Fomesoutra.com
ça soutra!

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY
Union-Discipline-Travail

DiA

LE VALIDEUR LMD 2022

UFR DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE



LICENCE 2

SEMESTRE 1

- Algèbre linéaire
- Algèbre bilinéaire
- Série et intégrale généralisée
- Géométrie
- Electromagnétisme
- Mécanique des systèmes
- Logiciel scientifique

SEMESTRE 2

- Thermodynamique
- Probabilