matrices, alors on peut calculer leurs sommes.
4. Le déterminant d'une matrice antisymétrique réelle A (i.e. $t_A = -A$) d'ordre impaire est nul.
5. Si une matrice A est de type (n, m) alors $rg(A) \leq m$

EXERCICE 2 : (15 pts)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et A et M les matrices suivantes

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de M, sa comatrice et l'inverse de M.
2. Calculer le déterminant de A_α et déterminer pour quelles valeurs de α la matrice est inversible.
   Calculer A_α^{-1} lorsque A_α est inversible.
3. Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 2x + 6z = 7 \\ 6y + 3z = 0 \\ 6x + 3y = 1 \end{cases}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB
UFR MATHS-INFO.

2018-2019

EXAMEN de Calcul Matriciel
Seconde session
Durée : 01H30
Licence 1

EXERCICE 1 : (07 pts)

Réponder par VRAI ou FAUX, en justifiant

Soit A une matrice.

1) Le produit $A\,({}^tA)\,({}^tA)A$ est défini si et seulement si A est carrée.
2) Si A est carrée alors $A\,({}^tA) = ({}^tA)\,A$.
3) Si $A\,({}^tA) = ({}^tA)\,A$ alors $A = ({}^tA)$.

Soit A une matrice carrée, et I la matrice identité, de même taille que A.

4) Si A est inversible, alors $A\,({}^tA)$ est inversible.
5) Si A est inversible, alors $A + ({}^tA)$ est inversible.
6) Si A est inversible, alors $(A^{-1}\,({}^tA))^{-1} = ({}^tA)^{-1}\,A$.
7) Si A est inversible, alors $A\,({}^tA)\,A^{-1}\,({}^tA)^{-1} = I$.

EXERCICE 2(13 pts)

Soit $M \in \mathcal{M}_4\ (\mathbb{R})$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$

$$M = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}.$$

1) Donner la transposée $({}^tM)$ de la matrice M.
2) Calculer $M.({}^tM)$ et $({}^tM).M$, ces deux matrices commutent-elles ?
3) Déduire de 2) ; le déterminant de M en sachant qu'il est positif.
4) A quelle condition M est-elle inversible ? Donner sa matrice inverse.
5) Résoudre dans $\mathbb{R}^4$, le système suivant selon le quatre-uplet $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$:

$$(S_{(a,b,c,d)}) \Leftrightarrow MX = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

2019-2020

Universté FHB
UFR MATHS-INFO.

EXAMEN de Calcul Matriciel

Session decembre 2020

Durée : 01H00

Licence 1

EXERCICE 1(8 points)

Répondre par vrai ou faux dans l'ordre des questions, en justifiant.

1. Si A, B deux matrices carrées de même ordre sont telles que $AB = 0$ alors ni A ni B ne sont inversibles.
2. La famille $\{(3,1,4);(0,2,0);(2,0,6)\} \subset \mathbb{R}^3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Si on permute 2 lignes d'une matrice inversible, elle reste inversible.
4. Si A est inversible, alors $A\,({}^tA)$ est inversible.
5. Toute matrice carrée d'ordre n, A vérifiant $5A^2 + A + 7I_n = 0$ est inversible.

EXERCICE 2(12 points)

1. Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

2. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

a) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

b) Résoudre le système (S) suivant dans $\mathbb{R}^3$ à l'aide de sa matrice augmentée :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y - 3z = 3 \\ -3x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

2019-2020

sible.

ée :

UNIVERSITE FHB

U.F.R Maths-Info

Année 2020-2021

EXAMEN DE CALCUL MATRICIEL

L1

Première Session

Durée : 1H30

EXERCICE 1 (4 points)

Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

EXERCICE 2 (10 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Déterminons deux réels α, β tels que : $A^2 = \alpha A + \beta I_3$

b) En déduire que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de A et de I_3.

c) Donner A^{-1} sous forme matricielle à l'aide de l'expression : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times Com({}^tA)$ où $Com({}^tA)$ est la comatrice de la transposée de A.

EXERCICE 3 (6 points)

Résoudre à l'aide de sa matrice augmentée le système,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ -x - y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB
U.F.R. Maths-Info

Année
2020-2021

EXAMEN DE CALCUL MATRICIEL
M.1. L1 ; 2nde Session ; durée : 1H30

EXERCICE

Répondez par VRAI ou FAUX, dans l'ordre des questionnaires et assertions en justifiant.

Questionnaire 1

Soit A, B et C des matrices d'ordre $n \geq 1$.

1) $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$;
2) $A(BC) = (AC)B$;
3) $A(B + C) = AC + AB$;
4) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Questionnaire 2

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1) $A^2 = 2A$;
2) $A^n = 2^n A$, pour tout entier $n \geq 1$;
3) $(A - I_2)^{2n} = I_2$, pour tout entier $n \geq 1$;
4) $(A - I_2)^{2n+1} = A + I_2$, pour tout entier $n \geq 1$.

Questionnaire 3

On considère les matrices :

$$A = [1\ 0\ 1],\ B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1) Le rang de A est 3 ;
2) Le rang de B est 1 ;
3) Le rang de C est 3 ;
4) Le rang de D est 3.

Questionnaire 4

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels et I_n la matrice identité d'ordre n ;

1) A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B telle que $AB = I_n$;
2) A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B telle que $BA = I_n$;
3) A est inversible si et seulement si les coefficients de A sont inversibles pour la multiplication dans $\mathbb{R}$;
4) A est inversible si et seulement si pour toute matrice Y à une colonne et n lignes, il existe une matrice X à une colonne et n lignes telle que : $AX = Y$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Questionnaire 5

On considère le système d'équations, d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

1) $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - 2z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$;
2) Les équations de (S) sont celles de trois plans ;
3) (S) admet une unique solution ;
4) (S) n'admet pas de solution.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

CORRECTION CALCUL MATRICIEL DEUXIEME SESSION

2016-2017

Exercice 1

On considère la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculons le déterminant de la matrice D.

$$det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$ ((développemeent suivant la première colonne)

$$det(D) = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$det(D) = 6\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$2\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 18\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$det(D) = 36$$

2. Déterminons le déterminant de chacune des matrices suivantes à partir de D sans calcul et avec justification.

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -6 & -9 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice D_1 est obtenue en remplaçant la deuxième ligne de la matrice D par $-L_2 - L_3$

$$\begin{aligned} \det(D_1) &= det(L_1, -L_2 - L_3, L_3, L_4) \\ &= det(L_1, -L_2, L_3, L_4) + det(L_1, -L_3, L_3, L_4) \\ &= -det(L_1, L_2, L_3, L_4) - det(L_1, L_3, L_3, L_4) \\ &= -det(D) - 0 \end{aligned}$$

$$det(D_1) = -36$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

* $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (*La matrice* D_2 est obtenue en remplaçant la troisième ligne de la matrice D par 0).

$\det(D_2) = det(L_1, L_2, 0, L_4)$

$det(D_2) = 0$

* $D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ -6 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ (*La matrice* D_3 est obtenue en remplaçant la quatrième ligne de la matrice D par $-2L_4$).

$$\begin{aligned} det(D_3) &= det(L_1, L_2, L_3, -2L_4) \\ &= -2\, det(L_1, L_2, L_3, L_4) \\ &= -2\, det(D) \\ &= -2 \times 36 \\ det(D_3) &= -72 \end{aligned}$$

Exercice 2

Soient n, a, b, c des réels et $(S_m) \Leftrightarrow \begin{cases} mx + my + mz = a \\ x + my + z = b \\ x + y + mz = c \end{cases}$

Donnons la matrice dusystème (S_m)

Soit A la matrice du système (S_m)

$$A = \begin{pmatrix} m & m & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

- Déterminons le rang de A suivant le paramètre m

On sait que $rang(A) = rang(A^t)$.

- $A^t = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$

. Echelennons (A^t)

$$(A^t) \simeq \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m-1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 \leftarrow L_1 \end{matrix}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

- Pour $m = 0$,on a :$(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $rang(A^t) = 2 = rang(A)$
- pour $m = 1$, on a : $(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $rang(A^t) = 1 = rang(A^t)$.
- $m \in \mathbb{R}|\{1,0\}$,On a :$rang(A^t) = B = rang(A)$.

$$\begin{cases} pour\ m = 0, rang(A) = 2 \\ pour\ m = 1, rang(A) = 1 \\ pour\ m \in \mathbb{R}|\{1,0\}, rang(A) = 3. \end{cases}$$

Déterminons les solutions de (S_m) suivant m, a, b, c.

Soit B la matrice augmentée de (S_m).

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} m & m & m & a \\ 1 & m & 1 & b \\ 1 & 1 & m & c \end{array}\right]$$

- Echelennons B.

$$B \backsim \left[\begin{array}{ccc|c} m & m & m & a \\ 1 & m^2-m & 1 & b \\ 1 & 1 & m^2-m & mc-a \end{array}\right]$$

(2).png

$$(S_m) \Leftrightarrow \begin{cases} mx + my + mz &= a \\ m(m-1)y &= mb - a \\ m(m-1)z &= mc - a \end{cases}$$

- Pour $m = 0, (S_0) = \begin{cases} 0 &= a \\ 0 &= -a \\ 0 &= -a \end{cases}$

Si $a \neq 0, S_{\mathbb{R}^3} = \emptyset$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Si $a=0,(S_0)\Leftrightarrow\begin{cases}x+z&=b\\x+y&=c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z&=b-x\\y&=c-x\\x&=x\end{cases}$

$S_{\mathbb{R}^3}=\{(x;c-x;b-x);x,c,b\in\mathbb{R}\}.$

- pour $m=1,(S_1)\Leftrightarrow\begin{array}{lll}x+y+z&=a\\0&=b-a\\0&=c-a\end{array}$

Si $a=b=c,(S_1)\Leftrightarrow x+y+z=a\Rightarrow\begin{array}{ll}x&=a-y-z\\y&=y\\z&=z\end{array}$

$S_{\mathbb{R}^3}=\{(a-y-z;y;z);a,y,z\in\mathbb{R}\}$

Si $a\neq b,a\neq c,S_{\mathbb{R}^3}=\varnothing.$

- Pour $m\in\mathbb{R}|\{1,0\}$

$(S_m)\Leftrightarrow\begin{cases}mx+my+mz&=a\\m(m-1)y&=mb-a\\m(m-1)z&=mc-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z&=\frac{mc-a}{m(m-1)}\\y&=\frac{mb-a}{m(m-1)}\\x&=a-\frac{mb-a}{m-1}-\frac{mc-a}{m-1}\end{cases}$

$S_{\mathbb{R}^3}=\{(a-\frac{mb-a}{m-1}-\frac{mc-a}{m-1};\frac{mb-a}{m(m-1)};\frac{mc-a}{m(m-1)});m,a,b,c\in\mathbb{R}\}.$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI : L1 Année 2017-2018

CORRECTION : CALCUL MATRICIEL SESSION 1

EXERCICE 1

1. **FAUX** : en prenant par exemple $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $A \times B = 0$ mais $A,\ B \neq 0$.
2. **FAUX** : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$; $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
3. **FAUX** : le produit de deux matrice est possible du moment où le nombre de colonne de la première est égal au nombre de ligne de la seconde. Tandis que la somme des deux matrices est possible uniquement lorsque les deux matrices ont le même nombre de lignes et de colonnes. Par exemple le $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est possible($= 8$) mais la somme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est impossible.
4. **VRAI** : $\det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = -\det(A)$ (car A est d'ordre impaire).
   Ainsi on a $2\det(A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$.
5. **FAUX** : quelle que soit la matrice A de type (n, m) on a $rang(A) \leq \min(n, m)$.
   La proposition serait vrai à condition que $m \leq n$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$\Delta = 2 * 2 * 2 * 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

En dévéloppant suivant la troisième ligne $\Delta = 2^4 \left[- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right]$

$\Delta = 2^4(-1-1) = -32$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

a)$det(A) = -20 \neq 0$ alors A est inversible

alors par la méthode de votre choix $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.55 & -0.4 & 0.1 \\ 0.4 & -0.2 & -0.2 \\ 0.45 & -0.6 & -0.1 \end{pmatrix}$

b)Resoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 7 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 3y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3.95 \\ y = 2.6 \\ z = 3.05 \end{cases}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Correction Examen de Calcul Matricel 2017-2018 Session 2 Licence 1

Exercice 1 : Choix de la bonne reponse suivi de justification

1.*b*) car si $AB = BA$ on a $C = ABA^{-1}B^{-1} = AB\,(I_n)^{-1} = AB = I_n$ et $det(I_n) = 1$

2.*d*) car $det(A^2) = (det(A))^2 = (-1)^2 = 1$

Exercice 2 :

1.)$A_m = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -m \\ m-4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$

$$det(A_m) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -m \\ m-4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & m-1 \\ 3 & 1 & -m \\ m-4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (1-m)(2+m)$$

Alors la matrice A_m est inversible si $m \in \mathbb{R}\backslash\{1;-2\}$.

Calculons A_m^{-1} pour $m \in \mathbb{R}\backslash\{1;-2\}$. On a :

$${}^tA_m = \begin{pmatrix} 3 & 3 & m-4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -m & -1 \end{pmatrix} \text{ et } Com\,{}^tA_m = \begin{pmatrix} -2m-1 & 3 & 1-m \\ 3-m(m-4) & m-7 & 3(m-1) \\ -2-m & 2+m & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi on a : $A_m^{-1} = \frac{1}{det(A_m)} Com\,{}^tA_m = \frac{1}{(1-m)(2+m)} \begin{pmatrix} -2m-1 & 3 & 1-m \\ 3-m(m-4) & m-7 & 3(m-1) \\ -2-m & 2+m & 0 \end{pmatrix}$

2.)Resolution suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}\backslash\{1;-2\}$ dans $\mathbb{R}^3$

Soit $(\sum_m) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y-z=-m \\ 3x+y-mz=-3 \\ (m-4)x-2y-z=-1 \end{cases}$

On a : $(\sum_m) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -m \\ m-4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

La matrice associée à $(\sum_m)$ est la matrice A_m qui est inversible pour $m \in \mathbb{R}\backslash\{1;-2\}$.

Donc le système admet une unique solution donnée par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_m^{-1} \begin{pmatrix} -m \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI : L1 Année 2018-2019

CORRECTION : CALCUL MATRICIEL SESSION 1

EXERCICE 1 : Voir correction 2017-2018 session 1

EXERCICE 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1.

$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ M est donc inversible

$Com(M) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \times {}^t Com(M) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

2.

$\det(A_\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - \alpha^3 \neq 0$ pour tout $\alpha \neq -1$

A_α est inversible pour tout $\alpha \neq -1$.

Calculons A_α^{-1} :

$Com(A_\alpha) = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & -\alpha^2 \\ \alpha & -\alpha^2 & -1 \\ -\alpha^2 & -1 & \alpha \end{bmatrix}$ Ainsi on a :

$A_\alpha^{-1} = \frac{1}{\det(A_\alpha)} \times {}^t Com(A_\alpha) = \frac{1}{-1-\alpha^3} \begin{bmatrix} -1 & \alpha & -\alpha^2 \\ \alpha & -\alpha^2 & -1 \\ -\alpha^2 & -1 & \alpha \end{bmatrix}$

3. Le système s'écrit de façon matricielle : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

La matrice associée au système est $3A_2$ $(\alpha = 2)$.

Ainsi, la solution du système est donnée par

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} A_2^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $A_2^{-1} = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

CORRECTION EXAMEN DE CALCUL MATRICIEL 2019-2020

EXERCICE 1

1. Faux car on peut avoir

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \text{ Et } \quad B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \text{ or } det\ A=1\neq 0$$

Donc A est inversible.

2. Vrai car $\begin{bmatrix}3&0&2\\1&2&0\\4&0&6\end{bmatrix}=20\neq 0$

Et le cardinal de la famille est égale à la dimension de l'espace.

3. Vrai car c'est le déterminant qui change de signe
4. Vrai car le produit de deux matrices inversibles est inversible
5. Vrai car on a $SA^2+A+7I_n=0$

$$\Leftrightarrow A(SA+I_n)=-7I_n$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{7}A(SA+I_n)=I_n$$
$$\Leftrightarrow A(-\frac{1}{7}(SA+I_n))=I_n$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{7}(SA+I_n)A=I_n$$

Donc A est inversible

EXERCICE 2

1. *calculons* $\Delta=\begin{vmatrix}-1&1&-1&1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&1\\-1&1&1&-1\end{vmatrix}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1&1&-1&1\\0&2&-2&0\\0&2&0&2\\0&0&2&-2\end{vmatrix}\begin{matrix}\\L_2\leftarrow L_1+L_2\\L_3\leftarrow L_3+L_1\\L_4\leftarrow L_4-L_1\end{matrix}$$

$$\Delta=-1\times\begin{vmatrix}2&-2&0\\2&0&2\\0&2&-2\end{vmatrix}=-2^3\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&0&1\\0&1&-1\end{vmatrix}$$

$$\Delta=-8\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3\end{matrix}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\Delta = -8\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -8 \times (-1-1) = 16$$

$$\Delta = 16$$

2. Soit $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -3\\ -3 & 3 & -1\end{bmatrix}$

a) Montrons que A est inversible.

- Calculons le déterminant de A

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -3\\ -3 & 3 & -1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 6 & -4\end{vmatrix} \begin{matrix}\\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1\end{matrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix}-1 & -1\\ 6 & -4\end{vmatrix} = 4 + 6 = 10$$

$$|A| = 10 \neq 0 \; donc \; A \; est \; inversible$$

- Calculons A^{-1}

On a: $A^{-1} = \frac{1}{det} \times t_{ComA}$

On a: $t_A = \begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 1 & 3\\ -1 & -3 & -1\end{bmatrix}$

$$t_{ComA} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 8 \quad a_{12} = -2 \quad a_{13} = -2$$
$$a_{21} = 11 \quad a_{22} = -4 \quad a_{23} = 1$$
$$a_{31} = 9 \quad a_{32} = -6 \quad a_{33} = -1$$

$$t_{ComA} = \begin{bmatrix}8 & -2 & -2\\ 11 & -4 & 1\\ 9 & -6 & -1\end{bmatrix}$$

Donc : $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}8 & -2 & -2\\ 11 & -4 & 1\\ 9 & -6 & -1\end{bmatrix}$

b) Résolvons (s) à l'aide de la matrice augmentée. On a $(S) \Leftrightarrow AX = B$ avec

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -3\\ -3 & 3 & -1\end{bmatrix} \; X = \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \text{ Et } B = \begin{bmatrix}1\\ 3\\ 2\end{bmatrix}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Soit M la matrice augmentee du systeme

On a $M_a = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right]$

$$M_a \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -4 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$$

$$M_a \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -10 & 11 \end{array}\right] L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2$$

$on\ a\ L_3 \Rightarrow -10z = 11 \Rightarrow z = \frac{-11}{10}$

$L_3 \Rightarrow -y - Z = 1 \Rightarrow -y + \frac{11}{10} = 1$

$\Rightarrow -y = 1 - \frac{11}{10} = \frac{-1}{10}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{10}$

$L_1 \Rightarrow x + y - z = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{10} + \frac{11}{10} = 1$

$x = 1 - \frac{12}{10} = 1 - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}$

$x = -\frac{1}{5}$ Donc

$S_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{-11}{10}\right)\right\}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI:L1 Maths-Info 2020-2021

CORRECTION CALCUL MATRICIEL

SESSION 1

Exercice 1

Calculons le déterminant Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

D'où $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$

$\Delta = 2\,(4 + 2 \times 0) - 2(-4)$

$\Delta = 2 \times 4 + 8$

$\boxed{\Delta = 16}$

Exercice 2

a) Déterminons α, β tels que $A^2 = \alpha\, A + \beta\, I_3$

On a: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Par ailleur, $\alpha\, A + \beta\, I_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 6\alpha & -5\alpha & 6\alpha \\ 3\alpha & -3\alpha & 4\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

$\alpha\, A + \beta\, I_3 = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 & 0 \\ 6\alpha & -5\alpha+\beta & 6\alpha \\ 3\alpha & -3\alpha & 4\alpha+\beta \end{pmatrix}$

Ainsi $A^2 = \alpha\, A + \beta\, I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 & 0 \\ 6\alpha & -5\alpha+\beta & 6\alpha \\ 3\alpha & -3\alpha & 4\alpha+\beta \end{pmatrix}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ 6\alpha=-6 \\ 3\alpha=-3 \\ -5\alpha+\beta=7 \\ 4\alpha+\beta=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=2 \end{cases}$$

Par suite: $A^2=-A+2\,I_3$

b) Déduisons que A est inversible et donnons A^{-1} en fonction de A et I_3

On a: $A^2=-A+2\,I_3 \Leftrightarrow A^2+A=2\,I_3$

$\Leftrightarrow A^2+A\,I_3=2\,I_3$ car $A\,I_3=A$

$\Leftrightarrow A(A+I_3)=2\,I_3$

$\Leftrightarrow A(\frac{1}{2}\,A+\frac{1}{2}\,I_3)=I_3$

$\Leftrightarrow (\frac{1}{2}\,A+\frac{1}{2}\,I_3)A=I_3$

$\Leftrightarrow A$ est inversible

Ainsi donc $\boxed{A^{-1}=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}I_3}$

c) Donnons A^{-1} sous la forme matricielle en utilisant:

$A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\times Com({}^tA)$

On a: $det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$

$det(A)=-20+18$

$det(A)=-2$

Ainsi ${}^tA=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$Com({}^tA)=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$

$C_{11}=\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=-20+18=-2;\ C_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=0$

$C_{13}=\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}=0;\ C_{21}=-\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=-(24-18)=-6$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4;\ C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -3;\ C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3;\ C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5$$

Ainsi $Com({}^tA) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

Comme $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \times Com({}^tA)$

Alors $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Resolvons (S) à l'aide de sa matrice augmentée

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+3z=6 \\ -x-y+2z=0 \\ 3x+y-4z=1 \end{cases}$$

Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ la matrice associée à (S)

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$ la matrice augmentée de A

$$B \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -7 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{array}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$B \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 & -8 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$$

$$B \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{rcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - L_3 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - 2L_3 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 + 7L_3 \end{array}$$

$$B \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$$

$$B \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

D'où $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

L'ensemble des solutions de (S) est : $S_{\mathbb{R}^3} = \{(1;1;1)\}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB Maths-Info 2020-2021

CORRECTION CALCUL MATRICIEL

SESSION 2

Exercice

Questionnaire 1

1. Faux, car pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
   On a: $AB = 0$ mais $A \neq 0$ et $B \neq 0$

2. Faux, car l'anneau des matrices est non commutative

3. Vrai, car la multiplication est distributive par rapport à l'addition

4. Faux, car A et B ne commutent pas

Questionnaire 2

1. Vrai, en effet, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$

2. Faux, car pour $n = 1$, $A \neq 2A$

3. Vrai, En effet, $(A - I_2)^{2n} = \left[(A - I_2)^n\right]^n = (A^2 - 2AI_2 + I_2^2)^n$
   $(A - I_2)^{2n} = (A^2 - 2A + I_2)^2$ or $A^2 = 2A \Rightarrow A^2 - 2A = 0$
   D'où $(A - I_2)^{2n} = (I_2)^n = I_2$

4. Faux,
   En effet, $(A - I_2)^{2n+1} = (A - I_2)^{2n} \times (A - I_2)$ or $(A - I_2)^{2n} = I_2$
   D'où $(A - I_2)^{2n+1} = I_2(A - I_2)$
   $(A - I_2)^{2n+1} = A - I_2 \neq A + I_2$

Questionnaire 3

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

1. Faux, car $rang(A) \leq 1$
   Comme A n'est pas la matrice nulle, alors $rang(A) = 1$

2. Vrai, en effet, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $B \approx \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$

3. Faux. En effet, $det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$

   D'où $rang(C) \leq 2$

4. Faux. En effet, $det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$

   D'où $rang(D) \leq 2$

Questionnaire 4

1. Faux, car la matrice B n'est pas necessairement une matrice carrée d'ordre n.

2. Faux, car la matrice B n'est pas necessairement une matrice carrée d'ordre n.

3. Faux. En effet, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible mais 0 n'est pas inversible pour la multiplication dans $\mathbb{R}$

4. Vrai; en effet, $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$

Questionnaire 5

1. Vrai. En effet, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 & E_1 \\ 2x - 3y + 4z = 1 & E_2 \\ y + z = 1 & E_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 & E_1 \\ y - 2z = 1 & E_2' = 2E_1 - E_2 \\ y + z = 1 & E_3 \end{cases}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 & E_1 \\ y - 2z = 1 & E_2' \\ z = 0 & E_3' = E_2' - E_3 \end{cases}$$

2. Vrai, car ces trois équations sont de la forme $ax + by + cz + d = 0$ qui est l'équation du plan.

3. Vrai. En effet, (S) admet une unique solution qui est: $(2, 1, 0)$

4. Faux. En effet (S) admet une unique solurion.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet Boigny
UFR Mathématiques et Informatique
Année 2016 – 2017

LICENCE 1
Mentions : Tronc Commun
ECUE : Espaces vectoriels
Examen du 4 janvier 2018 - Durée : 02 heures

Aucun document n'est autorisé

Exercice 1. *On considère les parties F et G du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$:*

$$\begin{cases} F &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x-y-2t=0 \ et \ x+t=0\} \\ G &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x-z+t=0 \ et \ y+z=0\}. \end{cases}$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Trouver une base $\mathcal{F}$ de F et une base $\mathcal{G}$ de G. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 2. *Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et f l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui est tel que :*

$$\begin{cases} f(e_1) &= -e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_2) &= -2e_1 + 2e_3 \\ f(e_3) &= -4e_1 + e_2 + 4e_3. \end{cases}$$

On désigne par A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

(i) *Ecrire la matrice A.*

(ii) *Donner une base et une équation de l'image $Im(f)$ de f.*

(iii) *Pour quelles valeurs du nombre réel λ l'application linéaire $f_\lambda = f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}$ est-elle un isomorphisme ?*

(iv) *Trouver une base $\mathcal{B}_1 = \{v_1\}$ de $Ker(f - 3id_{\mathbb{R}^3})$ et une base $\mathcal{B}_2 = \{v_2\}$ de $Ker(f)$. Montrer que les vecteurs v_1 et v_2 sont linéairement indépendants.*

(v) *Trouver un vecteur $v_3 \in \mathbb{R}^3$ qui soit tel que $\mathcal{E} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver la matrice M de f dans la base $\mathcal{E}$.*

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet Boigny
UFR Mathématiques et Informatique
Année 2016 – 2017

LICENCE 1
Mention : Tronc Commun
ECUE : Espaces vectoriels
Examen du 03 Fevier 2018 - Durée : 02 heures et 30 minutes

Aucun document n'est autorisé

Exercice 1. *Soient* $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (2,-2,-1)$, $u_3 = (1,1,-1)$; $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y+z=0\}$ *et* $F = Vect(u_1,u_2)$, *le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *qui est engendré par les vecteurs* u_1 *et* u_2.

1. *Montrer que* E *est un sous-espacevectoriel de* $\mathbb{R}^3$. *Déterminer une base de* E.
2. *La famille* $\mathcal{L} = \{u_1,u_2,u_3\}$ *est-elle libre ? Est-ce que* $u_3 \in F$?
3. *Est-ce que* $u_3 \in E$?
4. *Donner une base de* $E \cap F$.
5. *Soit* $u_4 = (-1,7,5)$. *Est-ce que* $u_4 \in E$? *Est-ce que* $u_4 \in F$?

Exercice 2. *Soient* $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ *la base canonique du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$ *et* f *l'unique endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *qui est tel que :*

$$\begin{cases} f(e_1) &= -e_1+e_2+e_3 \\ f(e_2) &= -2e_1+2e_3 \\ f(e_3) &= -4e_1+e_2+4e_3. \end{cases}$$

On désigne par A *la matrice de* f *dans la base* $\mathcal{B}$.

(i) *Ecrire la matrice* A.

(ii) *Donner une base et une équation de l'image* $Im(f)$ *de* f.

(iii) *Pour quelles valeurs du nombre réel* λ *l'application linéaire* $f_\lambda = f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}$ *est-elle un isomorphisme ?*

(iv) *Trouver une base* $\mathcal{B}_1 = \{v_1\}$ *de* $Ker(f - 3id_{\mathbb{R}^3})$ *et une base* $\mathcal{B}_2 = \{v_2\}$ *de* $Ker(f)$. *Montrer que les vecteurs* v_1 *et* v_2 *sont linéairement indépendants.*

(v) *Trouver un vecteur* $v_3 \in \mathbb{R}^3$ *qui soit tel que* $\mathcal{E} = (v_1,v_2,v_3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$. *Trouver la matrice* M *de* f *dans la base* $\mathcal{E}$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

Université Félix Houphouët-Boigny
UFRMI-Licence 1

2018-2019
2h00

Examen d'espaces vectoriels

Exercice 1. Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3,4)$, $v_3 = (3,1,4,2)$ et $v_4 = (10,4,13,7)$. On note $X_1 = Vect(v_1, v_2, v_3)$ (respectivement $X_2 = Vect(v_1, v_2, v_3, v_4)$) le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs v_1, v_2, v_3 (respectivement v_1, v_2, v_3, v_4).

1. Montrer que $X_1 = X_2$.
2. A quelles conditions sur x, y, z et t un vecteur $u = (x, y, z, t)$appartient-il à X_1 ? Déterminer X_1 par une ou des équations.

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$, espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, définie par :

$$f((x,y,z)) = (-10x + 3y + 15z, -2x + 3z, -6x + 2y + 9z).$$

1. Enoncer le théorème noyau-image des applications linéaires entre espaces vectoriels de dimensions finies.
2. Déterminer la matrice $\mathbf{A}$ de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$.
3. Déterminer la dimension du noyau de f. On donnera une base du noyau de f (dans la suite nous appelerons α un vecteur de cette base).
4. Déterminer la dimension de l'image de f.
5. A-t-on $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f = \mathbf{R}^3$?
6. Déterminer un vecteur β tel que $\alpha = f(\beta)$.
7. Montrer que

$$E_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : f((x,y,z)) = -(x,y,z)\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Déterminer une base de ce sous-espace vectoriel (on note γ un vecteur de cette base).
8. Montrer que $\mathcal{C} = (\alpha, \beta, \gamma)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
9. Déterminer la matrice $\mathbf{B}$ de f dans la base $\mathcal{C}$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny 2018-2019
UFRMI-Licence 1 2h00

Examen d'espaces vectoriels

Exercice 1 (8 points). Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.
Soit f l'endomorphisme de E qui à tout vecteur (x, y, z) associe le vecteur $(x+3z, 0, y-2z)$. Après avoir recopié chacune ~~chacune~~ des assertions suivantes dire si elle est vraie ou fausse. Chaque bonne réponse vous donne droit à 1 point, et chaque mauvaise vous fait perdre 0,5 point. L'abscence de réponse vaut 0.

1. $f(e_1) = e_1 + 3e_3$, $f(e_2) = 0$, $f(e_3) = e_2 - 2e_3$.
2. $f(e_1) = e_1, f(e_2) = e_3, f(e_3) = 3e_1 - 2e_3$
3. f est de rang 3 car E est de dimension 3.
4. f est de rang 2 car (e_1, e_3) est une base de $\mathrm{Im}f$.
5. $\mathrm{Ker}f = \{0\}$.
6. $\mathrm{Ker}f$ est de dimension 1 car $\dim\mathrm{Ker}f = \dim E - \mathrm{rang}f$.
7. $\mathrm{Ker}f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}f$ car $\dim\mathrm{Ker}f \leq \dim\mathrm{Im}f$.
8. L'égalité "$\dim E = \dim\mathrm{Ker}f + \dim\mathrm{Im}f$" suffit pour affirmer que $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$ sont supplémentaires.

Exercice 2 (4 points). Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des suites réelles,

$$F = \{(u_n) \in E / \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 0\}$$

et

$$G = \{(u_n) \in E / \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = u_{2n+1}\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Démontrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 3 (8 points).

1. On définit les fonctions p_0, p_1, p_2, f_3, f_4 par

$$\forall t \in \mathbb{R}\ p_0(t) = 1,\ p_1(t) = t,\ p_2(t) = t^2,\ f_3(t) = e^t, f_4(t) = te^t.$$

Soit la famille $\mathcal{F} = (p_0, p_1, p_2, f_3, f_4)$. Montrer que cette famille est libre.

2. Soit $E = \mathcal{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients réels et soit F l'espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}$.
On définit u par $u(p) = f_3 p' + p$ où p' est la dérivée de p.
(a) Montrer que pour tout $p \in E$, $u(p) \in F$
(b) Montrer que u est linéaire de $E = \mathcal{P}_2$ dans F.
(c) u est-elle injective ?
(d) Donner une base de Imu.
(e) Donner la matrice A représentant u (préciser les bases choisies pour $\mathcal{P}_2$ et F).

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

2019-2020

Université FHB
UFR MATHS-Info.

EXAMEN d'Espaces Vectoriels
Session decembre 2020
Durée : 01H30
Licence 1

EXERCICE 1 (12pts)

Répondre par vrai ou faux en justifiant.

1. Le vecteur $u = (2; -5; 3) \in \mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire des vecteurs :
$v_1 = (1; -3; 2)$; $v_2 = (2; -4; -1)$ et $v_3 = (1; -5; 7)$.
2. Le polynôme réel $P(X) = X^2 + 4X - 3$ est combinaison linéaire des polynômes :
$Q(X) = X^2 + 2X + 5$; $R(X) = 2X^2 - 3X$; $S(X) = X + 3$.
3. Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire des vecteurs :
$e_1 = (1; 2; 3)$; $e_2 = (0; 1; 2)$ et $e_3 = (0; 0; 7)$.
4. Le plan $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$ est engendré par les vecteurs :
$v_1 = (2; 3; 0)$ et $v_2 = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}; 0\right)$.
5. Soient U et V deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et H un sous-espace vectoriel de U.
Soit f une application linéaire de $U \to V$ et f_H sa restriction à H.
i) f_H est une application linéaire de $H \to V$
ii) $\ker f_H = \ker f$
iii) $\operatorname{Im} f_H = f(H)$

EXERCICE 2 (08pts)

Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

1. Calculer $P(X) = \det(A - XI_3)$
2. On appelle valeur propre de A, tout nombre λ tel que $P(\lambda) = 0$.
Calculer les valeurs propres de A.
3. Pour chaque valeur propre λ de A ; on pose

$$E_\lambda = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\},$$

déterminer les E_λ pour chaque valeur propre de A.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB
UFR Maths-Info.

2020 – 2021

EXAMEN D'ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINEAIRES

L1

Durée : $1H30$

Questionnaires Répondez par VRAI ou FAUX dans l'ordre

1. Un espace vestoriel de dimension 4 peut avoir un système de 3 vecteurs libres

2. Un espace vestoriel de dimension 4 peut avoir un système de 5 vecteurs libres.

3. Un espace vestoriel de dimension 4 peut avoir un système de 3 vecteurs générateurs

4. Un espace vestoriel de dimension 4 peut avoir un système de 5 vecteurs générateurs.

5. L'ensemble $V = \{(x, x^2, -2x); x \in \mathbb{R}\}$ est un $\mathbb{R}-$sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

6. Soit F et G deux sous-espaces d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. Si tous les vecteurs d'un système générateur de F appartiennent à G, alors $F \subset G$.

7. Si $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y - z = 0 \quad \text{et} \quad x - y + z = 0\}$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 5x = -4y = -2z\}$ alors $E \cup F$ est un $\mathbb{R}-$sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

8. Soit F et G deux sous-espaces d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. Si tous les vecteurs d'un système libre de F appartiennent à G, alors $F \subset G$

9. Dans un espace vectoriel, tout système lié contient le vecteur nul.

10. Dans un espace vectoriel de dimension 1, tout singleton de vecteur non nul est une base V

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2

Soient $\mathbb{R}^3$, l'espace vectoriel de base canonique $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$f(e_1) = e_1 + 3e_2; f(e_2) = -2e_1 + e_3; f(e_3) = -e_1 + 2e_2 + e_3$.

1. Déterminer la matrice A associée à f relativement à $\mathcal{B}$.

2. Déterminer une base de $Ker(f)$ et de $Im(f)$.

3. Soit $u = e_1 + e_2 - e_3$, montrer que (u, e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de f dans cette base.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université F.H.B.
MATHS-INFO.

Année : 2020-2021

Examen Espaces vectoriels &
Applications linéaires

L1
2nde session
1h 30.

EXERCICE

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par $f(e_1) = -e_2$, $f(e_2) = e_1 + e_3$ et $f(e_3) = e_2$.
Pour tout réel t, on considère l'endomorphisme g_t définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$g_t(u) = id_{\mathbb{R}^3}(u) + tf(u) + \frac{t^2}{2}f^2(u)$

(où $id_{\mathbb{R}^3}$ désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et f^2 désigne $f \circ f$).

1. Déterminer la matrice A de f dans la base B.
2. Déterminer le noyau $ker(f^2)$ et l'image $Im(f^2)$ de f^2.
3. Déterminer le noyau $ker(f^3)$ et l'image $Im(f^3)$ de $f^3 = f \circ f \circ f$.
4. On désigne par $E(t)$ la matrice de g_t dans la base B.

a. Montrer que $E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2$ et déterminer $E(0)$.

b. Montrer que pour tous réels x et y, $E(x+y) = E(x).E(y)$;
puis déterminer le produit $E(t).E(-t)$.

c. En déduire que pour tout réel t, $E(t)$ est inversible et trouver son inverse $(E(t))^{-1}$ en fonction de t, I_3 et A.

5. On prend $t = 2$ et on note $g = g_2$ et $E = E(2)$.

a. Déterminer la matrice E en fonction de I_3 et A, puis l'écrire sous forme de matrice.

b. On désigne par e_i' le vecteur colonne numéro i de E.

- Montrer que la famille $B' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer les matrices de f et de f^2 dans la base B'.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

CORRECTION D'ESPACE VECTORIEL SESSION 1 2016-2017

Exercice 1

1. Montrons que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^4$.
On a : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y - 2t = 0 \text{ et } x + t = 0\}$.
Ainsi $U = (x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2t = 0 \\ x + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2t = 0\,(1) \\ x = -t\,(2) \end{cases}$
$(2)\, dans\, (1) \Rightarrow -t - y - 2t = 0$
$\Rightarrow y + 3t = 0$
$\Rightarrow y = -3t$
D'où $U = (x, y, z, t) = (-t; -3t; z; t)$
Soit $U = t(-1; -3; 0; 1) + z(0; 0; 1; 0)$
Ainsi $F = vect(a; b)$ avec $a = (-1; -3; 0; 1)$ et $b = (0; 0; 1; 0)$
Doù F est un sous-espace vectoriel de E sur $\mathbb{R}$.
On a :$G = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4; x - z + t = 0 \text{ et } y + z = 0\}$
Ainsi $H = (x, y, z, t) \in G \Leftrightarrow \begin{cases} x - z + t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z + t = 0\,(1)' \\ z = -y\,(2)' \end{cases}$
$(1)' \Rightarrow z = t + x$,
d'où $(2)' \Rightarrow y = -t - x$
Ainsi $H = (x; y; z; t) = (x; -t - x; t + x; t)$
Soit $H = x(1; -1; 1; 0) + t(0; -1; 1; 1)$.
Ainsi $G = Vect(c, d)$ avec $c = (1; -1; 1; 0)$ et $d = (0; -1; 1; 1)$
Alors G est un sous-espace vectoriel de E sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminons les bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ respectivement de F et G.

* La base $\mathcal{F}$ de F
On a : $F = Vect(a, b)$ avec $a = (-1; -3; 0; 1)$ et $b = (0; 0; 1; 0)$
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
On a : $\alpha a + \beta b = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \alpha(-1; -3; 0; 1) + \beta(0; 0; 1; 0) = 0_{\mathbb{R}^4}$
$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha = 0 \\ -3\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$
$Ona : \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \alpha a + \beta b = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$
Ainsi la famille de vecteur (a, b) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ et comme génère F alors elle forme donc une base de F.
Ainsi $\mathcal{F} = (a, b)$ avec $a = (-1; -3; 0; 1)$ et $b = (0; 0; 1; 0)$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

* La base $\mathcal{G}$ de G.
On a : $G = Vect(c, d)$ avec $c = (1; -1; 1; 0)$ et $d = (0; -1; 1; 1)$
Soit $(\lambda, \delta) \in \mathbb{R}^2$.
On a : $\lambda c + \delta d = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \lambda(1;-1;1;0)+\delta(0;-1;1;1)=0_{\mathbb{R}^4}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ -\lambda - \delta = 0 \\ \lambda + \delta = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \delta = 0.$$

On a donc $\forall(\lambda, \delta) \in \mathbb{R}^2; \lambda c + \delta d = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \lambda = \delta = 0$.
Ainsi la famille de vecteur $(\lambda; \delta)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$. Et comme elle génère G alors elle forme une base de G.Ainsi $G = (c, d)$ avec $c = (1; -1; 1; 0)$ et $d = (0; -1; 1; 1)$.

Exercice 2

i) La matrice A de f dans la base B

On a : $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

ii) Une base de Imf.

On a : $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \backsimeq \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_2 = L_3 - L_2$

Comme les vecteurs $(-1; -2; -4)$ et $(0; 2; 3)$ sont libres alors $rang A = 2$
Soit $dim A = 2$.
On a donc :
$Imf = Vect(f(e_1); f(e_2); f(e_3))$
$= Vect(f(e_1); f(e_2))$.
Soit la famille $((-1; 1; 1); (-2; 0; 2))$ constitue une base de Imf.

* Une équation de $Im(f)$
On a : $U = (x; y; z) \in Imf \Rightarrow$ la famille δ avec $\delta = \{(x; y; z), (-1; 1; 1), (-2; 0; 2)\}$ est liée.

Ainsi $det\delta = \begin{vmatrix} x & -1 & -2 \\ y & 1 & 0 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2x + 2y = 0$

$\Rightarrow Imf = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; x + z = 0\}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

iii) $f_\lambda = f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}$ avec $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & -4 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

On a par calcul $det(A - \lambda I_3) = \lambda^2(\lambda - 3)$.
$det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0\, ou\, \lambda = 3$.

* F et G sont-ils supplémentaires ?
On a : $F = Vect\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est une base de F avec $\mathcal{F} = (a, b)$ d'où
$dimF = card\mathcal{F} = 2.(1)''$
On a : $G = Vect\mathcal{G}$ et $\mathcal{G} = 2.(2)''$
de $(1)''$ et $(2)''$ il en resulte que $dimF + dimG = 2 + 2 = 4$
d'où on a : $dimF + dimG = dim\mathbb{R}^4 = 4(\pi^1)$

. A-t-on $F \cap G = 0_{\mathbb{R}^4}$

On a : $U = (x; y; z; t) \in F \cap G \Rightarrow \begin{cases} x - y - 2t = 0\ (1) \\ x + t = 0\ (2) \\ y + z = 0\ (3) \\ x - z + t = 0\ (4) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -z + y + 3t = 0\ (4) - (1) = (1)'' \\ x + t = 0\ (2) \\ y + z = 0\ (3) \\ x - z + t = 0\ (4) \end{cases}$

(2)-(4)$\Rightarrow z = 0$.
d'où dans (2) on a : $y = 0$.
Soit (4)-(1)" $\Rightarrow 3t = 0$
$\Rightarrow t = 0$
(2) $\Rightarrow x = 0$.
Ainsi $U(x; y; z; t) \in (F \cap G) \Rightarrow x = y = z = t = 0$.
Soit $F \cap G = 0_{\mathbb{R}^4}\ (\pi^2)$
On a : (π^1) et $(\pi^2) \Rightarrow \begin{cases} dimF + dimG = dim\mathbb{R}^4 \\ F = 0_{\mathbb{R}^4} \end{cases}$
Finalement F et G sont supplémentaires. Ainsi f_λ est un isomorphes si et seulement si $\det(A - \lambda I_3) \neq 0$ d'où f_λ est un isomorphe si et seulement si
$\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0; 3\}$

iv). On a : $U = (x; y; z) \in ker(f - 3id_{\mathbb{R}^3}) \Rightarrow (f - 3id_{\mathbb{R}^3})(U) = 0_{\mathbb{R}^3}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow (A-3I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}-4&-2&-4\\1&-3&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow \begin{cases}-4x-2y-4z=0\,(1)\\x-3y+z=0\,(2)\\x+2y+z=0\,(3)\end{cases}$

$(2)-(3)\Rightarrow -3y-2y=0\Rightarrow y=0.$

d'où $(2)\Rightarrow x=-z.$

Ainsi $U=(x;y;z)=(-z;0;z)$

Soit $U=z(-1;0;1).$

Alors $ker(f-3id_{\mathbb{R}^3})=Vect(-1;0;1)$ Ainsi $V_1=(-1;0;1).$

On a : $U=(x;y;z)\in ker(f)\Rightarrow f(U)=0_{\mathbb{R}^3}.$

$\Rightarrow AU=0.$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}-1&-2&-4\\1&0&1\\1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow \begin{cases}-x-2y-4z=0\,(1)\\x+z=0\,(2)\\x+2y+4z=0\,(3)\end{cases}$

$(2)\Rightarrow x=-z.$

Dans (3) on a : $3z+2y=0\Rightarrow y=-\frac{3}{2}z.$ d'où $U=(-z;-\frac{3}{2}z;z)=z(-1;\frac{-3}{2};1).$

$\Rightarrow (A-3I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}.$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}-4&-2&-4\\1&-3&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}.$

$\Rightarrow \begin{cases}-4x-2y-4z=0\,(1)\\x-3y+z=0\,(2)\\x+2y+z=0\,(3)\end{cases}$

$(2)-(3)\Rightarrow -3y-2y=0\Rightarrow y=0.$

D'où $(2)\Rightarrow x=-z.$

Ainsi $U=(x;y;z)=(-z;0;z)$

Soit $U=z(-1;0;1).$

Alors $Ker(f-3id_{\mathbb{R}^3})=Vect(-1;0;1)$

Ainsi $V_1=(-1;0;1).$

On a : $U=(x;y;z)\in kerf(f)\Rightarrow f(x)=0_{\mathbb{R}^3}.$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow AU = 0.$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x - 2y - 4z = 0\,(1) \\ x + z = 0\,(2) \\ x + 2y + 4z = 0\,(3) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x = -z.$

Dans (3) on a : $3z + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}z.$

d'où $U = (-z; -\frac{3}{2}z; z) = z(-1; -\frac{3}{2}; 1).$

Ainsi $Kerf = Vect(-1;; -\frac{3}{2}; 1).$

Soit $V_2 = (-1; -\frac{3}{2}; 1)$

On a : $\alpha V_1 + \beta V_2 = 0_{R^3}$ $\alpha(-1;0;1)+\beta(-1;-\frac{3}{2};1)=0_{\mathbb{R}^3}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha - \beta = 0 \\ -\frac{3}{2}\beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$\alpha V_1 + \beta V_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$, Ainsi V_1 et V_2 sont linéairement indépendants.

(V) Trouvons $V_3 = (x; y; z)$. On a : $\varepsilon = (V_1; V_2; V_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. Alors $det\varepsilon \neq 0$.

Soit $det\varepsilon = \begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ y & 0 & -\frac{3}{2} \\ z & 1 & 1 \end{pmatrix} = (y + \frac{3}{2}z) - (y - \frac{3}{2}x).$

$det\varepsilon = y + \frac{3}{2}z - y + \frac{3}{2}x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x$

$det\varepsilon \neq 0 \Rightarrow z \neq -x$

Prenons $x = 1$ et $z = y = 1$. D'où $V_3 = (1; 1; 1)$.

– Trouvons la matrice $Mat_{\varepsilon\varepsilon}(f)$

$$P = P_{\beta\varepsilon} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$detP = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(\tfrac{3}{2}) = 3.$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$ComP = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow (ComP)^t = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$Mat_{ee} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI : L1 Année 2018-2019

CORRECTION : ESPACE VECTORIEL SESSION 1

EXERCICE 1

1. Montrons que $X_1 = X_2$.
   Soit $y \in X_1$. Alors, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}/\ y = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$.
   On a $y = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + 0 v_4 \in X_2$. Donc $X_1 \subset X_2$

   De même, soit $y \in X_2$. Il existe $\lambda_1, ..., \lambda_4 \in \mathbb{R}$: $y = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$. Remarquons que $v_4 = v_1 + 3v_3$, d'où
   $y = (\lambda_1 + \lambda_4)v_1 + \lambda_2 v_2 + (\lambda_3 + 3\lambda_4)v_3 \in X_1$. Donc $X_2 \subset X_1$.
   Alors on a $X_1 = X_2$.
2. Soit $u = (x, y, z, t)^T \in \mathbb{R}^4$.
   $u \in X_1$ ssi $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 3 \\ y & 1 & 2 & 1 \\ z & 1 & 3 & 4 \\ t & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$

EXERCICE 2

Soit, $f(x, y, z) = (-10x + 3y + 15z, -2x + 3z, -6x + 2y + 9z)$.

1. Théorème Noyau-Image :
   Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et f une application linéaire de E dans F. Alors, on a

   $$dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim(E).$$

2. A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Soient, e_1, e_2 et e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Ainsi, $e_1 = (1, 0, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ et on a $f(e_1) = (-10, -2, -6)$; $f(e_2) = (3, 0, 2)$ et $f(e_3) = (15, 3, 9)$. Ainsi,

   $$A = \begin{pmatrix} -10 & 3 & 15 \\ -2 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

3. Déterminons $dim(Ker(f))$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

On a $X = (x, y, z) \in Ker(f) \Leftrightarrow f(X) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\begin{cases} -10x + 3y + 15z = 0 \\ -2x + 3z = 0 \\ -6x + 2y + 9y = 0 \end{cases}$$

On échelonne cette matrice et on obtient :

$$\begin{cases} -10x + 15z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}z \\ y = 0 \end{cases}$$

D'où $X = (\frac{3}{2}z, 0, z) = \frac{z}{2}(3, 0, 2)$. On pose $\alpha = (3, 0, 2)$ et alors $Ker(f) = vect(\alpha)$ et $dim(Ker(f)) = 1$

4. Déterminons $dim(Im(f))$.
D'après le théorème noyau-image (théorème du rang) on a

$$dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(Ker(f)) = 3 - 1 = 2$$

5. Á-t-on $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$. D'après la matrice A , on a $\alpha = f(e_2)$ et comme $Ker(f) = vect(\alpha)$ on a $Ker(f) \subset Im(f)$ et donc $Ker(f) \bigcap Im(f) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Ce qui montre que $Ker(f) \oplus Im(f) \neq \mathbb{R}^3$.
6. Déterminons β tel que $\alpha = f(\beta)$

Méthode 1 : Elle consiste à poser $\beta = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et résoudre le système $f(\beta) = \alpha$ avec $\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Cela revient à résoudre

$$A\beta = \alpha$$

Méthode 2 :Remarquons que $f(e_2) = \alpha$ donc $\beta = e_2 = (0, 1, 0)^T$

7.
On a $f(O_{\mathbb{R}^3}) = -0_{\mathbb{R}^3}$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E_{-1}$.
Soient $x, y \in E_{-1}$. On a $f(x) = -x$ et $f(y) = -y$, pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, f est linéaire donc on a :
$f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y) = -\lambda_1 x - \lambda_2 y = -(\lambda_1 x + \lambda_2 y)$. Ainsi $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in E_{-1}$.
Par conséquent E_{-1} est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

La Base de E_{-1}.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. En résolvant le système $f(X) = -X \Leftrightarrow AX = -X$

On obtient $\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$. Ainsi, $X = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on a $E_{-1} = vect(\gamma)$

où $\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc une base du s.e.v. E_{-1} est $B = (\gamma)$.

8. Montrons que $C = (\alpha, \beta, \gamma)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On a, pour tout $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta + \lambda_3\gamma = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

D'où C est une base de $\mathbb{R}^3$.

9. Soit B la matrice de f dans la base C.
On a $f(\alpha) = 0_{\mathbb{R}^3} = 0\alpha + 0\beta + 0\gamma$;
$f(\beta) = \alpha = 1\alpha + 0\beta + 0\gamma$;
$f(\gamma) = -\gamma = 0\alpha + 0\beta - 1\gamma$. D'où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI : L1 Année 2018-2019

CORRECTION : ESPACE VECTORIEL SESSION 2

EXERCICE 1

Soit l'e.v. $E = \mathbb{R}^3$.On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.
Soit f l'endomorphisme de E défini par $(x, y, z) \mapsto (x + 3z, 0, y - 2z)$.
Recopie et repondre chacune des assertions par Vraie ou Fausse.

1. Fausse
2. Vraie
3. Fausse
4. Vraie
5. Fausse
6. Vraie
7. Fausse
8. Fausse

EXERCICE 3

1. Montrons que la famille $\mathcal{F} = (p_0, p_1, p_2, f_3, f_4)$ est libre.
   Soient $\alpha_0, ..., \alpha_4 \in \mathbb{R}$.
   On a : $\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + ... + \alpha_4 f_4 = 0$
   $\Leftrightarrow \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + (\alpha_3 + \alpha_4 t)e^t = 0$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 = 0 & \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 t = 0 & \Rightarrow \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

   Par conséquent, $\mathcal{F}$ est une famille libre.
2. Soit $E = \mathcal{P}_2$ et soit F l'e.v.engendré par $\mathcal{F}$.
   On définit $u(p) = f_3 p' + p$.
   (a) Soit $p \in E$. Montrons que $u(p) \in F$.
   On a : $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ avec $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
   $p'(t) = a_1 + 2a_2 t$. Ainsi $u(p) = (a_1 + 2a_2 t) f_3(t) + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = a_1 f_3(t) + 2a_2 f_4(t) + a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2$
   $u(p)$ s'écrit comme combinaison linéaire de la famille engendrant l'e.v. F. Donc $u(p) \in F$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

(b) Montrons que u est linéaire de E dans F.
Soient $p, q \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$
On a :

$$\begin{aligned} u(\alpha p + q) &= f_3(\alpha P + q)' + \alpha p + q \\ &= f_3(\alpha P' + q') + \alpha p + q \\ &= f_3\alpha P' + f_3 q' + \alpha p + q \\ &= \alpha(f_3 p' + p) + f_3 q' + q \\ &= \alpha u(p) + u(q) \end{aligned}$$

Donc u est linéaire.

(c) injectivité de u
Soit $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in Ker(u) \Rightarrow u(p) = 0$.
On a donc

$$\begin{aligned} & u(p) = 0 \\ & f_3 p' + p = 0 \\ & (a_1 + 2a_2 t)e^t + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 t = 0 \end{cases} \Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

Ainsi on a $p = 0$.
Donc $Ker(u) = \{0\}$.
D'où l'injectivité de u.

(d) Une base de Imu
On a

$$\begin{aligned} & u(1) = 1 \\ & u(t) = f_3 + t \\ & u(t^2) = 2tf_3 + t^2. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que pour tout $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha u(1) + \beta u(t) + \lambda u(t^2) = 0$ on obtient $\alpha = \beta = \lambda = 0$. Donc une base de Imu est $\mathcal{B}_2 = (1, f_3 + t, 2tf_3 + t^2)$.

(e) Considérons les bases suivantes :
$\mathcal{B}_1 = (1, t, t^2)$ est une base de E.
$\mathcal{B}_2 = (p_0, p_1, p_2, f_3, f_4)$ est une base de F.
On a :

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$u(1) = 1 = 1p_0 + 0p_1 + 0p_2 + 0f_3 + 0f_4$
$u(t) = f_3 + t = 0p_0 + 1p_1 + 0p_2 + 1f_3 + 0f_4$
$u(t^2) = 2f_3t + t^2 = 0p_0 + 0p_1 + 1p_2 + 0f_3 + 2f_4$
Ainsi on obtient la matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

CORRECTION DE L'EXAMEN D'ESPACE VECTORIEL 2019-2020

EXERCICE 1

Répondre par vrai ou faux.
NB : Travailler au brouillon avant toutes affirmations.

1. Faux.
Il suffit de vérifier si le système d'équation $av_1 bv_2 cv_3 = u$ existe
Indication : on trouve une absurdité, donc le système d'équation n'admet pas de solution.

2. Indication : pareil que précédemment.
Vérifier si l'équation (E): $aQ(x) + bR(x) + cS(x) = P(x)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^3$
i.e. $(E) : (a + 2b)x^2 + (2a - 3b + c)x + (5a + 3C) = x^2 + qx - 3$
Résoudre donc par identification :

3. Il s'agit ici de savoir si la famille de vecteur $F = (e_1, e_2, e_3)$ est une base dans $\mathbb{R}^3$.
La matrice associée à F est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$
$\det A = 1 \times 1 \times 7 = 7 \neq 0$ (Matrice triangulaire).
Ainsi F est une famille libre et $cardF = dim\ \mathbb{R}^3 = 3$.
D'où F est une base de $\mathbb{R}^3$ donc **vrai.**

4. Notons que le plan $z = 0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, donc de dimension $3 - 1 = 2$
De plus $v_1 = I_2 v_2$ (pas libre)
Donc **faux.**

5.

i. **Vrai**
En effet $f: U \longrightarrow V$ est lineaire et $H \subset U$ vérifie les propriétés de U
Comme $f_H: H \longrightarrow V$ alors f_H est linéaire.

ii. **Faux**
Soit $x \in kerf_H$
Alors $x \in H$ et $f_H(x) = 0_V$
Comme $H \subset U$ alors $x \in U$ et $f(x) = 0_V$
$\Longrightarrow x \in kerf \Longrightarrow kerf_H \subset kerf$
Soit $x \in kerf$
Alors $x \in U$
i.e. $x \in U \cap H$ ou $x \in U \setminus H$
Ainsi on n'a pas toujours $kerf \subset kerf_H$.

iii. **Vrai**
Soit $y \in Imf_H$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$\Leftrightarrow \exists x \in H \mid y = f_H(x)$
$H \subset U \Leftrightarrow \exists x \in H \mid y = f(x)$
D'où $y \in f(H) \Leftrightarrow Imf_H = f(H)$

EXERCICE 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(1) $P(x) = \det(A - xI_3)$

On a : $A - xI_3 = \begin{pmatrix} 3-x & 2 & 4 \\ -1 & 3-x & -1 \\ -2 & -1 & -3-x \end{pmatrix}$

$$P(x) = \det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 4 \\ -1 & 3-x & -1 \\ -2 & -1 & -3-x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+x & 2 & 4 \\ 0 & 3-x & -1 \\ -1-x & -1 & -3-x \end{vmatrix}$$

$$= (1+x)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3-x & -1 \\ -1 & -1 & -3-x \end{vmatrix}$$

$P(x) = (1+x)(x-2)^2$

Opérations éffectuées : $c_1 \leftarrow c_2 - c_1$
$L_3 \leftarrow L_1 + L_3$

(2) $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ *ou* $x = 2$. Alors les valeurs propres sont -1 *et* 2.

(3) *Determinons* E_{-1} *et* E_2

$$E_{-1} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right.$$

Soit $(x,y,z) \in E_{-1}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 4z = -x \\ -x + 3y - z = -y \\ -2x - y - 3z = -z \end{cases}$$

On trouve $x = -z$, $y = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_{-1} = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Raisonnement analogue pour E_2

$$\Rightarrow E_2 = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny
UFRMI

2020–2021

CORRECTION ESPACE VECTORIEL
1ERE SESSION

Questionnaires : Repondez par VRAI ou FAUX

1- VRAI

2- FAUX

3- FAUX

4- VRAI

5- FAUX

6- VRAI

7- FAUX

8- FAUX

9- VRAI

10-VRAI

EXERCICE 2

1. Déterminons la matrice A associée à f relativement à β
$f(e_1) = e_1 + 3e_2$; $f(e_2) = -2e_1 + e_3$; $f(e_3) = -e_1 + 2e_2 + e_3$

D'où $A \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Déterminons une base de $Ker(f)$ et de $Imf(f)$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \in Ker(f) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-z=0 \\ -6x-z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-z=0 \\ -6y-z=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

Ainsi $Ker(f)=0_{\mathbb{R}^3}$, $Ker(f)$ n'admet donc pas de base.
Par ailleurs, $Imf =< f(e_1), f(e_2), f(e_3) >$
$Imf =< (1,3,0),(-2,0,1),(-1,2,1) >$. Ces trois vecteurs sont libres donc continuent donc une base de Imf.
Notons β_1 cette base: $\beta_1 = ((1,3,0),(-2,0,1),(-1,2,1))$

3. Montrons que (μ, e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminons la matrice de f dans cette base.

Notons B la matrice obtenue en disposant en ligne les vecteurs de (μ, e_1, e_2)
$\mu = e_1 + e_2 - e_3 = (1,0,0) + (0,1,0) - (0,0,1)$

$\mu = (1,1,-1)$ d'où $B \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Ainsi (μ, e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^3$

On a: $f(\mu) = A \times (1,1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$f(\mu) = (0,1,0) = e_2$

$f(e_1) = A \times (1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(e_1) = (1,0,0) = e_1$

$f(e_2) = A \times (0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(e_2) = (-2,0,1)$
$f(e_2) = -\mu + e_2 - e_1 = -\mu - e_1 + e_2$
Notons C la matrice de f dans la base (μ, e_1, e_2)
On a: $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB Maths-Info 2020-2021

CORRECTION ESPACE VECTORIEL

SESSION 2

Exercice

1. $f(e_1) = -e_2$; $f(e_1) = e_1 + e_3$ et $f(e_3) = e_2$ d'où la matrice A de f dans la base $B = (e_1, e_2, e_3)$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. A^2 est la matrice associée à f^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\mu = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

On a: $\mu \in Ker(f^2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = z$

D'où $\mu = (x, y, x) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0)$

Ainsi $\boxed{Ker(f^2) = < (1, 0, 1), (0, 1, 0) >}$

$Im(f^2) = \{f(x, y, z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$

$= \{(-x + z, 0, -x + z), (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{(-x + z)(1, 0, 1), (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$

D'où $\boxed{Im(f^2) = < (1, 0, 1) >}$

3. La matrice de f^3 est A^3

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$A^3 = 0_{\mathbb{R}^3}$
Ainsi $Ker(f^3) = \mathbb{R}^3$ et $Im(f^3) = 0_{\mathbb{R}^3}$

4. a) Montrons que $E(t) = I_3 + t_A + \frac{t^2}{2}A^2$ et déterminons $E(0)$

Notons $\mu = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$g_t(\mu) = g_t(x, y, z) = id_{\mathbb{R}}(x, y, z) + t\, f(x, y, z) + \frac{t^2}{2}\, f^2(x, y, z)$

$= I_3(x, y, z) + t\, A(x, y, z) + \frac{t^2}{2}\, A^2(x, y, z)$

$g_t(\mu) = (I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2)(x, y, z)$

Par identification : $E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2$

D'où $E(0) = I_3 + 0\, A + \frac{0^2}{2}A^2 \Rightarrow \boxed{E(0) = I_3}$

5. a) On a: $E = E(2) = I_3 + 2A + \frac{4}{2}A^2 = I_3 + 2A + 2A^2$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $e'_1 = (-1; -2; -2)$; $e'_2 = (2; 1; 2)$ et $e'_3 = (2; 2; 3)$

* Montrons que B' est une base de $\mathbb{R}^3$

$$det(E) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -(3 - 4)$$

$det(E) = 1$, $det(E) \neq 0$ d'où $rang(E) = rang(\beta') = 3$

Comme $Card(\beta') = rang(\beta') = dim\mathbb{R}^3$, alors β' est une base de $\mathbb{R}^3$.

*Déterminons les matrices de f et f^2 dans B'

Noton M_1, la matrice de f dans B' et M_2 la matrice de f^2 dans B'

• Déterminons M_1

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$f(e_1') = A(-1;-2;-2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2e_1 - e_2 - 2e_3$$

$$f(e_1') = -e_2'$$

$$f(e_2') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_1 + e_3$$

$$f(e_2') = e_1' + e_3'$$

$$f(e_3') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2e_1 + e_2 + 2e_3 = e_2'$$

D'où $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

• Déterminons M_2

$$f^2(e_1') = A^2(-1;-2;-2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -e_1 + e_3$$

$$f^2(e_1') = -e_1' - e_3'$$

$$f^2(e_2') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$f^2(e_3') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = e_1 + e_3 = e_1' + e_3'$$

D'où $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^2$

6. Montrons que $\forall x, y \in \mathbb{R}, E(x+y) = E(x).E(y)$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, E(x+y) = I_3 + (x+y)A + \frac{(x+y)^2}{2}A^2$$

$$E(x+y) = I_3 + xA + yA + \frac{x^2}{2}A^2 + \frac{y^2}{2}A^2 + xyA^2 \qquad (1)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, E(x).E(y) = (I_3 + xA + \frac{x^2}{2}A^2)(I_3 + yA + \frac{y^2}{2}A^2)$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$E(x).E(y) = I_3 + yA + \frac{y^2}{2}A^2I_3 + xAI_3 + xyA^2 + \frac{xy^2}{2}A^3 + \frac{x^2}{2}A^2I_3 + \frac{x^2y}{2}A^3 + \frac{x^2y^2}{4}A^4$ Or $A^3 = 0_{\mathcal{R}^3}$

D'où $\forall x, y \in \mathbb{R}, E(x).E(y) = I_3 + yA + \frac{y^2}{2}A^2 + xA + xyA^2 + \frac{x^2}{2}A^2$

$E(x).E(y) = I_3 + xA + yA + \frac{x^2}{2}A^2 + \frac{y^2}{2}A^2 + xyA^2$ (2)

Comme (1) = (2), alors $\forall x, y \in \mathbb{R}, E(x+y) = E(x).E(y)$

Déterminons $E(t).E(-t)$

Posons $x = t$ et $y = -t$

On obtient donc $E(t-t) = E(t).E(-t)$

$E(t).E(-t) = E(0)$

$E(t).E(-t) = I_3$ car $E(0) = I_3$

On a: $E(t).E(-t) = I_3$, donc $E(t)$ est inversible d'inverse.

$E(-t) = I_3 - tA + \frac{(-t)^2}{2}A^2$

$E(-t) = I_3 - tA + \frac{(t^2)}{2}A^2$ Ainsi $\boxed{(E(t))^{-1} = I_3 - tA + \frac{t^2}{2}A^2}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UE: Probabilités-Statistique 2016/2017

ECUE Statistique - Semestre 2
Examen 1ère session
Durée : 1 h 30

Exercice 1

La répartition des salaires mensuels en millier d'euros d'une entreprise de 500 employés est donnée par le tableau suivant

Salaires (en millier d'euros)	[1;1.4[	[1.4;a[	[a;2.2[	[2.2;3[
Fréquence cumulée croissante	0.24	0.72	b	1

Malheureusement, deux valeurs ont été effacées et remplacées par a et b. Une étude préalable indique que l'effectif des employés de la dernière classe est 40 et que la densité d'effectif des employés de la 2ème classe est 400.

(1) Déterminer a et b.
(2) Calculer le salaire moyen, le salaire median et le salaire le plus observé de cette distribution.
(3) 25% des employés ont un salaire supérieure à combien d'euros ?
(4) Quelle est la proportion des employés dont le salaire est compris entre 1300 et 2100 euros?
(5) Déterminer les limites des moustaches de cette distribution.

Exercice 2

Une entreprise est composée de deux catégories d'employés A et B d'effectif 100 et 150 respectivement. On a observé le salaire mensuel suivant les catégories et on a obtenu les résultats suivants :

Catégories A : salaire moyen : 1600 ; dispersion des salaires (ecart type) : 120
Catégories B : salaire moyen : 1500 ; dispersion des salaires (ecart type) : 120

(1) Dans quelle catégorie pensez-vous que le salaire est le plus dispersé ?
(2) Quelle est le salaire moyen de l'ensemble des employés ?
(3) Calculer la dispersion des salaires dans l'entreprise.

Exercice 3

Soient X et Y deux variables quantitatives. On a calculé les deux droites de régression, celle de Y sur X et celle de X sur Y, par la méthode des moindres carrés. On a obtenu les deux droites suivantes : $y = 0,232x + 3,699$ et $x = 1,140y - 0,739$.

Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de ces variables. Le modèle linéaire est-il justifié ?

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UE: Probabilités-Statistique 2016/2017

ECUE Statistique - Semestre 2
Examen 2ème session
Durée : 1 h 30

Exercice 1

Soit la série statistique suivantes : 21, 18, 22, 12, 30, 19, 14, 22, 24, 18.

(1) Déterminer la moyenne, la médiane, le premier et le troisième quartile de cette série.
(2) Calculer les limites des moustaches.

Exercice 2

L'étude du sexe et du revenu des employés d'une entreprise a fourni le tableau ci-après :

Tableau : Répartition des employés de l'entreprise selon le sexe et le revenu

Revenu mensuel (en centaines d'euros) \ Sexe	Femme	Homme
[10, a[	20	28
[a, b[	60	84
[b, 22[	15	21
[22, 30[	5	7

Certaines données sont illisibles et ont été remplacées par a et b

(1) Préciser la population, l'individu et les caractères étudiés ainsi que leurs types.
(2) Déterminer les distributions marginales (effectifs et fréquences).
(3) On sait par ailleurs que le revenu mensuel moyen et le revenu mensuel médian des employés de cette entreprise sont respectivement 1705 euros et 1700 euros.
   (a) Montrer que les bornes a et b sont solutions du système : $\begin{cases} a+b & = 34 \\ 4a+3,75b & = 131 \end{cases}$
   (b) Trouver les valeurs de a et b.
   (c) Déterminer le revenu mensuel le plus observé dans cette entreprise.
   (d) Quelle est la proportion des employés qui ont un revenu mensuel compris entre 1100 et 1900 euros?
   (e) 25% des employés ont un revenu mensuel au dessus de combien d'euros ?
(4) Calculer le revenu mensuel moyen des femmes et celui des hommes.
(5) Le revenu mensuel des employés de cette entreprise est-il indépendant du sexe ? justifier votre réponse.

VALIDEUR LMD
Scanné avec CamScanner

UE: Probabilités-Statistique 2017/2018

ECUE Statintique - Semestre 2
Examen 1ère session
Durée : 1 h 30

Exercice 1

Pour vérifier le niveau en Statistique d'un groupe de TD de 25 étudiants, on décide de les évaluer en fin de séance. Après l'évaluation, on a relevé les notes suivantes :

$12 - 10,5 - 15 - 8 - 18 - 2 - 8,5 - 9 - 16,5 - 10 - 14,5 - 5 - 4,5 - 13 - 11,5 - 9,5.$

(1) Déterminer la population, l'échantillon et la variable étudiée, en précisant le type de variable et sa nature.

(2) On considère les données brutes.
   (a) Déterminer et interpréter la moyenne et la médiane de cette série.
   (b) Quelle est la proportion des étudiants qui ont une note supérieur ou égal à 9,5 ?
   (c) 15% d'étudiants ont une note au dessus de combien ?

(3) On regroupe maintenant les données en classes de même amplitude.
   (a) Etablir le tableau donnant les effectifs, les fréquences et les fréquences cumulées.
   (b) Déterminer et interpréter le mode et la médiane de cette distribution.
   (c) Quelle est la proportion des étudiants qui ont une note supérieur ou égal à 9,5 ?
   (d) Comparer ces résultats avec ceux obtenus précédemment.

Exercice 2

On veut prédire la hauteur H d'un arbre en fonction de son diamètre D. Pour faire une régression linéaire, on effectue un changement de variable en posant $Y = \ln(H)$ et $X = \ln(D)$. Voici les mesures faites sur 5 arbres :

X	-1,61	-1,20	-0,97	-0,51	-0,42
Y	2,22	2,27	2,38	2,60	2,65

On donne :

$$\sum_i xi = -4,71;\ \sum_i yi = 12,12;\ \sum_i x_i^2 = 5,4095;\ \sum_i y_i^2 = 29,5282;\ \sum_i x_i y_i = -11,0458.$$

(1) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y par rapport à X.

(2) Ce modèle linéaire entre X et Y est-il justifié ? (Justifiez votre réponse)

(3) Si oui, en déduire la hauteur prévue d'un arbre de diamètre 0,7.

NB: Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Année universitaire 2018-2019

Licence 1: Examen de Statistique descriptive

Durée: 1 heure

(1) Quelles sont les conditions que doit présenter un bon paramètre de tendance centrale? un bon paramètre de dispersion?

(2) Définir la médiale et la médiane. Que vous indique la comparaison entre la médiane et la médiale?

(3) Définir et interpréter l'indice de Gini.

(4) Voici les courbes de Lorentz associées aux salaires de deux entreprises :

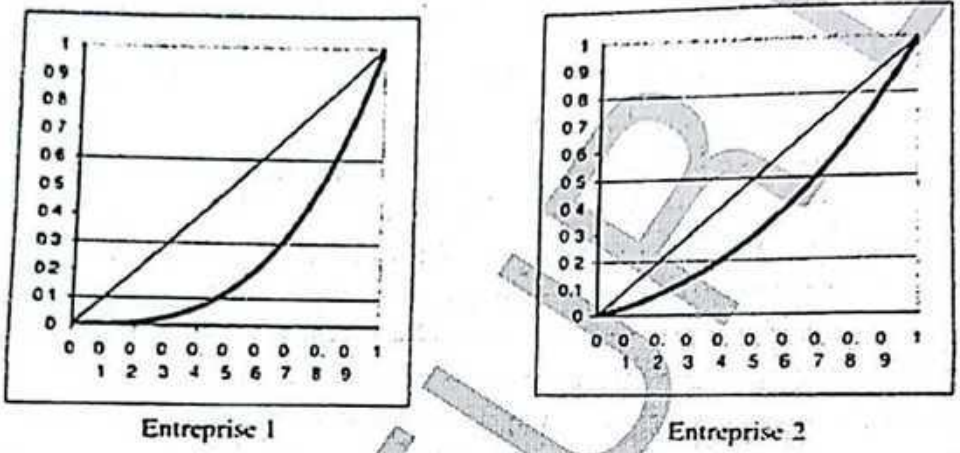


FIGURE 1. Courbes de Lorentz

Dans quelle entreprise la répartition des salaires est-elle la moins inégalitaire ?

(5) Définir et interpréter le coefficient de Cramer

(6) Définir et interpréter le rapport de correlation.

(7) Définir et interpréter le coefficient de correlation linéaire.

(8) VRAI OU FAUX

(a) La médiale est toujours supérieure ou égale à la médiane.

(b) Une distribution statistique dont le mode, la moyenne et la médiane ont des valeurs égales, est symétrique.

(c) Le mode d'une distribution statistique est unique.

(d) Lorsqu'on ajoute une même valeur à chaque observation d'une série statistique, la moyenne est inchangée.

(e) Lorsqu'on ajoute une même valeur à chaque observation d'une série statistique, l'écart-type est inchangée.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

(9) Classer ces indicateurs selon leur nature (indicateur de position ou de dispersion). Cochez la bonne réponse.

Indicateurs	Position	Dispersion
Minimum		
Moyenne		
Ecart-type		
Mode		
Ecart interquartile		
Médiane		
Premier quartile		
Coefficient de variation		

(10) Considérons un groupe de TD pour lequel la moyenne des notes est égale à 10 et la variance est égale à 9. Trois nouveaux étudiants ayant respectivement 7, 14 et 17 s'inscrivent dans ce groupe. Quelle sera, selon vous, l'évolution des statistiques suivantes (sans calcul) :

	Moyenne	Ecart-type	Médiane	Mode	Etendue	Ecart interquartile
Augmentation						
Diminution						
Identique						
Les données de l'exercice ne permettent pas de conclure						

(11) Voici des histogrammes ainsi que des boites à moustaches montrant des situations éventuellement dissymétriques. Associer chaque dissymétrie à son histogramme et à sa boites à moustaches: distribution étalée à gauche; distribution étalée à droite; distribution symétrie.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

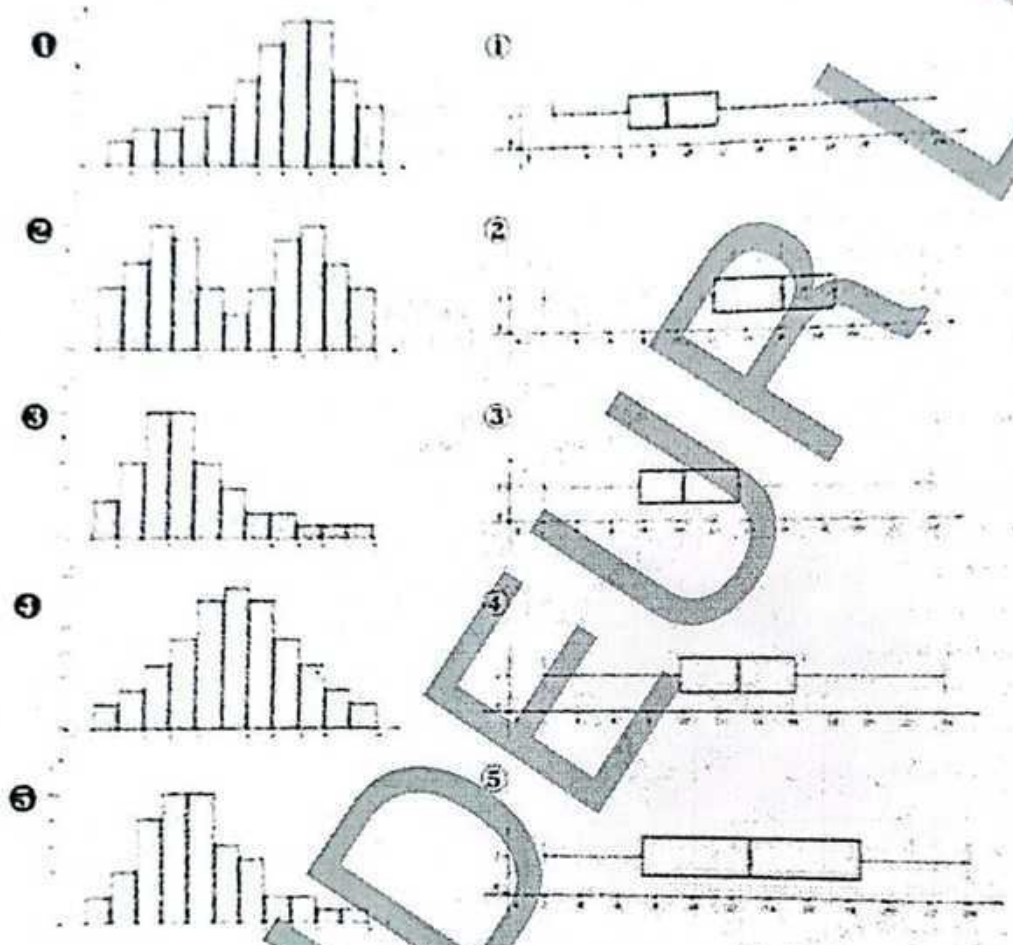


FIGURE 2.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Année universitaire 2018-2019

Licence 1: Examen de Statistique descriptive

Session 2

Durée: 1 heure

Questions de Cours

(1) Donner deux méthodes permettant de calculer la médiane d'une serie statistique (une méthode graphique et une méthode calculatoire).
(2) Décrire la construction de la boîte à moustaches. Donner l'interprétation de la boîte à moustaches.
(3) Définir la médiale et la médiane. Que vous indique la comparaison entre la médiane et la médiale?
(4) Décrire la construction de la courbe de Lorenz. Donner l'interprétation de la courbe de Lorenz.
(5) Définir et interpréter l'indice de Gini.
(6) Définir et interpréter le coefficient de Cramer.
(7) Définir et interpréter le rapport de correlation.
(8) Définir et interpréter le coefficient de correlation linéaire.

QCM. Pour chaque question, choisissez une réponse. Une bonne réponse est notée 1 point. Une mauvaise réponse enlève 1 point.

(1) Un caractère qualitatif est
  (a) chiffré
  (b) non chiffré
  (c) une variable qui peut prendre des valeurs décimales
  (d) une variable discrète.
(2) La moyenne arithmétique est
  (a) un indicateur de dispersion
  (b) un indicateur de forme
  (c) un indicateur d'asymétrie
  (d) un indicateur de position
(3) La médiale est un
  (a) un indicateur de dispersion
  (b) un indicateur de forme
  (c) un indicateur d'asymétrie
  (d) un indicateur de position.
(4) La médiale est un 'intervalle interquartile
  (a) contient 50% des observations
  (b) est égal à $Q_3 - Q_1$
  (c) contient 75% des observations
  (d) est égal à $Q_1 - Q_3$
(5) La représentation graphique des fréquences correspondant au cas du caractère quantitatif continu est
  (a) l'histogramme
  (b) le diagramme en bâtons
  (c) la courbe en escaliers
  (d) la courbe cumulative.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFHB-UFRMI / Licence 1 - Semestre 2
UE Probabilités et Statistique

Année Académique
2019/2020

Statistique - Semestre 2
Examen Final Decembre 2020
Durée : 1 h 30

Exercice 1

On a observé un caractère X sur une population donnée. Et on a les résultats suivants :

X	[0;3[	[3;9[	[9;13[	[13;15[	[15;20]
Effectifs	60	180	100	70	90

(1) Déterminer la valeur la plus obsevée et la médiane de cette série.
(2) Quelle est la proportion des individus dont la valeur observée du caractère est : supérieure à 9 ? inférieure à 15 ? comprise entre 5 et 18 ?

Exercice 2

On a observé deux caractères X et Y sur cinq personnes. Et on a les résultats suivants :

X	3	9	6	5	7
Y	2	6	4	3	5

(1) Déterminer la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées.
(2) Calculer le coéfficient de corrélation linéaire. Le modèle linéaire est-il justifié ? Si oui, estimer la valeur de Y pour $X = 12$.

Exercice 3

L'étude du sexe et du revenu mensuel (en milliers d'Euros) des employés d'une grande entreprise a fourni le tableau ci-après :

Revenu mensuel \ Sexe	Femme	Homme
[1; 1.4[	200	280
[1.4; 2[	600	840
[2; 2.2[	150	210
[2.2; 3[	50	70

(1) Préciser la population, l'individu et les caractères étudiés ainsi que leurs types.
(2) Déterminer les distributions marginales (effectifs et fréquences).
(3) Calculer le revenu mensuel moyen des employés de cette entreprise.
(4) Le revenu mensuel des employés de cette entreprise est-il lié au sexe ? Si oui, déterminer la part de la variation du revenu expliquée par le sexe dans la variation totale du revenu.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB

Année Académique
2020 – 2021

ECUE 1 Statistique Descriptive
Examen 1ère session-Août 2021
Durée : 1h30

Exercice 1

Lors d'une enquête, on a interrogé 20 individus sur leur taille. On a obtenu les valeurs (exprimées en mètre) suivantes :

1,72	1,87	1,66	1,73	1,64	1,77	1,82	1,81	1,60	1,78
1,83	1,75	1,70	1,58	1,68	1,66	1,93	1,75	1,80	1,83

1. Déterminer la population et la variable statistique étudiée. Quelle est la nature de cette variable.

2. Calculer et interpréter la taille moyenne et médiane. Que pouvez-vous conclure de la comparaison de ces deux valeurs ?

3. Quelle est la proportion des individus qui ont une taille inférieur à 1,74 mètre ?

4. On regroupe les données en 5 classess définies comme suit : la borne inférieure et la borne supérieure des intervalles sont : 1,55 et 2,00 respectivement; la première, la troisième et la dernière classesont pour amplitudes 0,1; 0,03 et 0,16 respectivement; les deux autres classes sont de même amplitude a.

   (a) Trouver la valeur a.

   (b) Etablir le tableau donnant les effectifs, les effectifs par unité d'amplitude, les fréquences et les fréquences cumulées croissantes. On prendra 0,08 comme unité d'amplitude.

   (c) Calculer et interpréter le mode et la médiane de cette distribution;

   (d) Avec ce regroupement en classe, reprendre la question (3).

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 2

On veut étudier le lien entre le risque cardio-vasculaire et le type d'huile consommée. Pour cela, on a observé pendant dix ans, 500 individus et on a les résultats suivants. Parmi ceux-ci :
- 200 ont consommé de l'huile d'arachide.
- 53 ont consommé de l'huile d'olive et ont eu des problèmes cardio-vasculaires.
- 173 ont consommé de l'huile d'arachide et n'ont eu aucun problème.

1. Préciser la population et les caractères étudiés ainsi que leurs types et leurs modalités.

2. Construire le tableau des effectifs observés, puis le tableau des effectifs théoriques.

3. Calculer la distance de khi-deux entre le risque cardio-vasculaire et le type d'huile consommée.

4. Calculer le coefficient de Cramer et apprécier la liaison entre le risque cardio-vasculaire et le type d'huile consommée.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

U.F.H.B

Année académique
2020 – 2021

Licence 1 MI - Semestre 2
ECUE statistique Descriptive

Examen 2ème Session
Durée: 1h30

Exercice 1

Soit la série statistique suivantes: 11, 8, 12, 0, 20, 9, 4, 12, 16, 8

1. Déterminer les quartiles de cette série.
2. calculer les limites des moustaches, puis construire la boite à moustaches.
3. Y a-t-il des données extrêmes ? si oui, préciser les et placer les sur la figure.

Exercice 2

On a observé le salaire mensuel X (en centaines d'euros) des employés d'une entreprise. Et on a les résultats suivants:

X	[1;4[	[4;10[	[10;14[	[14;16[	[16;20[
Effectifs	48	144	80	56	72

1. Déterminé le salaire le plus observé de l'entreprise.
2. Quelle est la proportion des employés dont le salaire mensuel est : a) inférieur à 1000 euros ? b) supérieur à 1400 euros ? c) comprise entre 600 et 1700 euros ?
3. Environ 25% des employés ont un salaire mensuel inférieur à combien d'euros ?

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 3

On a observé deux caractères X et Y sur cinq personnes. Et on a les résultats suivants :

X	6	2	4	3	5
Y	9	3	6	5	7

1. Déterminer la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées.

2. Calculer le coéfficient de corrélation linéaire. Le modèle linéaire est-il justifié ? Si oui, estimer la valeur de Y pour $X = 8$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

PROPOSITION DE CORRECTION DE STATISTIQUE 2016-2017 session 1

EXERCICE 1

Salaires	[1 ;1,4[	[1,4 ;2[	[2 ;2,2[	[2,2 ;3[	Totaux
Effectifs n_j	120	240	100	40	500
Fréquence f_j	0,24	0,48	b-0,72	0,08	1
f.c.c	0,24	0,72	b=0,92	1	
Amplitudie a_j	0,4	2-1,4=0,6	2,2-2=0,2	3-2,2=0,8	
Densité d'effectifs	300	400	500	50	

NB : Ce tableau a été rempli au fur et à mesure en fonction des différents résultats obtenus .

1- Déterminons a et b

*b

Soit f_j la fréquence attribuée à la classe $[b_{j-1}, b_j[$. On a par définition

a* Σf_j=1 d'où 0,24+0,48+b-0,72+0,08 = 1 $\Rightarrow$ b = 0.92

Supposons d_j la densité attribuée à la classe $[b_{j-1}; b_j[$. On a $d_j = \frac{n_j}{a_j}$. En appliquant à la classe [1,4 ;a[on obtient $400 = \frac{240}{a-1,4} \Rightarrow$ a - 1,4 = 0,6 $\Rightarrow$ a = 2.

2- * Le salaire moyen $(\bar{X})$

O a par définition : $(\bar{X}) = \Sigma f_j c_j$ avec c_j le centre de classe.

$(\bar{X}) = 0,24*1,2 + 0,48*1,7 + 2,1*0,2 + 0,08*2,6 \Rightarrow (\bar{X}) = 1,732.$

* Le mode (M_o)

On a $(M_o) \in$ [2 ;2,2[car elle a la plus grande d'ensité d'effectif.

Ainsi $(M_o) = x_m + a_i * \frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}$.

$(M_o) = 2 + 0,2 * \frac{450}{450+100} \Rightarrow (M_o) = 2,1636.$

* La médiane (M_e)

On a 0,24<0,5<0,72 et 1,4<M_e<2. Par interpolation on a : $\frac{M_e-1,4}{2-1,4} = \frac{0,5-0,24}{0,72-0,24}$

$\Rightarrow M_e = 1,725.$

3- Pour calculer cette somme il suffit de trouver le troisième quartile : Q_3

On a 0,72<0,75<0,92 et 2<Q_3<2,2 . Par interpolation on a : $\frac{Q_3-2}{2,2-2} = \frac{0,75-0,72}{0,92-0,72}$

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow Q_3 = 2{,}03.$

4- On a $n_{[1,3;2,1[} = n_{[1,3;1,4[} + n_{[1,4;2[} + n_{[2;2,1[}$

* $n_{[1,3;1,4[}$

On a $\begin{cases} n_{[1,3;1,4[} = x; a = 0,1 \\ n_{[1;1,4[} = 120; a = 0,4 \end{cases}$ Ainsi $x = \frac{120*0,1}{0,4}$ d'où $x = 30.$

* $n_{[1,4;2[} = 240$

* $n_{[2;2,1[}$

On a $\begin{cases} n_{[2;2,1[} = x; a = 0,1 \\ n_{[2;2,1[} = 100; a = 0,2 \end{cases}$ Ainsi $x = \frac{100*0,1}{0,2}$ d'où $x = 50.$

Ainsi $n_{[1,3;2,1[} = 30 + 50 + 240 = 320.$
Par conséquent le pourcentage est : $\frac{320}{500} * 100 = 64$. Soit 64% de la population.

5- Les limites des moustaches

On a $\begin{cases} m_- = Q_1 - 1,5(Q_3 - Q_1) \\ m_+ = Q_3 + 1,5(Q_3 - Q_1) \end{cases}$

Calculons Q_1
On a 0,24<0,25<0,72 et 1,4<Q_1<2 . Par interpolation on a : $\frac{Q_1 - 1,4}{2 - 1,4} = \frac{0,25 - 0,24}{0,72 - 0,24}$
$\Rightarrow Q_1 = 1{,}4125.$

On a $\begin{cases} m_- = 1,4125 - 1,5(2,03 - 1,4125) \\ m_+ = 2,03 + 1,5(2,03 - 1,4125) \end{cases}$ $\Rightarrow m_- = 0{,}48625$ et $m_+ = 2{,}95625.$

On a : $m_{inf} = \min \{x_i : x_i \geq m_-\}$ d'où $m_{inf} = 1{,}4.$
On a : $m_{sup} = \max \{x_i : x_i \leq m_+\}$ d'où $m_{sup} = 3$

EXERCICE 2

1- Calculons les coefficients de variation des deux catégories :

* catégorie A (CV_A)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$CV_A = \frac{\delta}{\bar{X}_A} = \frac{120}{1600} = 0{,}075.$

* catégorie B (CV_B)

$CV_B = \frac{\delta}{\bar{X}_B} = \frac{120}{1500} = 0{,}08.$

On a $0{,}08 > 0{,}075$ soit $CV_B > CV_A$. Par conséquent la catégorie B est la plus dispersée.

2- Le salaire moyen des employés ($\bar{X}$)

On a : $(\bar{X}) = \frac{n_A\bar{X_A}+n_B\bar{X_B}}{n_A+n_B} = \frac{100*1600+150*1500}{100+150} = 1540.$

3- La dispersion CV

On a $CV = \frac{\delta}{\bar{X}} = \frac{120}{1540} = 0{,}078.$

EXERCICE 3

Le coefficient de co-relation linéaire $r(x, y)$

On a $(D_1) : y = 0,232x + 3,699$ où 0,232 est le coefficient directeur de (D_1) .

Ainsi on a par la formule $0{,}232 = \frac{COV(x,y)}{Var(x)}$ (1)

On a $(D_2) : x = 1,140y - 0,739$ où 1,140 est le coefficient directeur de (D_2) .

Ainsi on a par la formule $1{,}140 = \frac{COV(x,y)}{Var(y)}$ (2)

(1) * (2) $\Leftrightarrow \frac{COV(x,y)^2}{Var(x)Var(y)} = 0{,}26448$

$\Leftrightarrow r(x,y)^2 = 0{,}26448 \Rightarrow |r(x,y)| = 0{,}5143.$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

Année 2018-2019

UFR-MI : L1

CORRECTION : STATISTIQUES DESCRIPTIVES SESSION 1

1.

2. La mediale est la valeur de la modalité qui partage la masse totale en deux parties égales.
La mediane est la valeur de la modalité dont 50% des observations sont sont inférieures et 50% des observations sont superieures.
La comparaison entre la mediale et la mediane nous indique l'Ecart mediane-mediale.

3. Indice de Gini.
L'indice de Gini est le rapport entre la surface de concentration et la surface du triangle OAB, avec $O = (0,0)$, $A = (1,1)$ et $B = (1,0)$.
Interpretation : L'indice de Gini est compris entre 0 et 1. Lorsqu'il est proche de 0, on dit que la concentration est faible. Par contre, lorsque l'indice de Gini tend vers 1, la concentration est forte.

4. Entreprise 1.

5. Le coéfficient de Cramer mesure l'intensité de liaison entre deux caractères qualitatifs.
Interpretation : Le coéfficient de Cramer est compris entre 0 et 1 , $0 \leq C \leq 1$.
Si C, est proche de 0, les deux caractères étudié sont indépendants.
Si C est proche de 1 , on parle de dependance entre les deux caractères.

6. Le rapport de correlation mesure l'intensité entre un caractère quantitatif et un caractère qualitatif.

7. Coéfficient de correlation linéaire : il permet de mettre en evidence une liaison entre deux variables X et Y quantitatives. $-1 \leq r_{XY} \leq 1$
Interpretation :
   - Si $r_{XY} > 0$, alors les deux variables évoluent dans le même sens .
   - Si $r_{XY} < 0$, alors les deux variables évoluent de sens contraire.
   - Si $|r_{XY}| = 1$, alors les n points (X_i, Y_i) sont alignés.
   - Si $r_{XY} = 0$, alors pas de liaison linéaire, mais possible d'avoir un autre type de liaison.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

- Si X et Y sont independants, alors $r_{XY} = 0$

8. VRAI(V) ou FAUX(F)
a)V ; b)V ; c)F ; d)F ; e)F.

9. Classement des indicateurs selon leur nature.

Indicateur	*Position*	*Dispersion*
Minimum	X	
Moyenne	X	
Ecart – type		X
Mode	X	
Ecart – interquartile		X
Mediane	X	
Premierquartile	X	
Cofficientdevariation		X

10.

	Moyenne	*Ecart – type*	*Mediane*	*Mode*	*Etendue*	*E – int.q.*
Augmentation	X	X				
Dimminution						
Identique						
Lesdonnes del'exercice nepermettent pasdeconclure			X	X	X	X

11. Rélions les éléments de la gauche aux élémentsn de la droite.
1 ⟶ 2
2 ⟶ 5
3 ⟶ 1
4 ⟶ 4
5 ⟶ 3

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Année 2018-2019

UFR-MI : L1

CORRECTION : STATISTIQUES DESCRIPTIVES SESSION 2

QCM

1 – *b*
2 – *d*
3 – *a*
4 – *b*
5 – *c*

Questions de cours(Voir Session 1)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFHB-UFRMI / Licence1 – Semestre 2
UE Probabilités et Statistique

Année Académique
2019/2020

Statistique – Semestre 2
Examen Final Décembre 2020
Durée : 1 h 30

Exercice 1

On a observé un caractère X sur une population donnée. Et on a les résultats suivants :

X	[0; 3[	[3; 9[	[9; 13[	[13; 15[	[15; 20]
Effectifs	60	180	100	70	90

(1) Déterminer la valeur la plus observée et la médiane de cette série.

Réponse :

X	[0; 3[	[3; 9[	[9; 13[	[13; 15[	[15; 20]
Effectifs	60	180	100	70	90
Densité d'effectif	20	30	25	35	18
ECC	60	240	340	410	500

- La valeur la plus observée est celle qui à la plus grande densité d'effectif ainsi cette valeur est [13; 15[.
- L'intervalle médian est [9; 13[

$\frac{Me-9}{13-9} = \frac{250-240}{340-240} \Leftrightarrow Me = 9,4$

La médiane de cette série statistique est 9, 4.

(2) Quelle est la proportion des individus dont la valeur observée du caractère est : supérieure à 9 ? inférieure à 15 ? compris entre 5 et 18 ?

Réponse :

- Proportion d'individu > 9

X	[0; 3[	[3; 9[	[9; 13[	[13; 15[	[15; 20]
ECC	60	240	340	410	500
ECD	500	440	260	170	90

D'après le tableau, la proportion d'individu > 9 est $\frac{260}{500} = 0,52$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

- Proportion d'individu < 15 est $\frac{410}{500} = 0,82$
- Proportion d'individu compris entre 5 et 18 est la proportion d'individu > 5 et < 18

On a : $\frac{P_5 - \frac{440}{500}}{\frac{260}{500} - \frac{440}{500}} = \frac{5-3}{9-3} \iff P_5 = 0,76$ et $\frac{P_{18} - \frac{410}{500}}{\frac{500}{500} - \frac{410}{500}} = \frac{18-15}{20-15} \iff$

$P_{18} = 0,92$

Ainsi, $P = P_{18} - P_5 = 0,92 - 0,76 = 0,16$

Exercice 2

On a observé deux caractères X et Y sur cinq personnes. Et on a les résultats suivants :

X	3	9	6	5	7
Y	2	6	4	3	5

(1) Déterminer la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées.

Réponse : Cette droite est de la forme $y = ax + b$

$b = \overline{y} - a\overline{x}$ et $a = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum(x_i - \overline{x})^2}$

- $\overline{x} = \frac{3+9+6+5+7}{5} = 6$
- $\overline{y} = \frac{2+6+4+3+5}{5} = 4$
- $a = \frac{-3\times(-2)+3\times2+0\times0+(-1)\times(-1)+1\times1}{(-3)^2+3^2+0^2+(-1)^2+1^2} = 0,7$
- $b = 4 - 0,7 \times 6 = 0,2$

D'où $y = 0,7x + 0,2$

(2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Le modèle linéaire est-il justifié ? Si oui, estimer la valeur de Y pour $X = 12$.

Réponse : $\boxed{r = \frac{cov(x,y)}{\sigma(x).\sigma(y)}}$

$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$ et $\sigma(y) = \sqrt{V(y)}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

- $V(x) = \frac{\sum x_i^2}{N} - \overline{x}^2$ et $Cov(x,y) = \frac{\sum x_i y_i}{N} - \overline{xy}$

Ainsi, $V(x) = \frac{3^2+9^2+6^2+5^2+7^2}{5} - 6^2 = 4$

Et de manière analogue $V(y) = \frac{2^2+6^2+4^2+3^2+5^2}{5} - 4^2 = 2$

- $Cov(x,y) = \frac{3\times2+5\times6+6\times4+5\times3+7\times5}{5} - 6\times4 = 2{,}8$

Ainsi, $r = \frac{2{,}8}{\sqrt{4}\times\sqrt{2}} = 0{,}9899 \approx 1$, Donc le modèle linéaire est justifié.

- Pour $X = 12$ $\quad y = 0{,}7 \times 12 + 0{,}2 = 8{,}6$

Exercice 3

L'étude du sexe et du revenu mensuel (en milliers d'Euros) des employés d'une grande entreprise a fourni le tableau ci-après :

Revenu mensuel \ Sexe	Femme	Homme
[1; 1.4[	200	280
[1.4; 2[	600	840
[2; 2.2[	150	210
[2.2; 3[	50	70

(1) Préciser la population, individu et les caractères étudiés ainsi que leurs types.

Réponse : population étudiée = l'ensemble des employés

Individu = un employé

Les caractères étudiés = Sexe = qualitatif ; Revenu mensuel = quantitatif continu

(2) Déterminer les distributions marginales (effectifs et fréquences).

Réponse :

- Sexe

Sexe	Homme	Femme	Total
Effectif	1400	1000	2400
Fréquence	0,58	0,42	1

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

❖ Revenu mensuel (R M)

RM	[1; 1.4[	[1.4; 2[	[2; 2.2[	[2.2; 3[	Total
Effectif	480	1440	360	120	2400
Fréquence	0,2	0,6	0,15	0,05	1

(3) Calculer le revenu moyen des employés de cette entreprise.

Réponse : Soit C_i le centre des classes.

C_i	1,2	1,7	2,1	2,6	Total
f_i	0,2	0,6	0,15	0,05	1

Le revenu mensuel moyen est : $0,2 \times 1,2 + 1,7 \times 0,6 + 2,1 \times 0,15 + 2,6 \times 0,05 = 1,705$

(4) Le revenu mensuel des employés de cette entreprise est-il lié au sexe ? Si oui, déterminer la part de la variation de revenu expliquée par le sexe dans la variation totale du revenu.

Réponse :

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFHB-UFRMI / Licence 1 - Semestre 2
UE Probabilités et Statistique

Année Académique
2020-2021

Statistique - Semestre 2
Corrections et barèmes
Examen 1ère Session Août 2021
Durée : 1 h 30

Exercice 1 **(12.5 pt)**

Lors d'une enquête, on a interrogé 20 individus sur leur taille. On a obtenu les valeurs (exprimées en mètre) suivantes :

1,72	1,87	1,66	1,73	1,64	1,77	1,82	1,81	1,60	1,78
1,83	1,75	1,70	1,58	1,68	1,66	1,93	1,75	1,80	1,83

(1) Déterminer la population et la variable statistique étudiées. Quelle est la nature de cette variable ?

Rep. - Population : l'ensembe des 20 individus interrogés. **(0,5 pt)**
- Variable statistique : la taille (d'un individu) **(0,5 pt)**
- Nature : quantitative continue **(0,5 pt)**

(2) Calculer et interpréter la taille moyenne et médiane. Que pouvez-vous conclure de la comparaison de ces deux valeurs?

Rep. Notons X la taille d'un individu.

- Taille moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{34.91}{20} = 1,7455$. **(1 pt)**

Interprétation : Dans la population étudiée,
en moyenne, un individu mesure 1,7455 mètre **(0,5 pt)**

- Taille médiane : $M_e = q_{0.5}$ (ici on va juste ordonner les données : $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ...$)

1,58	1,60	1,64	1,66	1,66	1,68	1,70	1,72	1,73	1,75
1,75	1,77	1,78	1,80	1,81	1,82	1,83	1,83	1,87	1,93

On a : $0.5 \times 20 = 10$. Donc $M_e = q_{0.5} = \frac{x_{(10)}+x_{(11)}}{2} = \frac{1,75+1,75}{2} = 1,75$. **(1 pt)**

Interprétation : Environ 50% des individus interrogés ont une taille au plus égale (inférieur ou égale) à 1,75 mètre. **(0,5 pt)**

On a : $Me = 1.75$ et $\bar{X} = 1.7455$, on a $Me \cong \bar{X}$, la distribution des données est sesiblement symétrique. **(0.5 pt)**

(3) Quelle est la proportion des individus qui ont une taille inférieur à 1,74 mètre ?

Rep. D'après la série ordonnée, 9 individus ont une taille inférieur à 1,74 mètre. Soit une proportion $p(X < 1.74) = \frac{9}{20} = 0.45 = 45\%$. **(0,5 pt)**

(4) On regroupe les données en 5 classes définies comme suit :
la borne inférieure et la borne supérieure des intervalles sont 1,55 et 2,00 respectivement; la

Scanné avec CamScanner

première, la troisième et la dernière classes ont pour amplitudes 0,1 ; 0,03 et 0,16 respectivement; les deux autres classes sont de même amplitude a.

(a) Trouver la valeur de a. **(1,5 pt)**

Rep. ⋆ 1ère classe : $[1.55, 1.55+0.1[= [1.55, 1.65[$. 2ème classe : $[1.65, 1.65+a[$. 3ème classe : $[1.65+a, 1.68+a[$. 4ème classe : $[1.68+a, 1.68+2a[$. 5ème classe : $[2.00-0.16, 2.00[= [1.84, 2.00[$. Donc on a : $1.68+2a = 1.84$, d'où $a = \frac{1.84-1.68}{2} = 0.08$.

⋆ Ou bien, on peut procéder ainsi : La 1ère classe est : $[1.55, 1.55+0.1[= [1.55, 1.65[$. La 5ème classe est $[2.00-0.16, 2.00[= [1.84, 2.00[$. Comme la 3ème a pour amplitude 0.03 et que les deux autres sont de même amplitude a, alors on a : $a+0.03+a = 1.84-1.65$, $\Rightarrow\ 2a+0.03 = 0.19$, ainsi $a = \frac{0.19-0.03}{2} = 0.08$.

⋆ Ou bien encore, on peut faire la somme de toutes les amplitudes et l'égaler à l'étendue : $0.1+a+0.03+a+0.16 = 2.00-1.55$, $\Rightarrow\ 2a+0.29 = 0.45$, d'où $a = \frac{0.45-0.29}{2} = 0.08$

(b) Etablir le tableau donnant les effectifs, les effectifs par unité d'amplitude, les fréquences et les fréquences cumulées croissantes. On prendra 0,08 comme unité d'amplitude.

Rep. On a effectif par unité d'amplitude : $n_j' = \frac{n_j}{a_j} \times U = h_j \times U$, avec $U = 0.08$. **(2 pt)**

X	[1.55,1.65[	[1.65,1.73[	[1.73,1.76[	[1.76,1.84[	[1.84,2.00[	Total
n_j	3	5	3	7	2	20
a_j	0.1	0.08	0.03	0.08	0.16	
n_j'	2.4	5	8	7	1	
f_j	0.15	0.25	0.15	0.35	0.1	1
FCC	0.15	0.40	0.55	0.9	1	

(c) Calculer et interpréter le mode et la médiane de cette distribution.

Rep.

- Le mode : Mo

La classe modale est : $[1.73, 1.76[$, car son effectif par unité d'amplitude est le plus grand soit $n_3' = 8$. Donc

$$Mo = x_m + a_m \times \frac{\Delta_i}{\Delta_i + \Delta_s}$$

avec $x_m = 1.73$, $a_m = 0.03$, $\Delta_i = 8-5 = 3$ et $\Delta_s = 8-7 = 1$. Ainsi,

$$Mo = 1.73 + 0.03 \times \frac{3}{3+1} = 1.7525. \ \textbf{(1,5 pt = 1+0.5)}$$

- La médiane : $Me = q_{0.5}$

D'après FCC, on a : $0.40 < 0.5 < 0.55$, alors $Me \in [1.73, 1.76[$.

Donc par interpolation, $\frac{Me-1.73}{1.76-1.73} = \frac{0.5-0.40}{0.55-0.40}$. Ainsi,

$$Me = 1.73 + 0.03 \times \frac{0.1}{0.15} = 1.75. \ \textbf{(1 pt)}$$

VALIDEUR
Scanné avec CamScanner

(d) Avec ce regroupement en classe, reprendre la question (3). **(1 pt)**

Rep. La proportion des individus qui ont une taille inférieur à 1,74 mètre est : $p(X < 1.74) = F(1.74)$, où $F(x) = F(b_{j-1}) + \frac{f_j}{a_j} \times (x - b_{j-1})$, si $x \in [b_{j-1}, b_j[$.
On a : $1.74 \in [1.73, 1.76[$, donc

$$F(1.74) = F(1.73) + \frac{0.15}{0.03} \times (1.74 - 1.73) = 0.40 + \frac{0.15}{0.03} \times 0.01 = 0.45 = 45\%.$$

Exercice 2 **(08.5 pt)**

On veut étudier le lien entre le risque cardio-vasculaire et le type d'huile consommée. Pour cela, on a observé pendant dix ans, 500 individus et on a les résultats suivants. Parmi-ceux-ci :

- 200 ont consommé de l'huile d'arachide.
- 53 ont consommé de l'huile d'olive et ont eu des problèmes cardio-vasculaires.
- 173 ont consommé de l'huile d'arachide et n'ont eu aucun problème.

(1) Préciser la population et les caractères étudiés ainsi que leurs types et les modalités.

Rep.

- Population : l'ensemble des 500 individus observés **(0,5 pt)**
- Caractères : le type d'huile consommée (TypHC) et le risque cardio-vasculaire (RisqCV), tous deux qualitatifs. **(0,5 pt)**

Les modalités :

* Type d'huile consommée : huile d'olive et huile d'arachide **(0,5 pt)**
* Risque cardio-vasculaire : problèmes CV et pas de problèmes CV **(0,5 pt)**

(2) Construire le tableau des effectifs observés, puis le tableau des effectifs théoriques.

Rep.

- Tableau des effectifs observés : n_{ij}. **(2 pt)**

TypHC \ RisqCV	problèmes CV	pas de problèmes CV	Total $n_{i.}$
Huile d'arachide	27	173	200
Huile d'olive	53	247	300
Total $n_{.j}$	80	420	500

- Tableau des effectifs théoriques : $n^*_{ij} = \frac{n_{i.} n_{.j}}{n}$. **(1 pt)**

TypHC \ RisqCV	problèmes CV	pas de problèmes CV	Total
Huile d'arachide	32	168	200
Huile d'olive	48	252	300
Total	80	420	500

VALIDEUR LMD
Scanné avec CamScanner

(3) Calculer la distance de khi-deux entre le risque cardio-vasculaire et le type d'huile consommée.

Rep.

- Tableau des résidus : $e_{ij}^{\star} = n_{ij} - n_{ij}^{\star}$. **(0,5 pt)**

TypHC \ RisqCV	problèmes CV	pas de problèmes CV	Total
Huile d'arachide	-5	5	0
Huile d'olive	5	-5	0
Total	0	0	0

- Donc

$$\chi^2_{obs} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{(e_{ij}^{\star})^2}{n_{ij}^{\star}} = \frac{(-5)^2}{32} + \frac{5^2}{48} + \frac{5^2}{168} + \frac{(-5)^2}{252} = \frac{3125}{2016} \cong 1.5501. \text{ ; } \textbf{(1,5 pt)}$$

(4) Calculer le coeffcent de Cramer et apprecier la liaison entre le risque cardio-vasculaire et le type d'huile consommée.

Rep.

- Coeffcent de Cramer : $C = \sqrt{\frac{\chi^2_{obs}}{\chi^2_{Max}}}$ avec $\chi^2_{Max} = 500 \times \min(2-1, 2-1) = 500.$

Donc $C = \sqrt{\frac{3125}{2016 \times 500}} \cong 0.0557$. **(1 pt)**

- Appreciation : Nous avons une relation faible entre le risque cardio-vasculaire et le type d'huile consommée (car $C \in]0; 0,2]$). **(0,5 pt)**

Bonne chance !

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MIiL1

Maths-Info 2020-2021

CORRECTION DE STATISTIQUE

SESSION 2

Exercice 1

• Serie ordonnée: 0 4 8 8 9 11 12 12 16 20

1. Les quartiles

$Q_1 = q_{0,25}$

On a: $np = 10 \times 0,25 = 2,5$. Donc $Q_1 = X_3 = 8$

$Q_2 = q_{0,5}$

On a: $np = 10 \times 0,5 = 5$

Donc $Q_2 = \dfrac{X_5 + X_6}{2} = \dfrac{9+11}{2} = 10$

$Q_2 = 10 = Me$

$Q_3 = q_{0,75}$

On a: $np = 10 \times 0,75 = 7,5$

Donc $Q_3 = X_8 = 12$

2. Calculons m_{inf} et m_{sup}

$$\begin{aligned} m_- &= Q_1 - 1,5(Q_3 - Q_1) \\ &= 8 - 1,5(12-8) \\ &= 8 - 6 \\ m_- &= 2 \end{aligned}$$

Donc $m_{inf} = min\{X_i : X_i \geq m_-\}$

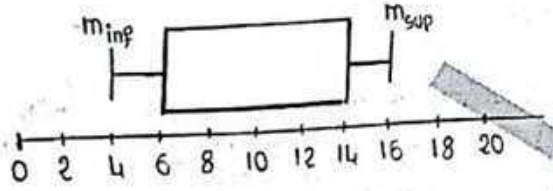
$m_{inf} = 4$

$$\begin{aligned} m_+ &= Q_3 + 1,5(Q_3 - Q_1) \\ &= 12 + 1,5(12-8) \\ m_- &= 18 \end{aligned}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$m_{sup} = max\{X_i : X_i \leq m_+\}$
$m_{sup} = 16$



3. Les données extrêmes sont: 0 2 18 et 20

Exercice 2

1. Salaire le plus observé: Mo
On constate que les amplitudes des classes sont différentes. Corrigeons alors les effectifs.

X	[1,4[	[4,10[	[10,14[	[14,16[	[16,20]
n_i	48	144	80	56	72
a_i	3	6	4	2	4
d_i	$\frac{48}{3} = 16$	24	20	28	18
$n_i^\bullet$	16	24	20	28	18
f_i	0,12	0,36	0,2	0,14	0,18
FCC	0,12	0,48	0,68	0,82	1

L'unité d'amplitude est 1
$(PPCM(1,1,1,1,1) = 1)$

Soit $n^\bullet$ l'effectif corrigé.
On a: $n_i^\bullet = U\,d_i$
Ainsi la classe modale est [14, 16[

$$M_o = X_m + a\frac{\Delta_i}{\Delta_i + \Delta_S}$$
$$= 14 + (16-14)\frac{28-20}{(28-20)+(28-18)}.$$
$$= 14 + 2 \times \frac{8}{18}$$
$$M_o \simeq 14,9$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Donc le salaire le plus observé est environ 1400 euros.

2.a) $P(X < 10) = F(10)$. P le pourcentage.

* Cherchons P

$q_P \in [10; 14[$, par interpolation linéaire, on a:

$q_P = 10 + (14 - 10) \times \dfrac{P - F010)}{F(14) - F(10)} = 10$

Donc $10 + 4\dfrac{P - 0,48}{0,68 - 0,48} = 10$

D'où $4\dfrac{P - 0,48}{0,2} = 0 \Leftrightarrow P = 0,48$

Par conséquent, 48% des employés ont salaire inférieur à 1000 euros.

b)

$P(X > 14) = 1 - P(X \leq 14) = 1 - F(14)$

$= 1 - 0,68$

$= 0,32$

Donc 32% des employés ont un salaire supérieur à 1400 euros

c)

$P(6 < X < 17) = P(X > 6) + P(X < 17)$

$= 1 - P(X < 6) + P(X < 17)$

$= 1 - 0,12 + 0,82$

$= 1 - 0,7$

$= 0,3$

Donc 30% des employés ont un salaire compris entrec 600 et 1700 euros.

3) On a: $0,12 < 0,25 < 0,48$

$Q_1 \in [4; 10[$

Par interpolation linéaire, on a:

$\dfrac{Q_1 - 4}{10 - 4} = \dfrac{0,25 - 0,12}{0,48 - 0,12} \Leftrightarrow \dfrac{Q_1 - 4}{6} = \dfrac{0,13}{0,36}$

Donc $Q_1 \simeq 6,17$

25% des employés ont un salaire inférieur à 6,17 euros.

Exercice 3

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

(a) par la méthode des moindres carrés, on a: $Y = aX + b$ avec

$$a = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2} \text{ et } b = \overline{Y} - a\,\overline{X}$$

X	6	2	4	3	5
Y	9	3	6	5	7
XY	54	6	24	15	35
X^2	36	4	16	9	25

$$\overline{X} = \frac{1}{5}(6+2+4+3+5) = 4$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{5}(9+3+6+5+7) = 6$$

$$\overline{X}\,\overline{Y} = 4 \times 6 = 24$$

$$\overline{XY} = \frac{1}{5}(54+6+24+15+35) = 26,8$$

$$\overline{X^2} = \frac{1}{5}(36+4+16+9+25) = 18$$

$$\overline{X}^2 = 4^2 = 16$$

Donc $a = \frac{26,8 - 24}{18 - 16} = 1,4$

$b = \overline{Y} - a\,\overline{X}$
$b = 6 - 1,4 \times 4$
$b = 0,4$

D'où $\boxed{Y = 1,4X + 0,4}$ par la méthode des moindres carrés.

(b) $r(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}$

On a: $Cov(X,Y) = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} n_i\,x_i\,y_i - \overline{X}\,\overline{Y}$

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{5}(54+6+24+15+35) - 24 = 2,8$$

$$V(X) = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} n_i\,x_i^2 - \overline{X}^2$$

$$V(X) = \frac{1}{5}(36+4+16+9+25) - 4^2 = 2$$

$$V(Y) = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} n_i\,y_i^2 - \overline{Y}^2$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$V(Y) = \frac{1}{5}(81 + 9 + 36 + 25 + 49) - 6^2 = 4$

Donc $r(X,Y) = \frac{2,8}{\sqrt{2 \times 4}} = 0,99$

Le modèle linéaire est justificatif car $r(X,Y) > \frac{\sqrt{3}}{2}$

* Estimons Y pour $X = 8$

On a: $Y = 1,4X + 0,4$
A.N: $Y = 1,4 \times 8 + 0,4$
$Y = 11,6$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix H. Boigny, UFR MI, Licence 1 Année Universitaire
UE: Probabilité Statistique 1 2016/2017
ECUE: Probabilité 1

EXAMEN FINAL Durée: 1h15

NB: Le correction tiendra compte de la rigueur du raisonnement et la clarté de la rédaction.

Exercice 1 (7 pts)

(1) Trois chevaux A, B et C s'affrontent lors d'une course. On sait que le cheval A a deux fois plus de chance de gagner que le cheval B et que la somme des chances de gagner des chevaux B et C vaut trois fois celle du cheval A. Calculer:
   (a) la probabilité que le cheval A gagne,
   (b) la probabilité que le cheval C ne gagne pas.

(2) Soient A et B deux évènements tels que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{7}{12},\ \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4},$$

Calculer les probabilités suivantes.
   (a) $\mathbb{P}(B)$
   (b) $\mathbb{P}(A|B)$
   (c) $\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B})$

Exercice 2 (6 pts)

On dispose de deux urnes u_1 et u_2. L'urne u_1 contient trois boules blanches et une boule noire. L'urne u_2 contient une boule blanche et deux boules noires. On lance un dé truqué tel que les numéros pairs ont deux fois plus de chance d'apparaitre que les numéros impairs. Si le dé donne un numéro d inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne u_1. Sinon on tire une boule dans l'urne u_2 (On suppose que les boules sont indiscernables au toucher)

(1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
(2) On a tiré une boule blanche. Calculer le probabilité qu'elle provienne de l'urne 1
(3) Est-ce que l'évènement «choisir dans l'urne u_2» et l'évènement «obtenir une boule noire» sont indépendants? Justifiez votre réponse.

Exercice 3 (8p pts)

Une urne contient sept boules: une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule. Si elle est rouge, il gagne 1000 Fcfa, si elle est jaune, il perd 5000 Fcfa, si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir replacé la première boule tirée. Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8000 Fcfa, sinon il perd 4000 Fcfa. Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur (une perte est comptée négativement).

(1) Etablir la loi de probabilité de la variable X.
(2) Calculer l'espérance de X.
(3) Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de X soit nulle.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix H. Boigny, UFR MI, Licence 1
UE: Probabiité Statistique 1
ECUE: Probabilité 1

Année Universitaire
2016/2017

EXAMEN DE RATTRAPAGE Durée: 1h15

NB: Le correction tiendra compte de la rigueur du raisonnement et la clarté de la rédaction.

Exercice 1 (12 pts)

La citerne à essence d'une station-service est remplie chaque lundi matin. La vente hebdomadaire d'essence (en milliers de litres) réalisée par la station-service est une variable aléatoire X de densité

$$f(x) = C(1-x)^4 1_{[0,1]}(x)$$

(1) Déterminer la constante C
(2) Calculer la vente moyenne hebdomadaire d'essence réalisée par la station-service.
(3) Déterminer la fonction de répartition de X.
(4) Quelle doit être la capacité minimale de la citerne pour que la probabilité que la station soit à cours d'essence, au courant d'une semaine donnée, soit inférieure à $0,01$?
(5) Une fois les taxes et les coûts fixes de paiement des employés prélevés, la recette hebdomadaire pour la station service (exprimée en Euros) est de la forme $Y = g(X)$ avec $g(x) = ax - b$, $a, b > 0$
   (a) Déterminer la fonction de répartition puis une densité de Y.
   (b) Pour $a = 10b$, quelle est la probabilité que la recette hebdomadaire dépasse $\frac{b}{9}$ Euros

Exercice 2 (5 pts)

Une banque révise sa politique de carte de crédit avec un rappel d'une partie de celles-ci. Par le passé, environ 5% des détenteurs d'une carte de crédit ont été insolvables et la banque a été incapable de recouvrer les soldes impayés. Par conséquent, la direction a estimé égale à $0,05$ la probabilité qu'un détenteur de carte de crédit soit insolvable. La banque a également découvert que la probabilité de ne pas honorer un paiement mensuel est de $0,2$ pour les clients solvables. Bien entendu, la probabilité de ne pas honorer un paiement mensuel pour les clients insolvables est de 1.

(a) Sachant qu'un client n'a pas honoré un paiement mensuel, calculer la probabilité a posteriori que le client soit insolvable.
(b) La banque voudrait reprendre sa carte de crédit si la probabilité qu'un client soit insolvable est supérieure à $0,20$. La banque devrait-elle reprendre sa carte de crédit si le client n'honore pas un paiement mensuel ? Pourquoi ?

Exercice 3 (3 pts)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

(1) Définissez les assertions suivantes
   (a) A et B sont deux événements incompatibles.
   (b) A et B sont deux événement indépendants

Scanné avec CamScanner

(2) On suppoose que Ω est fini. Donner la condition pour que $\mathbb{P}$ soit la probabilité uniforme. Dans ce cas définissez pour tout événement A, $\mathbb{P}(A)$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix H. Boigny
UFR Maths Info, Filière classique
UE: Probabilités-Statistique, L1

Année Universitaire
2017/2018

Examen final de Probabilité: Durée: 1h30

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction.

Exercice 1

(1) Donner la définition d'une mesure de probabilité.
(2) Soit α l'espérance d'une variable aléatoire X discrète à valeur dans $\{1, 2, \cdots, n\}$. Donner l'expression de sa variance.
(3) Donner les deux principes du dénombrement.
(4) On suppose qu'un type habillement d'une étudiante est composé d'une chaussure, une jupe et une chemise. Miss Proba veut dénombrer le nombre de type d'habillement différent que peut avoir.
   (a) Donner le principe de dénombrement dont elle a besoin.
   (b) Soit a, b et c le nombre de chaussures, de jupes et de chemises respective de Miss Proba. Donner le nombre de différents types d'habillement de Miss Proba.
(5) Soit Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $[a, b]$
   (a) Donner l'expression de la fonction de densité de Z.
   (b) Donner l'expression de l'espérance de Z.
(6) Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire d'univers Ω.
   (i) Donner la définition d'une expérience aléatoire.
   (ii) Donner la définition de l'univers d'une expérience aléatoire.
   (iii) Donner la condition pour que $\mathcal{E}$ soit équiprobable.
(7) On suppose que $\mathcal{E}$ est équiprobable et Ω est fini. Soit A un évènement issue de cette expérience. Donner l'expression de la probabilité de A.

Exercice 2

A leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand. Avec un raisonnement rigoureux, indiquer la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire continue dont la densité est donnée sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} ax(x-2) & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a est un réel négatif.

(1) Donner la valeur de a.

(2) Calculer la fonction de répartition de X.

(3) Que vaut $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2})$ et $\mathbb{P}(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{4}{3})$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Année Universitaire 2017/2018

UE: Probabilités-Statistique, L1

Examen de rattrapage de Probabilité: Durée: 1h30

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction.

Exercice 1

(1) Soit X une variable aléatoire discrète à valeur dans $\{1,2,3,4\}$ de loi $\mathbb{P}(X=k)=p_k$, $\forall k \in \{1,2,3,4\}$
   (a) Que vaut $p_1+p_2+p_3+p_4$?
   (b) Donner l'expression explicite de sa variance en fonction des p_k.
   (c) Donner l'expression explicite de sa fonction de repartition en fonction des p_k
(2) Donner les différents modèles de dénombrement.
(3) On suppose le code du coffre fort de Mr Proba est constitué de 6 chiffre distinct deux à deux pris dans l'ensemble des chiffres de la numérotation décimale. L'ayant oublié, Il essaie au hasard un code en une minute. On cherche le temps maximal qu'il lui faudra pour ouvrir son coffre.
   (a) Donner le modèle de dénombrement dont il a besoin.
   (b) A l'aide de modèle donner le temps maximal qu'il lui faudra pour ouvrir son coffre fort.
(4) Soit Z une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres N et α
   (a) Donner l'ensemble des valeur prise par Z.
   (b) Donner l'ensemble de définition de α.
   (c) Donner l'expression de l'espérance de Z.

Exercice 2 Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.

(1) Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire?
(2) Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour?
(3) Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire continue dont la densité est donnée sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} abx(2-x) & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a et b sont des un réel.

(1) Sans faire de calcul donner les différents signes possible de a et b

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

(2) On suppose que $b = 1$. Donner la valeur de a.

(3) Calculer a fonction de répartition de X.

(4) Que vaut $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2})$ et $\mathbb{P}(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{4}{3})$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UE: Probabilités-Statistique, L1

Année Universitaire 2018/2019

Examen final de Probabilité: Durée: 1h15

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction.

Exercice 1

(1) Soit X une variable aléatoire discrète à valeur dans $\{1,2,3,4\}$ de loi $P(X=k)=\frac{a}{k}$, $\forall k \in \{1,2,3,4\}$
   (a) Que vaut a?
   (b) Donner l'expression explicite de sa variance en fonction de a.
   (c) Donner l'expression explicite de sa fonction de repartition en fonction de a
(2) Donner les différents modèles de dénombrement.
(3) On suppose le code du coffre fort de Mr Proba est constitué de 6 chiffre distinct deux à deux pris dans l'ensemble des chiffres de la numérotation décimale. L'ayant oublié, Il essaie au hasard un code en une minute. On cherche le temps maximal qu'il lui faudra pour ouvrir son coffre.
   (a) Donner le modèle de dénombrement dont il a besoin.
   (b) A l'aide de modèle donner le temps maximal qu'il lui faudra pour ouvrir son coffre fort.
(4) Soit Z une variable aléatoire de loi géométrique de paramètres α
   (a) Donner l'ensemble des valeur prise par Z.
   (b) Donner l'ensemble de définition de α.
   (c) Donner l'expression de l'espérance de Z.

Exercice 2 Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.

(1) Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire?
(2) Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour?
(3) Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire continue dont la densité est donnée sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} abx(2-x) & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a et b sont des un réel.

(1) Sans faire de calcul donner les différents signes possible de a et b

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD

(2) On suppose que $b = -1$. Donner la valeur de a.

(3) Calculer a fonction de répartition de X.

(4) Que vaut $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2})$ et $\mathbb{P}(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{4}{3})$

Scanné avec CamScanner

Université Félix H. Boigny
UFR Maths Info, Filière classique
UE: Probabilités-Statistique, L1

Année Universitaire
2018/2019

Examen rattrapage de Probabilité: Durée: 1h

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction.

Exercice 1

(1) Soit X une variable aléatoire discrète à valeur dans $\{1,2,3,4\}$ de loi $\mathbb{P}(X=k)=\frac{a}{k!}$, $\forall k \in \{1,2,3,4\}$
   (a) Que vaut a?
   (b) On suppose que $a=\frac{3}{5}$ et que $\mathbb{P}(X=k)$, $k=1,2,3$ restent inchangé. Déterminer $\mathbb{P}(X=4)$
   (c) On suppose toujours que $a=\frac{3}{5}$ Calculer le moment centré d'odre 2 de X. Comment l'appelle-t-on?

(2) Donner la définition d'une probabilité sur Ω l'univers d'une finie d'une expérience aléatoire.

(3) On suppose le code du coffre fort de Mr Proba est constitué de 6 chiffre pris dans l'ensemble des chiffres de la numérotation décimale. L'ayant oublié, Il essaie au hasard un code en une minute. On cherche le temps maximal qu'il lui faudra pour ouvrir son coffre.
   (a) Donner le modèle de dénombrement dont il a besoin.
   (b) A l'aide de ce modèle donner le temps maximal qu'il lui faudra pour ouvrir son coffre fort.

(4) Soit Z une variable aléatoire de loi de Poison de paramètres α
   (a) Donner l'ensemble des valeur prise par Z.
   (b) Donner l'ensemble de définition de α.
   (c) Donner l'expression du moment d'ordre 1 de Z. Comment l'appelle-t-on?

Exercice 2 Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.

(1) Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire?
(2) Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour?
(3) Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université SAT

Année Universitaire 2019/2020

UE: Probabilités-Statistique, L1

Examen de final: Durée: 1h30

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction.

VALIDEUR

Exercice 1

(1) Donner les différents méthode de dénombrement.

(2) On suppose le code du coffre fort de Mr Proba est constitué de 6 chiffre ordonné et ne pouvant se répéter pris dans l'ensemble des chiffres de la numérotation décimale. L'ayant oublié, Il essaie au hasard un code en une minute. On cherche le temps maximal qu'il lui faudra pour ouvrir son coffre.

(a) Donner le modèle de dénombrement dont il a besoin.

(b) A l'aide de ce modèle donner le temps maximal qu'il lui faudra pour ouvrir son coffre fort.

(3) On réalise une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ équiprobable dont l'univers est $\mathcal{U}$ est fini.

(a) Qu'est ce qu'une expérience aléatoire.

(b) Donner la définition de l'univers $\mathcal{U}$.

(c) Qu'est ce qu'une expérience équiprobable.

(d) Soit A un évènement de cette expérience. Déterminer l'expression de l'objet qui permet de quantifier la chance de réalisation de A.

Exercice 2

Dans une ville, il y a quatre pharmacies qui ferment un jour par semaine. On désire attribuer un jour de fermeture à chacune d'elle.

(1) Enoncer l'expérience aléatoire qui traduit cette situation.

(2) En déduire le modèle de dénombrement que permet de trouver le nombre de possibilité.

(3) Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire?

(4) Déterminer la chance d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire si plusieurs pharmacie ne peuvent fermer le même jour?

(5) Déterminer la chance d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire si chaque jour, il doit y avoir au moins une pharmacie ouverte.

Exercice 3

cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires: Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés. Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés

(1) Quel est le taux global de personnes soulagées?

(2) Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé?

Scanné avec CamScanner

Université Félix H.Boigny
UFR Maths Info, Filière classique
UE: Probabilités-Statistique,L1
ECUE: Probabilités

Année Universitaire
2020/2021

Examen de final : Durée: 1h30

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction.

Exercice 1

(1) Donner les différents principes de dénombrement.

(2) On suppose le code du coffre-fort de Mr Proba est constitué de 6 chiffres non ordonné et ne pouvant pas se répéter pris dans l'ensemble des chiffres de la numérotation décimale. L'ayant oublié, il essaie au hasard un code en une minute. On cherche le temps maximal qu'il lui faudra pour ouvrir son coffre.

(a) Donner le modèle de dénombrement dont il a besoin.

(b) A l'aide de ce modèle donner le temps maximal qu'il lui faudra pour ouvrir son coffre fort.

(3) On réalise une expérience aléatoire ε dont l'univers est $\mathcal{U}$ est fini.

(a) Qu'est ce qu'une expérience aléatoire ?

(b) Donner la définition de l'univers $\mathcal{U}$.

(c) Donner la définition d'une probabilité sur cette univers.

(d) Qu'est ce qu'une expérience équiprobable ?

(e) On suppose que l'expérience est équiprobable. Soit A un évènement de cette expérience. Déterminer l'expression de la probabilité de A.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD

Exercice 2

Dans une ville, il ya cinq boulangéries qui ferment un jour par semaine. on désire attribuer un jour de fermeture à chacune d'elle.

(1) Donner le modèle de dénombrement qui permet de trouver le nombre de possibilités.

(2) Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire ?

(3) Déterminer la chance d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour ?

(4) Déterminer la chance d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.

Exercice 3

Pendant un examen, trois candidats sur cinq sont supposés être des tricheurs (ou équivalent), deux sur cinq sont des étudiants consciencieux : 75% des candidats tricheurs sont admis. 90% des candidats consciencieux sont admis.

(1) Quel est le taux global de personnes admis ?

(2) Quel est la probabilité pour qu'un étudiant soit un tricheur sachant qu'il est admis ?

Scanné avec CamScanner

PROPOSITION DE CORRECTION DE PROBABILITE 2016-2017 Session 1

EXERCICE 1

Soit A : ≪le cheval A gagne ≫
B : ≪ le cheval B gagne ≫
C : ≪ le cheval C gagne ≫
D'après l'énoncé , le cheval A a deux fois plus de chance de gagner que le cheval B. D'où P(A) = 2 P(B).
La somme des chances de gagner des chevaux B et C vaut trois fois celle du cheval A c'est-à-dire que P(B) + P(C) = 3 P(A).

1-a A, B et C forment un système complet d'évènement donc : P(A) + P(B) + P(C) = 1 or P(B) + P(C) = 3 P(A) d'où

$$\begin{cases} P(A)+3P(A)=1 \\ 4P(A)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{P(A)} = \frac{1}{4}$$

1-b Calculons la probabilité que le cheval C ne gagne pas.
Il s'agit de calculer P $(\bar{C})$.
On a P $(\bar{C})$ = 1 - P(C) or P(C) = 3 P(A) - P(B) = 3 P(A) - $\frac{1}{2}$ P(A) = $\frac{5}{2}$P(A) =$\frac{5}{8}$
. Donc P $(\bar{C})$ = 1 - $\frac{5}{8}$
P $(\bar{C})$ = $\frac{3}{8}$

2- Soient A , B deux evenements tels que P(A) = $\frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

a- Calculons la probabilité P(B).
On a : $P(A \cup B)$ = P(A) + P(B) - $P(A \cap B)$ donc , P(B) = $P(A \cap B)$ + $P(A \cup B)$ - P(A).
P(B) = $\frac{7}{12} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

b- Calculons la probabilité de P(A/B)
D'après la formule des probabilités conditionnelles on a :
P(A/B) = $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$.

c- Calculons la probabilité $P(\bar{A}/\bar{B})$
D'après la formule de probabilité conditionnelle on a :
$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{A \cup B})}{P(\bar{B})}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

or $P(A \bar{\cup} B) = 1 - P(A \cup B) = \frac{5}{12}$ et $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{2}{3}$
donc , $P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}$
$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{5}{8}$.

Exercice 2
On lance un dé a six faces numérotées de 1 à 6. Soient $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, p la probabilité d'apparition d'un nombre pair et q celle d'un nombre impair. On a p = 2 q. or $P(\Omega) = 1$, alors 3p + 3q = 1. On en déduit que : $q = \frac{1}{9}$ et $p = \frac{2}{9}$.
Soit u_1 : ≪ tirer dans l'urne 1 ≫
u_2 : ≪ tirer dans l'urne 2 ≫
B : ≪ tirer une boule blanche ≫
N : ≪ tirer une boule noire ≫
On tire dans l'urne 1 , lorsque les numéros d'apparition du lancé de dé sont 1 ou 2 d'où $P(u_1) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$.
De même , on tire dans l'unrne 2 si on obtient à l'issu du lancé de dé un numéro d > 2.
Par conséquent $P(u_2) = 2\ \frac{1}{9} + 2\ \frac{2}{9}\ P(u_2) = \frac{2}{3}$

1- Calculons la probabilité de tirer une boule blanche
On a : $B = (B \cap u_1) \cup (B \cap u_2)$ et $(B \cap u_1) \cap (B \cap u_2) = \varnothing$.
Donc d'après le théorème des probabilités totales , $P(B) = P(B \cap u_1) + P(B \cap u_2)$
or : $P(B \cap u_1) = P(B/u_1) * P(u_1)$ et $P(B \cap u_2) = P(B/u_2) * P(u_2)$.
$P(B \cap u_1) = \frac{3}{4} * \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ et $P(B \cap u_2) = \frac{1}{3} * \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ donc $P(B) = \frac{17}{36}$.

2- Il s'agit de calculer $P(u_1/B)$
D'après la formule des probabilités conditionnelles on a : $P(u_1/B) = \frac{P(B \cap u_1)}{P(B)}$
Or on a montré précédement que $P(B) = P(B/u_1) * P(u_1) + P(B/u_2) * P(u_2)$.
On en déduit la formule de Bayès qui est :
$P(u_1/B) = \frac{P(B \cap u_1)}{P(B/u_1) * P(u_1) + P(B/u_2) * P(u_2)}$
$P(u_1/B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4} * \frac{1}{3} + \frac{1}{3} * \frac{2}{3}} = \frac{9}{17}$.

3- On sait que $P(u_2 \cap N) = P(N/u_2) * P(u_2)$.
Comparons $P(N/u_2)$ à P(N)
On a $P(N/u_2) = \frac{2}{3}$.

VALIDEUR
Scanné avec CamScanner

B et N forment un système complet d'evenements donc P(B) + P(N) = 1 $\Rightarrow$ $P(N) = 1 - P(B) \Rightarrow$ P(N) = 1 - $\frac{17}{36} = \frac{19}{36}$.
On constate que $P(N/u_2) \neq$ P(N). Ainsi $P(u_2 \cap N) \neq P(N) * P(u_2)$.
Conclusion : N et u_2 ne sont pas indépendants.

Exercice 3

Soit X la variable aléatoire qui associent où chaque tirage le gain algébrique du joueur . Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont :
$X = \{-5000, -4000, 1000, 8000\}$

1- Etablissons la loi de probabilité de la variable X.
On a : $P(X = -5000) = \frac{C_2^1}{C_7^1} = \frac{2}{7}$
$P(X = -4000) = \frac{C_5^1}{C_6^1} * \frac{C_4^1}{C_7^1} = \frac{5}{6} * \frac{4}{7} = \frac{10}{21}$
$P(X = 1000) = \frac{C_1^1}{C_7^1} = \frac{1}{7}$
$P(X = -4000) = \frac{C_4^1}{C_7^1} * \frac{C_1^1}{C_6^1} = \frac{4}{7} * \frac{1}{6} = \frac{2}{21}$
Loi de probabilité de la variable X

x_i	-5000	-4000	1000	8000
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{21}$

2- Calculons l'espérance X

Par définition , on a $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i)$

$E(X)$ = -5000 * $\frac{2}{7}$ -4000 * $\frac{10}{21}$ + 1000 * $\frac{1}{7}$ + 8000 * $\frac{2}{21}$
$E(X)$ = -2428.57

3- Soit x ce montant
Déterminer x revient à resoudre l'équation $E(X) = 0$.

$$E(X) = 0 \Leftrightarrow -5000 * \frac{2}{7} - 4000 * \frac{10}{21} + 1000 * \frac{1}{7} + x * \frac{2}{21}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{21} * x = \frac{67000}{21}$$
$$E(X) = 0 \Leftrightarrow x = 33500$$

Conclusion : le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que $E(X) = 0$ est de 33500F.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Correction Examen de Probabilité 2017-2018 Session 1 Licence 1

Exercice 1 :

(1) (Voir cours)

(2) $\mathbb{E}(X) = \alpha$

$var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - \alpha^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbb{P}(X = k) - \alpha^2$

(3) (voir cours)

(4) a)Principe multiplicatif

b) Le nombre de différents types d'habillement de Miss proba est :$a \times b \times c$.

(5) $Z \mapsto \mathcal{U}([0, b])$

a) La densité : $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} siz \in [a, b] \\ 0 \end{cases}$

b) $\mathbb{E}(Z) = \frac{b+a}{2}$

(6) (i) voir cours

(ii) voir cours

(iii) Les évènements élémentaires ont tous la même probailité

(7) $\mathbb{P}(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

Exercice 2 :

Soit E l'ensemble des étudiants du groupe.

Soient A et B l'ensemble des étudiants d'anglais et d'allemand respectivement.On a $E = A \cup B$ et $A \cap B = \varnothing$

Soient $A_1 =$ { Etudiants d'anglais et d'informatique en option}

$A_2 =$ { Etudiants d'anglais et de chimie en option}

$A_1 =$ { Etudiants d'anglais et d'astronomie en option}

$B_1 =$ { Etudiants d'allemand et d'informatique en option}

$B_2 =$ { Etudiants d'allemand et de chimie en option}

$B_3 =$ { Etudiants d'allemand et d'astronomie en option}

Ainsi, on a $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ et $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$

$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ et $B_i \cap B_j = \varnothing$ pour $i \neq j$

Alors d'après le principe additif de dénombrement : $card(A) = \sum_{i=1}^{3} card(A_i)$ et $card(B) = \sum_{j=1}^{3} card(B_j)$

De même $card(E) = card(A) + card(B)$

D'après l'énoncé on a :

$-card(A_1) = 3$

$-card(A_2) = 15 - 6 = 9$ (parmi les 15 inscrits en chimie,6 font Allemand)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$-card(A_3) = 8$
$-card(B_2) = 6$
$-card(B_3) = 12 - 8 = 4$ (parmi les 12 inscrits en astronomie, 8 étudient anglais)
card(B)=16
D'ou $card(B_1) = 16 - 6 - 4 = 6$
Ainsi ;on a : $card(E) = card(A) + card(B) = 3 + 9 + 8 + 16 = 36$
Donc le nombre d'étudiants dans le groupe est 36.

Exercice 3 :

X est une variable aléatoire continue de densité

$$f(x) = \begin{cases} ax(x-2) \ si \ x \in [0,2] \\ 0 \ sinon \end{cases}, a \in \mathbb{R}$$

(1) La valeur de a.

f est une densité de probabibilité sur $\mathbb{R}$,donc $\int_B f(t)dt = 1$ or $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^2 f(t)dt + \int_2^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0 + \int_0^2 f(t)dt + 0 = a\int_0^2 x(x-2)dx = -\frac{4}{3}a$

Ainsi , $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow -\frac{4}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{3}{4}}$

(2) La fonction de répartition de X

On a : $f(t) = \begin{cases} -\frac{3}{4}t(t-2) \ si \ t \in [0,2] \\ 0 \ sinon \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

si $x \in]-\infty, 0[; F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$,car $\forall t \in]-\infty, x[, f(t) = 0$

si $x \in [0;2]; F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = 0 + \int_0^x f(t)dt = -\frac{3}{4}\int_0^x t(t-2)dt = -\frac{3}{4}x^2\left(\frac{1}{3}x - 1\right)$

si $x \in]2, +\infty[; F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^2 f(t)dt + \int_2^{+\infty} f(t)dt = 0 + 1 + 0 = 1$

Conclusion :

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < 0 \\ -\frac{3}{4}x^2(\frac{1}{3}x - 1) \;\; si \; x \in [0;2] \\ 1 \;\; si \; x > 2 \end{cases}$$

(3) $\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{32}$

$\mathbb{P}\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{4}{3}\right) = F_X\left(\frac{4}{3}\right) - F_X\left(\frac{1}{3}\right)$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI : L1 Année 2018-2019

CORRECTION : PROBABILITES SESSION 1

EXERCICE 1 et EXERCICE 3 : Voir sujet 2017 – 2018 probabilités session 2.

EXERCICE 2

1. Le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture.
   Soit A :≪ attribuer un jour de fermeture. ≫
   Au cour des 7 jours de la semaine, chacune des 4 boulangerie à la possibilité de fermer une fois, d'où on a un 4−uplet dans 7 . Ainsi, on a
   $$Card(A) = 7^4 = 2401 \quad \text{façcons.}$$
2. Plusieurs boulangeries peuvent fermer le même jour.
   Soit B : ≪ attribuer un jour de fermeture.≫
   Cela révient à faire un arrangement sans répetition de 4 dans 7. Alors,
   $$Card(B) = A_7^4 = 840 \quad \text{façons.}$$
3. Soit C : ≪ avoir au moins une boulangerie ouverte.≫
   $\bar{C}$: ≪ toutes les boulangeries sont fermées.≫
   Les boulangeries sont fermées tous les 7 jours de la semaine, donc $Card(\bar{C}) = 7$
   Ainsi, $Card(C) = Card(\Omega) - Card(\bar{C}) = 2401 - 7 = 2394$ façons d'avoir au moins une boulangerie ouverte.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI : L1 Année 2018-2019

CORRECTION : PROBABILITES SESSION 2

EXERCICE 1

1. Soit X une variable aléatoire discrete à valeur dans $\{1,2,3,4\}$ de loi

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{a}{k^2},\quad \forall k\in\{1,2,3,4\}$$

(a) La valeur de a

X	1	2	3	4	Total
$\mathbb{P}(X=k)$	a	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{9}$	$\frac{a}{16}$	1

$a+\frac{a}{4}+\frac{a}{9}+\frac{a}{16}=1\Rightarrow a=\frac{144}{205}$

(b) Supposons que $a=\frac{3}{5}$ et pour $k=1,2,3$ $\mathbb{P}(X=k)=\frac{a}{k^2}$.
Déterminons $\mathbb{P}(X=4)$.
On a :
$\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3)+\mathbb{P}(X=4)=1$
$\Rightarrow a+\frac{a}{4}+\frac{a}{9}+\mathbb{P}(X=4)=1$
$\Rightarrow \mathbb{P}(X=4)=1-\frac{49}{36}a=1-\frac{49}{60}$ car $a=\frac{3}{5}$
$\Rightarrow \mathbb{P}(X=4)=\frac{11}{60}$

(c) Soit $m_2(X)$ le moment centré d'ordre 2 de X. Il est définit par :

$$m_2(X)=\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2$$

Avec, en supposant $a=\frac{3}{5}$:
$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{4}k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{4}k\times\frac{a}{k^2}=\sum_{k=1}^{4}\frac{a}{k}=\frac{5}{4}$ et
$\mathbb{E}(X^2)=\sum_{k=1}^{4}k^2\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{4}k^2\times\frac{a}{k^2}=\sum_{k=1}^{4}a=4a=\frac{12}{5}$
D'où
$m_2(X)=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2=\frac{12}{5}-\frac{25}{16}=\frac{67}{80}$.
Le moment centré d'ordre 2 est appelé variance de la v.a. X.

2. Définition de la probabilité (voir cours).

3.

(a) Combinaison sans répétition.

(b) Temps maximal
$C_{10}^{6}=210$ codes possible. Soit $210\times1=210$ minutes au maximum.

4. Z est une v.a. de loi de Poisson de paramètre α

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

(a) L'ensemble des valeurs prise par Z est $Z(\Omega) = \mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels.

(b) $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

(c) L'expression du moment d'ordre 1 de Z.
$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(Z = k)$. On a :

$$\mathbb{P}(Z = k) = \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha} \\
&= e^{-\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^k}{(k-1)!} \\
&= e^{-\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha\frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \alpha e^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!} \\
&= \alpha e^{-\alpha}e^{\alpha} \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

Le moment d'ordre 1 est appelé espérance de la v.a. Z.

EXERCICE 2
Voir première session.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

CORRECTION EXAMEN DE PROBABILITE 2019-2020

EXERCICE 1

(1) Différentes méthodes de dénombrement :
- Arrangement avec répétition (n-uplet) : n^p
- Arrangement sans répétition : A_n^p
- Permutation : $n!$
- Combinaison sans répétition : C_n^p
- Combinaison avec répétition : C_{n+p-1}^p
-

(2) a- Comme le code est ordonné et sans répétition de numéro alors , il s'agit d'un arrangement sans répétition

b- Soit n le nombre de tentative possible et M le temps maximal , on a : M = n minutes et $n = card(\Omega)$, avec Ω l'univers de proba ;

$n = card(\Omega) = A_{10}^6 = 151200$

$M = 151200\ min$

(3) a- Une expérience ε est dite aléatoire si on ne peut pas prévoir par avance son résultat mais on connait l'ensemble de tous les résultats possibles . Répétée dans les mêmes conditions peut donner lieu à des résultats différents

b- U l'univers est l'ensemble des résultats possibles de ε

c- Une expérience est dite équiprobable si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser .

d- Soit A un évènement on a : $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \frac{1}{card(\Omega)} \sum_{\omega \in A} 1$

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

$$P(A) = \frac{nbre\ de\ cas\ favorables}{nbre\ de\ cas\ possible}$$

EXERCICE 2

(1) Expérience aléatoire ε

L'expérience consiste à attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chacune des 4 pharmacies ; c'est-à-dire choisir un jour sur 7 pour chaque pharmacie

(2) Comme un jour peut être répété pour les 4, alors on a un n-uplet. Soit le tableau suivant :

Pharmacie	1	2	3	3
Nbre de jr possible de fermeture hebdomadaire	7	7	7	7

(3) Il s'agit du cardinal de Ω l'univers de proba , on a : $card(\Omega) = 7^4$

(4) Soit l'évènement A "$plusieurs\ pharmacie\ ne\ peuvent\ fermer\ en\ meme\ temps$"

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

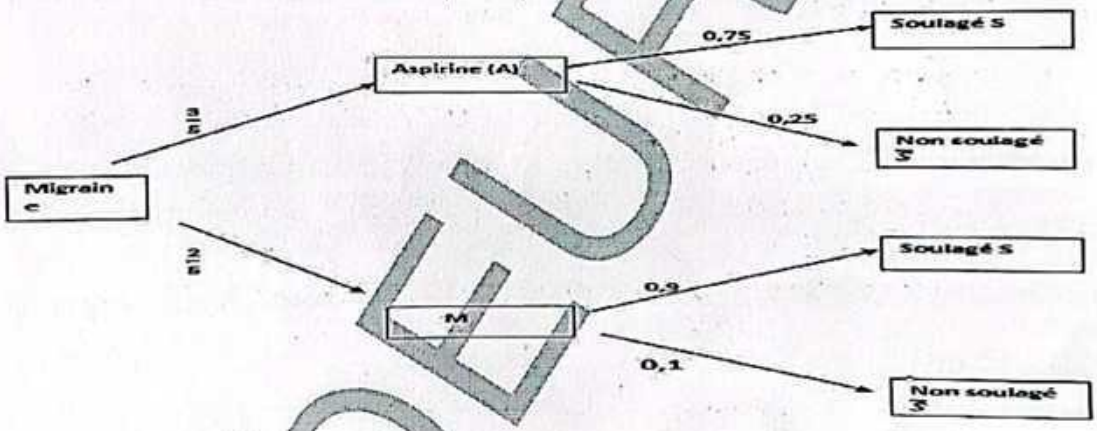
Pharmacie	1	2	3	4
Nbre de jr possible de fermeture hebdomadaire	7	6	5	4

$$D'ou\ card\ (A) = A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4$$

$$P(A) = \frac{card(A)}{card\ (\Omega)}$$

Exercice 3

Apres lecture on obtient le schéma suivant pour explication :



(1) IL s'agit de $P(S)$

On a : Par la formule des probabilités totale :

$$P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|M)P(M)$$

$$P(S) = 0{,}75 \times \frac{3}{5} + 0{,}9 \times \frac{2}{5}$$

(2) Il s'agit de $P(A|S)$

La formule Bayes nous donne :

$$P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} \text{ et } P(S|A) = \frac{P(A \cap S)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P(A|S) = \frac{P(A)P(S|A)}{P(S)}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Renforcement : ELECTROCINETIQUE

Cette partie comprend deux exercices indépendants I et II

I. On considère le réseau représenté à la **figure 1** ci-dessous. Chaque dipôle D_i peut représenter soit un générateur, soit un récepteur (conducteur ohmique), soit un fil conducteur soit un interrupteur ouvert.

1.Déterminer les courants et les tensions inconnues. *Les résultats seront présentés dans un tableau après calcul.*

2.Déterminer la puissance mise en jeu par chaque dipôle (D1 à D8).

3.En déduire la nature de chacun d'eux.

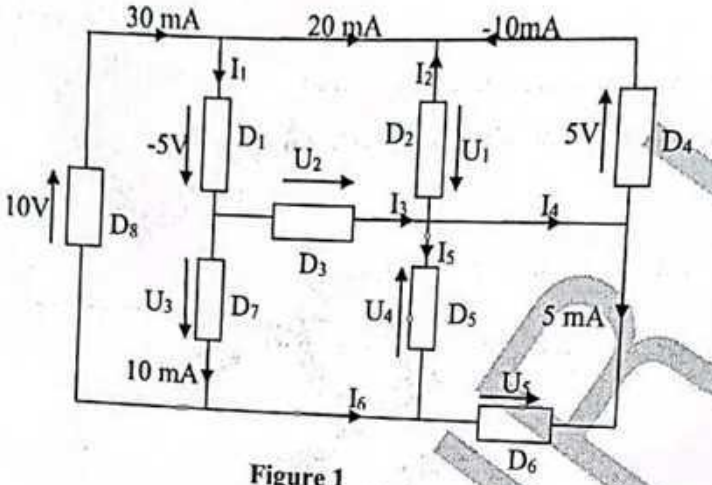


Figure 1

II. On considère le montage de la **figure 2** ci-dessous. La source de tension délivre une tension E constante pour $t \geq 0$. A l'instant $t = 0$ pris pour origine des temps, on ferme l'interrupteur ; les condensateurs étant initialement déchargés. On posera $\tau = RC$.

1. *Conditions initiales*

1.1.Déterminer $u_s(0+)$ et $i(0+)$ correspondant à la tension u_s et l'intensité du courant i juste après la fermeture de l'interrupteur.

1.2. En déduire $\frac{du_s}{dt}(0^+)$

2. *Détermination de $u_s(t)$*

2.1. Montrer que u_s satisfait à l'équation différentielle ci-dessous : $\frac{d^2u_s}{dt^2} + \frac{3}{\tau}\frac{du_s}{dt} + \frac{1}{\tau^2}u_s = 0$

2.2. En déduire l'expression de $u_s(t)$, on posera $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2\pi}$

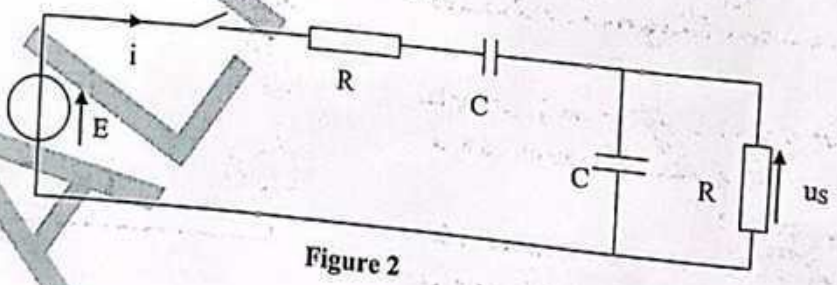


Figure 2

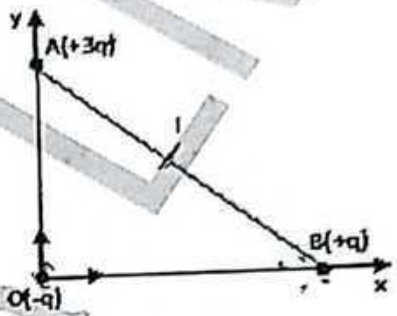
VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

LICENCE 1 Math - Info
EXAMEN : ELECTRICITE 2016-2017
1ère session / Durée : 2 H

Exercice 1 :

Aux trois sommets A, O et B du triangle rectangle isocèle de la figure ci-dessous (référence xOy et vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$) on place trois charges ponctuelles : 3q en A, -q en O et q en B avec q>0 et on donne OA = OB = a.



1. Exprimer en I, point milieu du segment AB, les composantes du champ $\vec{E}$, produit par cette distribution discrète de charges, suivant les axes Ox et Oy.
2. Exprimer le potentiel V produit en I par cette distribution.
3. On donne q = 1 µC, a = 10 cm, calculer le module du champ $\vec{E}$ et le potentiel V en I.

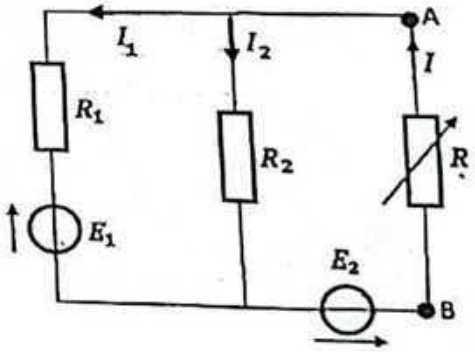
Exercice 2 :

Soit un disque de rayon R, d'épaisseur négligeables, portant une densité surfacique de charge σ constante.

1. Calculer le champ électrostatique crée en un point de l'axe du disque. En déduire le potentiel électrique en ce point.
2. Déduire l'expression du champ pour un plan.

Exercice 3 :

On considère le circuit ci-contre où R est une résistance variable.



1. En vous servant des lois de Kirchhoff, calculer les courants I_1, I_2 et I circulant dans les différentes branches du circuit
2. Déterminer les caractéristiques du générateur de Thevenin (E_{Th} et R_{Th}) équivalent à la portion de circuit située entre les bornes A et B.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

3. En déduire l'expression du courant électrique I qui traverse la résistance R.

$E_1 = 20\ V$; $E_2 = 70\ V$; $R_1 = 2\ \Omega$; $R_2 = 10\ \Omega$ et $R = 5\ \Omega$.

On fait varier la résistance R.

4. Exprimer en fonction de E_{Th}, R_{Th} et R la puissance électrique $\mathcal{P}$ dissipée par effet joule dans la résistance R.

5. Montrer par un raisonnement simple que cette puissance électrique passe par un maximum pour une valeur R_0 de R.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

LICENCE 1 Mathématiques Informatique (MI)
Examen d'Électrostatique
2nd Session : 2016-2017/ Durée : 2 heures

Exercice 1 (Électrostatique)

1. Montrer que le champ électrostatique créé par quatre charges ponctuelles identiques q placées aux sommets d'un carré de côté a, en un point M d'abscisse x de l'axe passant par son centre O et perpendiculaire à son plan est porté par l'axe Ox.

2. Déduire que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM} = 4 \times \|\overrightarrow{AM}\| \times \cos\alpha\, \vec{i}$.

3. Déterminer le champ électrostatique créé par quatre charges ponctuelles identiques q placées aux sommets d'un carré de côté a, en un point M d'abscisse x de l'axe passant par son centre O et perpendiculaire à son plan (figure 3).
4. Déduire du champ électrostatique, le potentiel créé en M.

5. Tracer le champ électrostatique et le potentiel en fonction de x et donner l'expression des valeurs aux limites sur chaque tracé.

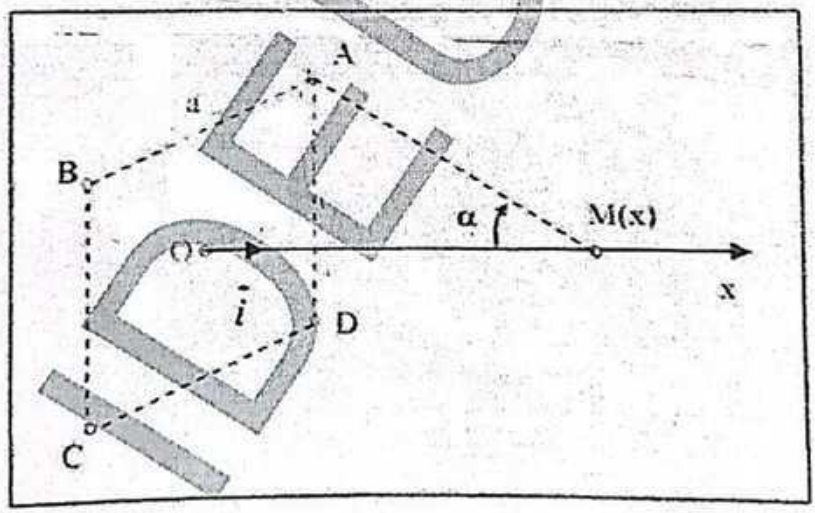


Figure 3

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

LICENCE 1 Mathématiques Informatique (MI)
Examen d'Électrostatique
2ème Session : 2016-2017/ Durée : 2 heures

Exercice 2 (Électrocinétique)

On considère le réseau schématisé sur la figure 2 ci-dessous.

On donne : $R_1 = R_3 = r = 1\ k\Omega$, $R_4 = R_5 = 2R_2 = 2R = 2\ k\Omega$ et $E_2 = 2\ E_1 = 2\ E = 20\ V$.

On désire déterminer, à l'aide des équations de KIRCHHOFF (1ère méthode) puis de la méthode des courants fictifs de maille (2rd méthode) les courants dans toutes les branches du réseau en fonction des données E, R et r.

1. 1ère méthode
   a. Déterminer l'équation matricielle reliant courants et tensions, dont la résolution permet d'exprimer les trois courants I_1, I_2 et I_3.
   b. En déduire les expressions de I_4 et I_5.
2. 2rd méthode
3. Reprendre les questions 1.a) et 1.b) en utilisant la méthode des courants fictifs de maille.
4. Application numérique

Calculer les valeurs des différents courants et commenter.

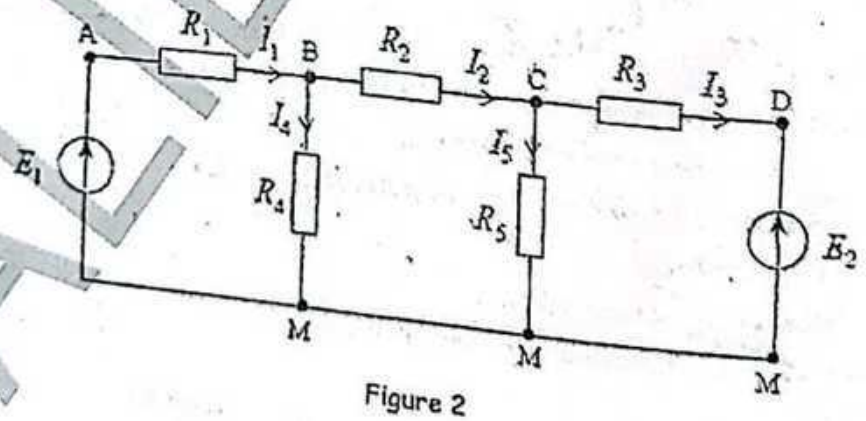


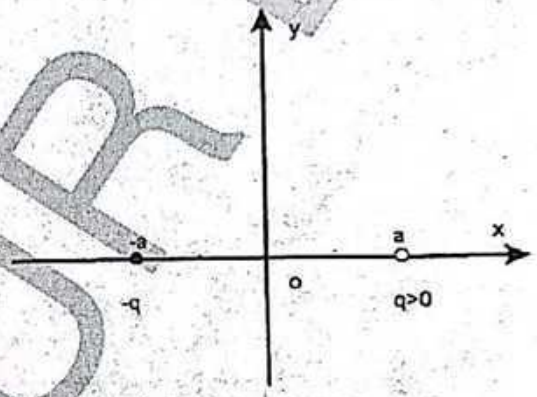
Figure 2

VALIDEUR LMD
Scanné avec CamScanner

LICENCE 1 Math - Info
EXAMEN : ELECTRICITE 2017-2018
1ère session / Durée : 2 H

Exercice 1 :

On travaille en coordonnées cartésiennes d'origine O. On considère une charge $q > 0$ placée en P ($x = a, y = 0, z = 0$) et une autre charge ponctuelle opposée $-q$ placée en N ($x = -a, y = 0, z = 0$). On s'intéresse au champ en un point M (x, y, z). Voir Figure ci-dessous comme illustration.



1) En utilisant les symétries, que peut-on dire de la direction du champ (montrer par un schéma) ?
   - en un point $M(x = 0, y, z)$
   - en un point M ($x, y = 0, z = 0$)
2) Déterminer l'expression du champ sur l'axe Ox.
   On écrira $\vec{E} = E\vec{u}_x$ et on distinguera trois cas
   ($x < -a$; $-a < x < a$; $x > a$)
3) Tracer E en fonction de x.
4) Déterminer l'expression du champ en un point M de l'axe Oy. On écrira $\vec{E} = E\vec{u}_x$.
5) Tracer E en fonction de y.
6) Déterminer l'expression du potentiel V au point O.

Exercice 2 :

On considère un cylindre creux (S) de rayon R, de longueur infinie, chargé en surface par une densité surfacique de charges uniforme $\sigma > 0$ (figure 1). Soit M un point quelconque de l'espace.

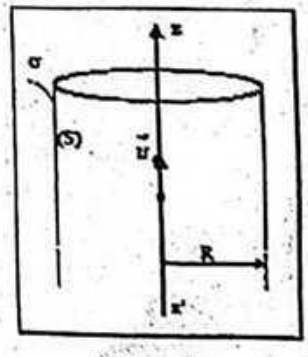


Figure 1

1) Indiquer les coordonnées dont dépend le champ électrostatique E(M) et déterminer sa direction.
2) a) Définir et justifier la surface de Gauss.
   b) Déterminer le champ E(M) en tout point M de l'espace ($r < R$ et $r > R$).
3) a) Tracez l'allure de E(r) en fonction de r (où E(r) est la norme du champ).
   b) Le champ E(M) est-il continu à la traversée de la surface du cylindre.

VALIDEUR LMD

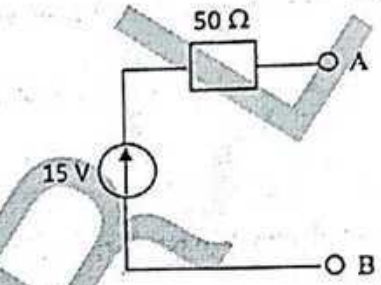
Scanné avec CamScanner

4) En prenant comme référence du potentiel $V(r = 0) = V_0$, calculez le potentiel $V(r)$ en tout point M de l'espace.

Exercice 3 :

Partie 1

Un générateur selon le modèle de Thevenin est représenté ci-contre.



a. Donner la valeur de sa tension à vide. Comment l'obtient-on ?

b. Représenter son générateur équivalent selon le modèle de Norton

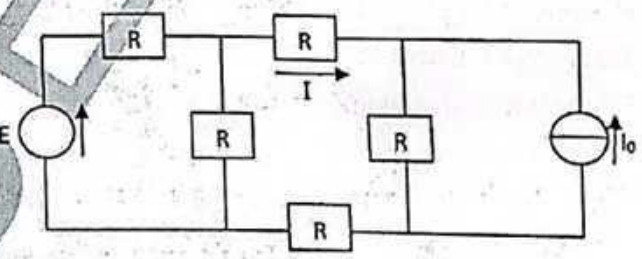
Partie 2

On considère le réseau en régime permanent ci-dessous. On donne $R = 20\ \Omega$; $E = 20$ V et $I_0 = 0{,}25$ A. Déterminer l'intensité du courant I circulant dans la résistance R par les méthodes d'analyse suivantes.

a. Courants fictifs des mailles

b. Théorème de Superposition

c. Théorème de Thévenin.



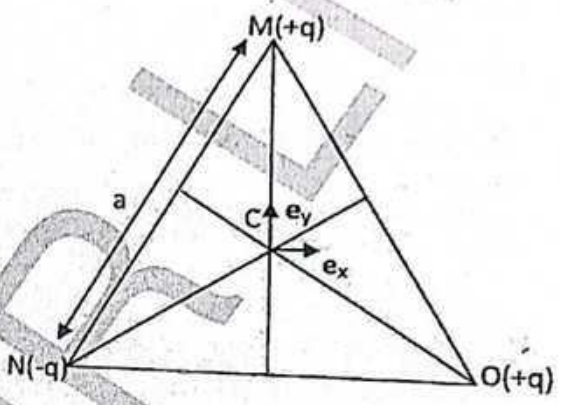
VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

LICENCE I Math - Info
EXAMEN : ELECTRICITE 2017-2018
2ème Session / Durée : 2 H

EXERCICE 1 :

Trois charges **+q**, **-q** et **+q** sont placées aux sommets d'un triangle équilatérale MNO de côté a comme indiqué la figure ci – contre :



On désire déterminer le **champ** $\vec{E}$ et le **potentiel** V électrostatiques régnant au **centre** C du triangle en fonction de a et q. Pour cela :

1. Reprendre la figure en y représentant le champ $\vec{E}$.
2. Montrer que la distance $r = OC = \frac{a}{\sqrt{3}}$
3. Déterminer les caractéristiques et l'expression du champ $\vec{E}$. On considérera le repère $(C, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.
4. Déterminer l'expression du potentiel V puis calculer E et V.
5. Un électron est placé au centre de gravité C du triangle. En déduire les caractéristiques de la force de Coulomb exercée sur cet électron.

Application numérique : q = 0,1 nC, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 N.m^2.C^{-2}$ et a = 10 cm.

EXERCICE 2 :

Un fil rectiligne, infini, de dimensions transversales négligeables, porte une densité de charges linéique uniforme $\lambda > 0$. Le fil est parallèle à l'axe (Oz) et coupe le plan (xOy) en **F(a ; 0 ; 0).**

1. Déterminer le champ $\vec{E}$ (Théorème de GAUSS) et le potentiel V en un point M du plan (xOy), en introduisant la variable r = FM.
2. Exprimer le potentiel V_0 en O, puis $V - V_0$ en fonction de λ, r et a, sans faire intervenir de constante supplémentaire.

EXERCICE 3

Partie A Association série - parallèle

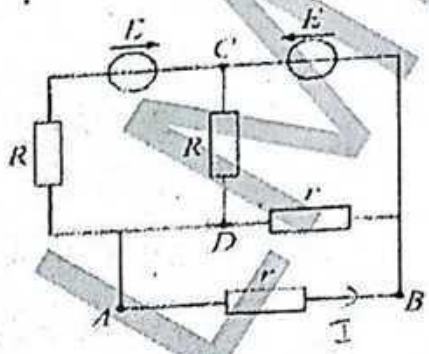
Des résistances de 60 Ω sont disponibles.

1. Calculer la résistance équivalente à 2 résistances associées en série puis en dérivation.
2. Déterminer les associations permettant d'obtenir 120 Ω, 90 Ω.

Scanné avec CamScanner

Partie B Théorème de superposition

Le circuit étudié est ci-contre.

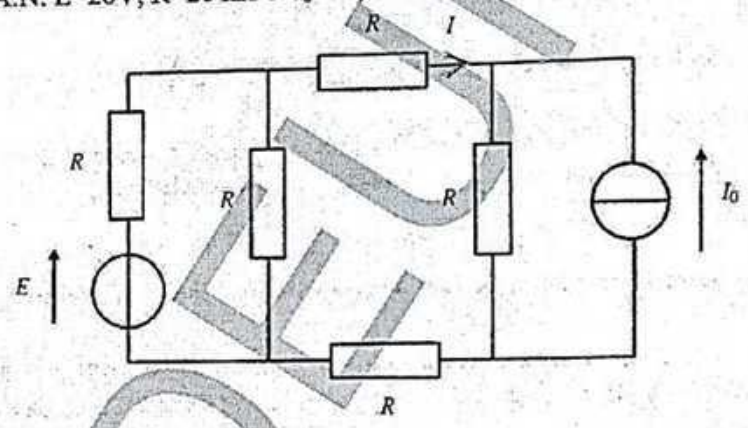


1. Calculer la tension U'_{AB} quand on garde le générateur de droite allumé puis la tension U''_{AB} quand on garde le générateur de gauche allumé
2. Calculer le courant circulant de A à B dans la résistance r

Partie C Théorème de Thévenin

Soit le circuit représenté (ci-dessous).

Thévenin Déterminer l'intensité du courant I par le **théorème de Thévenin.** Justifier chacune des étapes. A.N. E=20V, R=20 kΩ et $I_0 = 0{,}25$ A



VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

RÉPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union – Discipline – Travail

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ FELIX HOUPHOUËT-BOIGNY

UFR-SSMT

UNITE DE FORMATION ET DE RECHERCHE DES SCIENCES DES STRUCTURES DE LA MATIERE DE ET TECHNOLOGIE

DEVOIR SURVEILLE D'ELECTRICITE 2018-2019

UFR MI

Questions de Cours

1-Établir les expressions du Champ et du Potentiel électrostatiques créés par une distribution continue linéique, surfacique et volumique de charges.

2-Soit un fil infini uniformément chargé de densité linéique $\lambda>0$. On cherche à calculer le champ et le potentiel électrostatique créés par ce fil en un point quelconque M de l'espace.

a- Quelle est la méthode la mieux adaptée pour le calcul du champ électrostatique ? Justifiez votre réponse.

b- Donnez l'expression du champ électrostatique par cette méthode en justifiant les étapes

c- Le potentiel n'étant pas nul à l'infini, on fixe en un point $r=r_0$ le potentiel V tel que $V(r0)=0$. Donnez l'expression du potentiel V au point M en fonction de r_0.

EXERCICE 1

Sur un axe Ox, on place une charge ponctuelle positive Q à l'origine et une charge ponctuelle -2Q au point d'abscisse d.

1-Calculer en tout point de l'axe Ox le potentiel électrostatique V en fonction de x. (On prendra V=0 à l'infini. On distinguera les trois (3) cas suivants : $x<0$; $0<x<d$ et $x>d$. Quels sont les points où :

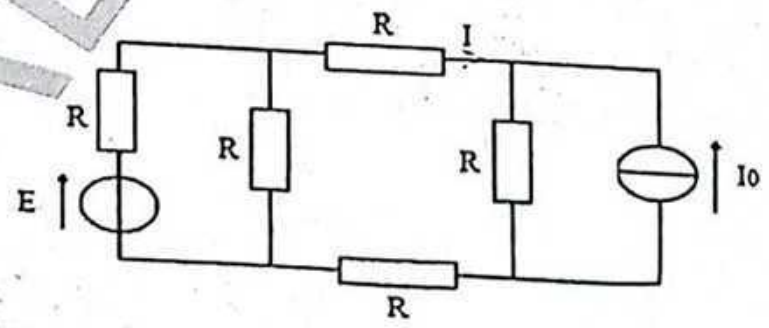
a- Le potentiel V=0

b- Le champ E=0

2- Déterminer la surface équipotentielle V=0

EXERCICE 2

Soit le circuit suivant, déterminer l'expression de l'intensité I par la méthode des courants fictifs de mailles.



VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET-BOIGNY
DE COCODY

UNITE DE FORMATION ET DE RECHERCHE
SCIENCES DES STRUCTURES DE LA MATIERE ET DE TECHNOLOGIE

EXAMEN D'ÉLECTROSTATIQUE : Durée 2h

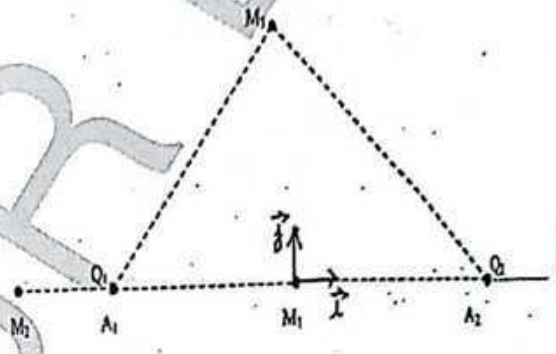
(2ème Session) 2018-2019

Les documents et les téléphones ne sont pas autorisés

Exercice 1 :

On place respectivement en A_1 et A_2 de la figure, les charges ponctuelles Q_1 et Q_2.

1. Exprimer le champ électrostatique résultant aux points M_1, M_2 et M_3 indiqués sur la figure.
En déduire son module et sa valeur numérique.
2. Exprimer le potentiel électrostatique résultant aux points M_1, M_2 et M_3 indiqués sur la figure.
Calculer sa valeur numérique.



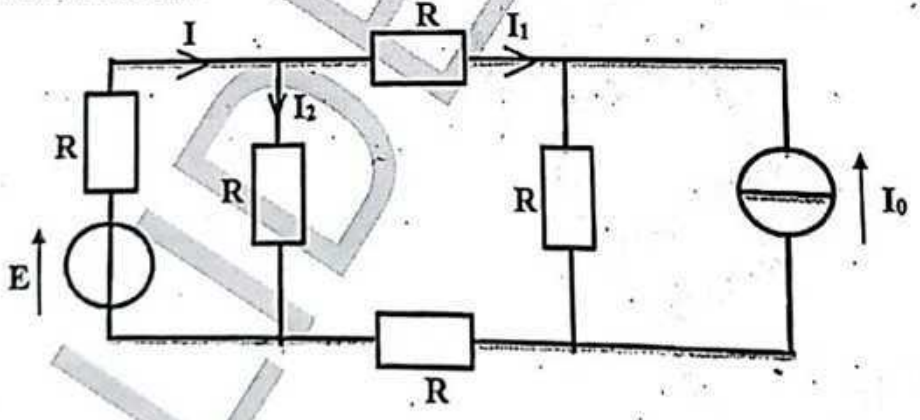
On donne :

$Q_1 = +10nC$; $Q_2 = -10nC$; $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\ N.m^2.C^{-2}$;

$A_1M_1 = 4cm$; $A_2M_1 = 6cm$; $A_1M_2 = 6cm$; $A_1M_3 = 10cm$; $A_2M_3 = 10cm$.

Exercice :

Soit le circuit suivant :



1. Transformer le générateur de courant du circuit en un générateur de tension. Que devient le circuit ?
2. A partir du nouveau circuit ainsi obtenu, déterminer :
a. le nombre de nœuds N
b. le nombre de branches B
c. le nombre de mailles indépendantes M
3. En appliquant les lois de Kirchhoff (lois des nœuds et mailles), déterminer :
a. le système d'équations avec pour variables I_1 et I_2 .
b. l'équation matricielle avec pour variables I_1 et I_2 .

Scanné avec CamScanner

4. En utilisant la méthode de Cramer, calculer les intensités des courants I_1 et I_2. En déduire celle du courant I.

5. Retrouver les expressions des courants I_1, I_2 et I en utilisant la méthode des courants fictifs de mailles.

6. a. Utiliser les équivalences Thévenin – Norton pour réduire le circuit initial en un circuit à une seule maille constituée d'un générateur de tension et de résistances. La maille finale doit être traversée par le courant I_1 de la figure initiale. Faire une figure à chaque niveau de transformation.

b. Appliquer la loi de Pouillet pour calculer l'intensité du courant I_1.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

EXAMEN ELECTRICITE
LICENCE 1 MI 2019 – 2020
Durée : 02H

Exercice 1 : Dipôle électrostatique

A. Soit un système de deux charges –q et +q placées en A et B distantes de a et formant un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{p}$.

1. Donner l'expression de $\vec{p}$ en fonction de q, a et $\vec{u}_{AB} = \vec{\imath}$. En déduire son module p.
2. Trouver l'expression en coordonnées polaires du potentiel V(r,θ) créé par un dipôle en un point M à grande distance du dipôle.
3. Déterminer son champ $\vec{E}(M)$ au point M à grande distance du dipôle. Faire un schéma du dipôle et représenter les composantes de $\vec{E}(M)$ en coordonnées cylindriques.
4. En déduire les équations des surfaces équipotentielles et des lignes de champ de ce dipôle.

B. On suppose maintenant que le dipôle est placé dans un champ électrique $\vec{E}_0$ et qu'au point O milieu des deux charges, le potentiel est $V_0 = V(O)$; l'axe du dipôle est parallèle à $\vec{E}_0$ et de même sens.

5. Donner l'expression du potentiel V'(r,θ) en un point M (r,θ) quelconque en fonction de r, θ (coordonnées polaires), p (moment dipolaire), E_0 et V_0.
6. Montrer que le potentiel V'(r,θ) est constant sur une sphère de rayon R dont on déterminera l'expression en fonction de p et E_0.
7. Donner les composantes radiale et orthoradiale du champ résultant $\vec{E}'$ en M.

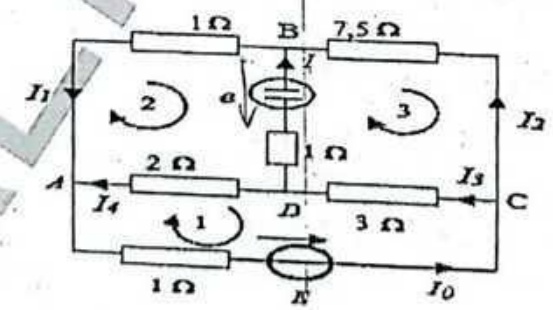
C. On place le dipôle dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}_1$ faisant un angle α avec le moment dipolaire $\vec{p}$ tel que : $\alpha = (\widehat{\vec{p}, \vec{E}_1})$. Etudier l'action de $\vec{E}_1$ sur le dipôle (voir les conditions d'équilibre).

Exercice 2 : Lois de Kirchhoff

On considère le montage de la figure ci-dessous. *E* est un générateur et *e* un bac à électrolyse : *E = 24 V* et *e = 2 V*.

1) Calculer la grandeur de tous les courants qui circulent dans chaque branche en utilisant les équations de Kirchhoff. Par la suite vérifiez les résultats avec la méthode des courants fictifs. Dans les deux cas les mailles sont numérotées et orientées dans le sens horaire comme indiqué sur la figure.

2) Pour quelle valeur de *E* le courant qui circule dans la branche *BD* est-il nul ? Quelles est l'intensité du courant fourni par le générateur dans ce cas ?



VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

L1 MATH-INFORMATIQUE
UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

2020-2021

EXAMEN D'ÉLECTRICITÉ

Session 1

Durée : 2H

ECUE 1 : ÉLECTROCINÉTIQUE

Il est rappelé aux étudiants que :

- **Aucun document n'est autorisé**
- **Les Smartphones doivent rester éteints**

Exercice

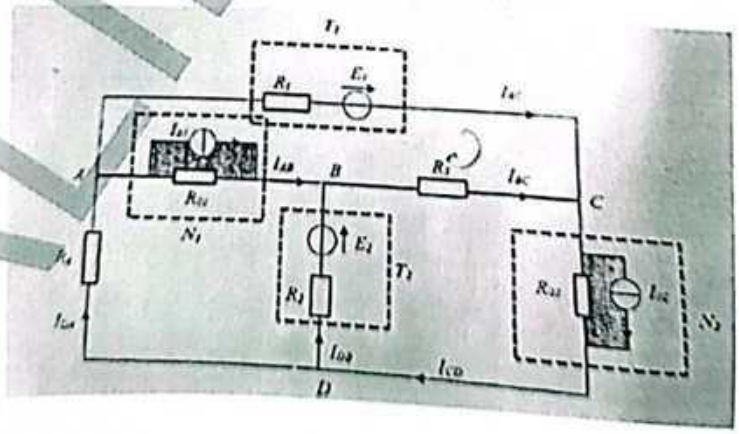
Dans le circuit électrique ci-dessous constitué de *générateurs de courants*, de *générateurs de tension* et de *résistances*, on souhaite calculer les intensités de courants dans chacune des branches du circuit en utilisant la **méthode des courants fictifs de maille.**

1) Transformer les générateurs N_1 et N_2 en *générateurs de tension réelle.*
2) Qu'est-ce qu'une maille indépendante ? Combien ce circuit en comporte-t-il ?

Après avoir transformé tous les *générateurs de courant* en *générateurs de tension*, on affectera à chaque maille indépendante un courant fictif J_i orienté dans le **sens horaire.**

3) Trouver la relation de couplage entre les courants fictifs J_i et le courant de branches I_{xy} comme orienté dans le circuit.
4) Ecrire l'équation matricielle permettant de calculer les courants fictifs J_i et la résoudre par la méthode de Cramer.
5) En déduire les intensités des courants de branches $I_{AC}, I_{AB}, I_{BC}, I_{DB}, I_{CD}, I_{DA}$.
6) Quel est le régime de fonctionnement (générateur ou récepteur) des générateurs T_1, T_2, N_1 et N_2 ?

On donne : $E_1 = 20V$; $E_2 = 20V$; $R_1 = 2\Omega$; $R_2 = 1\Omega$; $I_{01} = 400mA$; $I_{02} = 300mA$; $R_{01} = R_{02} = 10\Omega$; $R_3 = 3\Omega$; $R_4 = 2\Omega$.



VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

2020-2021

L1 MATH-INFORMATIQUE
UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

ECUE 2 : ELECTROSTATISTIQUE

Exercice

Toutes les questions de l'exercice sont indépendantes.

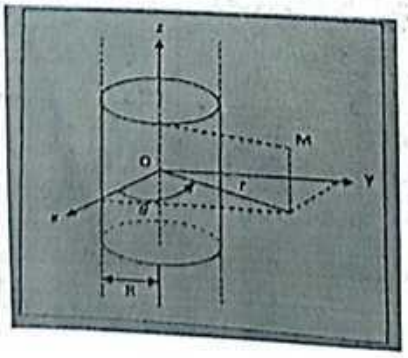
I- Soit une sphère de centre O et de rayon R. Elle est chargée en surface par une densité de charge non-uniforme $\sigma(\theta) = \sigma_0 sin\theta$ avec $\sigma_\theta = cte$. Donnez l'expression d'une surface élémentaire ds sur la sphère. En déduire l'expression de la charge totale Q de la sphère ?

II- Par les considérations de symétries et d'invariances, montrer qu'en un point de l'espace M, le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par les distributions suivantes ne peut se calculer que par la méthode directe c'est-à-dire *les lois de Coulomb* :
- a- Fil de longueur 2L de densité de charge uniforme $\lambda = \lambda_0$.
- b- Disque de rayon a de densité de charge $\sigma = \sigma_0$.

III- Soit la distribution D formée par deux charges ponctuelles placées dans un référentiel cartésien tel que : en $A(-2,0)$: $-3Q$; en $B(+1,-1)$: $+Q$. Déterminer l'ensemble des points M dans le plan (xOy) pour lequel $V = 0$.

IV- On considère un cylindre de rayon R, de longueur infinie, chargée uniformément en volume par une densité volumique $\rho = \rho_0$ ($\rho_0 > 0$). On désire déterminer le champ électrostatique $\vec{E}$ et le potentiel électrostatique V créés par cette distribution en tout point M de l'espace (Voir figure).

- a- Quelle est la direction du champ électrostatique $\vec{E}$(M) et de quelle(s) variable(s) dépend sa norme ?
- b- Après avoir justifié de l'application du *théorème de Gauss* pour le calcul du champ électrostatique $\vec{E}$(M), exprimer le champ $\vec{E}$(M) dans les cas suivants : $(r > R)$ et $(r < R)$.
- c- En déduire le potentiel électrique $V(r)$ dans les deux cas ci-dessus. On prendra en un point de donné r_0 ($r_0 > R$) le potentiel $V(r_0) = 0$.
- d- Tracer les variations de la norme du champ électrique $\vec{E}(r)$ en fonction de r.



VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

L1 MATH-INFORMATIQUE
UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY 2020-2021

ECUE 2 : ELECTROCINETIQUE (10 points)

EXERCICE 1

1. Déterminer le potentiel au point A en utilisant le pont diviseur de tension.
2. En déduire les intensités de courant dans les différentes branches.

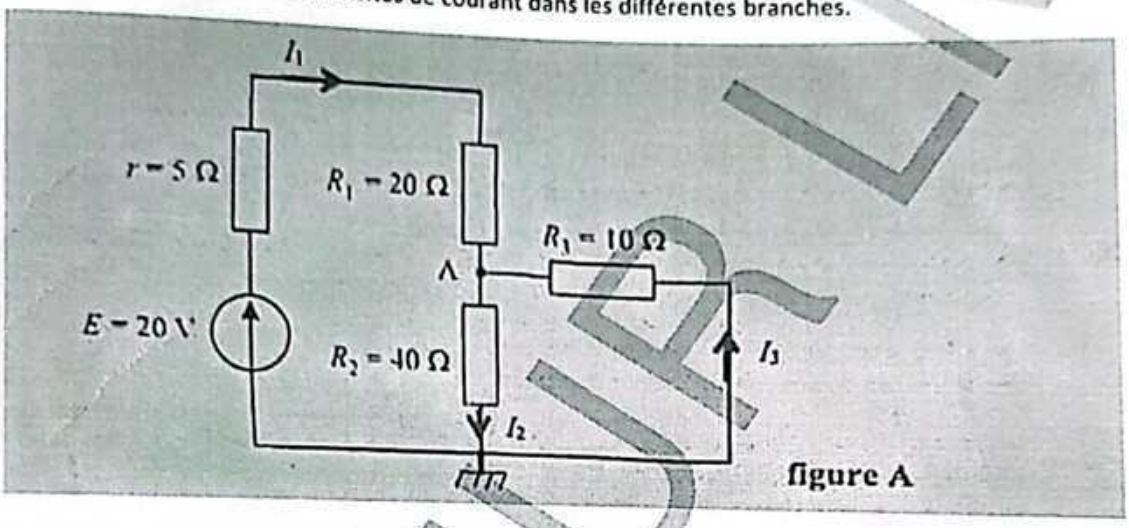


figure A

EXERCICE 2

1. Exprimer puis calculer l'intensité I du courant qui traverse R_3 de le figure B en utilisant le théorème de superposition.
   A.N : $E_1 = 10V, I_0 = 0.1A,\ R_1 = 10\Omega, R_2 = R_4 = 15\Omega,\ R_3 = 8\Omega, R_5 = 5\Omega.$

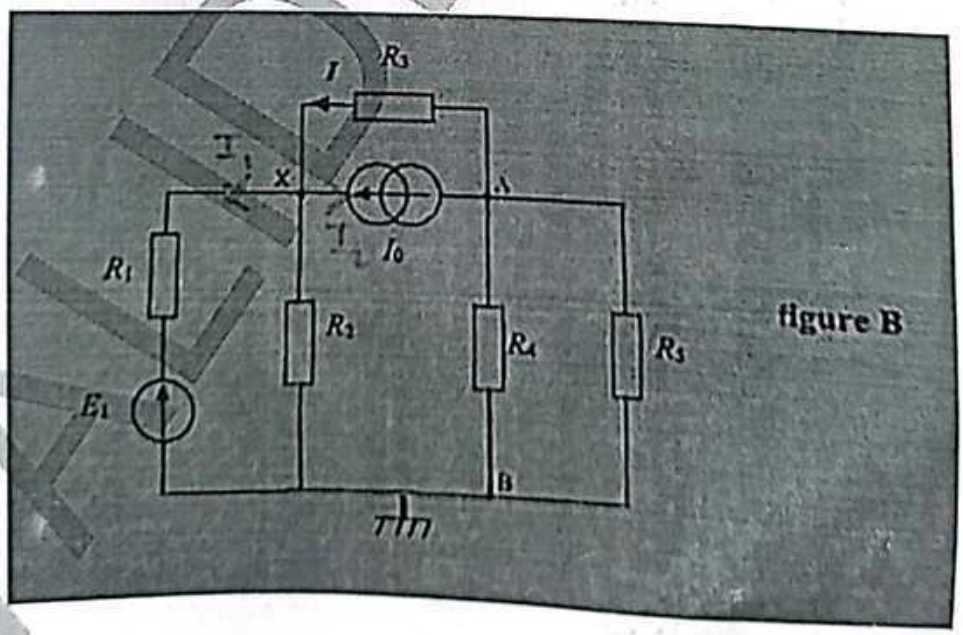


figure B

Scanné avec CamScanner

2020-2021

L1 MATH-INFORMATIQUE
UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

EXAMEN D'ÉLECTROMAGNETISME

Session 2

Durée : 2H

Il est rappelé aux étudiants que :

- Aucun document n'est autorisé
- Les Smartphones doivent rester éteints

ECUE 2 : ÉLECTROSTATIQUE (10 points)

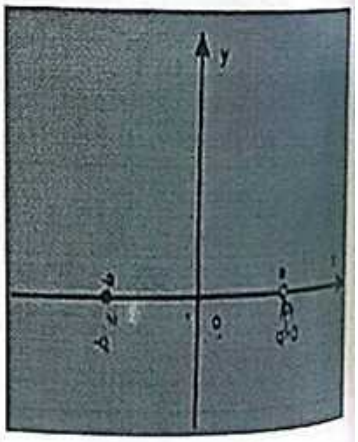
Exercice 1

Une spire de rayon a et d'axe (Ox) est chargée uniformément par une densité de charge linéique λ_0. Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}$ en un point M quelconque sur l'axe (Oz) en fonction de $\lambda_0, z, a, \epsilon_0$.

Exercice 2

On travaille en coordonnées cartésiennes d'origine O. On considère une charge $q > 0$ placée en P $(x = a, y = 0, z = 0)$ et une autre charge ponctuelle opposée $-q$ placée en N $(x = -a, y = 0, z = 0)$. On s'intéresse au champ en un point $M(x, y, z)$. Voir figure ci-dessous comme illustration.

1) En utilisant les symétries, que peut-on dire de la direction du champ (Montrer par un schéma) ?
   - En un point M $(x = 0, y, z)$
   - En un point M $(x, y = 0, z = 0)$
2) Déterminer l'expression du champ sur l'axe Ox. On distinguera trois cas $(x < -a\,; -a < x < a\,; x > a)$
3) Tracer E en fonction de x.
4) Déterminer l'expression du champ en un point M de l'axe Oy.
5) Tracer E en fonction de y.
6) Déterminer l'expression du potentiel V au point O.



VALIDEUR LMD

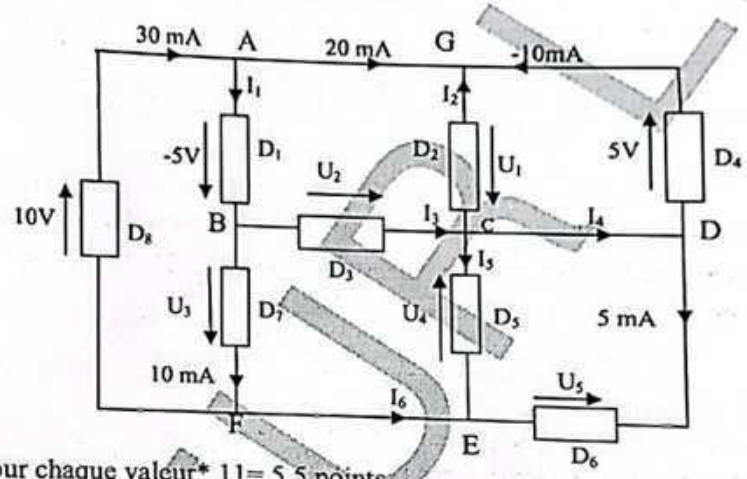
Scanné avec CamScanner

CORRECTION

Renforcement: ELECTROCINETIQUE (20 points)

I.. (13points)

question 1. Déterminer les courants et les tensions inconnues. *Les résultats seront présentés dans un tableau après calculs.*



Barême : 0,5point pour chaque valeur* 11= 5,5 points

En appliquant les lois de malles et des nœuds, on trouve en (V) pour U et en (mA) pour I :

$U_1 = -5$	$U_2 = 0$	$U_3 = -5$	$U_4 = 5$	$U_5 = 5$	
$I_1 = 10$	$I_2 = -10$	$I_3 = 0$	$I_4 = -5$	$I_5 = 15$	$I_6 = -20$

Questions 2. et 3) Puissance mise en jeu par chaque dipôle (D1 à D8) et nature des dipôles

$P_1 = U_{AB} * I_{AB} = [-(-5)] * I_1 = 5*10 = 50$ mW ; $P_1>0$ donc D_1 est un récepteur (0,5point*2 = 1point)

$P_2 = U_{GC} * I_{GC} = (-U_1) * (-I_2) = 50$ mW $P_2>0$ donc D_2 est un récepteur (0,5point*2 = 1point)

D_3 est un interrupteur ouvert car $I_3=0$ (0,5point)

$P_4 = U_{GD} * I_{GD} = 5*[-(-10)] = 50$ mW $P_4>0$ donc D_4 est un récepteur (0,5point*2 = 1point)

$P_5 = U_{CE} * I_{CE} = U_4 * I_5 = 5*15 = 75$ mW $P_5>0$ donc D_5 est un récepteur (0,5point*2 = 1point)

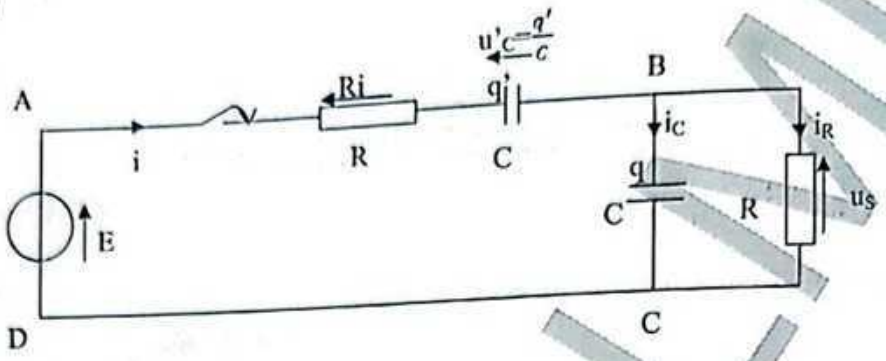
$P_6 = U_{ED} * I_{ED} = (-U_5) * (-5) = (-5) * (-5) = 25$mW $P_6>0$ donc D_6 est un récepteur (0,5point*2 = 1point)

$P_7 = U_{BF} * I_{BF} = (-U_3) * (10) = (5) * 10 = 50$ mW $P_7>0$ donc D_7 est un récepteur (0,5point*2 = 1point)

$P_8 = U_{AF} * I_{AF} = 10 * (-30) = -300$ mW $P_8<0$ donc D_8 est un générateur (0,5point*2 = 1point)

Scanné avec CamScanner

II. (7points)

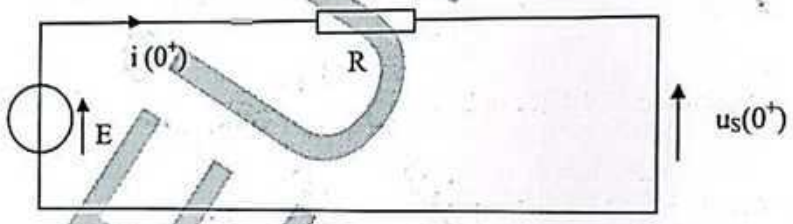


question1. *Conditions initiales*

1.1. Déterminer $u_s(0+)$ et $i(0+)$ correspondant à la tension u_s et l'intensité du courant i juste après la fermeture de l'interrupteur.

La continuité de la tension aux bornes des condensateurs permet de dire que leurs sont nulle à t=0 car ils étaient déchargés pour t<0. Ils sont donc remplacés par des fils conducteurs et la résistance montée en dérivation se trouve ainsi court-circuité. Le circuit est alors équivalent au circuit ci-dessous : (0,5point)

Circuit : (0,5point)



Donc : $u_s(0+) = 0$ (0,5point) et $i(0+) = \frac{E}{R}$ (0,5point)

Question 1.2. En déduire $\frac{du_s}{dt}(0^+)$

La loi des nœuds appliqué au circuit général pour $t \neq 0$ *permet d'écrire :* $i = i_C + i_R$

avec $i_C = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_s}{dt}$ *et* $i_R = \frac{u_s}{R}$, *on a alors :* $i = C\frac{du_s}{dt} + \frac{u_s}{R}$ *(*)*

comme à $t = 0^+$, $u_s(0+) = 0$ *et* $i(0+) = \frac{E}{R}$ *alors selon (*) à* $t = 0^+$:

$\frac{du_s}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC}$ (0,5point) *ou :* $\frac{du_s}{dt}(0^+) = \frac{E}{\tau}$ (0,5point)

Question 2. Détermination de $u_s(t)$

Question 2.1. Démonstration de : $\frac{d^2u_s}{dt^2} + \frac{3}{\tau}\frac{du_s}{dt} + \frac{1}{\tau^2}u_s = 0$

La maille ABCD permet d'avoir $E = Ri + us + \frac{q'}{C}$ (0,5point)

En dérivant, on a : $R\frac{di}{dt} + \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq'}{dt} = 0$ soit $R\frac{di}{dt} + \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$ car $\frac{dq'}{dt} = i$ (**)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFHB-UFRMI / Licence1

UE Electricité

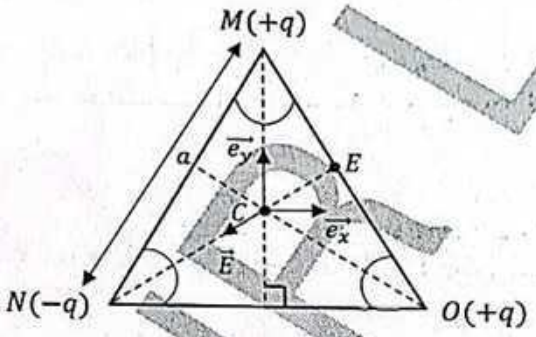
Année Académique

2017/2018

CORRECTION Electrostatistique – 2nd Session

Exercice 1

1) Représentation de $\vec{E}$ (voir figure).



2) Montrons que $r = OC = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Le triangle MNO étant équilatéral de centre de gravité C, on a :

$$Cos\,\alpha = \frac{OE}{OC} \Longrightarrow oc = \frac{OE}{Cos\,\alpha}$$

$$\Longrightarrow oc = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Longrightarrow oc = \frac{a}{\sqrt{3}} = r$$

3) Déterminons $\vec{E}$.

$$\vec{E}(C) = \vec{E}_M(C) + \vec{E}_N(C) + \vec{E}_O(C)$$

$$\vec{E}_M(C) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O} \times \frac{q}{MC^2}\vec{U}_{MC}$$

$$\vec{E}_M(C) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O} \times \frac{q}{MC^2}\vec{U}_{MC} \text{ avec } \vec{U}_{MC} = \overrightarrow{ey}$$

Ainsi $\boxed{\vec{E}_M(C) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O} \times \frac{q}{MC^2}\overrightarrow{ey}}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\vec{E}_N(C) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O} \times \frac{(-q)}{NC^2}\vec{U}_{NC} \text{ avec } \vec{U}_{NC} = cos\,\alpha\,\overrightarrow{ey} + \sin\alpha\,\overrightarrow{ex}$$

D'où : $\boxed{\vec{E}_N(C) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O} \times \frac{(-q)}{NC^2}[cos\,\alpha\,\overrightarrow{ey} + \sin\alpha\,\overrightarrow{ex}]}$

$$\vec{E}_O(C) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O} \times \frac{q}{OC^2}\vec{U}_{OC} \text{ avec } \vec{U}_{OC} = (\cos\alpha\,\overrightarrow{ey} - \sin\alpha\,\overrightarrow{ex})$$

Par conséquent, $\boxed{\vec{E}_O(C) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O} \times \frac{q}{OC^2}[\cos\alpha\,\overrightarrow{ey} - \sin\alpha\,\overrightarrow{ex}]}$

Conclusion :

$$\vec{E}(C) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_O MC^2}[-\overrightarrow{ey} - \cos\alpha\,\overrightarrow{ey} - \sin\alpha\,\overrightarrow{ex} + \cos\alpha\,\overrightarrow{ey} - \sin\alpha\,\overrightarrow{ex}]$$

or $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Ainsi, $\boxed{\vec{E}(C) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_O MC^2}[\sqrt{3}\,\overrightarrow{ex} + \overrightarrow{ey}]}$

❖ Composante de $\vec{E}$.

$$\vec{E}\begin{pmatrix}E_x\\E_y\end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{E} = \begin{vmatrix} E_x = -\frac{q\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_O MC^2} \\ E_y = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_O MC^2}\end{vmatrix}$$

❖ Les caractéristiques de $\vec{E}$.

- Point d'application : le centre de gravité C
- Direction : selon $\overline{CN}$
- Le sens : de C vers N
- La norme : $E = \begin{vmatrix} E_x = \frac{-q\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_O MC^2} \\ E_y = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_O MC^2}\end{vmatrix}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

4) Expression du potentiel

$$V(C) = V_O(C) + V_N(C) + V_M(C)$$

$$V_O(C) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{OC}$$

$$V_N(C) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{(-q)}{NC}$$

$$V_M(C) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{MC} \text{ avec } OC = MC = NC = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{V(C) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 OC} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

CORRECTION D'ELECTROCINETIQUE 2018-2019

EXERCICE 2

(1) (Voir schéma 1)

(2) a- Nombre de nœuds : N = 2 ;b-Nombre de branche : B = 3 ;c-Nombre de mailles indépendantes M = B – (N – 1)=3-(2-1) = 2

(3) a-Système d'équation avec pour variables I_1 et I_2

- Loi des nœuds

Nœud A : $I = I_1 + I_2$, Nœud B : $I = I_1 + I_2$

- Loi des mailles

Maille ABCDA :

$$E - R.I - R.I_2 = 0 \Rightarrow R.I_1 + 2R.I_2 = E \quad (1)$$

Maille AEFBA :

$$-E_0 + 2I_2 - 3R.I_1 = 0 \Rightarrow -3R.I_1 + R.I_2 = E_0 \quad (2)$$

(1)et (2) nous donne : $\begin{cases} R.I_1 + 2R.I_2 = E \\ -3R.I_1 + R.I_2 = E_0 \end{cases}$

(3) b- Equation matricielle $\begin{pmatrix} R & 2R \\ -3R & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ E_0 \end{pmatrix}$, $\Delta = 7R^2$ (le déterminant)

(4) Calculons I_1 , I_2 et I par la méthode de cramer : $I_1 = \frac{\begin{vmatrix} E & 2R \\ E_0 & R \end{vmatrix}}{7R^2} = \frac{E-2E_0}{7R^2}$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R & E \\ -3R & E_0 \end{vmatrix}}{7R^2} = \frac{E_0+3E}{7R^2}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{4E - E_0}{7R^2}$$

(5) Calcul de I_1 , I_2 et I par la méthode de courant fictif :

$\begin{pmatrix} 2R & -R \\ -R & 4R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ -E_0 \end{pmatrix}$, $\Delta = 7R^2$ (le déterminant)

$$J_1 = \frac{\begin{vmatrix} E & -R \\ -E_0 & 4R \end{vmatrix}}{7R^2} \; , J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2R & E \\ -R & -E_0 \end{vmatrix}}{7R^2}$$

On trouve : $J_1 = I \; et \; J_2 = I_1$

(6) a- Thévenin

- **Déterminons R_{Th} (schéma 2)**

$$R_{Th} = \frac{R.R}{2R} + 2R = \frac{5R}{2}$$

Calculons E_{Th}

Transformons la figure : **(Schéma 3)**

D'après la loi des nœuds : $I = I_1 + I_2$, Or $I_1 = 0$ $Donc$ $I = I_2$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Loi des mailles

$$\begin{cases} E - R.I - R.I_2 = 0 & (1) \\ -E_0 + R.I_2 - E_{Th} = 0 & (2) \end{cases},$$

(2)$\Rightarrow E_{Th} = R.I_2 - E_0$;D'où $E_{Th} = \frac{E}{2} - E_0$

(6) b- Appliquons la loi de Pouillet (Voir schéma 3)

D'après la loi de Pouillet on a :

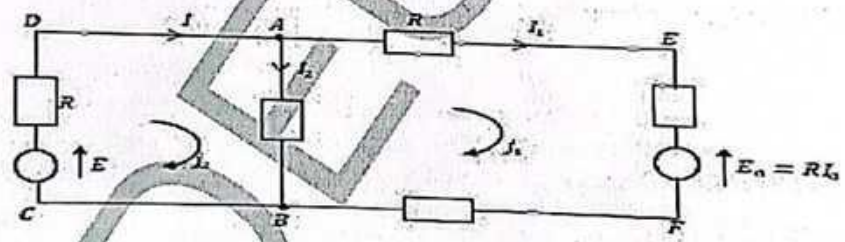
$$I_1 = \frac{\sum E_i}{\sum R_i} \quad ; \; I_1 = \frac{E - 2E_0}{7R}$$

REMARQUE : Application du théorème de Thevenin

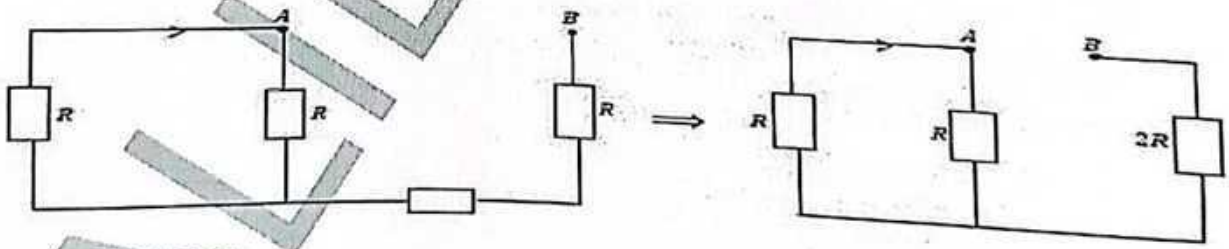
- R_{Th}
- *Debrncher toujours la charge*
- Déconnecter totalement le générateur de courant
- E_{Th}
- *Debrancher la charge*
- Transformer les générateurs de courant en générateur de tension.

SCHEMA 1

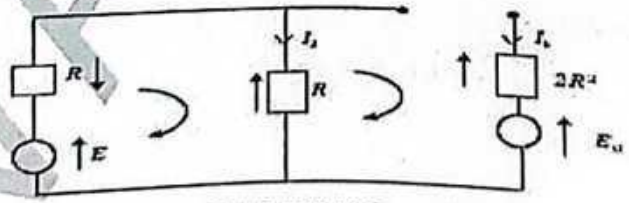
I



SCHEMA 2



SCHEMA 3



VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

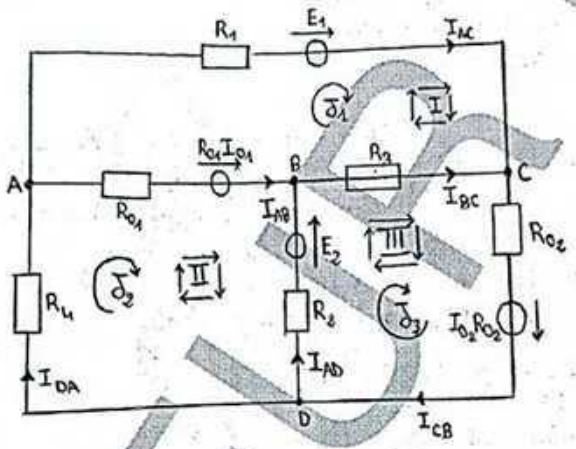
Maths-Info 2020-2021

Université FHB

CORRECTION ECUE 1 : ELECTROSTATIQUE

SESSION 1

1. Transformons les générateurs N_1 et N_2 en générateur de tension réelle.



2. ⋆ Qu'est-ce qu'une maille indépendante ?
Une maille indépendante comporte au moins une branche qui est non incluse dans les autres mailles.
⋆ Combien ce circuit en comporte ?
On a : $m = B - (N - 1)$
$= 6 - (4 - 1)$
$m = 3$ mailles indépendantes
B : nombre de branche
N : nombre de noeuds

3. Relation de couplage
- $I_{AC} = J_1$
- $I_{CD} = J_3$
- $I_{DA} = J_2$
- $I_{BC} = J_3 - J_1$
- $I_{AB} = J_2 - J_1$
- $I_{DB} = J_3 - J_2$

4. Ecrivons l'équation matricielle

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum E_I \\ \sum E_{II} \\ \sum E_{III} \end{pmatrix}$ Avec R_{ii} :la somme algébrique des résistances de la maille i affectée d'un signe +

R_{ij}:la somme algébrique des résistances communes à la maille i et la maille j affectée d'un signe −

On a: $R_{11} = R_{0_1} + R_1 + R_3 = 10 + 2 + 3 = 15\Omega$

$R_{22} = R_2 + R_4 + R_{0_1} = 1 + 2 + 10 = 13\Omega$

$R_{33} = R_2 + R_3 + R_{0_2} = 1 + 3 + 10 = 13\Omega$

$R_{12} = R_{21} = -R_{0_1} = -10\Omega$

$R_{13} = R_{31} = -R_3 = -3\Omega$

$R_{23} = R_{32} = -R_2 = -1\Omega$

On obtient donc : $\begin{pmatrix} 15 & -10 & -3 \\ -10 & 13 & -1 \\ -3 & -1 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 - R_{0_1} I_{0_1} \\ R_{0_1} I_{0_1} - E_2 \\ E_2 + R_{0_2} I_{0_2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 15 & -10 & -3 \\ -10 & 13 & -1 \\ -3 & -1 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 23 \end{pmatrix}$$

- Résolution par la méthode de Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 15 & -10 & -3 \\ -10 & 13 & -1 \\ -3 & -1 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta J_1 = \begin{vmatrix} 16 & -10 & -3 \\ -16 & 13 & -1 \\ 23 & -1 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta J_2 = \begin{vmatrix} 15 & 16 & -3 \\ -10 & -16 & -1 \\ -3 & 23 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta J_3 = \begin{vmatrix} 15 & -10 & 16 \\ -10 & 13 & -16 \\ -3 & -1 & 23 \end{vmatrix} =$$

$$J_1 = \frac{\Delta J_1}{\Delta} = 1,62\ A$$

$$J_2 = \frac{\Delta J_2}{\Delta} =$$

$$J_3 = \frac{\Delta J_3}{\Delta} = 2,156\ A$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

5. Déduisons les intensités des courants
D'après la relation de couplage, on a:
$I_{AC} = J_1 =$
$I_{CD} = J_3 =$
$I_{DA} = J_2 =$
$I_{BC} = J_3 - J_1 =$
$I_{AB} = J_2 - J_1 =$
$I_{DB} = J_3 - J_2 =$

6. Quel est le regime de fonctionnement des générateurs T_1, T_2, N_1, N_2

T_1, T_2, N_1 et N_2 sont en régime générateur car les intensités et les tensions sont dirigées dans le même sens.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

ECUE 2 : Electrostatique (Session 1) 2020-2021

I. $\sigma(\theta) = \sigma_0 sin\theta$ avec $\sigma_0 = cte$.
Donnons l'expression d'une surface élémentaire ds sur la sphère.
$ds = R^2.sin\theta.d\theta.d\varphi$; $dq = \sigma(0).ds$
L'expression de la charge totale Q de la sphère .

Soit Q la charge totale de la sphère.

$Q = \int\int_s \sigma ds$ avec $\sigma(\theta) = \sigma_0 sin\theta$.

$$Q = \int\int_s \sigma_0 sin\theta.ds$$

$$Q = \int\int_s \sigma_0 sin\theta.R^2.sin\theta.d\theta.d\varphi$$

$$Q = \sigma_0 R^2 \int_0^{\pi} sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Car $\theta \in [0;\pi]$ et $\varphi \in [0;2\pi]$

$$Q = \sigma_0 R^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$Q = \frac{1}{2}\sigma_0 R^2 \left[\int_0^{\pi} d\theta - \int_0^{\pi} (\cos(2\theta))\, d\theta\right] \int_0^{2\pi} d\varphi$$

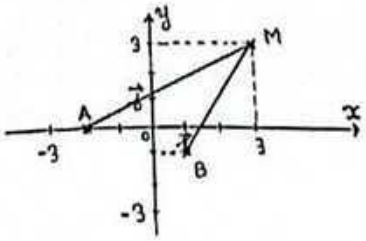
$$Q = \frac{1}{2}\sigma_0 R^2 \left[[\theta]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi}\right].[\varphi]_0^{2\pi}$$

$$Q = \frac{1}{2}\sigma_0 R^2.\pi.2\pi$$

$$\boxed{Q = \sigma_0 R^2.\pi^2}$$

D'où l'expression de la charge totale Q.

III. $A(-2,0)$: $-3Q$ et $B(1,-1)$: $+Q$



VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

18/11/2021

Déterminons l'ensemble des points M dans le plan (xOy) pour lequel $V = 0$.

$V(M) = V(A) + V(B)$. D'après le théorème de superposition.

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times -\frac{3Q}{4M} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{Q}{BM}$$

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{3}{AM} + \frac{1}{BM}\right)$$

Avec

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-0 \end{pmatrix} \Rightarrow AM = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} \Rightarrow BM = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{3}{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}}\right)$$

On sait que $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \neq 0$ alors pour $V = 0$

$$\Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

Après les calculs, on obtient :

$$\Rightarrow \left(x - \frac{11}{8}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{8}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{10}}{8}\right)^2$$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre $(\frac{11}{8}; -\frac{9}{8})$ et de rayon $\frac{3\sqrt{10}}{8}$.

IV.

a) Direction du champ $\vec{E}(M)$

*Système de coordonnées.

Le repère de cylindrique (r, θ, z) est mieux adapté à notre étude, donc chaque point aura pour coordonnée $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$. Par raison de symétrie le champ $\vec{E}$ est porté par le vecteur $\overrightarrow{e_r}$. Par raison d'invariance la norme du champ $\vec{E}$ dépend de la variable r.

Donc $\vec{E}(M) = E_r\overrightarrow{e_r}$

VALIDEUR LMD

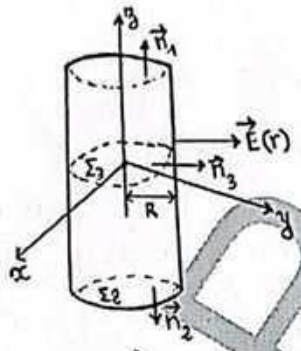
Scanné avec CamScanner

b)

$$\phi = \oiint \vec{E}(r)\overrightarrow{ds} = \oiint \vec{E}(r)\vec{n}.ds = \frac{\Sigma Q_{int}}{\epsilon_0}$$

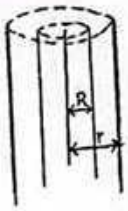
$$\phi = \oiint \vec{E}(r)\overrightarrow{n_1}ds + \oiint \vec{E}(r)\overrightarrow{n_2}ds + \oiint \vec{E}(r)\overrightarrow{n_z}ds$$

$$\phi = \oiint E(r)\overrightarrow{n_z}ds$$



$$\phi = E.ds = E \times 2\pi r l_2$$

1er cas $(r > R)$



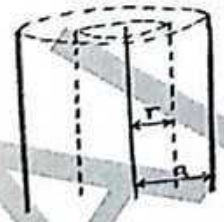
$$\Sigma Q_{int} = \rho_0 V = \rho_0.\pi R^2 h$$

$$\Rightarrow E \times 2\pi r h = \frac{\rho_0.\pi R^2 h}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho_0.R^2}{2r\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho_0.R^2}{2r\epsilon_0}\overrightarrow{e_r}$$

2ème cas $(r < R)$



$$\Sigma Q_{int} = \rho_0.V = \rho_0.\pi r^2 h$$

$$\Rightarrow E \times 2\pi r h = \frac{\rho_0.\pi r^2 h}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho_0.r}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho_0.r}{2\epsilon_0}\overrightarrow{e_r}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

c) $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,\vec{V} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e_r}$

$V = -\int E.dr$

1er cas $(r > R)$

$$V = -\int \frac{\rho_0.R^2}{2r\epsilon_0}.dr = -\frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\ln(r) + k_1; k_1 \in \mathbb{R}$$

2ème cas $(r < R)$

$$V = -\int \frac{\rho_0.r}{2\epsilon_0}.dr = -\frac{\rho_0.r^2}{4\epsilon_0} + k_2; k_2 \in \mathbb{R}$$

On prend un point donné $r_0 (r_0 > R)$, le potentiel $V(r_0) = 0$

$$V(r_0) = -\frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\ln(r_0) + k_1 = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\ln(r_0)$$

Donc $V(r > R) = -\frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\ln(r) + \frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\ln(r_0) = \frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$

Comme $V(r)$ est une fonction continue au point $r = R$, par conséquent

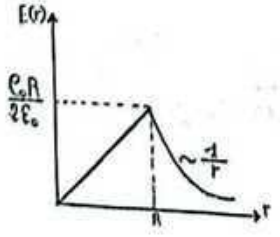
$$\lim_{r\to R^-} V(r) = \lim_{r\to R^+} V(r) \Rightarrow -\frac{\rho_0.R^2}{4\epsilon_0} + k_2 = \frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{r_0}{R}\right)\right)$$

Finalement

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right) & r > R \\ -\frac{\rho_0.r^2}{4\epsilon_0} + \frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{r_0}{R}\right)\right) & r < R \end{cases}$$

4) Traçons les variations de E.



VALIDEUR LMD

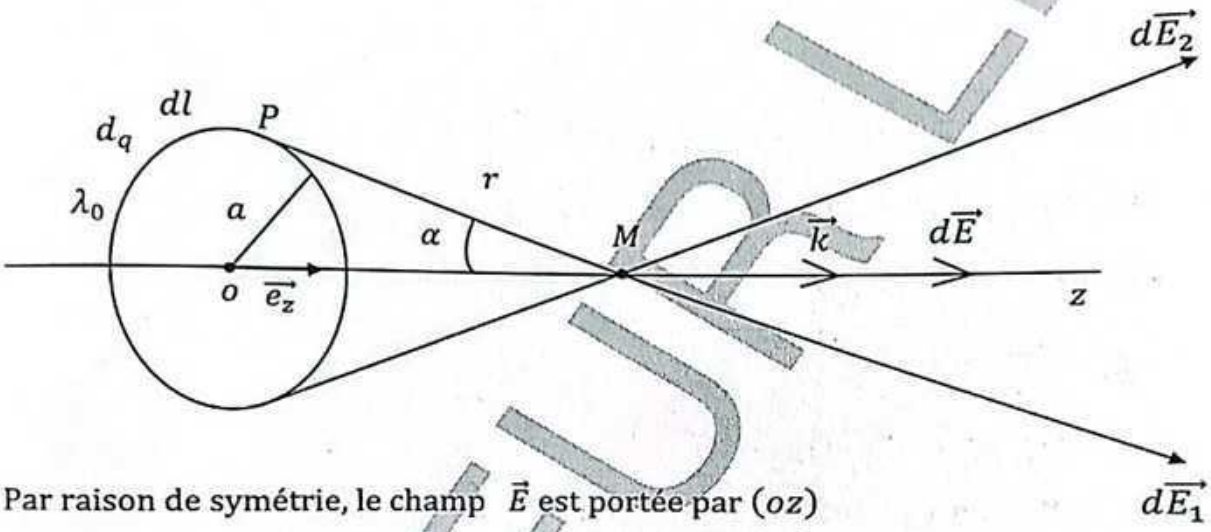
Scanné avec CamScanner

CORRECTION EXAMEN ELECTRICITE SESSION 2 2021
ECUE 1 : ELECTROSTATIQUE

EXERCICE 1

Déterminons l'expression du champ électrique $\vec{E}$ en un point quelconque sur l'axe (oz) en fonction de $\lambda_0, z, \alpha, \varepsilon_0$

Figure 1



Par raison de symétrie, le champ $\vec{E}$ est portée par (oz)

$$\Longrightarrow \vec{E}(M) = E_z\,\vec{e_z} = E_z\vec{k}$$

$$dE = dE_1.\cos\alpha = dE_2.\cos\alpha$$

$$dq_1 = dq_2 = dq = \lambda_0\, dl$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_1}{\|\overrightarrow{PM}\|^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0\, dl}{(a^2+z^2)} \times \frac{z}{(a^2+z^2)^{1/2}}$$

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda_0\, dl\, z}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E = \int dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda_0\, dl\, z}{(a^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi a} dl$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

d'où

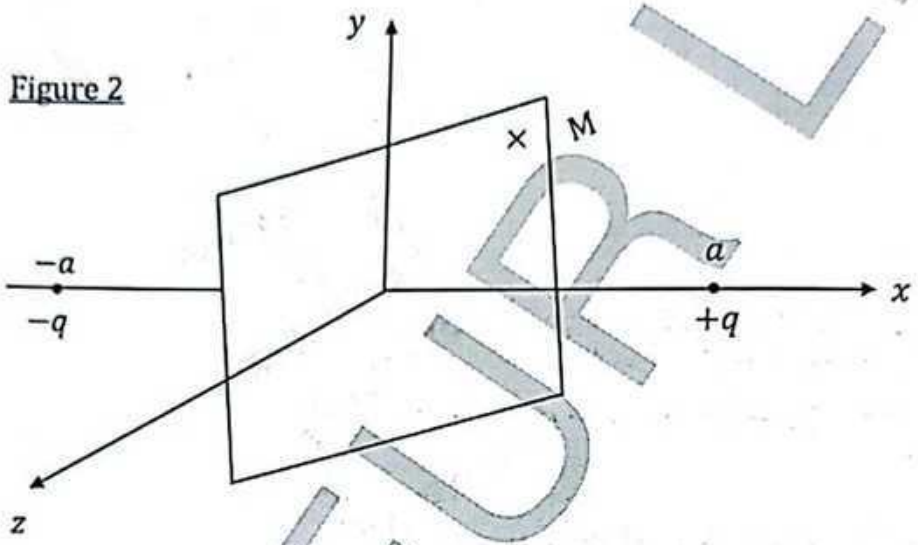
$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0\, a\, z}{2\,\varepsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}\,.\vec{k}$$

EXERCICE 2

1) En utilisant les symétries, que peut-on dire de la direction du champ

* En un point $M(x = 0, y, z)$

Figure 2



$M \in$ plan oyz plan d'antisymétrie donc $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire à ce plan

$\vec{E}(M) = E_x\,\overrightarrow{u_x}$

- En un point $M(x, y = 0, z = 0)$

M est sur l'axe Ox (voir figure)

$M \in$ plan Oxz plan de symétrie

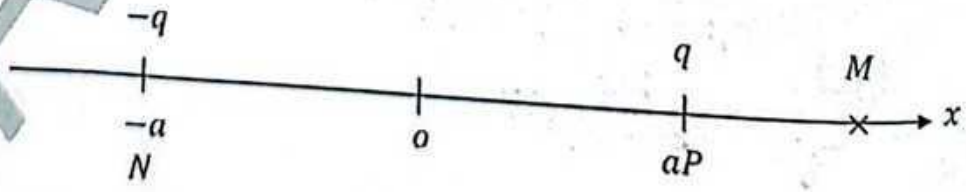
$M \in$ plan Oxy plan de symétrie

$\vec{E}(M) = E_x\,\overrightarrow{u_x}$

2) Déterminons l'expression du champ sur l'axe Ox

On écrire $\vec{E} = E_x\,\overrightarrow{u_x}$

Figure 3



VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Par le principe de superposition

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_N(M) + \vec{E}_P(M)$$

$$= \frac{-q\,\overrightarrow{NM}}{4\pi\varepsilon_0\left\|\overrightarrow{NM}\right\|^3} + \frac{q\,\overrightarrow{PM}}{4\pi\varepsilon_0\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} - \frac{\overrightarrow{NM}}{\left\|\overrightarrow{NM}\right\|^3}\right)$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x-a}{|x-a|^3} - \frac{x+a}{|x+a|^3}\right)\overrightarrow{u_x}$$

<u>1er Cas</u>

$x < -a$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-4ax}{(x^2-a^2)^2}\right)\overrightarrow{u_x} \qquad Car$$

$|x+a| = -(x+a)$ et $|x-a| = -(x-a)$

<u>2ème Cas</u>

$-a < x < a \Longrightarrow |x-a| = -(x-a)$

$|x+a| = x+a$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2}\right)\overrightarrow{u_x}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{-2(x^2-a^2)}{(x^2-a^2)^2}\overrightarrow{u_x}$$

<u>3ème Cas</u>

$x > a \Longrightarrow |x-a| = x-a$

$|x+a| = x+a$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x-a}{(x-a)^3} - \frac{x+a}{(x+a)^3}\right)\overrightarrow{u_x}$$

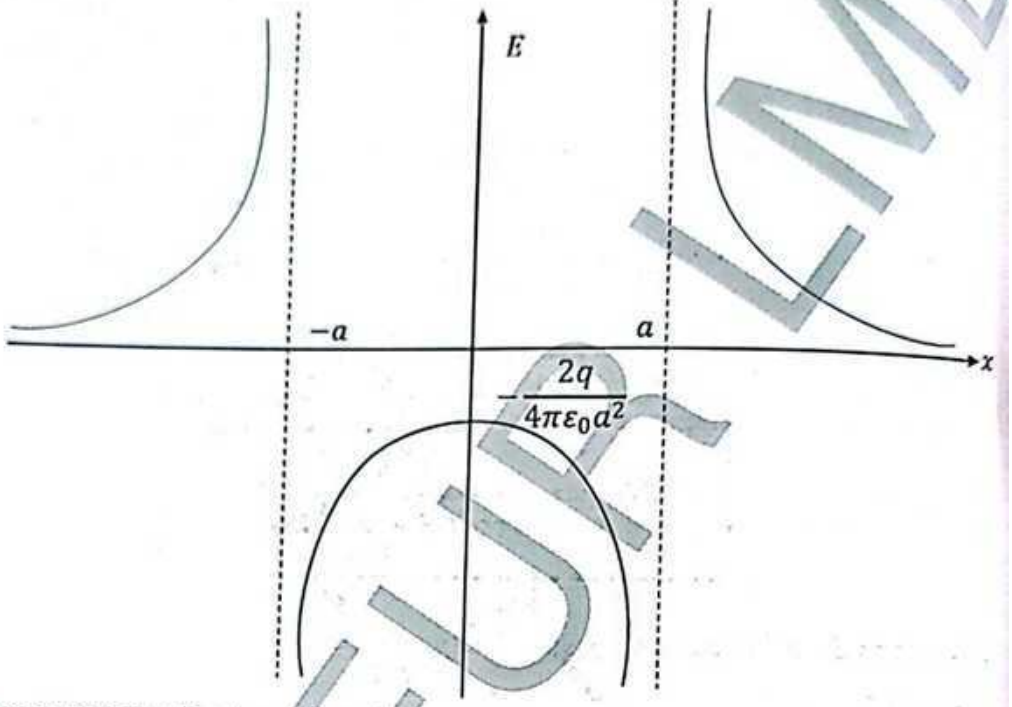
$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{4ax}{(x^2-a^2)^2}\overrightarrow{u_x}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

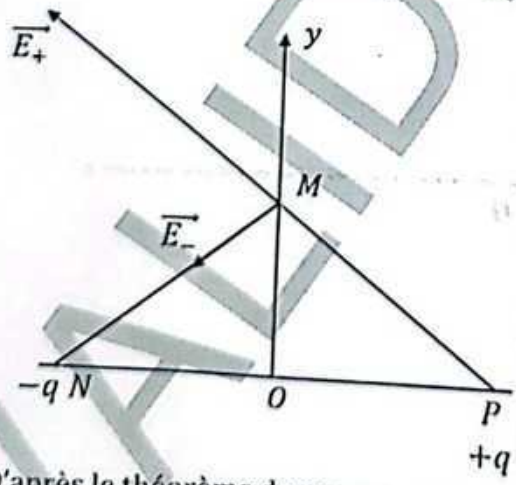
3) Traçons E en fonction de x

Figure 4



On remarque que E est une fonction paire de x.

4) Déterminons l'expression du champ en un de Oy



$$\overrightarrow{PM} = \begin{vmatrix} -a \\ y \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{NM} \begin{vmatrix} a \\ y \\ 0 \end{vmatrix}$$

D'après le théorème de superposition

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\vec{E}(M) = \overrightarrow{E_+} + \overrightarrow{E_-}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\overrightarrow{NM}}{\left\|\overrightarrow{NM}\right\|^3}$$

On a :

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{-a}{(a^2+y^2)^{3/2}} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{a}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

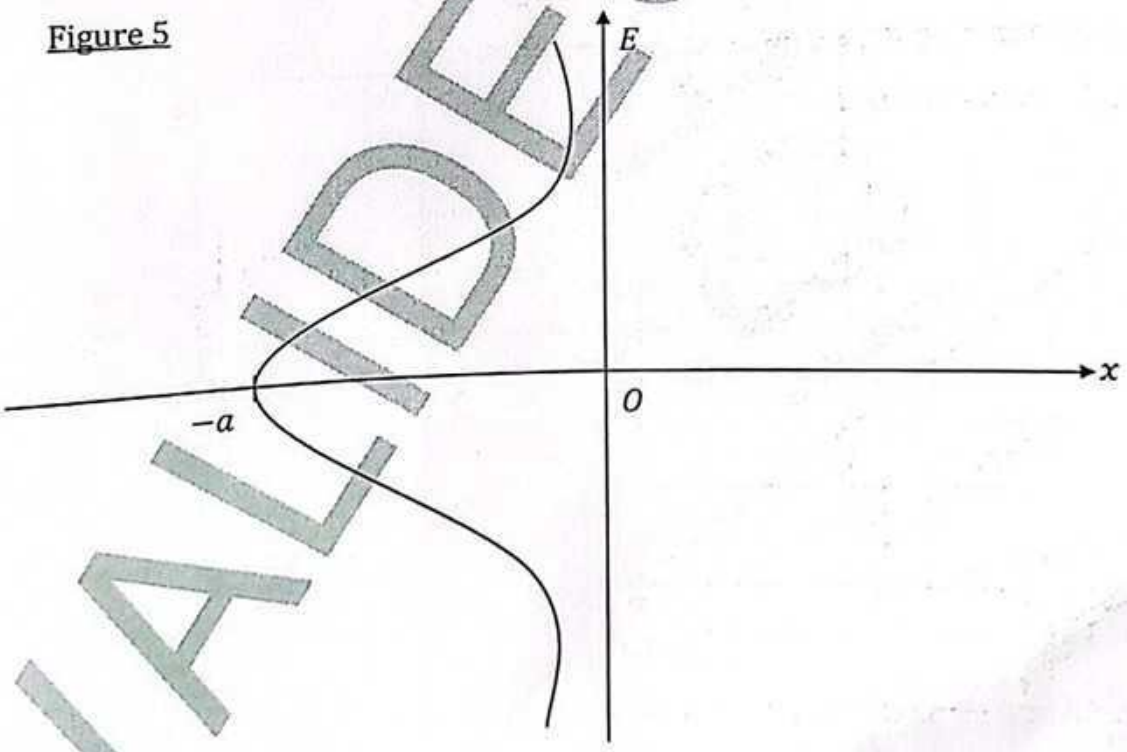
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{-2a}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{-2a\,q}{4\pi\varepsilon_0\,(a^2+y^2)^{3/2}}\overrightarrow{u_x}}$$

5) Traçons E en fonction de y

Figure 5



VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

6) Déterminons V au point O

$$V(O) = V(N) + V(\varphi)$$

$$= \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 NO} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PO}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{NO} + \frac{1}{PO}\right), \quad NO = PO = a$$

$$V(O) = 0$$

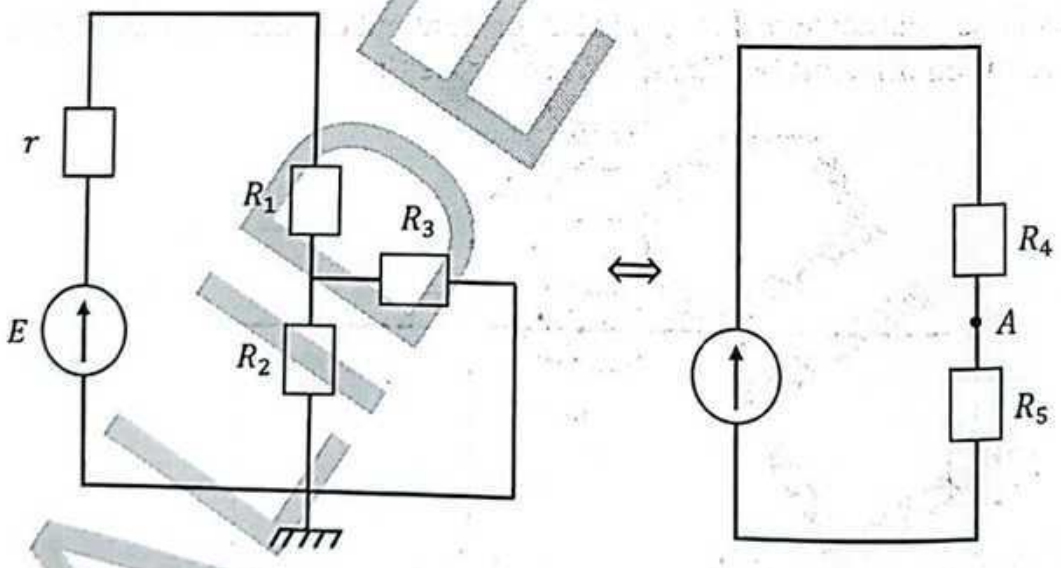
ECUE 2 : ELECTROCINETIQUE

EXERCICE 1

1) Déterminer le potentiel au point A en utilisant le pont diviseur de tension

Nous ne pouvons pas directement appliquer le principe du diviseur de tension au point A, compte tenu du fait qu'une dérivation est issue de ce point et que des courants différents circulent donc R_2 et R_3. En revanche, transformons légèrement la figure A comme indiqué ci-dessous

Figure A



$R_4 = r + R_1$ (association en série)

$$\frac{1}{R_5} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_3 + R_2}{R_2 . R_3}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$R_5 = \frac{R_2.R_3}{R_3 + R_2}$$

On peut appliquer le principe du diviseur de tension :

$$V_A = E \times \frac{R_5}{R_4 + R_5} \text{ ; AN: } V_A = 4{,}85\ V$$

2) Déduisons-en les intensités de courant dans les différentes branches

Le courant I_1 s'obtient en considérant qu'aux bornes de l'association série ($R_4 = r + R_1$) règne une différence de potentiel égale à $E - V_A$.

$$I_1 = \frac{E - V_A}{r + R_1} = \frac{20 - 4{,}85}{25} = 606\ mA$$

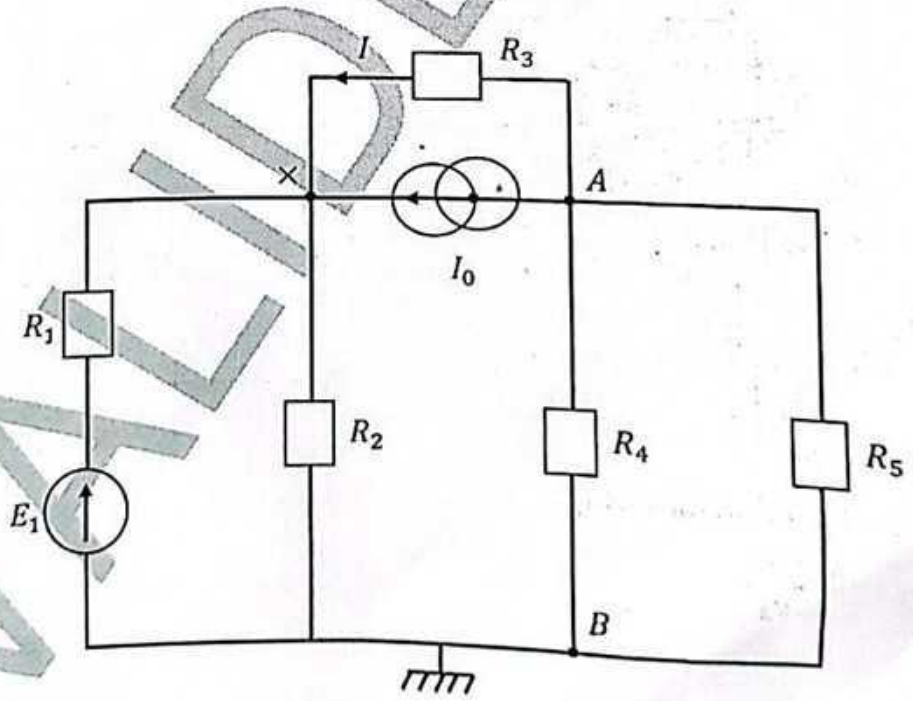
En appliquant la loi d'Ohm aux résistances R_2 et R_3, on obtient immédiatement :

$$I_2 = \frac{V_A}{R_2} = \frac{4{,}85}{40} = 121\ mA$$

$$I_3 = \frac{V_A}{R_3} = \frac{4{,}85}{10} = 485\ mA$$

EXERCICE

1) Exprimons puis calculons l'intensité du courant qui traverse R_3 de la figure B ci-dessous en utilisant le théorème de superposition



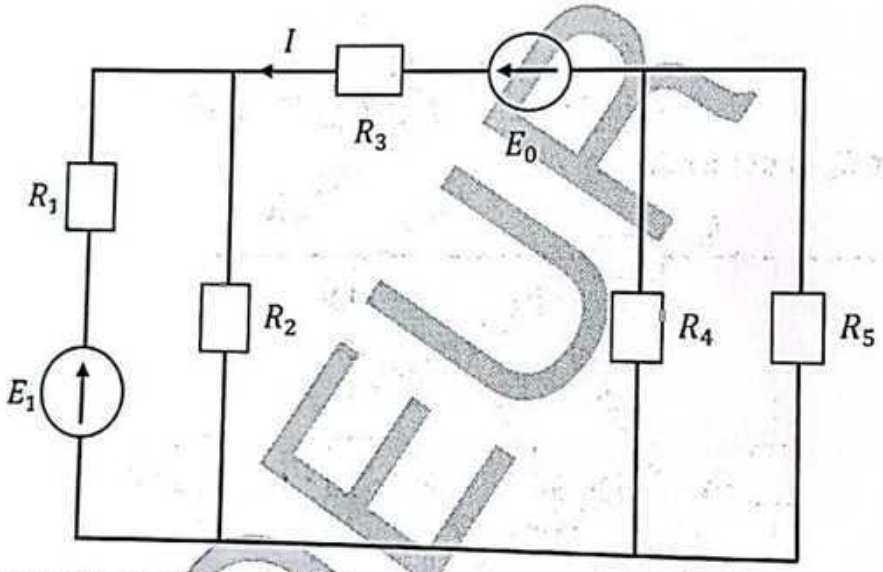
VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

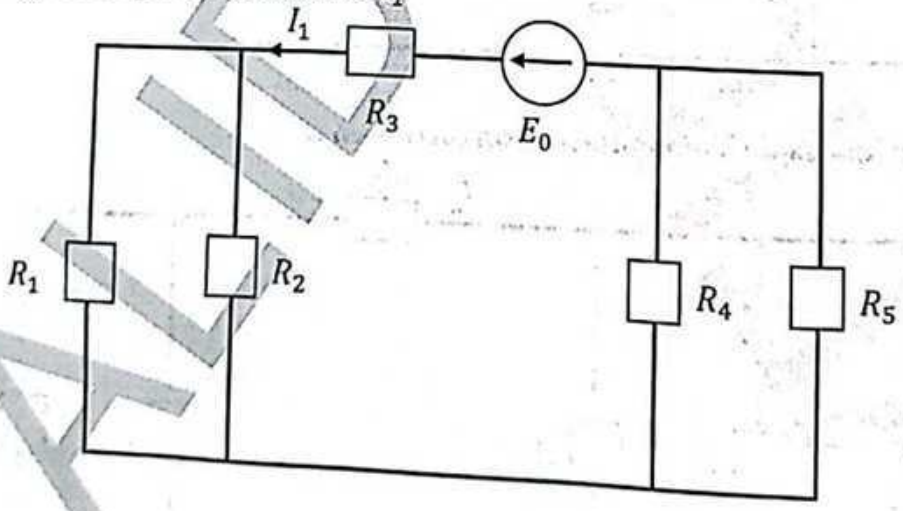
Figure *B*

Dans ce schéma nous pouvons considérer que la résistance R_3 est alimenté par le dipôle AX. Nous allons rechercher le générateur de Thévenin équivalent à ce dipôle AX (autrement dit du circuit démuni de sa résistance R_3), ce qui permettra de répondre facilement à la question. Dans ce dipôle AX, le générateur de courant I_0 placé en parallèle avec la résistance R_3 est équivalent à un générateur parfait de tension E_0 en série avec cette même résistance R_3. Avec $E_0 = R_3\, I_0 = 0{,}8\ V$

Après cette transformation, le dipôle AX se présente comme indiqué sur la figure

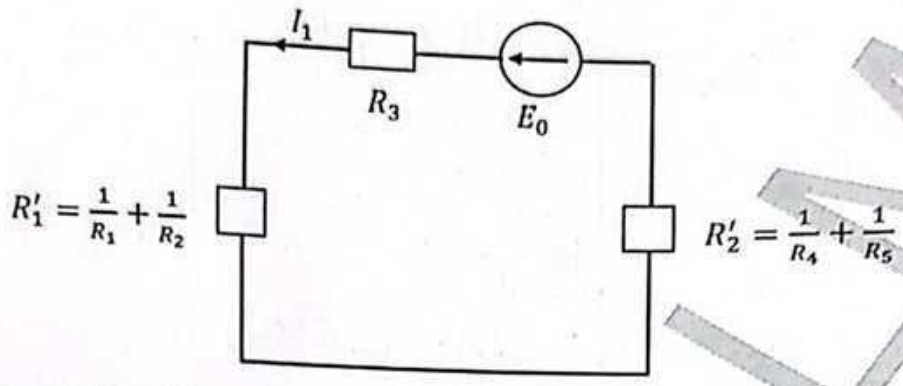


- Eteignons E_1 et déterminons I_1



VALIDEUR

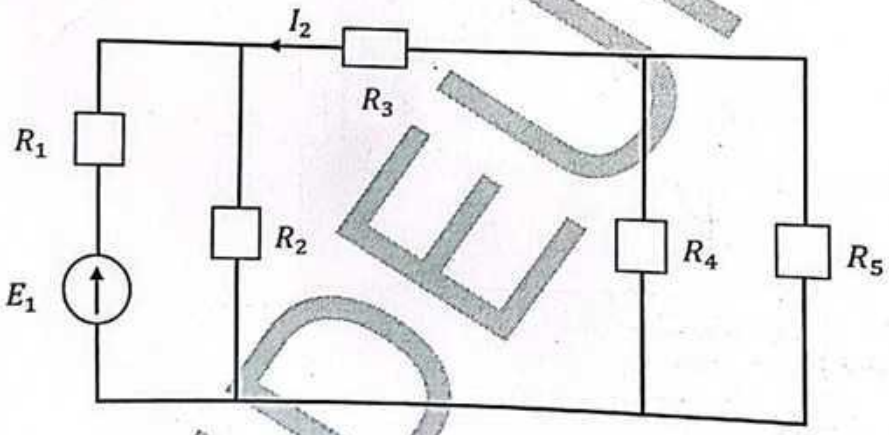
Scanné avec CamScanner



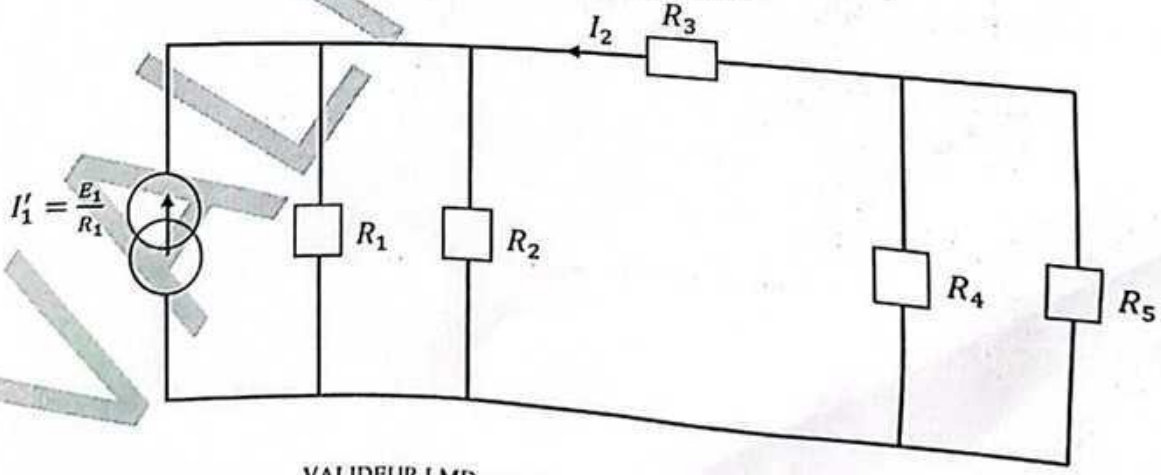
Appliquons Pouillet :

$$I_1 = \frac{\sum E + e}{\sum R + r} \Rightarrow I_1 = \frac{E_0}{R_1' + R_3 + R_2'}$$

- Eliminons E_0 et déterminons I_2

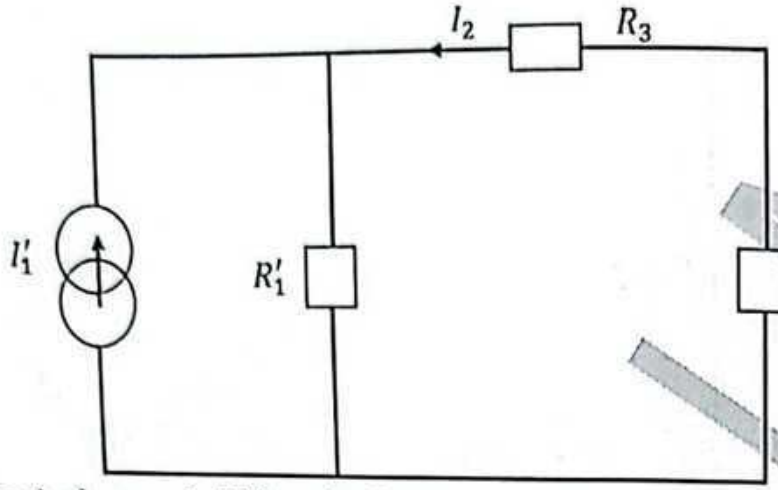


Par les équivalences de Thévenin-Norton on obtient :

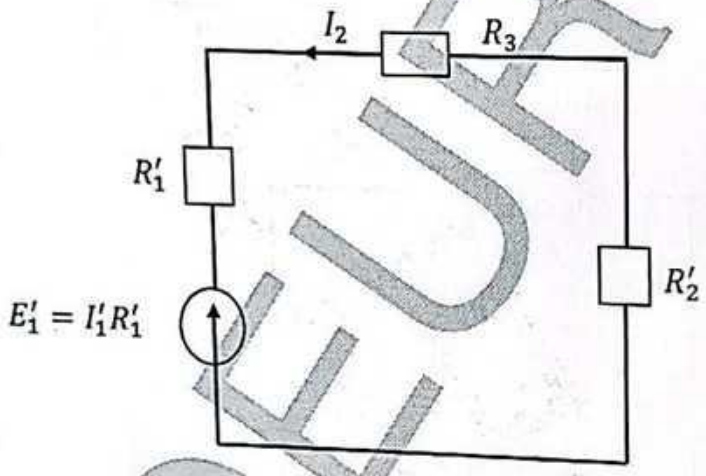


VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner



Par les équivalences de Thévenin-Norton on obtient :



Appliquons Pouillet :

$$I_2 = \frac{\sum E + e}{\sum R + r} \Rightarrow I_1 = \frac{-E_1'}{R_1' + R_3 + R_2'}$$

Finalement par le théorème de superposition

$$I = I_1 + I_2$$

$$I = \frac{E_0 - E_1'}{R_1' + R_3 + R_2'}$$

Avec $R_1' = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_1' = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \times R_2}$

$R_1' = \frac{15+10}{15 \cdot 10} = 0{,}16\ \Omega$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$R'_2 = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \Rightarrow R'_1 = \frac{R_5+R_4}{R_4 \times R_5}$

$R'_2 = \frac{5+15}{5 \cdot 15} = 0{,}16\ \Omega$

Et $I'_1 = \frac{E_1}{R_1} \Rightarrow I'_1 = \frac{10}{10} = 1A$

$E'_1 = I'_1 \times R'_1 = \frac{10}{10} = 1 \times 0{,}16$

$E'_1 = 0{,}16\ V$

d'où $I = \frac{0{,}8-0{,}16}{0{,}16+8+0{,}26} = 0{,}076\ A$ donc, $I = 76\ Am$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Développements limités usuels en 0

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O\left(x^{2n+2}\right)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \cdots + (-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{Argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1\times 3\times\cdots(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{Argsh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + O\left(x^9\right)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + O\left(x^9\right)$$

Scanné avec CamScanner

RÉSUME OPTIQUE

Les bases de l'optique géométrique – Réflexion et réfraction

Les constructions de l'optique géométrique sont basées sur le tracé de rayons lumineux, indépendamment les uns des autres. On les construit en utilisant les lois de Snell-Descartes.
• Dans un milieu homogène et isotrope, la lumière se propage en ligne droite ; les rayons lumineux sont des droites.
• Dans un milieu d'indice variable, le rayon lumineux se courbe et tourne sa concavité vers les zones d'indice croissant (sens du gradient d'indice).

Lois de Snell-Descartes

• À l'interface de deux milieux d'indices optiques différents (dioptre), un rayon lumineux donne en général naissance à un rayon réfléchi et à un rayon transmis (réfracté), situés dans le plan d'incidence défini par le rayon incident et la normale locale au dioptre.

• ***Réflexion***

Le rayon réfléchi est symétrique au rayon incident par rapport à la normale à l'interface : $i'_1 = i_1$

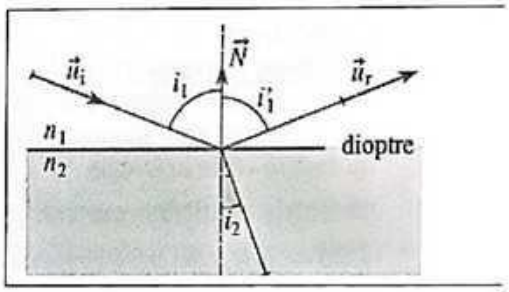
• ***Réfraction***

L'angle de réfraction i_2 est lié à l'angle d'incidence i_1 par : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

Si $n_1 < n_2$, le rayon réfracté existe toujours. Il s'approche de la normale.

Si $n_1 > n_2$, il y a réflexion totale lorsque l'angle D'incidence i_1 est plus grand que l'angle de réfraction Limite i_L , tel que : $\sin i_l = \frac{n_2}{n_1}$

Figure réalisée avec $n_1 < n_2$.



Cette propriété est utilisée dans les fibres optiques, les Prismes à réflexion totale…
Si le rayon réfracté existe, il s'écarte de la normale.
• Les lois de Descartes obéissent au principe de retour inverse de la lumière : tout trajet suivi par la lumière dans un sens peut l'être dans le sens opposé.

Conseils et pièges à éviter

• Faire le plus souvent des schémas clairs et relativement précis.
• Attention à la définition du plan d'incidence

Miroirs et lentilles

Constructions graphiques

Les conditions de Gauss assurant stigmatisme et aplanétisme approchés, une construction d'image à l'aide de deux traits lumineux permet une étude rapide des systèmes centrés.
Il est utile de mettre à profit les propriétés très simples de quelques points remarquables du système optique.
Les représentations simplifiées des miroirs et dioptres sphériques par leurs plans tangents sur L'axe optique sont effectuées sur des schémas ou les dimensions transverses sont dilatées.
Sur les schémas, les axes sont orientés : les positions et tailles des objets sont repérées par des Valeurs algébriques.

Scanné avec CamScanner

Conjugaison et grandissement

Le stigmatisme est traduit par une relation de conjugaison liant les abscisses des points A et A' conjugués sur l'axe par le système.

La linéarité entre la taille de l'objet et celle de l'image est traduite par le *grandissement transverse* $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ C'est une grandeur algébrique, qui dépend de la position de l'objet et des caractéristiques du système centré

Miroirs sphériques

Le miroir est défini par son centre C et son sommet S. On note $R = \overline{SC}$ son rayon de courbure, positif pour un miroir convexe (divergent), négatif pour un miroir concave (convergent).

Les foyers du miroir sont confondus : $F = F'$, et au milieu du segment [CS] : $f = \overline{SF} = \overline{FC} = \frac{R}{2}$

La distance focale du miroir est : $f = \overline{SF} = \frac{R}{2}$ et sa vergence est : $V = \frac{1}{f}$ exprimée en dioptries

La construction de base permet de retrouver rapidement les relations de conjugaison de Newton : $\overline{FA}.\overline{FA'} = \overline{FS}^2 = \frac{R^2}{2}$, ou Descartes : $\frac{1}{CA} + \frac{1}{CA'} = \frac{2}{CS}$ ou $\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{SC}$ ainsi que les expressions du grandissement $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{A'F'}}{\overline{SF}}$

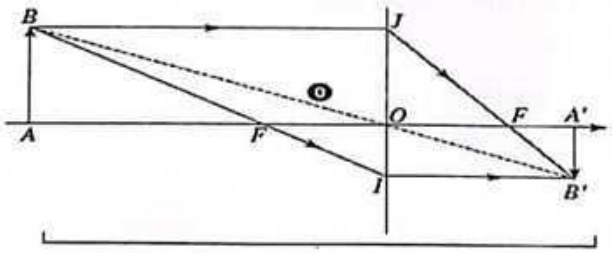
En particulier : C est son propre conjugué ,et $\gamma_c = -1$; S est son propre conjugué, et $\gamma_s = +1$

Lentilles minces sphériques

La lentille mince sphérique a les mêmes effets sur lumière lorsqu'on la retourne face pour face. Les foyers objet F et image F', sur l'axe optique, sont symétriques l'un de l'autre par rapport au centre O de la lentille.

La lentille est définie par son centre O et sa focale. La focale d'une lentille est $f' = \overline{OF'} = -\overline{OF} = -f$ $\left(ou\ sa\ vergence\ V = \frac{1}{f'} \right)$.

Les lentilles minces sphériques à bords minces sont convergentes, leurs foyers objet et image sont réelles. Celles a bords épais sont divergentes et leurs foyers sont virtuels. Un rayon passant par O n'est pas modifié par la traversée de lentille.



Construction de l'image formée par une lentille mince.

La construction permet de retrouver rapidement les relations de conjugaison de Newton :

$\overline{FA}.\overline{FA'} = \overline{OF}.\overline{OF'} = ff' = -f'^2$,ou Descartes : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$ ou $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} = V$, ainsi que les expressions du grandissement transverse $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{p'}{p} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'O}}{\overline{F'A'}}$.

En particulier : le « plan » de la lentille, contenant O, est son propre conjugué, et $\gamma_0 = +1$.

Scanné avec CamScanner

Associations de systèmes centrés

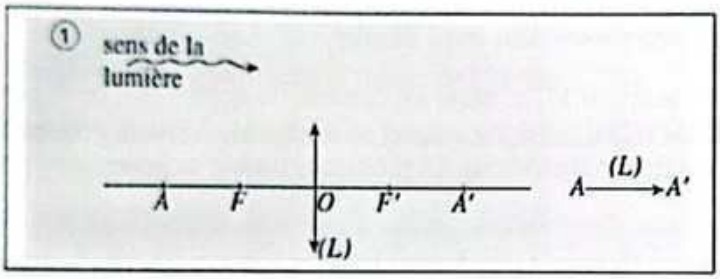
Les éléments associés sur un même axe optique dans un système composé réalisant un stigmatisme et un aplanétisme au moins approchés, ces propriétés se retrouvent dans l'instrument global

Les constructions et relations de conjugaison peuvent être utilisées de proche en proche dans le système composé. Le grandissement obtenu est le produit des grandissements successifs.

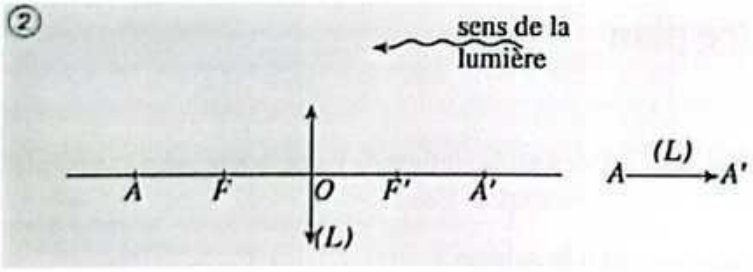
En général, une association de deux lentilles (ou plus) n'est pas assimilable à une unique lentille équivalente. Mais lorsque deux lentilles sont accolées, elles forment un système équivalent à une seule lentille, de même centre, et de vergence obtenue par addition des deux vergences (**théorème des vergences**) Deux lentilles minces accolées forment un système équivalent à une lentille mince . Un système catadioptrique composé peut se ramener à un miroir « équivalent ».

Conseils et pièges à éviter

- Toujours prendre des rayons de propriété connue (passage par *F, O, C, S, ...* parallèle à l'axe, ...) pour faire des constructions d'image.
- Deux rayons suffisent, mais un troisième permet de vérifier une construction.
- Attention au sens de la lumière pour écrire les relations de conjugaison de Descartes.



$$\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}} = -\frac{1}{\overline{OF}}$$



$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} = -\frac{1}{\overline{OF}}$$

En invoquant le retour inverse de la lumière, on retrouve bien que A' a pour image A.
Dans les situations précédentes, les relations de Newton s'écrivent :

Cas (1) $\overline{FA}.\overline{F'A'} = -f^2$

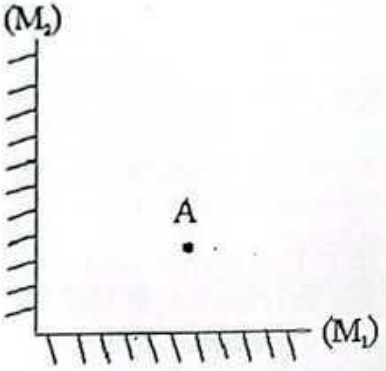
(2) $\overline{FA'}.\overline{F'A} = -f^2$

Scanné avec CamScanner

17/11/2021
DEVOIR OPTIQUE ESATIC 2013-2014

Miroirs et dioptres plans

Exercice 1 :Miroir plan



Deux miroirs M_1 et M_2 sont disposés perpendiculairement l'un à l'autre, et un objet ponctuel A est situé de façon à être vu simultanément dans ces 2 miroirs.

Construire l'image A_1 de A dans le miroir M_1 et tracer un faisceau de rayons issu de A puis réfléchis par M_1. A_1 peut il jouer le rôle d'objet par rapport au miroir M_2 ? Si oui, construire son image A_{12} dans M_2 et les rayons correspondants. Le processus peut-il se poursuivre par une nouvelle réflexion sur M_1 ?

1. De la même manière, construire l'image A_2 de A dans M_2 puis l'image A_{21} de A_2 dans M_1. Finalement, combien d'images de A l'observateur peut il voir ?

Exercice 2 : Dioptre plan

Un pêcheur aperçoit un poisson situé à 1 m sous la surface de l'eau, sur la même verticale. En considérant que ces yeux sont à 1,40 m au dessus de l'eau :

1. A quelle distance le pêcheur voit il le poisson ?
2. A quelle distance de l'œil du poisson se trouve l'image du pêcheur ?
3. A quelle profondeur doit se trouver le poisson pour que l'image vue par le pêcheur soit décalée de 15 cm par rapport à sa position réelle ?

On donne l'indice de l'eau n=1,33.

Scanné avec CamScanner

Lentilles

Construction d'images :

Soit une lentille mince **convergente**, de centre optique O, de foyers F et F'.

1. Rappeler les formules de conjugaison et de grandissement avec origine au centre optique.
2. Construire l'image A'B' d'un objet AB perpendiculaire à l'axe principal situé entre $-\infty$ et le foyer objet F.
3. Retrouver les formules de grandissement avec origines aux foyers.
4. En déduire la formule de Newton.

Le petit objet AB se déplace de $-\infty$ à $+\infty$.

5. L'espace objet peut être décomposé en 3 zones, construire les images correspondants à un objet placé successivement dans chacune de ces zones. En déduire les zones correspondantes de l'espace image.
6. Indiquer dans chaque cas la nature de l'image.

L'étudiant pourra reprendre cette étude dans le cas d'une lentille divergente.

Scanné avec CamScanner

Renforcement : OPTIQUE

On considère le système optique représenté à la **figure 3**. Ce système est constitué d'une lentille mince convergente de distance focale image f' suivie d'un parallélépipède en verre d'épaisseur h et d'indice n. L'extrémité inférieure du parallélépipède est placée à une distance D de la lentille (**Fig.3**). On se place dans les conditions de stigmatisme approché. Un objet A est placé à une distance d du centre O de la lentille. On notera A_1 son image à travers la lentille seule.

1. On note $x_1 = \overline{OA_1}$. Exprimer x_1 en fonction de d et f'.

2. On place A de telle sorte que A_1 se forme dans le parallélépipède en verre (**Fig.3**). La première face du parallélépipède constitue un dioptre plan séparant l'air ($n_1 \approx 1$) du verre ($n_2 = n$). On désigne alors par A_2 l'image de A_1 à travers ce dioptre plan.

2. 1. Exprimer $\overline{SA_2}$ en fonction de $\overline{SA_1}$.

2. 2. En déduire $\overline{OA_2}$ en fonction de D, h, n et x_1.

3. On règle maintenant la position de A de telle sorte que A_2 se forme sur la deuxième face plane (face inférieure) du parallélépipède en verre, c'est-à-dire en M à une distance D de O(**Fig.3**). En déduire l'indice n en fonction de D, h et x_1.

4. On place maintenant un miroir plan à l'extrémité du système, au point M(**Fig.4**).

4. 1. Où se forme A_3, l'image de A_2 à travers le miroir plan ?

4. 2. En déduire la position de A', l'image finale de A à travers ce dispositif.

4. 3. Faire la construction optique correspondante en reproduisant la **figure 4**.

5. On remplace le parallélépipède par un liquide d'indice n sur une hauteur h.

5. 1. Où se forme A' ?

5. 2. Expliquer en quoi ce dispositif permet de mesurer l'indice du liquide.

L'objet observé est en fait étendu et de taille AB (**Fig.5**). L'objet étant réglé comme précédemment, son image A_2B_2 se forme donc au niveau du miroir plan (sur le plan passant par M).

6. On suppose que $n = \frac{3}{2}$.

6. 1. En déduire la position de A_1 par rapport à S.

6. 2. Sachant que h = 3 cm, placer A_1 sur la **figure 5**.

7. 1. Dans quel plan se forme B_1 ?

7. 2. En déduire sa position et faire, sur la figure, la construction optique correspondant à la formation de A_1B_1.

7. 3. En déduire les positions des points focaux de la lentille.

8. 1. Quel est le grandissement transversal d'un système optique formé par un dioptre plan ?

8. 2. Faire la construction optique correspondant à la formation de l'image A_2B_2 associé à l'objet AB. On ne s'intéressera pas ici aux rayons réfléchis par le miroir.

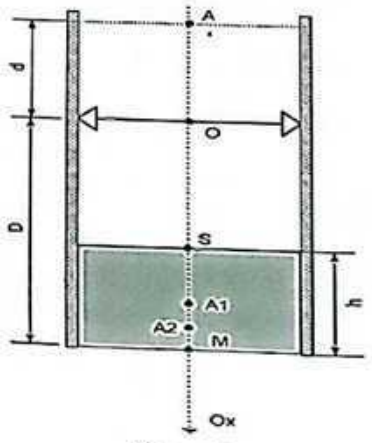
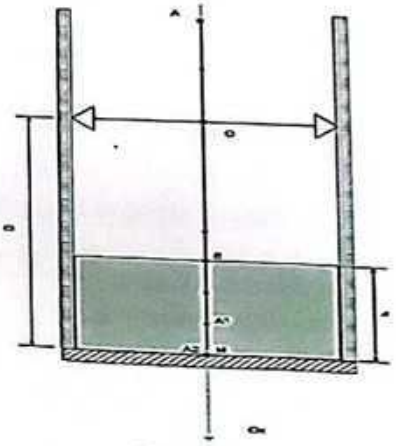
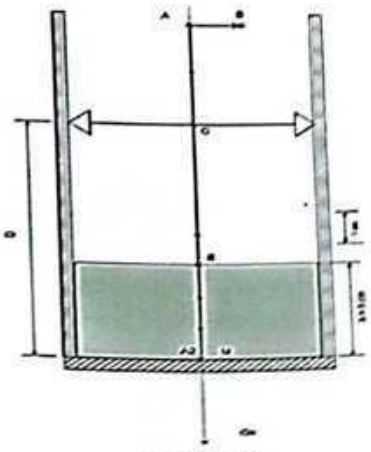


Figure 3


Figure 4


Figure 5

Scanné avec CamScanner

Scanné avec CamScanner

1/ L'œil se trouve au centre du cercle oculaire, image de la monture de L_1 donnée par L_2.

a) Trouver $\overline{F_2'\Omega}$ en fonction de f_1', f_2' et Δ, et calculer sa valeur.

b) En déduire le diamètre a du cercle oculaire sachant que L_1 a un diamètre D = 11 mm.

2/ Trouver le grandissement linéaire du microscope, γ, en fonction de f_1', f_2', Δ et d_m, et calculer sa valeur.

3/ Du fait de la structure granulaire de la rétine, l'œil ne peut distinguer deux points que si l'angle sous lequel il les voit est au moins égal à $\varepsilon = 1{,}5'$.

a) Trouver en fonction de ε, d_m et γ, la taille ℓ du plus petit objet AB dont les extrémités A et B sont vues distinctement à travers le microscope.

b) Calculer ℓ et comparer cette valeur à la longueur d'onde moyenne du rayonnement utilisé. En déduire le phénomène optique qui limite la taille du plus petit détail véhiculé par le microscope optique.

2. Modification du système

a) Pour mettre le système au point sur un objet situé à distance finie, dans quel sens faut-il déplacer la lentille divergente ? (Expliquez votre réponse).

On supposera que l'objet est situé avant le foyer objet F_1 de L_1.

b) On souhaite réaliser un système tel que d_∞ corresponde à la valeur D.

Calculer la nouvelle valeur de D.

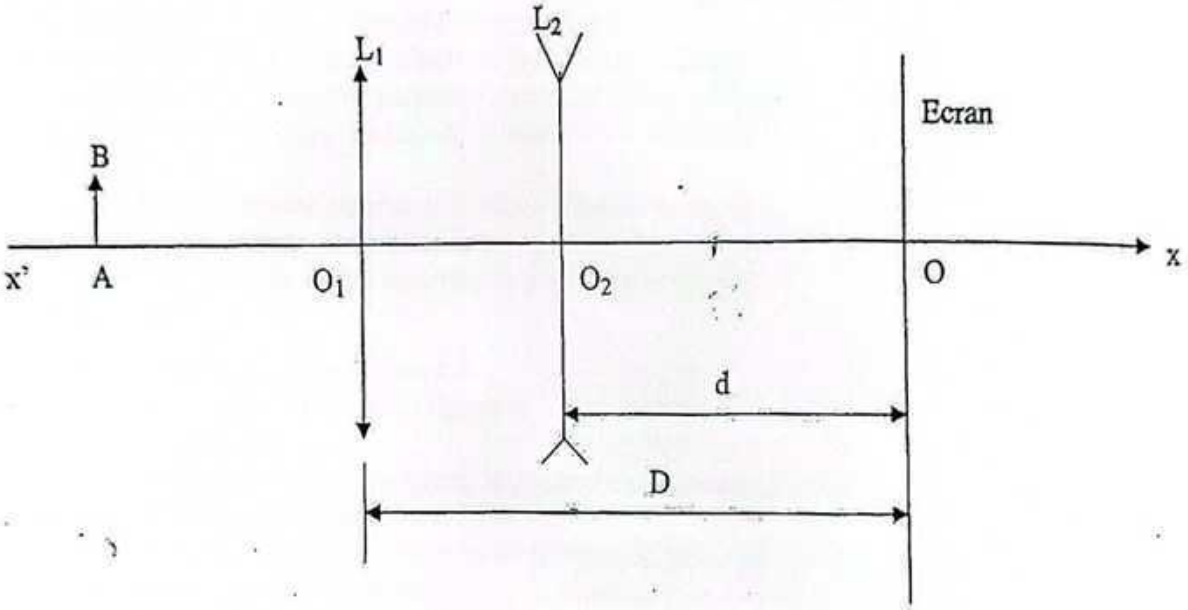
3. Latitude de mise au point

a) Dans le cas précédent ($d_\infty = D$), indiquer la profondeur de mise au point du système, c'est-à-dire le domaine des positions de l'objet AB susceptibles de donner une image nette sur l'écran lorsque l'on donne à d une valeur adaptée.

b) Faire un schéma soigné à l'échelle 1/ 2 permettant de déterminer la position $\overline{O_1 A}$ de A.

Retrouver le résultat par le calcul.

Donnée : d = 6 cm.



Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny
(Abidjan – Cocody) UFR SMI

LICENCE 3ème ANNEE (L3) DE MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE

UE OPTIQUE PREMIERE SESSION 2015 – 2016

Durée : 02 heures

Exercice 1 : Analogie onde lumineuse – onde électromagnétique (10 points)

Une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale, de fréquence ν, et polarisée rectilignement dans la direction oy, se propage dans le vide, le long de l'axe x'x dans le sens négatif ($x < 0$).

En utilisant la fréquence ν et la célérité c de l'onde dans le vide :

1/ Calculer le champ électrique $\vec{E}$ de cette onde.

2/ a) Déterminer de deux façons différentes le champ magnétique $\vec{B}$ de cette onde.

b) En déduire pour $\vec{B}$:

- l'amplitude $\overrightarrow{B_0}$;
- la phase Φ à la date t ;
- la phase Φ_0 à l'origine des dates.

3/ Le milieu de propagation étant non absorbant :

a) Déterminer la surface équiphase Σ_t à une date t donnée.

b) Σ_t est-elle aussi une surface d'onde ? (Expliquez votre réponse).

4/ a) Calculer le vecteur de Poynting $\vec{P}$.

b) En déduire la direction des rayons lumineux.

On assimilera l'onde électromagnétique considérée à une onde lumineuse.

5/ a) Représenter sur une même figure les rayons lumineux et les surfaces d'onde.

b) Le théorème de Malus est-il vérifié ici ?

Exercice 2 : Téléobjectif (10 points)

Un objectif photographique est constitué d'une lentille convergente L_1 de centre O_1, de distance focale image $f_1' = 75$ mm. La pellicule est placée dans le plan focal image de l'objectif. On ajoute à cet objectif deux lentilles additionnelles :

- Une lentille L_2 divergente, de centre O_2 et de distance focale $f_2' = -25$ mm, que l'on accole à L_1 ; on a ainsi $O_2 = O_1$;

- Une lentille L_3 convergente, de centre O_3 et de distance focale $f_3' = 100$ mm, que l'on fixe devant le système L_1-L_2. La distance O_3O_1 est évidemment réglée de manière à ce que l'image d'un objet éloigné soit nette sur la pellicule.

1/ Faire un schéma représentant les lentilles avec les positions relatives des centres optiques et des foyers. Compléter ce schéma par un tracé de rayons définissant la position du foyer image F' de ce téléobjectif constitué par l'ensemble L_1-L_2-L_3.

2/ Calculer l'encombrement de cet appareil, c'est-à-dire la distance du centre O_3 de L_3 à la pellicule.

3/ Calculer la grandeur $\overline{A'B'}$ de l'image d'une tour $\overline{AB}$ de 60 m de hauteur, située à une distance d = 3 km de l'objectif.

4/ Calculer l'encombrement d'un appareil qui aurait comme objectif une seule lentille donnant une image de même grandeur. Conclusion.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny UFR MI
(Abidjan – Cocody)

LICENCE 1ERE ANNEE (L1) DE MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE

UE OPTIQUE DEUXIEME SESSION 2015 – 2016

Durée : 02 heures

Exercice 1 : Lentille demi-boule (8 points)

On considère un tube en verre, cylindrique, d'axe vertical Oz, d'épaisseur négligeable et de diamètre 2R = 8 cm. Le tube est terminé à sa partie inférieure par une surface hémisphérique de centre O, de sommet S et de rayon R. Une source lumineuse ponctuelle P est placée sur l'axe Sz du tube, à la cote $\overline{OP}$ = 27 cm au-dessus de O. On ne s'intéresse qu'aux rayons lumineux voisins de l'axe Sz. L'eau d'indice n = 4/3 remplit la partie hémisphérique du tube, son niveau horizontal contenant O (voir figure).

1/ Déterminer la position $\overline{OP'}$ de l'image P' de P à travers ce système. Construire la marche d'un rayon lumineux issu de P.

2/ Déterminer la position $\overline{OF'}$ du foyer image F' de ce système.



Exercice 2 : Microscope (12 points)

Un microscope est un instrument qui comprend deux systèmes convergents, qu'on supposera réduits chacun à une lentille mince : l'objectif L_1, de centre optique O_1, devant lequel est situé l'objet, et l'oculaire L_2, de centre optique O_2, placé devant l'œil de l'observateur. Les distances focales sont très différentes, de l'ordre du millimètre pour l'objectif, du centimètre pour l'oculaire. Les deux systèmes ont le même axe optique.

1/ Pour comprendre le principe de l'appareil, faire un schéma en prenant :
$\overline{O_1O_2}$ = 9 cm ; f_1' = 1,5 cm ; f_2' = 4 cm ; $\overline{AO_1}$ = 2 cm ; AB = 0,5 cm.
Construire l'image de AB donnée par le microscope (échelle unité).
Quel est l'intérêt de l'appareil ?

2/ En réalité un microscope est tel que, par exemple : $\overline{O_1O_2}$ = 12 cm ; f_1' = 2 mm ; f_2' = 2 cm.

Scanné avec CamScanner

Un objet AB de longueur 1 μ m est placé perpendiculairement à l'axe principal, à 2,04 mm devant L_1.
Calculer la position $\overline{O_2A'}$ et la taille $\overline{A'B'}$ de l'image.

3/ L'observateur met son œil au foyer image de l'oculaire. Déterminer le diamètre apparent de l'image, c'est-à-dire l'angle θ' sous lequel elle est observée.

4/ Calculer le diamètre apparent θ de l'objet AB lorsqu'on l'observe à l'œil nu à la distance de 25 cm.
Calculer le grossissement G = θ'/θ du microscope (rapport du diamètre apparent de l'image au diamètre apparent de l'objet).

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny (Cocody)
(Abj. Côte d'Ivoire)

LICENCE PREMIERE ANNEE MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE

PREMIERE SESSION 2016 – 2017

UE OPTIQUE

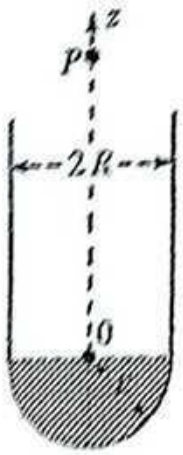
Durée : 2 heures

Exercice 1 (08 points)

On considère un tube en verre, cylindrique, d'axe vertical Oz, d'épaisseur négligeable et de diamètre $2R = 8$ cm. Le tube est terminé à sa partie inférieure par une surface hémisphérique de centre O, de sommet S et de rayon R. Une source lumineuse ponctuelle P est placée sur l'axe Sz du tube, à la cote $\overline{OP} = 27$ cm au-dessus de O. On ne s'intéresse qu'aux rayons lumineux voisins de l'axe Sz. L'eau d'indice $n = 4/3$ remplit la partie hémisphérique du tube, son niveau horizontal contenant O (voir figure).

1/ Déterminer la position $\overline{OP'}$ de l'image P' de P à travers ce système. Construire la marche d'un rayon lumineux issu de P.

2/ Déterminer la position $\overline{OF'}$ du foyer image F' de ce système.



Exercice 2 (12 points)

On considère un microscope optique, fonctionnant en lumière blanche de longueur d'onde moyenne $\lambda = 0{,}5\ \mu m$, dont l'objectif et l'oculaire sont assimilés à deux lentilles minces convergentes L_1 et L_2, de focales images f_1' et f_2'. L'ensemble est dans l'air. L'œil est placé en Ω au voisinage du foyer image de l'oculaire F_2'. Il observe l'image définitive située à la distance minimale de vision distincte d_m de Ω.

Scanné avec CamScanner

On notera Δ l'intervalle optique séparant le foyer image de L_1 du foyer objet de L_2. Pour les applications numériques, on prendra : $f_1' = 2$ mm ; $f_2' = 30$ mm ; $\Delta = 180$ mm ; $d_m = 25$ cm.

1/ L'œil se trouve au centre du cercle oculaire, image de la monture de L_1 donnée par L_2.

a) Trouver $\overline{F_2'\Omega}$ en fonction de f_1', f_2' et Δ, et calculer sa valeur.

b) En déduire le diamètre a du cercle oculaire sachant que L_1 a un diamètre D = 11 mm.

2/ Trouver le grandissement linéaire du microscope, γ, en fonction de f_1', f_2', Δ et d_m, et calculer sa valeur.

3/ Du fait de la structure granulaire de la rétine, l'œil ne peut distinguer deux points que si l'angle sous lequel il les voit est au moins égal à $\varepsilon = 1{,}5'$.

a) Trouver en fonction de ε, d_m et γ, la taille ℓ du plus petit objet AB dont les extrémités A et B sont vues distinctement à travers le microscope.

b) Calculer ℓ et comparer cette valeur à la longueur d'onde moyenne du rayonnement utilisé. En déduire le phénomène optique qui limite la taille du plus petit détail véhiculé par le microscope optique.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny (Cocody) UFR MI
(Rép. Côte d'Ivoire)

LICENCE PREMIERE ANNEE MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE

DEUXIEME SESSION 2016 – 2017

UE OPTIQUE

Durée : 2 heures 30 minutes

Exercice 1 : (12 points)

Une demi-sphère en flint d'indice n = 1,71, de centre O, de sommet S et de rayon R = $\overline{OS}$ = 6 cm constitue une lentille demi-boule. La lumière pénètre dans cette leritille par sa face plane.

A) La lentille est plongée dans un milieu (eau) d'indice n_0 = 1,33 :

1) a) Etablir la formule de conjugaison de cette lentille, avec origine en O ;

b) Etablir la formule de grandissement linéaire de cette lentille ;

c) Déterminer la position et la grandeur de l'image A'B' d'un petit objet AB = 10 mm disposé parallèlement à la face d'entrée de la lentille, au point A diamétralement opposé à S. On tracera la marche d'un rayon quelconque issu de A.

2) Déterminer littéralement, puis numériquement, pour cette lentille :

a) Les positions du foyer image F' et du foyer objet F ;

b) Les positions des points principaux H et H' ;

c) Les distances focales objet f et image f'. En déduire la vergence V de la lentille.

B) La lentille baigne maintenant dans l'air (d'indice 1) :

3) Déterminer littéralement, puis numériquement, les distances focales f et f' et la vergence V de la lentille.

4) On éclaire la lentille par un faisceau de rayons parallèles à l'axe, d'axe OS, qui couvre grâce à un diaphragme la moitié de la face plane d'entrée. Le foyer Φ' des rayons marginaux ne coïncide pas avec le foyer F' des rayons paraxiaux. Calculer l'aberration sphérique $\overline{\Phi' F'}$.

Exercice 2 : (08 points)

Un objectif photographique est constitué d'une lentille convergente L_1 de centre O_1, de distance focale image $f_1' = \overline{O_1 F_1'}$ = 75 mm. La pellicule π est placée dans le plan focal image de l'objectif. On ajoute à cet objectif deux lentilles additionnelles :

- Une lentille L_2 divergente, de centre O_2 et de distance focale f_2' = –25 mm, que l'on accole à L_1 ; on a ainsi $O_2 = O_1$;

- Une lentille L_3 convergente, de centre O_3 et de distance focale f_3' = 100 mm, que l'on fixe devant le système L_1-L_2. La distance O_3O_1 est réglée de manière à ce que l'image d'un objet éloigné soit nette sur la pellicule.

1) Faire un schéma représentant les lentilles avec les positions relatives des centres optiques et des foyers. Compléter ce schéma par un tracé de rayons définissant la position du foyer image F' de ce téléobjectif constitué par l'ensemble L_1-L_2-L_3.

Scanné avec CamScanner

2) Calculer l'encombrement de cet appareil, c'est à dire la distance du centre O_1 de L_1 à la pellicule π.

3) Calculer la grandeur $\overline{A'B'}$ de l'image d'une tour $\overline{AB}$ de 60 m de hauteur, située à une distance d=3 km de l'objectif.

4) Calculer l'encombrement d'un appareil qui aurait comme objectif une seule lentille donnant une image de même grandeur. Conclusion ?

Scanné avec CamScanner

UFR MI

Université Félix Houphouët-Boigny
(Abidjan – Cocody / Rép. Côte d'Ivoire)

LICENCE 1 MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE / 1ERE SESSION 2017-2018

UE OPTIQUE

Durée : 2 heures

Exercice 1 (08 points)

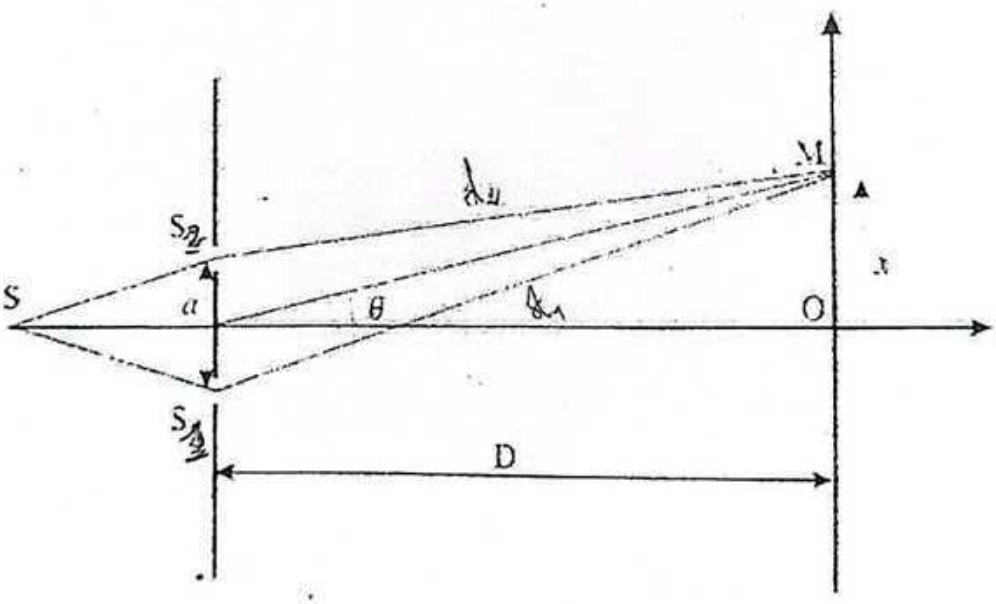
On réalise l'expérience des trous d'Young : deux trous très petits (on ne prendra pas en compte ici la diffraction) S_1 et S_2, distants de a, sont éclairés par un faisceau de lumière issu de S, monochromatique, de longueur d'onde λ. La source S est située sur la médiatrice des trous. Le plan de figure contient la source initiale et les sources secondaires. On observe la figure d'interférences sur un écran perpendiculaire au plan de figure, à une distance D de l'axe S_1S_2.

1/ On se place en un point M de l'écran dans le plan de figure. L'écran étant à grande distance des trous (D>>a) et le point M étant peu éloigné de l'axe (D>>x), exprimer la différence de marche δ (M) en fonction de a, D et x.

On rappelle que la différence de marche au point M est la différence entre les chemins parcourus par les deux rayons lumineux SS_1M et SS_2M.

2/ Déterminer les positions X_{FB} des franges brillantes et X_{FS} des franges sombres, puis l'expression, en fonction de D, a et λ, de l'interfrange i, c'est-à-dire la distance entre deux franges brillantes (ou deux franges obscures) successives.

On rappelle que les interférences sont constructives (les franges brillantes) lorsque $\delta = n.\lambda$ et elles sont destructives (les franges sombres) lorsque $\delta = (n + \frac{1}{2}).\lambda$, où $n \in Z$.



Scanné avec CamScanner

Exercice 2 : (12 points)

Une demi-sphère en flint d'indice n = 1,71, de centre O, de sommet S et de rayon R = $\overline{OS}$ = 6 cm constitue une lentille demi-boule. La lumière pénètre dans cette lentille par sa face plane.

A/ La lentille est plongée dans un milieu (eau) d'indice n_0 = 1,33 :

1) a) Etablir la formule de conjugaison de cette lentille, avec origine en O ;

b) Etablir la formule de grandissement linéaire de cette lentille ;

c) Déterminer la position et la grandeur de l'image A'B' d'un petit objet AB = 10 mm disposé parallèlement à la face d'entrée de la lentille, au point A diamétralement opposé à S. On tracera la marche d'un rayon quelconque issu de A.

2) Déterminer littéralement, puis numériquement, pour cette lentille :

a) Les positions du foyer image F' et du foyer objet F ;

b) Les positions des points principaux H et H' ;

c) Les distances focales objet f et image f'. En déduire la vergence V de la lentille.

B/ La lentille baigne maintenant dans l'air (d'indice 1) :

3) Déterminer littéralement, puis numériquement, les distances focales f et f' et la vergence V de la lentille.

4) On éclaire la lentille par un faisceau de rayons parallèles à l'axe, d'axe OS, qui couvre grâce à un diaphragme la moitié de la face plane d'entrée. Le foyer Φ' des rayons marginaux ne coïncide pas avec le foyer F' des rayons paraxiaux. Calculer l'aberration sphérique $\overline{\Phi' F'}$.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUËT-BOIGNY

UFR Mathématique-Informatique

TRONC COMMUN LICENCE1

EPREUVE D'OPTIQUE GEOMETRIQUE

2ème session 2017 – 2018

2 heures (documents interdits)

Questions de cours *(06 points)*

1) Enoncer le principe de Fermat dans un milieu transparent quelconque.

2) A partir du principe de Fermat, établir les deux (2) lois de Snell-Descartes pour la réfraction.

3) Quand dit-on qu'un système optique est rigoureusement stigmatique pour le couple de points (A , A') ?

4) Quelle est la nature (réelle ou virtuelle) de l'image dans les cas suivants ? Justifier votre réponse.

a) Un nageur qu'on regarde au fond d'une piscine.

b) Une femme qui se maquille face à un miroir plan.

c) L'image d'un immeuble prise par un appareil photographique.

5) On considère un dioptre sphérique D_S de centre C et de sommet S, séparant les milieux d'indices n et n '.

a) Donner, sans démonstration, la relation de conjugaison (de position) de D_S avec des mesures algébriques ayant pour origine le sommet S. On se placera dans les conditions de Gauss ;

b) A partir de cette formule, déterminer les positions des foyers principaux F et F ' de D_S par rapport à S ;

c) En assimilant le miroir sphérique à un cas particulier de dioptre sphérique, montrer que les deux foyers principaux du miroir sphérique sont confondus.

Exercice 1 : Lame de verre crown (04 points)

On considère une vitre faite de verre crown d'indice n = 1,52 et d'épaisseur e = 5 mm, plongée dans l'eau d'indice n ' = 4/3. Un rayon monochromatique provenant de l'eau arrive sur cette vitre avec un angle d'incidence i = 40°.

1) Calculer l'angle de réfraction r du rayon dans le verre.

2) Calculer l'angle d'incidence i ' de ce rayon sur le dioptre verre/eau.

3) Calculer l'angle de réfraction r ' du rayon émergeant de la vitre.

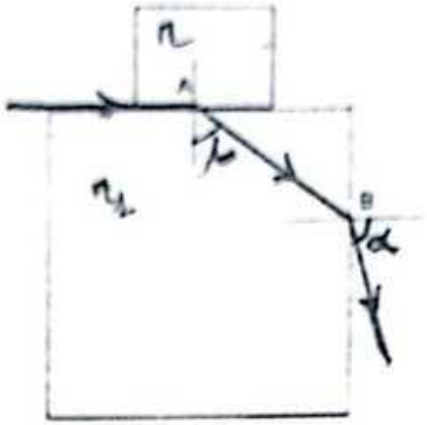
4) Faire un schéma soigné indiquant la marche du rayon lumineux à travers la vitre.

Scanné avec CamScanner

6) Calculer l'angle de déviation D entre les rayons incidents et émergents pour la distance d entre un point objet A et son image A' à travers ce système optique.

Exercice 2 : Détermination de l'indice de réfraction d'un solide (04 points)

Pour mesurer l'indice n d'un milieu solide transparent, on taille dans ce matériau un cube que l'on place sur un autre cube en verre d'indice $n_1 = 1,732$. On envoie un pinceau de lumière monochromatique sous incidence rasante sur la surface de séparation entre les deux cubes en A, et on mesure l'angle d'émergence $\alpha = 60°$ dans l'air en B (voir figure ci-après). On rappelle que l'expérience est réalisée dans l'air et on donne la relation : $\sin i = n \sin r$ (on connaît).



1) Exprimer l'indice de réfraction n en fonction de n_1 et α.
2) Calculer sa valeur.

Exercice 3 : Constructions graphiques d'images (06 points)

a) Miroir sphérique

Un objet AB de taille 1 cm se trouve à 20 cm devant un miroir convexe de rayon R = 10 cm.
Déterminer par construction graphique l'image A'B' de AB puis en déduire sa nature. On indiquera les échelles axiale et transversale utilisées.

b) Lentille mince

On considère une lentille mince divergente de distance focale image f ' = –3 cm et un objet AB de 2 cm de hauteur. Construire soigneusement (à l'aide des trois rayons remarquables) l'image A'B' dans chacun des cas suivants:

Cas 1 : Objet AB situé après le foyer objet F :
Cas 2 : Objet AB situé entre le foyer objet F et le centre optique de la lentille.
Cas 3 : Objet AB situé entre le centre optique et le foyer image F '.
Cas 4: Objet AB situé avant le foyer image F '.

Scanné avec CamScanner

UFHB-Rép. Côte d'Ivoire Année 2018-2019

LICENCE 1 MATHÉMATIQUE-INFORMATIQUE
UE OPTIQUE PREMIÈRE SESSION 2018-2019
Durée : 02 HEURES

EXERCICE 1 : (06 pts)
On fera les schémas directement sur la feuille annexe.

1. **Figure 1** : Construire l'image de l'objet AB à travers le dioptre plan (Σ).
2. **Figure 2** :Construire l'image de l'objet AB à travers le miroir plan (M)
3. **Figure 3** :Construire l'image de l'objet AB à travers le miroir sphérique (M)
4. **Figure 4** :Construire l'image de l'objet AB à travers la lentille mince (L).
5. **Figure 5** : Tracer les faisceaux entrant et sortant du doublet $L_1 - L_2$.
6. **Figure 6** : Schématiser la marche du rayon lumineux à travers la demi-sphère de centre C.

EXERCICE 2 : (06 pts)
On considère deux ondes sinusoïdales progressives, de même amplitude a et de même pulsation ω, se propageant en sens opposés avec la même célérité c : $u_1(x,t) = a\cos[\omega(t - x/c)]$ et $u_2 = a\cos[\omega(t + x/c) + \varphi]$.

1. Que représente φ ?
2. Trouver l'abscisse x_0 d'un point de l'axe Ox où u_1 et u_2 vibrent en phase.
3. En choisissant ce point comme origine de l'axe Ox, calculer la valeur de φ et déterminer l'onde résultante $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$. On montrera que $u(x,t)$ est une onde stationnaire.
   On rappelle qu'une onde stationnaire est de la forme :
   $s(x,t) = S_m\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$, où ω est une pulsation et k un nombre d'onde.
4. Donner les positions des nœuds et des ventres de cette onde stationnaire, sur l'axe Ox.
5. Déterminer la distance entre deux nœuds consécutifs, celle entre deux ventres consécutifs et celle entre un nœud et un ventre consécutifs.

Scanné avec CamScanner

6. Quel problème va contrarier la vérification expérimentale de cette étude ?

EXERCICE 3 : (08 pts)

On considère un microscope optique, fonctionnant en lumière blanche de longueur d'onde moyenne $\lambda = 0.5\mu m$. dont l'objectif et l'oculaire sont assimilés à deux lentilles minces convergentes L_1 et L_2 de focales images f_1' et f_2'. L'ensemble est dans l'air. L'œil est placé en Ω au voisinage du foyer image de l'oculaire F_2'. Il observe l'image de L_1 du foyer de L_2. Pour les applications numériques, on prendra : $f_1' = 2mm$; $f_2' = 30mm$; $\Delta = 180mm$; $d_m = 25cm$.

1. L'œil se trouve au centre du cercle oculaire, image de la monture de L_1 donnée par L_2.
   (a) Trouver $F\Omega$ en fonction de f_1', f_2' , Δ et calculer sa valeur.
   (b) En déduire le diamètre a du cercle oculaire sachant que L_1 a un diamètre $D = 11mm$.
2. Trouver le grandissement linéaire du microscope, γ, en fonction de f_1', f_2', Δ et d_m, et calculer sa valeur.
3. Du fait de la structure granulaire de la rétine, l'œil ne peut distinguer deux points que si l'angle sous lequel il les voit est égal à $\varepsilon = 1.5'$.
   (a) Trouver en fonction de ε, d_m et γ, la taille ℓ du plus petit objet AB dont les extrémités A et B sont vues distinctement à travers le microscope.
   (b) Calculer ℓ et comparer cette valeur à la longueur d'onde moyenne du rayonnement utilisé. En déduire le phénomène optique qui limite la taille du plus petit détail véhiculé par le microscope optique.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUËT-BOIGNY **UFR Mathématique-Informatique**

TRONC COMMUN LICENCE1

EPREUVE D'OPTIQUE GEOMETRIQUE

2ème session 2018 – 2019

2 heures (documents interdits)

Questions de cours *(06 points)*

1) Enoncer le principe de Fermat dans un milieu transparent quelconque.

2) A partir du principe de Fermat, établir les deux (2) lois de Snell-Descartes pour la réfraction.

3) Quand dit-on qu'un système optique est rigoureusement stigmatique pour le couple de points (A , A') ?

4) Quelle est la nature (réelle ou virtuelle) de l'image dans les cas suivants ? Justifier votre réponse.

a) Un nageur qu'on regarde au fond d'une piscine.

b) Une femme qui se maquille face à un miroir plan.

c) L'image d'un immeuble prise par un appareil photographique.

5) On considère un dioptre sphérique D_S de centre C et de sommet S, séparant les milieux d'indices n et n '.

a) Donner, sans démonstration, la relation de conjugaison (de position) de D_S avec des mesures algébriques ayant pour origine le sommet S. On se placera dans les conditions de Gauss ;

b) A partir de cette formule, déterminer les positions des foyers principaux F et F ' de D_S par rapport à S ;

c) En assimilant le miroir sphérique à un cas particulier de dioptre sphérique, montrer que les deux foyers principaux du miroir sphérique sont confondus.

Exercice 1 : Lame de verre crown **(04 points)**

On considère une vitre faite de verre crown d'indice n = 1,52 et d'épaisseur e = 5 mm, plongée dans l'eau d'indice n ' = 4/3. Un rayon monochromatique provenant de l'eau arrive sur cette vitre avec un angle d'incidence $i = 40°$.

1) Calculer l'angle de réfraction r du rayon dans le verre.

2) Calculer l'angle d'incidence i ' de ce rayon sur le dioptre verre/eau.

3) Calculer l'angle de réfraction r ' du rayon émergeant de la vitre.

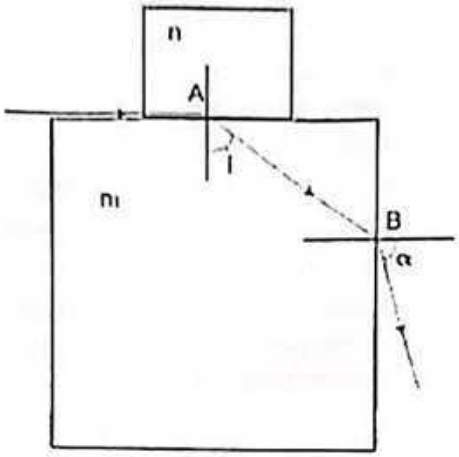
4) Faire un schéma soigné indiquant la marche du rayon lumineux à travers la vitre.

5) Calculer l'angle de déviation D entre les rayons incident et émergent puis la distance δ entre un point objet A et son image A' à travers ce système optique.

Scanné avec CamScanner

Exercice 2 : Détermination de l'indice de réfraction d'un solide (04 points)

Pour mesurer l'indice n d'un milieu solide transparent, on taille dans ce matériau un cube que l'on place sur un autre cube en verre d'indice $n_1 = 1{,}732$. On envoie un pinceau de lumière monochromatique sous incidence rasante sur la surface de séparation entre les deux cubes en A, et on mesure l'angle d'émergence $\alpha = 60°$ dans l'air en B (voir figure ci-après). On rappelle que l'expérience est réalisée dans l'air et on donne la relation: $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.



1) Exprimer l'indice de réfraction n en fonction de n_1 et α.
2) Calculer sa valeur.

Exercice 3 : Constructions graphiques d'images (06 points)

a) Miroir sphérique

Un objet AB de taille 1 cm se trouve à 20 cm devant un miroir convexe de rayon R = 10 cm.
Déterminer par construction graphique l'image A'B' de AB puis en déduire sa nature. On indiquera les échelles axiale et transversale utilisées.

b) Lentille mince

On considère une lentille mince divergente de distance focale image f ' = –3 cm et un objet AB de 2 cm de hauteur. Construire soigneusement (à l'aide des trois rayons remarquables) l'image A'B' dans chacun des cas suivants:

Cas 1 : Objet AB situé après le foyer objet F :
Cas 2 : Objet AB situé entre le foyer objet F et le centre optique de la lentille.
Cas 3 : Objet AB situé entre le centre optique et le foyer image F '.
Cas 4: Objet AB situé avant le foyer image F '.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny
(Rép. Côte d'Ivoire)

Année 2019-2020

LICENCE 1 MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE

PREMIERE SESSION 2019 – 2020

UE OPTIQUE GEOMETRIQUE

Durée : 2 heures

Questions de cours (06 points)

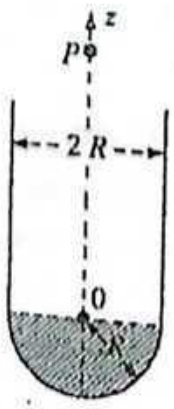
1) Enoncer le principe de Fermat dans un milieu transparent quelconque.
2) A partir du principe de Fermat, établir les deux (2) lois de Snell-Descartes pour la réfraction.
3) Quand dit-on qu'un système optique est rigoureusement stigmatique pour le couple de points (A , A') ?
4) Quelle est la nature (réelle ou virtuelle) de l'image dans les cas suivants ? Justifier votre réponse.
   a) Un nageur qu'on regarde au fond d'une piscine.
   b) Une femme qui se maquille face à un miroir plan.
   c) L'image d'un immeuble prise par un appareil photographique.
5) On considère un dioptre sphérique D_s de centre C et de sommet S, séparant les milieux d'indices n et n '.
   a) Donner, sans démonstration, la relation de conjugaison (de position) de D_s avec des mesures algébriques ayant pour origine le sommet S. On se placera dans les conditions de Gauss ;
   b) A partir de cette formule, déterminer les positions des foyers principaux F et F ' de D_s par rapport à S ;
   c) En assimilant le miroir sphérique à un cas particulier de dioptre sphérique, montrer que les deux foyers principaux du miroir sphérique sont confondus.

Exercice 1 (06 points)

On considère un tube en verre, cylindrique, d'axe vertical Oz, d'épaisseur négligeable et de diamètre 2R = 8 cm. Le tube est terminé à sa partie inférieure par une surface hémisphérique de centre O, de sommet S et de rayon R. Une source lumineuse ponctuelle P est placée sur l'axe Sz du tube, à la cote $\overline{OP}$ = 27 cm au-dessus de O. On ne s'intéresse qu'aux rayons lumineux voisins de l'axe Sz. L'eau d'indice n = 4/3 remplit la partie hémisphérique du tube, son niveau horizontal contenant O (voir figure).

1/ Déterminer la position $\overline{OP'}$ de l'image P' de P à travers ce système. Construire la marche d'un rayon lumineux issu de P.

2/ Déterminer la position $\overline{OF'}$ du foyer image F' de ce système.



Scanné avec CamScanner

Exercice 2 (08 points)

Un oculaire de distance focale $f' = 40$ mm est formé de deux lentilles minces L_1 et L_2 convergentes taillées dans le même verre, de centres optiques O_1 et O_2, constituant un doublet de symbole (4,3,2). La lumière se propage dans le sens O_1O_2.

1/ Déterminer les distances focales f_1' et f_2' de L_1 et L_2, ainsi que leur écartement $d = O_1O_2$.

2/ Déterminer les positions des foyers F et F' de cet oculaire. S'agit-il d'un oculaire convergent ou divergent ?

3/ En déduire les positions des points principaux H et H'.

4/ Etablir la relation entre f_1', f_2' et d pour qu'un doublet plongé dans l'air soit achromatique, c'est-à-dire que sa distance focale f ' soit indépendante de la longueur d'onde de la radiation qui l'éclaire. L'oculaire étudié est-il achromatique ?

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny UFR MI
(Abidjan-Cocody Rép. Côte d'Ivoire)

LICENCE 1 MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE
UE OPTIQUE PREMIERE SESSION 2020-2021
Durée : 2 heures

Questions de cours (06 points)

1. On considère un dioptre sphérique (D_s), de centre C et de sommet S, séparant deux milieux transparents homogènes et isotropes d'indices n et n', avec $n > n'$.
a) Le centre C étant dans le milieu d'indice n, que peut-on conclure ?
b) Le point objet A de l'axe optique ayant pour image le point A', établir les relations de conjugaison de (D_s) écrites avec des mesures algébriques ayant pour origines les foyers principaux F et F' de (D_s). Comment appelle-t-on ces relations ?

2. On considère une lentille mince à bords minces L, de centre optique O, de foyers principaux objet F et image F', et un objet AB obéissant aux conditions de Gauss. Construire à l'aide des trois rayons remarquables l'image $A'B'$ de AB à travers L, dans chacun des cas suivants :
Cas 1 : Objet AB situé avant le foyer objet F
Cas 2 : Objet AB situé entre le foyer objet F et le centre optique
Cas 3 : Objet AB situé entre le centre optique et le foyer image F'
Cas 4 : Objet AB situé après l'image foyer F'

Problème (14 points)

Le plus simple des microscopes visuels est constitué de deux lentilles convergentes considérées comme minces. La première, l'objectif, devra donner de l'objet une image agrandie. La seconde, l'oculaire, rendra cette image observable à l'œil.
Dans tout ce problème, on note L les lentilles minces, O la position de leur centre optique, F celle du foyer objet et F' celle du foyer image. On notera AB les objets, A étant leur position sur l'axe optique et $\overline{AB}$ leur taille algébrique. Ces objets seront considérés comme plans et perpendiculaires à l'axe optique.

A/ L'objectif :

Il sera réalisé avec une lentille convergente L_1 placée en O_1, de distance focale f_1'. On prend f_1' = 1,0 cm, $\overline{O_1A}$ =-1,5 cm, $\overline{AB}$ = a = 0,50 cm.
a) Construire A_1B_1, l'image de AB à traverser L_1.
b) Calculer l'abscisse $\overline{O_1A_1}$ de A_1 et le grandissement γ_1 de L_1 en fonction de f_1' et $p_1 = \overline{O_1A}$. Donner les valeurs numériques de $\overline{O_1A_1}$ et γ_1.
c) Où doit-on placer un objet AB pour que son image A_1B_1 à travers L_1 soit réelle et agrandie ?

B/ L'oculaire :

a) Pour observer une image réelle directement à l'œil nu, où doit-elle se situer ?
b) où faut-il placer l'oculaire L_2 pour qu'un œil emmétrope puisse observer l'image $A'B'$ de A_1B_1 à travers L_2 sans accommodation ?
c) Sur place l'oculaire L_2 à cet endroit. On prendra f_2' = 4,0 cm. Peut-on dessiner l'image A'B' de A_1B_1 ?
d) Représenter l'angle α' sous lequel on voit $A'B'$ et exprimer cet angle en fonction de γ_1 et f_2'.

Scanné avec CamScanner

C/ Doublet de lentilles minces :

On appelle doublet de lentilles minces une association de deux lentilles minces L_1 et L_2. On caractérise ce doublet par f_1' et f_2', les distances focales, et par l'écartement $\Delta = \overline{F_1'F_2}$.

a) Dans le cas général, donner les positions des foyers F et F' du doublet. Pour cela, on calculera $\overline{O_1F}$ en fonction de f_1' et Δ, puis $\overline{O_2F'}$ en fonction de f_2' et Δ.

b) Calculer $\overline{O_1F}$ et $\overline{O_2F'}$ dans le cas du microscope précédent. Vérifier graphiquement ces positions.

D/ Grossissement :

On rappelle que le grossissement commercial d'un instrument d'optique est $G_c = \frac{\alpha'}{\alpha_{ref}}$ où α_{ref} est l'angle sous lequel un observateur verrait AB à une distance conventionnelle dpp correspondant au Punctum Proximum d'un ceil normal (dpp = 250 mm) et α' l'angle sous lequel on voit l'image de AB dans l'instrument d'optique.

a) En s'aidant d'un dessin, calculer le grossissement commercial de l'oculaire G_{c_2} du microscope précédent en fonction de f_2' et dpp. Donner sa valeur numérique.

b) Exprimer le grossissement G_c du microscope en fonction de G_{c_2} et γ_1. Calculer sa valeur numérique.

E/ Puissance :

On rappelle que la puissance commerciale P d'un instrument d'optique est définie par $P = \frac{\alpha'}{\overline{AB}}$. Calculer celle du microscope précédent en fonction de γ_1 et f_2'. Calculer numériquement P (on précisera son unité).

F/ Résolution :

On rappelle que le pouvoir séparateur de l'œil est d'une minute d'arc. Calculer la taille du plus petit objet visible avec le microscope précédent. En fait, quel phénomène physique intervient avant, empêchant d'atteindre cette résolution ?

Scanné avec CamScanner

UFR MI

Université Félix Houphouët Boigny
(Rép. Côte d'Ivoire)

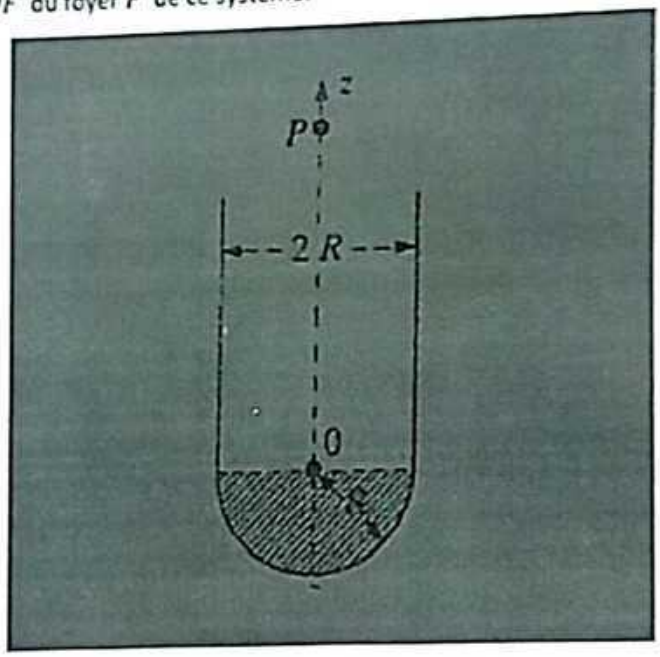
LICENCE 1 MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE
DEUXIEME SESSION 2020-2021
UE OPTIQUE
Durée : 02 heures

Exercice 1 : Lentille demi-boule (8 points)

On considère un tube en verre, cylindrique, d'axe vertical Oz, d'épaisseur négligeable et de diamètre $2R = 8\ cm$. Le tube est terminé à sa partie inférieure par une surface hémisphérique de centre O, de sommet S et de rayon R. Une source lumineuse ponctuelle P est placée sur l'axe S_z du tube, à la cote $\overline{OP} = 27\ cm$ au-dessus de O. On ne s'intéresse qu'aux rayons lumineux voisins de l'axe S_z. L'eau d'indice $n = \frac{4}{3}$ remplit la partie hémisphérique du tube, son niveau horizontal contenant O (voir figure).

1/ Déterminer la position $\overline{OP'}$ de l'image P' de P à travers ce système. Construire la marche d'un rayon lumineux issu de P.

2/ Déterminer la position $\overline{OF'}$ du foyer F' de ce système.



Exercice 2 : Microscope (12 points)

Un microscope est un instrument qui comprend deux système convergents, qu'on supposera réduits chacun à une lentille mince : l'objectif L_1, de centre optique O_1, devant lequel est situé l'objet, et l'oculaire L_2, de centre optique O_2, placé devant l'œil de l'observateur. Les distances focales sont très différentes, de l'ordre du millimètre pour l'objectif, du centimètre pour l'oculaire. Les 2 systèmes ont le même axe optique.

1/ Pour comprendre le principe de l'appareil, faire un schéma en prenant :

Scanné avec CamScanner

$\overline{O_1O_2} = 9cm$; $f_1' = 1{,}5\ cm$; $f_2' = 4\ cm$; $\overline{AO_1} = 2\ cm$; $AB = 0{,}5\ cm$.
Construire l'image de AB donnée par le microscope (échelle unité).
Quel est l'intérêt de l'appareil ?

2/ En réalité un microscope est tel que, par exemple : $\overline{O_1O_2} = 12cm$; $f_1' = 2\ mm$; $f_2' = 2\ cm$.
Un objet AB de longueur 1μ m est placé perpendiculairement à l'axe principal, à $2{,}04\ mm$ devant L_1.
Calculer la position $\overline{O_2A'}$ et la taille $\overline{A'B'}$ de l'image.

3/ l'observateur met son œil au foyer image de l'oculaire. Déterminer le diamètre apparent de l'image, c'est-à-dire l'angle θ' sous lequel elle est observée.

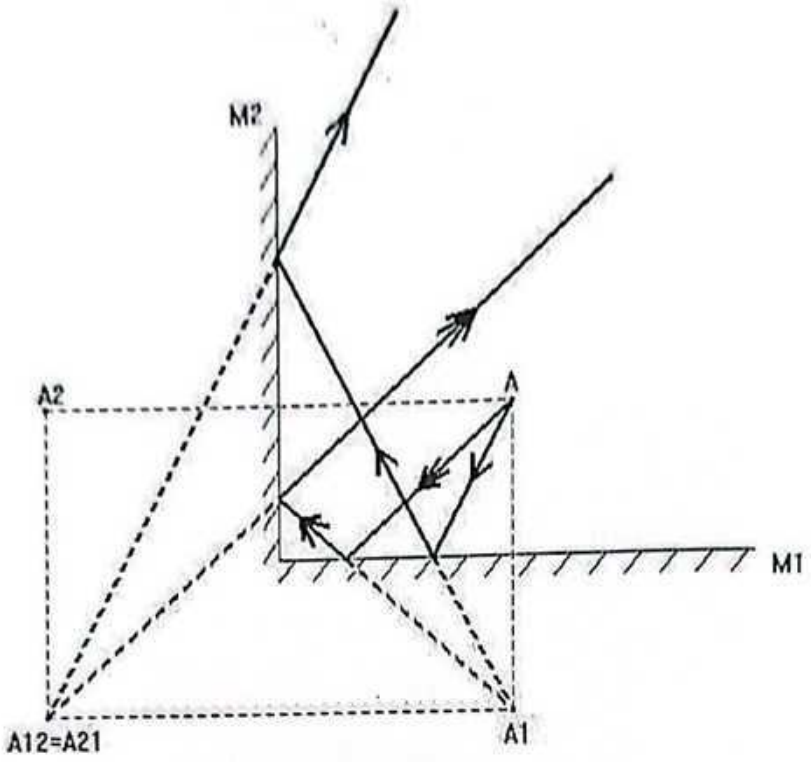
4/ Calculer le diamètre apparent θ de l'objet AB lorsqu'on l'observe à l'œil nu à la distance de $25\ cm$. Calculer le grossissement $G = \theta' / \theta$ du microscope (rapport du diamètre apparent de l'image au diamètre apparent de l'objet).

Scanné avec CamScanner

Correction

Exercice 1 :Miroir plan

A' image de A donné par un miroir plan est le symétrique de A par rapport au plan du miroir.



Construction de A1 image de A par le miroir M1 :

A1 est le symétrique de A par rapport au plan du miroir M1.
A1 est en avant du miroir M2, il peut donc jouer le rôle d'objet réel par rapport au miroir M2.

Construction de A12 image de A1 par le miroir M2 :

A12 est le symétrique de A1 par rapport au plan du miroir M2.

Le processus ne peut pas se poursuivre par une nouvelle réflexion sur M1 car A12 se trouve en arrière de M1 et ne peut donc jouer le rôle d'objet réel pour M1.

Construction de A2 image de A par le miroir M2 :

A2 est le symétrique de A par rapport au plan du miroir M2.
A2 est en avant du miroir M1, il peut donc jouer le rôle d'objet réel par rapport au miroir M2.

Construction de A21 image de A2 par le miroir M1 :

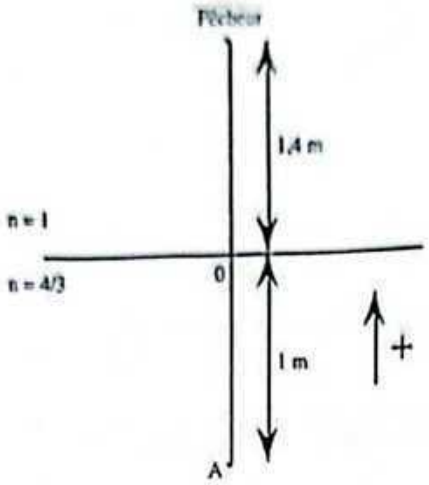
A21 est le symétrique de A2 par rapport au plan du miroir M1.

Scanné avec CamScanner

Le processus ne peut pas se poursuivre par une nouvelle réflexion sur M2 car A21 se trouve en arrière de M2 et ne peut donc jouer le rôle d'objet réel pour M2.

Finalement, l'observateur peut voir 3 images : A1, A2, A21=A12.

Exercice 2 : Dioptre plan



1. Soit OA' la distance observée : $\frac{n}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OA'}}$ donc $\overline{OA'} = \frac{3\overline{OA}}{4}$ soit

   $\overline{OA'} = -0{,}75m$.

   Doù $\overline{P_eA'} = -1{,}4 - 0{,}75 = -2{,}15m$.

   Le pêcheur voit donc le poisson à 2,15 m en dessous de lui.

2. Cette fois, on choisit le sens positif vers le bas.

   $\frac{1}{\overline{OP_e}} = \frac{n}{\overline{OP'_e}}$ donc $\overline{OP'_e} = -1{,}86m$ et $\overline{AP'_e} = -2{,}86m$.

   Le Poisson voit donc le pêcheur à 2,86 m au dessus de lui.

3. $\frac{n}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OA'}}$. donc $n\overline{OA'} = \overline{OA}$, et $\overline{OA} = n(\overline{OA} + \overline{AA'})$ d'ou $(1-n)\overline{OA} = n\overline{AA'}$ or

   $\overline{AA'} = 0{,}15m$ donc h = $\overline{OA}$ = -0,6 m.

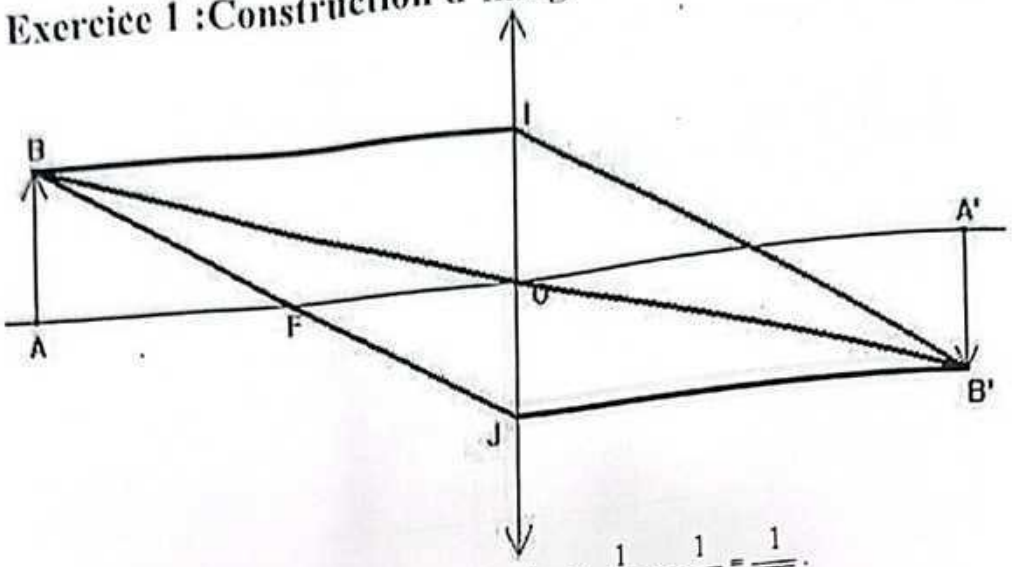
   Donc il doit y avoir 60 cm d'eau au-dessus du poisson pour qu'il subisse

Scanné avec CamScanner

Correction

Lentilles

Exercice 1 :Construction d'images :



Formule de conjugaison avec origine au centre optique: $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$.

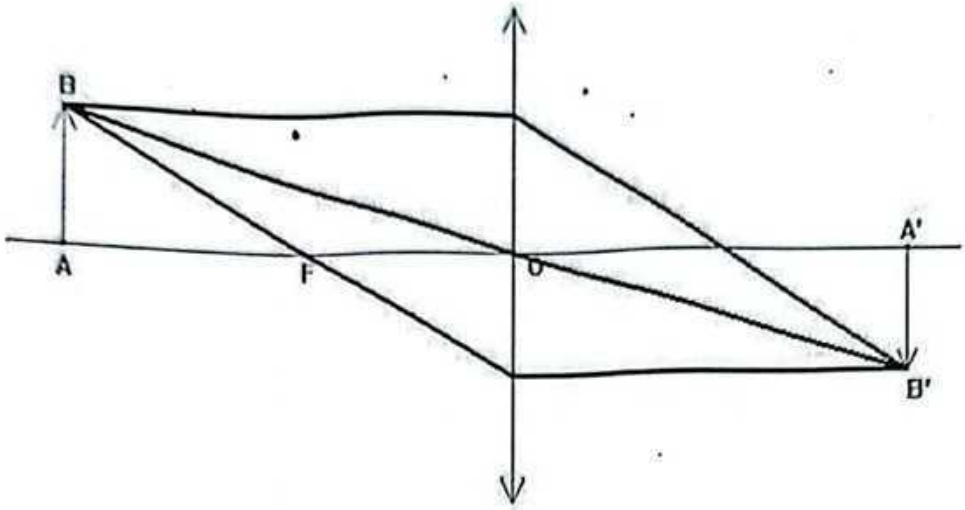
Formule de grandissement avec origine au centre optique: $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

Formules de grandissement avec origine aux foyers:

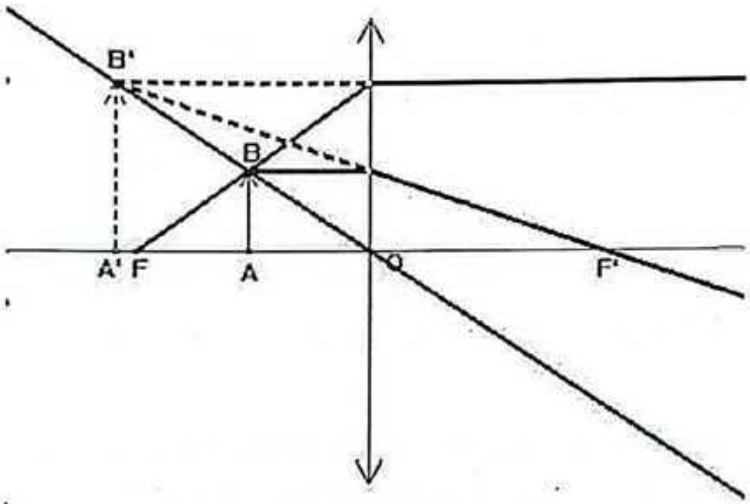
- $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{AB}}$ en appliquant le théorême de Thales aux triangles FAB et FOJ, on obtient : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$
- $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}}$ en appliquant le théorême de Thales aux triangles F'A'B' et F'OI, on obtient : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$
- $\gamma = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} \Rightarrow \overline{FA}\,\overline{F'A'} = \overline{OF}.\overline{OF'} = -\overline{OF'}^2$ (Formule de Newton)

1er Cas : $A \in]-\infty, F]$, l'objet est réel et l'image est réelle.

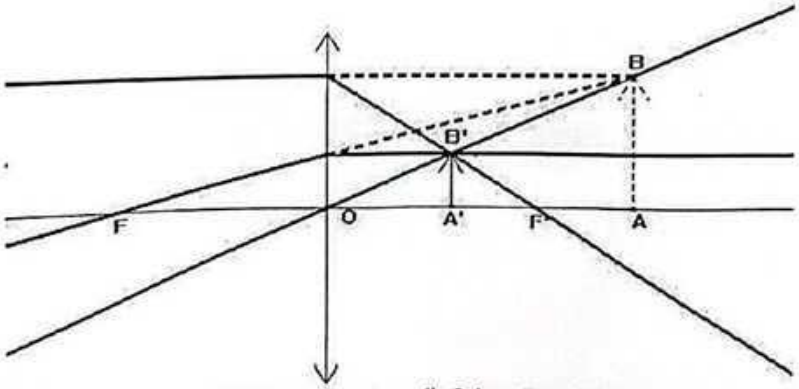
Scanné avec CamScanner



2ème cas : $A \in [F, O]$, l'objet est réel, l'image est virtuelle :



3ème cas : $A \in [O, +\infty[$, l'objet est virtuel, l'image est réelle:



Scanné avec CamScanner

CORRECTION OPTIQUE (17 pts)

1) Appliquons la formule de conjugaison avec origine au centre optique O de la lentille

$\frac{1}{OA_1} - \frac{1}{OS} = \frac{1}{f}$ **(1 pts)** $\Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f}$ **(0,5 pts)**

Finalement $x_1 = \frac{df}{d-f}$ **(0,5 pts)**

2. 1) La relation de conjugaison du dioptre plan donne : $\frac{1}{\overline{SA_1}} = \frac{n}{\overline{SA_2}}$ **(1 pts)** $\Rightarrow$

$\overline{SA_2} = n\overline{SA_1}$ **(0,5 pts)**

2. 2) D'après la question précédente, on a : $\overline{SA_2} = n\overline{SA_1}$

Introdutsons le point O : $\overline{SO} + \overline{OA_2} = n\overline{SO} + n\overline{OA_1} \Rightarrow \overline{OA_2} = (1-n)\overline{OS} + nx_1$ **(0,5 pts)**. On obtient finalement : $\overline{OA_2} = (1-n)(D-h) + nx_1$ **(0,5 pts)**

3) On règle x_1 tel que $\overline{OA_2} = \overline{OM} = D$ **(0,5 pts)** $\Rightarrow D = (1-n)(D-h) + nx_1$. **(0,5 pts)**

Finalement : $n = \frac{h}{x_1 + h - D}$ **(0,5 pts)**

4. 1) A_3 est le symétrique orthogonal de A_2 par rapport au miroir **(0,5 pts)**. A_3 est donc confondu avec A_2. **(0,5 pts)**

4. 2) A_2 est l'image de A à travers le système, en vertu du principe du retour inverse de la lumière, A_3 a pour image A. **(1 pts)**

4. 3) Les rayons sont réfléchis en A_2 et retournent donc au point A (voir figure 3). **(2 pts)**

5. 1) Le liquide a le même indice n et hauteur h que le parallélépipède. L'image finale A' se forme de la même façon en A. **(1,5 pts)**

5. 2) L'image finale A' se forme en A lorsque A_2 se forme en M V. Dans ces conditions l'indice n du milieu est donné par la relation trouvée à la question 3 et dépend de x_1 (d) et de h **(1 pts)**. La mesure de d et h fournit donc n. **(0,5 pts)**

6. 1) On a : $\overline{SA_2} = \frac{3}{2}\overline{SA_1}$. Or $\overline{SA_2} = \overline{SM} = 3$ cm, on obtient donc $\overline{SA_1} = 2$ cm. **(0,5 pts)**

6. 2) Voir figure 4. **(1 pts)**

7. 1) B_1 se forme dans le plan orthogonal à l'axe optique de la lentille et passant par A_1. **(0,5 pts)**

7. 2) Voir figure 4. **(1 pts)**

8. 1) Le grandissement transversal d'un dioptre plan est 1. **(0,5 pts)**

8. 2) Voir figure 4. **(0,5 pts)**

Scanné avec CamScanner

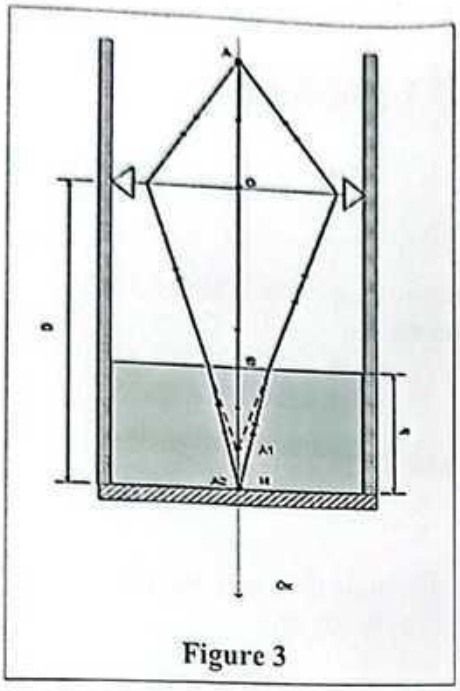


Figure 3

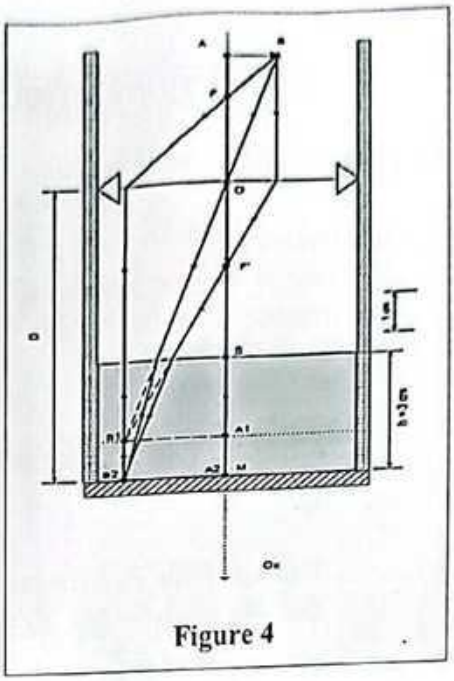


Figure 4

Scanné avec CamScanner

CORRECTION OPTIQUE SESSION 1 2016-2017

Exercice 1 Lentille demi-boule

1. Déterminons $\overline{OP'}$

Le système est une lentille demi-boule,constituée de l'association du dioptre,plan air-eau et du dioptre sphérique eau-air

$P \xrightarrow[(1-n)]{D\ plan} P_1 \xrightarrow[(n-1)]{D\ sphérique} P'$

. L'image P_1 de P à travers le dioptre plan O(air-eau) est telle que $\frac{1}{\overline{OP}} = \frac{n}{\overline{OP_1}}$ (1)

. L'image P' de P_1 à travers le dioptre sphérique (eau-air) est telle que $\frac{n}{\overline{OP'}} - \frac{1}{\overline{OP_1}} = \frac{n-1}{\overline{OS}}$ (2) donc,d'après (1) et (2) on a :

$\frac{n}{\overline{OP'}} - \frac{1}{n\,\overline{OP}} = \frac{n-1}{-R}$

Soit $\overline{OP'} = \frac{n^2 R\,\overline{OP}}{R - n(n-1)\overline{OP}}$

Application numérique :

$\overline{OP} = +27cm; R = \overline{SO} = 4cm; n = \frac{4}{3}$;On obtient $\overline{OP'} = -24cm$.

L'image P' est situé à $24cm$ au-dessous de O,donc à $20cm$ au dessous du fonds S du tube

Scanné avec CamScanner

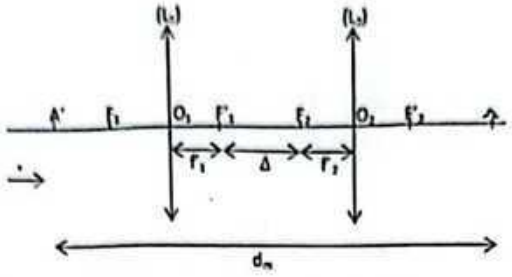
Schéma



2. La proposition $\overline{OF'}$ du foyer image F'
On a : $\overline{OP} = \infty \Rightarrow \overline{OF'}(image)$ Ainsi $\overline{OF'} = \frac{n^2R}{(\frac{R}{\infty})-n(n-1)}$
Soit $\overline{OF'} = -\frac{nR}{n-1}$
A.N : $\underline{\overline{OF'} = -16cm}$

Scanné avec CamScanner

Exercice 2



1. O_1 a pour image Ω à travers L_2.

$\overline{F_2O_1}.\overline{F_2'\Omega} = f_2.f_2' = -f_2'^2$(formule de Newton)

$\Rightarrow \overline{F_2'\Omega} = -\frac{f_2'^2}{\overline{F_2O_1}}$.Or $\overline{F_2O_1} = \overline{F_2F_1'} + \overline{F_1'O_1} = -\Delta - f_1'$

$\Rightarrow \overline{F_2'\Omega} = \frac{f_2'^2}{-\Delta - f_1'}$

$\Rightarrow \overline{F_2'\Omega} = \frac{f_2'^2}{\Delta + f_1'}$

A.N : $\overline{F_2'\Omega} = \frac{30^2}{180+2}$

$\overline{F_2'\Omega} = 4,945mm$

$\delta_2 = \delta_{L_2} = -\frac{\overline{F_2'\Omega}}{f_2'} = -\frac{f_2'}{\Delta + f_1'}$

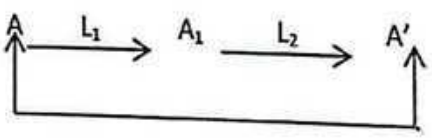
$a = |\delta_2|.D$

$a = \frac{f_2'}{\Delta + f_1'}.D$

A.N $a = \frac{30}{180+2} \times 11$

$a = 1,813\,mm$

2)



Microscope≡Doublet non accolé L_1/L_2

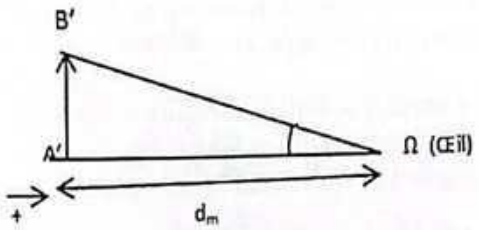
$\delta_1 = \delta_1.\delta_2 = (-\frac{\overline{F_1'A_1}}{f_1'}).(-\frac{\overline{F_2'A'}}{f_2'})$

$\overline{F_2'A'} = \overline{F_2'\Omega} + \overline{\Omega A'} = \frac{f_2'^2}{\Delta + f_1'} - d_m$

$\overline{F_1'A_1} = \overline{F_1'F_2} + \overline{F_2A_1}$

Scanné avec CamScanner

$\overline{F_1'A_1} = \Delta + \overline{F_2A_1}$
Or $\overline{F_2A_1}.\overline{F_2'A'} = -f_2'^2$
$\overline{F_2A_1} = -\frac{f_2'^2}{\overline{F_2'A'}}$
$\Rightarrow \overline{F_1'A_1} = \Delta - \frac{f_2'^2}{\overline{F_2'A'}}$
$\delta = (-\frac{\Delta - \frac{f_2'^2}{\overline{F_2'A'}}}{f_1'}).(-\frac{\overline{F_2'A'}}{f_2'})$
$\delta = \frac{\Delta.\overline{F_2'A'} - f_2'^2}{f_1'f_2'}$
$\delta = \frac{\Delta(\frac{f_2'^2}{\Delta + f_1'} - d_m) - f_2'^2}{f_1'f_2'}$
A.N : $\delta = \frac{180(\frac{30^2}{180+2} - 250) - 30^2}{2\times 30}$
$\delta = -750,16.$
3.a)



$A'B'$,l'image de l'objet AB à travers le microscope,est vue par l'observateur sous l'angle α. L'image $A'B'$ étant de petite taille,on a :$\alpha \backsimeq \frac{A'B'}{d_m}$ Or $\alpha \geq \varepsilon$,
Soit : $\frac{A'B'}{d_m} \geq \varepsilon$
$\frac{|\delta|AB}{d_m} \geq \varepsilon$
$AB \geq \frac{\varepsilon d_m}{|\delta|}$
$\Rightarrow l = \frac{\varepsilon d_m}{|\delta|} \Rightarrow l = -\frac{\varepsilon d_m}{\delta}$
b)
$\varepsilon = 1,5' = \frac{1,5\times\pi}{180\times 60} = 4,36.10^{-4} rad$
$l = \frac{-4,36.10^{-4}\times 250}{-750,16}$
$l = 0,145.10^{-3}\, mm$
$l = 0,145\, \mu m$

Scanné avec CamScanner

UFR MI I.I Année 2018-2019

CORRECTION : OPTIQUE GEOMETRIQUE SESSION 1

EXERCICE 2

On donne

$$u_1(x,t) = a\cos[\omega(t - \frac{x}{c})] \text{ et}$$
$$u_2(x,t) = a\cos[\omega(t + \frac{x}{c}) + \varphi]$$

1. Que représente φ ?
   φ représente le déphasage entre u_1 et u_2 ou l'une des composantes de la phase de u_2.
2. Trouvons l'abscisse x_0 d'un point de l'axe Ox où u_1 et u_2 vibrent en phase.
   u_1 et u_2 sont en phase au point x_0 ssi $u_1(x_0,t) = u_2(x_0,t)$
   Pour tout x on a $u_1(x,t) = u_2(x,t)$

$$\Leftrightarrow\ a\cos[\omega(t - \frac{x}{c})] = a\cos[\omega(t + \frac{x}{c}) + \varphi]$$
$$\cos[\omega(t - \frac{x}{c})] = \cos[\omega(t + \frac{x}{c}) + \varphi]$$
$$\omega(t - \frac{x}{c}) = \omega(t + \frac{x}{c}) + \varphi + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{N})$$
$$-\frac{2\omega}{c}x = \varphi + 2n\pi$$
$$x_n = -\frac{c}{2\omega}(\varphi + 2n\pi)$$
$$x_0 = -\frac{c\varphi}{2\omega}$$

3. Calculons la valeur de φ et déterminons l'onde résultante $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_1(x,t) + u_2(x,t) \\ &= a\cos[\omega(t - \frac{x}{c})] + a\cos[\omega(t + \frac{x}{c}) + \varphi] \\ &= a\cos[\omega t - \frac{\omega x}{c}] + a\cos[\omega t + \frac{\omega x}{c}] \\ &= a(2\cos\omega t\cos\frac{\omega}{c}x). \end{aligned}$$

Scanné avec CamScanner

On remarque bien qu'il s'agit d'une onde stationnaire avec $\varphi = \psi = 0$

4. • Position des Nœuds
Soit x les positions des Nœuds
$|\cos kx| = 0$
$\cos kx = 0$

$$\Rightarrow kx = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad (n \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{1}{k}(\frac{\pi}{2} + n\pi)$$
$$= \frac{\lambda}{2\pi}(\frac{\pi}{2} + n\pi)$$
$$= \frac{\lambda}{4}(1 + 2n)$$

• Position des ventres.
$|\cos kx| = 1$

$$\Leftrightarrow \cos kx = 1 \quad \text{Ou} \quad \cos kx = -1$$
$$kx = 2\pi n \quad \text{Ou} \quad kx = \pi + 2\pi n$$
$$\frac{2\pi}{\lambda}x = 2\pi n \quad \text{Ou} \quad \frac{2\pi}{\lambda}x = \pi + 2\pi n$$
$$x = n\lambda \quad \text{Ou} \quad x = \lambda(\frac{1}{2} + n)$$

5. • Les distances entre deux nœuds consécutifs.
On a : $x(n) = \frac{2n+1}{4}\lambda$ et $x(n+1) = \frac{2(n+1)+1}{4}\lambda$

$$x(n+1) - x(n) = \frac{2(n+1)+1}{4}\lambda - \frac{2n+1}{4}\lambda$$
$$= \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4}\lambda$$
$$= \frac{\lambda}{2}$$

• Entre deux ventre consécutifs.
$x(n) = \frac{n}{2}\lambda$ et $x(n+1) = \frac{n+1}{2}\lambda$
$x(n+1) - x(n) = \frac{n+1}{2}\lambda - \frac{n}{2}\lambda = \frac{\lambda}{2}$
Donc $x(n+1) - x(n) = \frac{\lambda}{2}$

Scanné avec CamScanner

- Entre nœuds et ventre.
  $x_N(n) - x_V(n) = \frac{2n+1}{4}\lambda - \frac{n}{2}\lambda$
  $x_N(n) - x_V(n) = \frac{\lambda}{4}$

6. Le problème qui va contrarier la vérification expérimentale de cette étude est à $\varphi \neq 0$

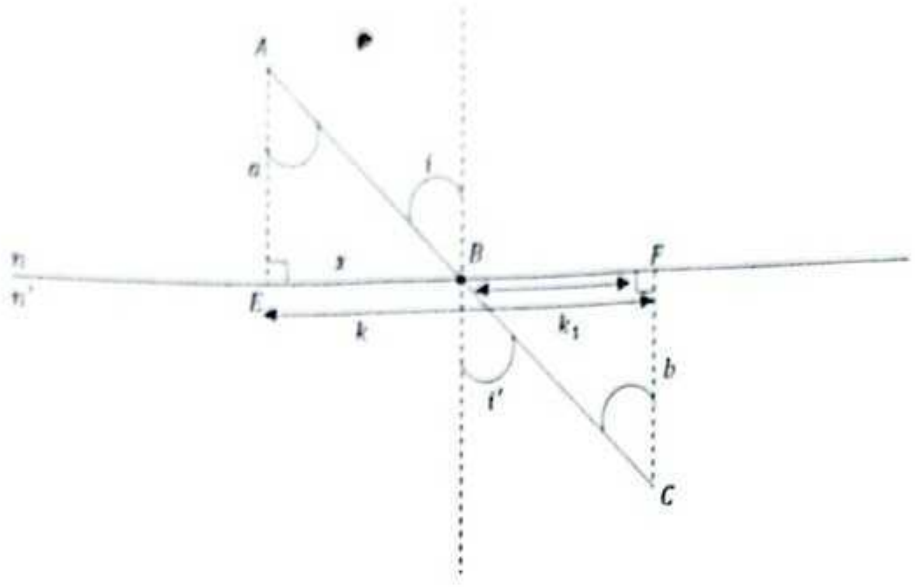
Scanné avec CamScanner

UE OPTIQUE GEOMETRIQUE : 2019-2020

QUESTION DE COURS

1 VOIR COURS

2 A partir du principe de Fermat, établissons les deux lois de Snell-Descartes pour la réfraction



$k = EF$

$k_1 = BF$

On a: $L = nAB + n'BC$

- Considérons le triangle ABE rectangle en E

  D'après la propriété de Pythagore on a :

$$AB^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow AB = \sqrt{x^2 + a^2}$$

- De même pour le triangle BFC rectangle en F

$$BC = \sqrt{b^2 + (k-x)^2} \quad {k_1}^2 = (k-x)^2$$

D'où $L = n\sqrt{x^2 + a^2} + n'\sqrt{b^2 + (k-x)^2}$

Donc $\boxed{dL = \frac{nx}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{n'(k-x)}{\sqrt{b^2+(k-x)^2}}}$

D'après le triangle de Fermat $dL = 0$

$$dL = 0 \Leftrightarrow \frac{nx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{n'(k-x)}{\sqrt{b^2 + (k-x)^2}}$$

Scanné avec CamScanner

$$\text{or} \begin{cases} \sin i = \dfrac{x}{AB} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \\ \sin i' = \dfrac{k_1}{BC} = \dfrac{(k-x)}{\sqrt{b^2+(k-x)^2}} \end{cases}$$

$$\text{donc } dL = 0 \Leftrightarrow \boxed{n \sin i = n' \sin i'} \quad \textit{Deuxième loi de la réfraction.}$$

3. On dit qu'un système optique est rigoureusement stigmatique pour le couple de points (A,A') si et seulement si tous les rayons issus de A passent par A' après avoir traverser le système optique.

4.
   a) Image virtuelle, car l'eau est un milieu transparent et homogène.
   b) Image virtuelle, car dans un miroir plan l'objet et l'image sont toujours de nature opposée.
   c) Image réelle, car l'image d'un immeuble prise par un appareil photographique se forme sur un écran qui se trouve dans l'espace image réelle.

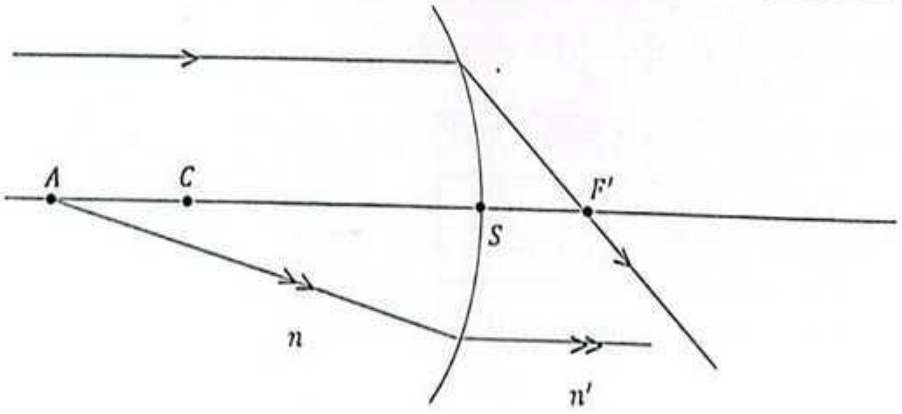
5.
   a. $\frac{n}{SA} - \frac{n'}{SA'} = \frac{n-n'}{SC}$ {Formule de Descartes}
   b.

$\overline{SA} \longrightarrow \infty$
$\overline{SA'} = \overline{SF'}$
$-\frac{n'}{\overline{SA'}} = \frac{n-n'}{\overline{SC}}$

$\Rightarrow \boxed{\overline{SF'} = \frac{n'}{n'-n}\overline{SC}}$

$SA = \overline{SF'}$
$\overline{SA'} \longrightarrow \infty$
$\Rightarrow \frac{n}{SF} = \frac{n-n'}{SC}$

$\Rightarrow \boxed{\overline{SF} = \frac{n}{n-n'}\overline{SC}}$



6. Montrons que F et F' sont confondus

Scanné avec CamScanner

- Posons $n = -n'$

$$\overline{SF} = \frac{n}{n - n'}\overline{SC}$$

$$\overline{SF} = \frac{-n'}{-n' - n'}\overline{SC}$$

$$\boxed{\overline{SF} = \frac{1}{2}\overline{SC}} \quad (1)$$

- Posons $n' = -n$

$$\overline{SF'} = \frac{n'}{n' - n}\overline{SC}$$

$$\overline{SF'} = \frac{-n}{-n - n}\overline{SC}$$

$$\boxed{\overline{SF'} = \frac{1}{2}\overline{SC}} \quad (2)$$

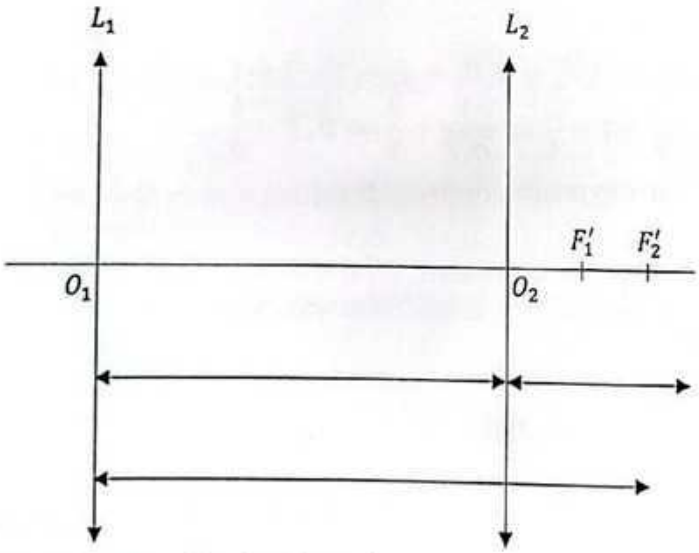
(1) Et (2) $\Rightarrow \overline{SF'} = \overline{SF}$

$\Rightarrow \overline{F'} = \overline{F}$

Par conséquent, les deux foyers principaux du miroir sphérique sont véritablement confondus.

Exercice 1 (Voir correction 2016-2017 exo 1.)

Exercice 2



1. Déterminons les distances focales f'_1 et f'_2

Scanné avec CamScanner

$f'_1 = 4mm \quad f'_2 = 2mm \quad O_1O_2 = d = 3mm$

2. Position des foyers F' et F

Déterminons $f' \Rightarrow F \longrightarrow \infty$

$$\infty \xrightarrow{L_1} F_1 \xrightarrow{L_2} F'$$

(L_2) Relation de conjugaison origine au centre.

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F'_1}} = \frac{1}{f_2'}$$

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{\overline{O_2F_1'}}$$

$$\overline{O_2F_1'} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'}$$

$$= -3 + 4 = 1$$

$$\overline{O_2F_1'} = 1$$

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} = \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow \overline{O_2F'} = \frac{2}{3}$$

- **DETERMINONS f**

$$F \xrightarrow{L_1} F_2 \xrightarrow{L_2} \infty$$

Relation de conjugaison

$$\frac{1}{\overline{O_1F_2}} = \frac{1}{\overline{O_2F_2}} - \frac{1}{f'_1}$$

$$\overline{O_1F_2} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = \overline{O_1O_2} + f_2 = 3 - 2 = 1$$

$$; \frac{1}{\overline{O_1F}} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overline{O_1F} = \frac{4}{3}$$

3. Position des points principaux H et H'

$$\overline{O_1F} = \frac{4}{3} \Rightarrow \overline{O_1H} = \frac{4}{3}$$

$$\overline{O_2F} = \frac{2}{3} \Rightarrow \overline{O_2H} = \frac{2}{3}$$

4. Relation F_1F_2 et d

$$U = V_1 + V_2 - dV_1V_2$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - d\left(\frac{1}{f'}\right)\left(\frac{1}{f'_2}\right)$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f'_2} - \frac{d}{f'_1 f'_2}$$ **Formule de Gustran**

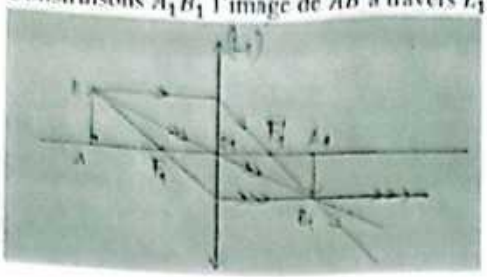
Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE L'EXAMEN D'OPTIQUE : PREMIERE SESSION

PROBLEME

A/ L'objectif

a) Construisons A_1B_1 l'image de AB à travers L_1.



b) Calculons $\overline{O_1A_1}$ de A_1 et le grandissement γ_1 de L_1 en fonction de f' et $p_1 = \overline{O_1A}$.

D'après la relation de conjugaison, on a :

$$AB \xrightarrow{(L_1)} A_1B_1$$

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{\overline{O_1A} + f_1'}{f_1'.\overline{O_1A}}$$

D'où $\frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{\overline{O_1A}+f_1'}{f_1'.\overline{O_1A}}$ or $p_1 = \overline{O_1A}$.

$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{p_1+f_1'}{f_1'.p_1}$; alors $\overline{O_1A_1} = \frac{f_1'.p_1}{p_1+f_1'}$

On a : $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}$ or $p_1 = \overline{O_1A}$ et $\overline{O_1A_1} = \frac{f_1'.p_1}{p_1+f_1'}$.

$$\gamma_1 = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{f_1'.p_1}{p_1+f_1'}.\frac{1}{p_1} = \frac{f_1'}{p_1+f_1'}$$

Alors $\gamma_1 = \frac{f_1'}{p_1+f_1'}$

Applications numériques.

- $\overline{O_1A_1} = \frac{f_1'.p_1}{p_1+f_1'}$ A.N : $\overline{O_1A_1} = \frac{1,0\times(-1,5)}{1,0+(-1,5)} = 3\ cm$
- $\gamma_1 = \frac{f_1'}{p_1+f_1'}$ A.N : $\gamma_1 = \frac{1,0}{1-1,5} = -2$

c) Pour avoir une image réelle, il faut que $\overline{O_1A_1} > 0$.

Etudions donc les cas possibles :

- Si $p_1 > 0$: alors l'objet est virtuel, ce qui est toujours vrai.
- Si $p_1 < 0$: alors l'objet est réel, pour cela, il faut $p_1 + f_1' < 0$ soit $\overline{O_1A_1} < f_1'$ ① : Dans ce cas A_1 doit être avant F_1.

Pour avoir une image agrandie, il faut que $|\gamma_1| > 1$.

Etudions donc les cas possibles :

- Si $p_1 > 0$: C'est le cas impossible
- Si $p_1 < 0$: il faut $\frac{f_1'}{p_1+f_1'} > 0$ ou $\frac{f_1'}{p_1+f_1'} < -1$:

On remarque que $\frac{f_1'}{p_1+f_1'} > 0$ est impossible car $p_1 + f_1' < 0$

$\Rightarrow f_1' > -p_1 - f_1'$ ②

① et ② $\Rightarrow -2f_1' < \overline{O_1A_1} < -f_1'$

Alors pour que l'image A_1B_1 soit réelle et agrandie, il faut qu'on ait : $-2f_1' < \overline{O_1A_1} < -f_1'$.

Scanné avec CamScanner

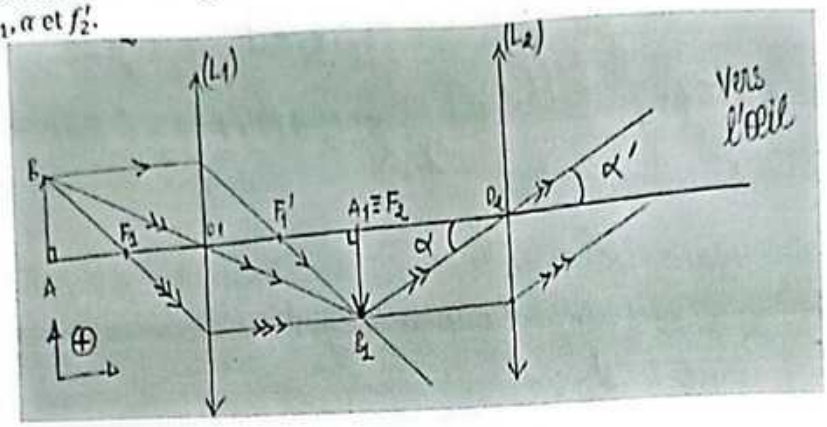
B/ L'oculaire

a) Oui, il est possible de voir une image réelle à l'œil nu mais cela est rendu difficile par l'éclairage ambiant.

b) L'œil voit sans accommodation, si les rayons qui lui arrivent semblent venir de l'infini. Il faut donc que A_1B_1, se trouve dans le plan focal objet de la lentille (L_2).

c) On ne peut pas la dessiner, car l'image est à l'infini.

d) Représentation de l'angle α' sous lequel on voit $A'B'$ et exprimons cet angle en fonction de γ_1, α et f_2'.



- Exprimons de α'.

On a : $tan\alpha' = tan\alpha = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_2F_2}}$ or $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{A_1B_1} = \gamma_1\overline{AB}$

$tan\alpha' = \frac{\gamma_1\overline{AB}}{\overline{O_2F_2}}$ or $\overline{O_2F_2} = -f_2'$

$\Rightarrow tan\alpha' = \frac{\gamma_1\overline{AB}}{-f_2'}$ or $\overline{AB} = a \Rightarrow tan\alpha' = \frac{\gamma_1 a}{-f_2'}$

Pour α' et α petit, on aura $tan\alpha' \approx \alpha' = \frac{\gamma_1 a}{-f_2'}$

Alors : $\alpha' = \frac{\gamma_1 a}{-f_2'}\gamma_1 < 0$, alors $\alpha' > 0$

C/ Doublet de lentilles minces :

a) F' est l'image à travers le doublet d'un point à l'infini sur l'axe, A_∞.

On a donc :

$$A_\infty \xrightarrow{(L1)} F_1' \xrightarrow{(L_2)} F'$$

F' est alors l'image F_1' à travers (L_2). D'après la relation de conjugaison, on a :

$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F_1'}} = \frac{1}{f_2'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2F'}} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{\overline{O_2F_1'}}$

Or $\overline{O_2F_1'} = \overline{O_2F_2} + \overline{F_2F_1'} = \overline{O_2F_2} - \overline{F_1'F_2} = f_2 - \Delta = -f_2' - \Delta$

D'où $\frac{1}{\overline{O_2F'}} = \frac{1}{f_2'} - \frac{1}{f_2'+\Delta} = \frac{f_2'+\Delta-f_2'}{f_2'(\Delta+f_2')} = \frac{\Delta}{f_2'(\Delta+f_2')}$

$\Rightarrow \overline{O_2F'} = \frac{f_2'(\Delta+f_2')}{\Delta}$

De la même façon, F a pour image un point à l'infini sur l'axe, A'_∞ :

$$F \xrightarrow{(L1)} F_2 \xrightarrow{(L_2)} A'_\infty$$

F_2 est l'image de F à travers (L_1). D'après la relation de conjugaison, on a :

Scanné avec CamScanner

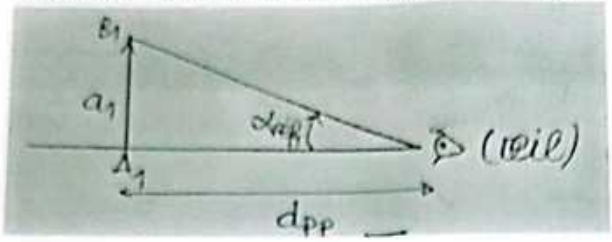
$\frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{f_1'}$

Or $\overline{O_1F_2} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_1'F} = f_1' + \Delta$

D'où $\frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{f_1'} = \frac{f_1' - \Delta - f_1'}{f_1'(\Delta + f_1')} = \frac{-\Delta}{f_1'(\Delta + f_1')}$

$\Rightarrow \overline{O_1F} = -\frac{f_1'(\Delta + f_1')}{\Delta}$

On constate sur la figure que, pour $\alpha_{réf}$ *petit*, $tan\alpha_{réf} \approx \alpha_{réf} \approx \frac{a_1}{dpp}$



Or $\alpha' = -\gamma_1 \frac{a}{f_2'}$. Par ailleurs, $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{a_1}{a} < 0$.

D'où $\alpha' = -\frac{a_1}{a} \cdot \frac{a}{f_2'} = \frac{a_1}{f_2'} > 0 \Rightarrow \alpha' = \frac{a_1}{f_2'}$

Le grandissement commercial est donc : $G_{C_2} = \frac{\alpha'}{\alpha_{réf}}$

$\Rightarrow G_{C_2} = \frac{+a1}{f_2'} \times \frac{1}{\frac{a_1}{dpp}} = \frac{a1}{f_2'} \times \frac{dpp}{a_1} = \frac{dpp}{f_2'}$

$\Rightarrow G_{C_2} = \frac{dpp}{f_2'}$ A.N $G_{C_2} = \frac{25}{4} = 6.25$

Alors $G_{C_2} = 6.25$

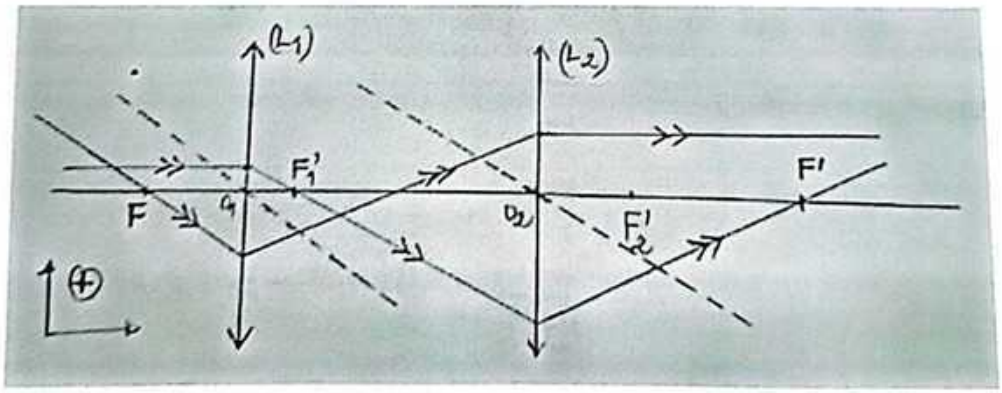
b) $\overline{O_2F'} = \frac{f_2'(\Delta + f_2')}{\Delta}$ A.N : $\overline{O_2F'} = \frac{4(4+2)}{2} = 12\ cm$

$\overline{O_2F'} = 12cm$

$\overline{O_1F} = -\frac{f_1'(\Delta + f_1')}{\Delta}$ A.N : $\overline{O_1F} = -\frac{1(2+1)}{2} = -1{,}5cm$

$\overline{O_1F} = -1{,}5cm$

Vérifions graphiquement ces positions



Pour trouver F, on procède avec un rayon venant de la droite et en exploitant le principe de retour inverse de la lumière.

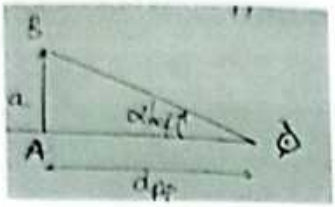
Scanné avec CamScanner

D/ Grossissement

a) Calculons G_{C_2} en fonction de f_2' et dpp.

b) Exprimons G_C en fonction de γ_1 et G_{C_2}.

$\alpha'_{réf} \approx \frac{a}{dpp}$ et $\alpha' = -\gamma_1 \frac{a}{f_2'}$



On en déduit $G_C = \frac{\alpha'}{\alpha_{réf}} = \frac{-\gamma_1 dpp}{f_2'}$

Or $G_{C_2} = \frac{dpp}{f_2'} \Rightarrow G_C = -\gamma_1 G_{C_2}$

A.N $G_C = -(-2) \times 6{,}25 = 12{,}5$

$G_C = 12{,}5$

E/ Puissance

Calculons celle du microscope précédent en fonction de f_2' et γ_1.

La puissance commerciale est donnée par :

$P = \frac{\alpha'}{\overline{AB}} = \frac{\alpha'}{a}$ or $\alpha' = -\gamma_1 \frac{a}{f_2'}$.

D'où $P = \frac{-\gamma_1 \frac{a}{f_2'}}{a} = -\frac{\gamma_1}{f_2'}$

$P = -\frac{\gamma_1}{f_2'}$

A.N : $P = \frac{2}{4\times10^{-2}} = 50m^{-1}$

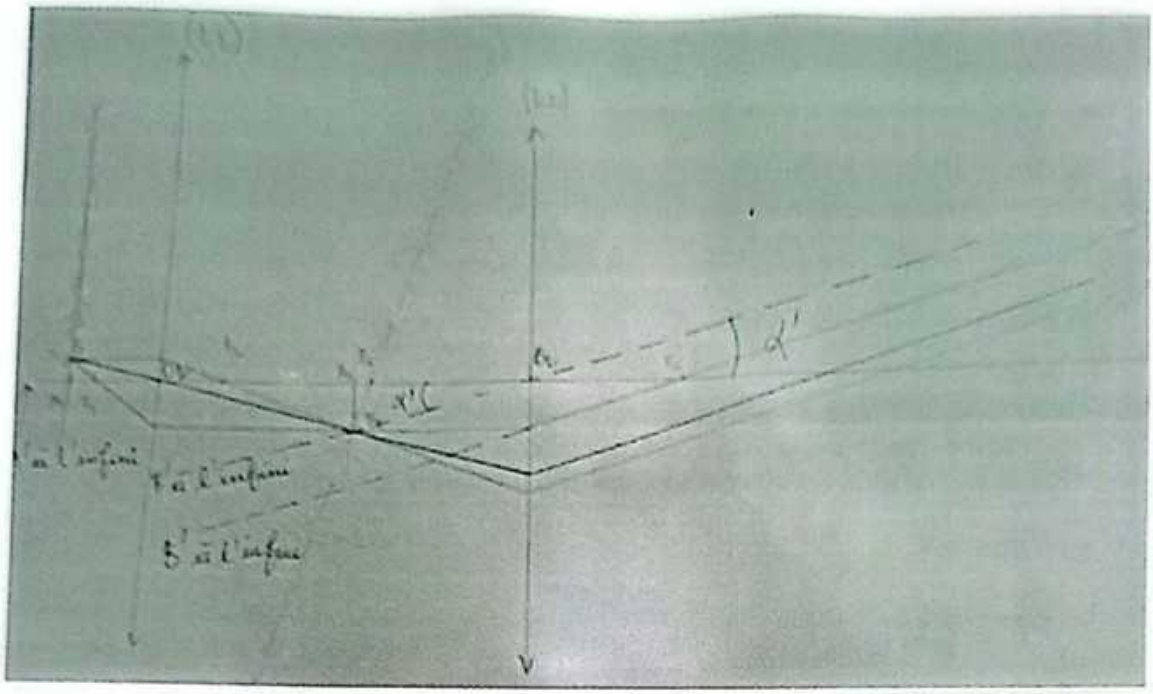
$P = 50m^{-1}$

Scanné avec CamScanner

Correction optique session 2

Exercice 1

1)



Le microscope permet de grossir l'image d'un objet de petites dimensions et de séparer les détails de cette image afin qu'il soit observable à l'œil humain.

2) Calculons la position $\overline{O_2A'}$

- La relation de conjugaison de la lentille (L_1) est :

$$\frac{1}{\overline{O_1A}} - \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{\overline{O_1F_1}} = -\frac{1}{f_1'} \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{\overline{O_1A}}$$

Avec A_1 l'image A par rapport à (L_1).

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{\overline{-AO_1}}$$

A.N

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{2.10^{-3}} + \frac{1}{-2{,}04.10^{-3}}$$

$$\overline{O_1A_1} = 0{,}102m$$

- La relation de conjugaison de la lentille (L_2) est :

$\frac{1}{\overline{O_2A_1}} - \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{\overline{O_2F_2}} = -\frac{1}{f_2'}$ Avec A' l'image A par rapport à (L_2).

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{\overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{-\overline{O_1O_2} + \overline{O_1A_1}}$$

Scanné avec CamScanner

A.N

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{2.10^{-2}} + \frac{1}{-0,12+0,102}$$

$$\overline{O_2A'} = -0,18m$$

- Calculons la taille $\overline{A'B'}$ de l'image

Notons γ_1 et γ_2 les grandissements respectifs des lentilles (L_1) et (L_2).

On a : $\gamma_1 = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{A_1B_1} = \overline{AB}\left(\frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}\right)$

$$\Rightarrow \overline{A_1B_1} = \frac{0,102}{-2,04\times10^{-3}} = -50\mu m$$

$$\Rightarrow \overline{A_1B_1} = -50\mu m$$

$$\gamma_2 = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{A_1B_1}\left(\frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}}\right)$$

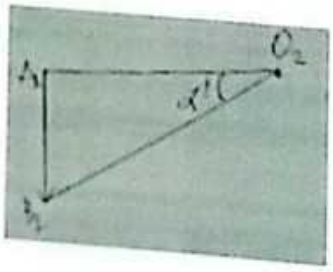
$$\Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{A_1B_1}\left(\frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2O_1}+\overline{O_1A_1}}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{A_1B_1}\left(\frac{\overline{O_2A'}}{-\overline{O_1O_2}+\overline{O_1A_1}}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{A'B'} = -50\left(\frac{-0,18}{-0,12+0,102}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{A'B'} = -500\mu m$$

3) L'observateur met son œil au foyer image de l'oculaire. Déterminons le diamètre apparent de l'image c'est-à-dire θ' sous lequel elle est observée.

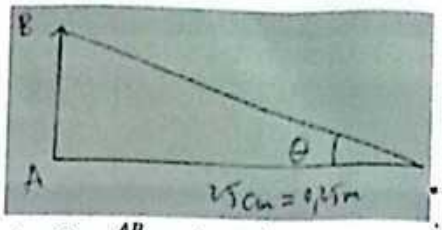


$$tan\theta' = \frac{A_1B_1}{O_2A_1} = \frac{|\overline{A_1B_1}|}{|\overline{O_2A_1}|} = \frac{|\overline{A_1B_1}|}{|\overline{O_2O_1}+\overline{O_1A_1}|} = \frac{50.10^{-6}}{0,12-0,102} = 2,78.10^{-3}$$

$$\theta' = 2,8.10^{-3}rad$$

4) Déterminons le diamètre apparent θ de l'objet observé à l'œil nu, à la distance de $25cm$.

Scanné avec CamScanner



$tan\theta = \frac{AB}{0,25} = 4.10^{-6}$

$\theta = 4.10^{-6}$

Calcul du grossissement $G = \frac{\theta'}{\theta}$ du microscope.

$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{2,8.10^{-3}}{4.10^{-6}} = 700$

$G = 700$

Scanné avec CamScanner

Université FHB
UFR Maths-Info

U.E: Analyse Réelle

Session 1: 25 Juin 2022
Durée: 3h00
Niveau: L1

Exercice 1 (3 points)
Répondre par vrai ou faux. bonne réponse= 0,5 point
Mauvaise réponse= -0,5 point

faux — 1. Toute fonction monotone sur un intervalle fermé et borné sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable.

2. Pour toute fonction f Riemann-intégrable sur $[a, b]$ on a $\forall X \in S_{a,b}, S(f, X) \leq \int_a^b f(x)dx$ où $S_{a,b}$ est l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$ et $S(f, X)$ est la somme de Darboux supérieure de f relativement à X.

Faux — 3. L'équation différentielle $y'cosx + ysinx + y^3 = 0$ est une équation de Ricatti.

faux — 4. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, alors $\exists \zeta \in [a, b]$: $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\zeta) \int_a^b g(x)dx$.

Faux — 5. On considère la fonction $f : x \mapsto x$ définie sur $[0, 2]$.
$\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur I.

6. L'intégrale d'une fonction continue et impaire sur $[-1, 1]$ est nulle .

Exercice 2 (4,5 points) Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}?
2. En déduire I_{2n} et I_{2n+1}.
3. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
4. Montrer que I_n est équivalente à I_{n+1}

Scanné avec CamScanner

5. Calculer nI_nI_{n+1}

6. Donner un équivalent simple de I_n

Exercice 3(7,5 points) Soit F la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{sint}$$

1. Montrer que F est bien définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, puis qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle.

2. Calculer $F'(x)$ et en déduire les variations de F sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

3. A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $t \in [x, 2x] \subset]0, \frac{\pi}{2}[$;

$$0 < t - \frac{t^2}{2} < sint < t$$

4. En déduire que $\frac{1}{t} < \frac{1}{sint} < \frac{1}{t} + \frac{1}{2-t}$

5. Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$ln2 < F(x) < ln2 - ln(\frac{2-2x}{2-x})$$

6. En déduire la limite de $F(x)$ lorsque $x \to 0$.

Exercice 4 (5points)

1. Donner la solution générale de l'équation différentielle $x''+4x = cos(2t)$. Les solutions sont-elles bornées lorsque $t \to +\infty$?

2. Soit $a \in]0, 4[$. Donner la solution générale de l'équation différentielle

$$x'' + ax' + 4x = cos(2t)(E)$$

3. Déterminer la solution de (E)pour les conditions initiales $x(0) = 0; x'(0) = \frac{1}{a}$

4. Déterminer le maximum M_a de cette solution pour $t \geq 0$ en fonction de a.

5. Quelle est la limite de M_a lorsque a tend vers 0?

Scanné avec CamScanner

Universté FHB
UFR MATHS-INFO.

2021-2022

EXAMEN de Calcul Matriciel

1ère Session, Licence 1

Durée : 01H30

EXERCICE 1(5 points)

Répondre par vrai ou faux dans l'ordre des questions, en justifiant.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

1. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$;
2. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(AB) = \det(BA)$;
3. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\det(A^p) = p.\det(A)$;
4. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda A) = \lambda.\det(A)$;
5. Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps non commutatif,
$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) - \det(BA) = 0_{(\mathbb{K},+)}$, l'élément neutre du groupe abelien $(\mathbb{K}, +)$.

EXERCICE 2(15 points)

Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, et $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. a. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, justifier puis déterminer son inverse.

b. Calculer $M = A - xI_3$.

c. Calculer $P(x) = det(M)$.

d. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

2. a. Calculer $A^3 - 3A^2 - 16A - 12I_3$.

b. En déduire l'existence d'une matrice P telle que $AP = I_3$.

c. Donner une écriture de P sous forme de matrice.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$,

a) le système (S_1) suivant :

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 3x + 5y + 3z = 2 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

b) $(S_2) \Leftrightarrow (A - 6I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Scanné avec CamScanner

Universté FHB
UFR MATHS-Info.

2021-2022

EXAMEN d'Espaces Vectoriels

1ère Session, Licence 1

Durée : 01H30

EXERCICE 1 (5 pts)

Répondre par vrai ou faux en justifiant.

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ;
2. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X]; P(3) = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ;
3. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X]; P(3) = 0\}$, une base de F est $\{X^2 - 3X,\ X - 1\}$;
4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$ est une application linéaire ;
5. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y, 2x)$ est une application linéaire.

EXERCICE 2 (15 pts)

$$(\sum) \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}, \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Les variables x_1, x_2, x_3 sont ordonnées naturellement. Trianguler le système d'équations $(\sum)$ à l'aide de l'algorithme de Gauss. Combien a-t-on de variables libres dans ce système ?
2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ constitué par les solutions du système $(\sum)$.
Résoudre le système $(\sum)$ et donner une base de F.
3. Soient $v_1 = (0; 1; 1)$, $v_2 = (1; 2; 1)$, et $v_3 = (1; 1; 0)$. On
désigne par $G =< v_1, v_2, v_3 >$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par v_1, v_2, v_3.
Donner une base de G.
4. Déterminer alors, en suivant par exemple un algorithme du cours, une
équations à 3 inconnues dont G est l'ensemble des solutions.
5. Monter que (v_1, v_2) est une base de G. Préciser l'expression de v_3 dans la base (v_1, v_2) de G.
6. On considère l'application linèaire f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a). Déterminer $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$, les images respectives de e_1, e_2, e_3 de la base β de $\mathbb{R}^3$ en fonction des éléments du même β.

b). En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ l'image de f.

c). Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Posons $(y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2, x_3)$.
Préciser l'expression de (y_1, y_2, y_3) à l'aide de (x_1, x_2, x_3).

d). Déterminer une base de $\ker(f)$ le noyau de f.

e). Déterminer l'intersection de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

f). A-t-on $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$? Justifier.

Scanné avec CamScanner

	2021 /2022
UFR DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE	*Algorithme* ***Examen session1*** *Durée 1H30*

COURS (6pts)

C1 Parmi ces messages affichées par un algorithme lesquels peuvent provenir de l'instruction `Ecrire (a)` : (1) (4.3) saisir a (3.14 E+01) a = -100 (a)

C2 Evaluez l'expression

```
Palindrome← (Palindrome) et (mot[i]=mot[longueur-i+1])
```

Pour mot='2020' sachant que :

- palindrome a été initialisé à vrai
- i varie de 1 à 2

C3 Ecrire l'entête d'une procédure **RAZ** avec paramètres devant servir de remettre à 0 toutes les cellules d'un tableau de100 cellules.

C4 Pour le type Booléen, quel est le domaine de valeur et les opérations possibles ?

Vrai, faux, et, ou, non

Exercice 1 : Suite de FIBONACCI (8 pts)

On veut calculer les n premiers termes de la suite de FIBONACCI :

$U_0=1$, $U_1=1$ et $\forall n$ appartient à IN $U_{n+2}=U_{n+1} + U_n$

Le pseudo code suivant a été écrit :

```
u ←u0
v ←u1
Pour i variant de 1 à n faire
    w←u+v
    u←v
    v←w
```

1.1 Réécrire l'algorithme après une analyse des données utilisées .Insérer l'affichage du terme courant

1.2 Donner l'exécution du programme pour les dix premiers termes.

1.3 On veut utiliser les termes de la suite de **Fibonnaci** pour construire la spirale du même nom. Il s'agit en effet de construire des arcs de cercle de 90 degrés dans des carrés comme expliqué en annexe. On suppose que vous disposez d'une procédure `cercle (rd, ang)` qui permet de construire des arcs de rayon **rd** et d'angle **ang**.

a) Construire la spirale (sur la grille en annexe 4/4 à rendre)

b) Déduire l'algorithme de construction de la spirale en utilisant la procédure `cercle(rd, ang)` avec des paramètres effectifs.

Scanné avec CamScanner

Exercice 2 (6 pts)
Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs (qui sont alors 1 et lui-même).

1°) Ecrire la fonction qui teste la primalité d'un nombre entier à partir du pseudo code suivant :

```
Fonction preml(n)
     assert n >= 2      // n doit être supérieur ou égal à 2
     Pour i de 2 à n -1
          Si i divise n
          Retourne faux
     Fin Pour
     Retourne vrai
```

2°) Dans un algorithme principal, activer la fonction avec un entier (a) à saisir au clavier.
3°) Donner la trace pour a =13.

4°) Soit le tableau (T [1..100] d'entier) contenant les entiers consécutifs de 1 à 100, écrire l'algorithme de création et d'initialisation du tableau T

1	2	3	.	.	.	.	98	99	100

5°) Utiliser dans un algorithme la fonction de test de primalité pour afficher les nombres premiers du tableau.
La méthode ci-dessus donne le même résultat que le crible d'Eratosthène avec moins d'efficacité.

Le **crible d'Ératosthène** est un procédé qui permet de trouver tous les nombres premiers inférieurs à un certain entier naturel donné *N*. L'algorithme procède par élimination :
il s'agit de supprimer d'une table des entiers de 2 à N tous les multiples d'un entier. En supprimant tous les multiples, à la fin il ne restera que les entiers qui ne sont multiples d'aucun entier, et qui sont donc les nombres premiers.
On commence par rayer les multiples de 2, puis à chaque fois on raye les multiples du plus petit entier restant.

On peut s'arrêter lorsque le carré du plus petit entier restant est supérieur au plus grand entier restant, car dans ce cas, tous les non-premiers ont déjà été rayés précédemment.

À la fin du processus, tous les entiers qui n'ont pas été rayés sont les nombres premiers inférieurs à N.

6°) Donner le début (jusqu'à la cellule 20) du tableau pour les 4 premières itérations à partir de 2.

	2	3																	

	2	3																	

Scanné avec CamScanner

Annexe

La suite de Fibonacci doit son nom au mathématicien italien Leonardo Fibonacci qui a vécut au XIIème et XIIIème siècle. Il est connu pour avoir introduit et popularisé en Europe et en Occident la numérotation indo-arabe qui a remplacé pour les calculs la notation romaine peu pratique aux opérations arithmétiques.

Mais il est aussi connu pour avoir mis en évidence une suite mathématique qui porte désormais son nom. Dans la suite de Fibonacci, il n'est pas nécessaire de mémoriser chacun des termes ou nombres de la suite (qui est d'ailleurs infinie). Il suffit de se rappeler sa règle de construction: **à l'exception des deux premiers, chaque terme de la suite est égal à la somme des deux termes qui le précèdent immédiatement**, dit autrement il s'agit d'une suite de nombres dans laquelle tout nombre (à partir du troisième) est égal à la somme des deux précédents:

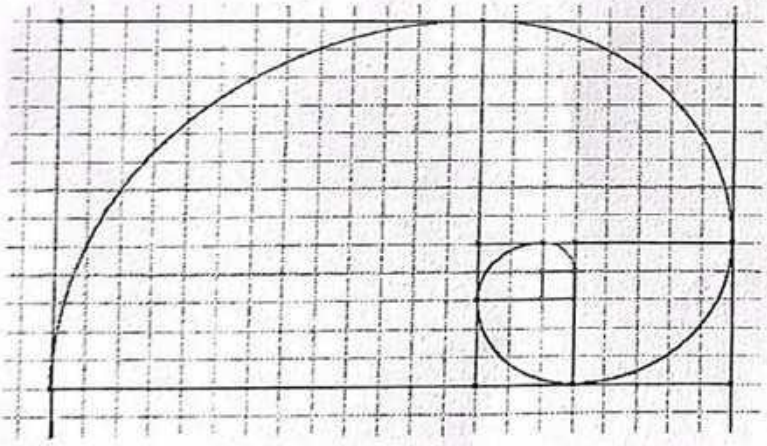
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,...

Il suffit de prendre deux nombres de départ. Les ajouter donne le troisième, puis le deuxième + le troisième donne le quatrième et ainsi de suite. Les termes de cette suite sont appelés **nombres de Fibonacci**.

La suite de Fibonacci possède de nombreuses propriétés très utilisées en mathématiques. Une d'entre elles est que le rapport de deux nombres consécutifs de la suite est alternativement supérieur et inférieur au nombre d'or, un nombre remarquable qui vaut exactement **1.61803398...**

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(Construction de la spirale) Dans chaque carré, on trace un quart de cercle joignant un sommet au sommet opposé, de sorte que les quarts de cercle soient consécutifs. La courbe obtenue s'appelle la **spirale de Fibonacci**. Les carrés sont donc de côté 1,1,2,3,5,8,13,.... Cette suite est la suite de **Fibonacci**.



Dans la nature, on retrouve très souvent des motifs basé sur la suite Fibonacci et sur le nombre d'or. Il semblerait que la nature marque une prédilection pour la suite de Fibonacci et pour le nombre d'or.

- les ananas
- les tournesols
- les étoiles de mer
- les coquilles de mollusques
- les galaxies
- les cyclones météorologiques
- le fœtus humain

Scanné avec CamScanner

	2022
UFRMI L1	*Programmation Python* *Examen session1* *Durée 1H00*

EXERCICE 1 (12 pts)
Soit l'algorithme d'approximation de racine selon Héron d'Alexandrie:

```
algorithme carre1
variable
      a,a0,an: reel
      i:entier
debut
      ecrire('calcul de racine carree de :')
      lire(a) // le nombre dont on cherche la racine carrée
      ecrire( 'le carree le plus proche')
      lire(a0)
      pour i  ←  1 jusqu'à 5 faire
            an← (1/2)*(a0+a/a0)
            ecrire(an)
            a0← an
      finpour
      ecrire(an)
fin
```

1.1Traduire l'algorithme en python.
1.2 Donner la trace et le résultat d'exécution pour 9 et 15. (faites au moins 5 itérations de la boucle en suivant les valeurs de i, a0, a et an)
1.3 Ecrire une version plus simple du programme en python en utilisant le module 'math'
1.4 Transformer le programme (1.1) en une fonction python *def carre1(n) : .....return an*
1.5 Ecrire un programme principal permettant de calculer la difference entre la valeur approchee et la valeur rélle.

EXERCICE 2 (8 pts)
The Gregory–Leibniz series

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 4\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots\right) = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ddots}}}}$$

2.1 Ecrire un programme permettant d'afficher pour n allant de 1 jusqu'à 100 les valeurs $(-1)^n$

2.2 Utiliser la formule de Leibniz pour ecrire un programme itératif en python qui permettra d'avoir une valeur approchée de Pi.

Indications *:from math import * : à faire avant toute utilisation de fonction mathématique telles que : cos (n), abs(n), sin(n), sqrt(t),*math.pow(*x, y*) *Retourne x élevé à la puissance y.*

Scanné avec CamScanner

Examen 2ère Session

Durée : 90 mn

Consignes *: Sans documents. Le sujet comporte deux exercices indépendants. L'étudiant pourra les traiter dans l'ordre qu'il souhaite. On accordera un soin tout particulier à la présentation et à la rédaction. Le temps moyen par question est de 9 mn.*

Exercice 1

L'utilisation en vase clos d'un insecticide a donné les résultats suivants sur la durée de vie des insectes (exprimée en secondes) :

Durée de vie	[0 ;4[	[4 ;8[	[8 ;12[	[12 ;a[	[a ;22[	[22 ;30[	[30 ;42[
Fréquence	0,06	x	y	0,17	0,14	0,11	0,03

Certaines données sont illisibles et ont été remplacées par a, x et y.

1. Déterminer x et y sachant que le quatrième décile est égal à 9,5 secondes.
2. Déterminer a sachant que la durée de vie moyenne des insectes soumis à l'insecticide est égale à 13 secondes.
3. On prend comme unité d'amplitude 4 secondes. Donner les fréquences corrigées.
4. Calculer et interpréter le mode et la médiane de cette distribution.
5. Quelle est la proportion des insectes qui ont une durée de vie entre 10 et 25 secondes ?

Exercice 2

Une population de n ménages où les deux conjoints occupent un emploi est étudiée. Les variables X et Y désignent respectivement les revenus du mari et de la femme (en dizaine d'euros).
Une étude a montré que $\overline{X} = 125$, $\overline{Y} = 80$, $\sigma_X^2 = 16$, $\sigma_Y^2 = 9$ et $\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = 8$.

1. Lequel des revenus est le plus dispersé ?
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. Commenter le résultat.
3. Calculer la variance du revenu total $S = X+Y$ et du revenu disponible après impôt W=0,8X+0,7Y.
4. Déterminer par la méthode des moindres carrés, la droite de régression de W en S et celle de S en W.
5. Existe-t-il une relation linéaire entre S et W ? Si oui, estimer le montant de l'impôt pour un revenu total de 2 500 euros.

On admettra que : $Cov(\alpha X, \beta Y) = \alpha\beta Cov(X,Y)$ et $Cov(Z, X+Y) = Cov(Z,X) + Cov(Z,Y)$.

Bonne chance !

Scanné avec CamScanner

Université Félix H. Boigny
UFR Maths Info, Filière classique: L1
UE: Probabilité

Année Universitaire
2021/2022

Examen final, Durée: 1h30

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction.

Un joueur décide de jouer aux machines à sous. Il va jouer sur deux machines A et B qui sont réglées de la façon suivante :

- la probabilité de gagner sur la machine A est de $\frac{1}{5}$;
- la probabilité de gagner sur la machine B est de $\frac{1}{10}$

Comme le joueur soupçonne les machines d'avoir des réglages différents, mais ne sait pas laquelle est la plus favorable,il décide d'adopter la stratégie suivante:

- il commence par choisir une machine au hasard ;
- après chaque partie, il change de machine s'il vient de perdre, il rejoue sur la même machine s'il vient de gagner.

On définit pour tout $k \geq 1$ les événements suivants:

- G_k: "Le joueur gagne la k-ième partie
- A_k: "La k-ième partie se déroule sur la machine A".

(1) Déterminer la probabilité de gagner la première partie.
a) $\frac{3}{20}$ b) $\frac{20}{3}$; c) $\frac{3}{10}$ d) aucune des réponses

(2) Déterminer la probabilité de gagner la deuxième partie.
a) $\frac{31}{20}$. , b) aucune des réponses; c) $\frac{31}{200}$; d) $\frac{3}{20}$

(3) Traduire mathématiquement l'expression " α est la probabilité d'avoir joué la première partie sur la machine A si la deuxième partie a été gagnée" en fonction des différents évènement A_1, G_2.
a) $\mathbb{P}(A_1|G_2)$ b) $\mathbb{P}(A_1 \cap G_1)$ c) $\mathbb{P}(G_2|A_1)$ d) aucune des réponses

(4) Déterminer la valeur de α
a) $\frac{25}{31}$ b) $\frac{20}{31}$ c) $\frac{1}{20}$ d) aucune des réponses

(5) Soit $k \geq 1$,

(a) Expression de $\mathbb{P}(G_k)$ en fonction de $\mathbb{P}(A_k)$
L'élève ditvrai dit ceci: On peut gagner la k ème partie en jouant soit avec la machine A soit avec la machine B. Après calcul il trouve

$$\mathbb{P}(G_k) = \frac{1}{10}\mathbb{P}(A_k) + \frac{2}{10}.$$

Son calcul est-il juste? Si non trouver la bonne réponse.

(b) En utilisant la bonne réponse, montrer que

$$\mathbb{P}(A_{k+1}) = -\frac{1}{7}\mathbb{P}(A_k) + \frac{9}{10}$$

(c) En déduire $\mathbb{P}(A_k)$ puis $\mathbb{P}(G_k)$ en fonction de k.

NB : Chaque reponse devra être justifiée

Scanné avec CamScanner

UFHB
UFR-MI

Année universitaire 2021-2022

EXAMEN DE PHYSIQUE L1

ECUE 1 : EPREUVE D'ELECTROSTATIQUE PREMIERE SESSION.

Durée 1 h 30mn.

Exercice1

On considère un disque de rayon R, de centre O, portant une densité de charge surfacique $\sigma > 0$.

1) En s'appuyant sur les éléments de symétrie retrouver, par un calcul direct, le champ $\vec{E}$ créé par le disque en un point M de son axe $z'Oz$ ($OM = z > 0$).
2) Que devient ce champ $\vec{E}$ lorsque le rayon R du disque tend vers l'infini?
3) On considère un plan portant une densité de charge surfacique $\sigma > 0$, percé d'un trou circulaire de centre O et de rayon r (figure 1). En s'appuyant sur le principe de superposition, calculer le champ en un point M de l'axe $z'Oz$ du trou.

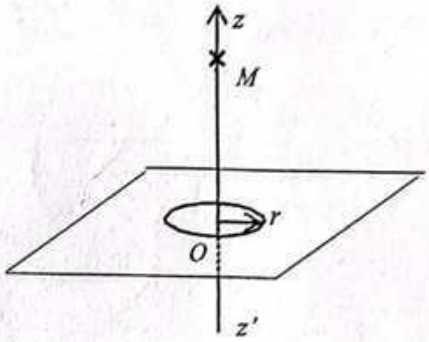


Figure 1

Exercice 2

Aux quatre sommets d'un carré de centre O et de côte $a\sqrt{2}$, situé dans le plan xOy, sont fixées quatre charges q positives (voir figure 2).

1) En utilisant les éléments de symétrie déterminer le champ électrostatique au centre $O(0,0,0,)$ du carré. Quelle est son orientation au point $M(0,0,z)$?
2) Déterminer le potentiel électrique V au centre du carré.
3) Déterminer le potentiel électrique V en un point $M(0,0,z)$.
4) En déduire l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$ au point $M(0,0,z)$.
5) Un proton de charge $+e = q$ (e est la charge élémentaire) est mobile le long de l'axe z'Oz. Exprimer la force $\vec{F}$ que subit le proton lorsqu'il se trouve au point $M(0,0,z)$.
6) Calculer de deux façons différentes l'expression de l'énergie potentielle E_{p1} du proton lorsqu'il se trouve en un point quelconque $M(0,0,z)$:
   a) Par la méthode directe
   b) A l'aide du théorème de l'énergie cinétique.
7) Calculer l'énergie potentielle E_{p2} du système formé par les quatre charges.

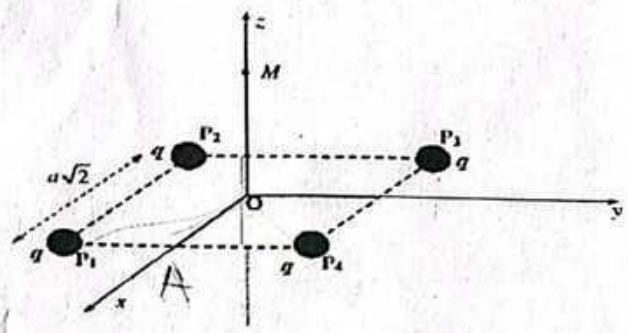


Figure 2

Scanné avec CamScanner

UFHB *Année universitaire 2021-2022*

UFR-MI

ECUE 2 : EPREUVE D'ELECTROCINETIQUE PREMIERE SESSION.

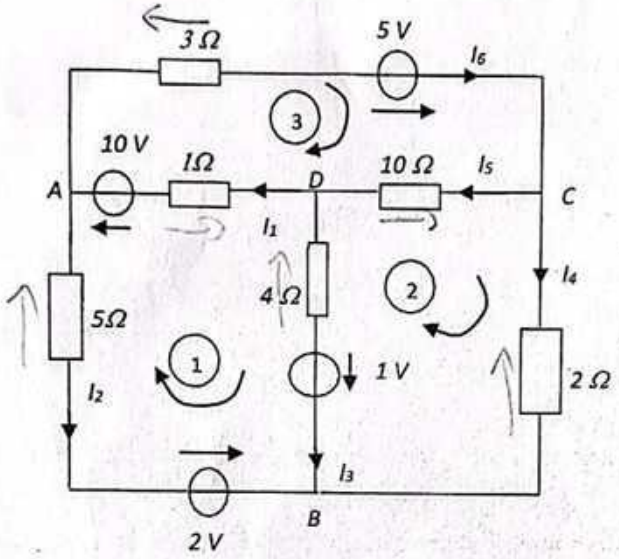
Durée 1 h 30 mn

Exercice 1

On considère le réseau représenté par la figure 1.

Déterminer les intensités des courants dans toutes les branches à l'aide des lois de Kirchhoff, le nœud *B* étant le nœud de référence et toutes les mailles orientées dans le sens horaire.

Figure 1

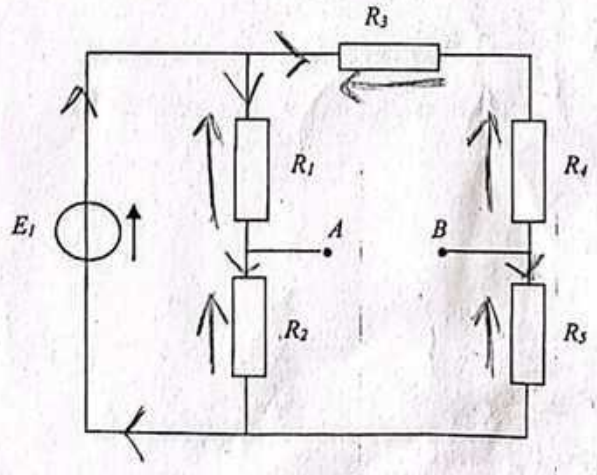


Exercice 2

Soit le réseau représenté par la figure 2 ci-dessous :

1) Quelle est l'expression de la résistance équivalente R_{TH} du dipôle actif vu entre les points *A* et *B*.
2) Donner l'expression de la f.é.m. E_{TH} du dipôle.
3) On monte entre les bornes du dipôle une résistance *R* en série avec une f.é.m. E_2. Calculer le courant *I* traversant la résistance *R* dans le sens *A* vers *B*.
4) Calculer la puissance dissipée dans cette résistance.
5) ***AN : $R_1 = R_2 = R = 100\ k\Omega$; $R_3 = R_5 = 25\ k\Omega$; $R_4 = 50\ k\Omega$ et $E_1 = E_2 = 10\ V$***

Figure 2



Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny (Cocody)
(Rép. Côte d'Ivoire)

UFR MI

LICENCE PREMIERE ANNEE MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE

PREMIERE SESSION 2021 – 2022

UE OPTIQUE

Durée : 2 heures 30 minutes

Exercice 1 : (12 points)

Une demi-sphère en flint d'indice n = 1,71, de centre O, de sommet S et de rayon R = $\overline{OS}$ = 6 cm constitue une lentille demi-boule. La lumière pénètre dans cette lentille par sa face plane.

A) La lentille est plongée dans un milieu (eau) d'indice n_0 = 1,33 :

1) a) Etablir la formule de conjugaison de cette lentille, avec origine en O ;

b) Etablir la formule de grandissement linéaire de cette lentille ;

c) Déterminer la position et la grandeur de l'image A'B' d'un petit objet AB = 10 mm disposé parallèlement à la face d'entrée de la lentille, au point A diamétralement opposé à S. On tracera la marche d'un rayon quelconque issu de A.

2) Déterminer littéralement, puis numériquement, pour cette lentille :

a) Les positions du foyer image F' et du foyer objet F ;

b) Les positions des points principaux H et H' ;

c) Les distances focales objet f et image f'. En déduire la vergence V de la lentille.

B) La lentille baigne maintenant dans l'air (d'indice 1) :

3) Déterminer littéralement, puis numériquement, les distances focales f et f' et la vergence V de la lentille.

4) On éclaire la lentille par un faisceau de rayons parallèles à l'axe, d'axe OS, qui couvre grâce à un diaphragme la moitié de la face plane d'entrée. Le foyer Φ' des rayons marginaux ne coïncide pas avec le foyer F' des rayons paraxiaux. Calculer l'aberration sphérique $\overline{\Phi' F'}$.

Exercice 2 : (08 points)

Un objectif photographique est constitué d'une lentille convergente L_1 de centre O_1, de distance focale image $f_1' = \overline{O_1 F_1'}$ = 75 mm. La pellicule π est placée dans le plan focal image de l'objectif. On ajoute à cet objectif deux lentilles additionnelles :

- Une lentille L_2 divergente, de centre O_2 et de distance focale f_2' = −25 mm, que l'on accole à L_1 ; on a ainsi $O_2 = O_1$;

- Une lentille L_3 convergente, de centre O_3 et de distance focale f_3' = 100 mm, que l'on fixe devant le système L_1-L_2. La distance O_3O_1 est réglée de manière à ce que l'image d'un objet éloigné soit nette sur la pellicule.

1) Faire un schéma représentant les lentilles avec les positions relatives des centres optiques et des foyers. Compléter ce schéma par un tracé de rayons définissant la position du foyer image F' de ce téléobjectif constitué par l'ensemble L_1-L_2-L_3.

2) Calculer l'encombrement de cet appareil, c'est-à-dire la distance du centre O_3 de L_3 à la pellicule π.

Scanné avec CamScanner

3) Calculer la grandeur $\overline{A'B'}$ de l'image d'une tour $\overline{AB}$ de 60 m de hauteur, située à une distance d=3 km de l'objectif.

4) Calculer l'encombrement d'un appareil qui aurait comme objectif une seule lentille donnant une image de même grandeur. Conclusion ?

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny (Cocody)
(Rép. Côte d'Ivoire)

UFR MI

LICENCE PREMIERE ANNEE MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE

PREMIERE SESSION 2021 – 2022

UE OPTIQUE

Durée : 2 heures 30 minutes

Exercice 1 : (12 points)

Une demi-sphère en flint d'indice n = 1,71, de centre O, de sommet S et de rayon R = $\overline{OS}$ = 6 cm constitue une lentille demi-boule. La lumière pénètre dans cette lentille par sa face plane.

A) La lentille est plongée dans un milieu (eau) d'indice n_0 = 1,33 :

1) a) Etablir la formule de conjugaison de cette lentille, avec origine en O ;

b) Etablir la formule de grandissement linéaire de cette lentille ;

c) Déterminer la position et la grandeur de l'image A'B' d'un petit objet AB = 10 mm disposé parallèlement à la face d'entrée de la lentille, au point A diamétralement opposé à S. On tracera la marche d'un rayon quelconque issu de A.

2) Déterminer littéralement, puis numériquement, pour cette lentille :

a) Les positions du foyer image F' et du foyer objet F ;

b) Les positions des points principaux H et H' ;

c) Les distances focales objet f et image f'. En déduire la vergence V de la lentille.

B) La lentille baigne maintenant dans l'air (d'indice 1) :

3) Déterminer littéralement, puis numériquement, les distances focales f et f' et la vergence V de la lentille.

4) On éclaire la lentille par un faisceau de rayons parallèles à l'axe, d'axe OS, qui couvre grâce à un diaphragme la moitié de la face plane d'entrée. Le foyer Φ' des rayons marginaux ne coïncide pas avec le foyer F' des rayons paraxiaux. Calculer l'aberration sphérique $\overline{\Phi' F'}$.

Exercice 2 : (08 points)

Un objectif photographique est constitué d'une lentille convergente L_1 de centre O_1, de distance focale image $f_1' = \overline{O_1 F_1'}$ = 75 mm. La pellicule π est placée dans le plan focal image de l'objectif. On ajoute à cet objectif deux lentilles additionnelles :

- Une lentille L_2 divergente, de centre O_2 et de distance focale f_2' = –25 mm, que l'on accole à L_1 ; on a ainsi $O_2 = O_1$;

- Une lentille L_3 convergente, de centre O_3 et de distance focale f_3' = 100 mm, que l'on fixe devant le système L_1-L_2. La distance O_3O_1 est réglée de manière à ce que l'image d'un objet éloigné soit nette sur la pellicule.

1) Faire un schéma représentant les lentilles avec les positions relatives des centres optiques et des foyers. Compléter ce schéma par un tracé de rayons définissant la position du foyer image F' de ce téléobjectif constitué par l'ensemble L_1-L_2-L_3.

2) Calculer l'encombrement de cet appareil, c'est-à-dire la distance du centre O_3 de L_3 à la pellicule π.

Scanné avec CamScanner

3) Calculer la grandeur $\overline{A'B'}$ de l'image d'une tour $\overline{AB}$ de 60 m de hauteur, située à une distance d=3 km de l'objectif.

4) Calculer l'encombrement d'un appareil qui aurait comme objectif une seule lentille donnant une image de même grandeur. Conclusion ?

Scanné avec CamScanner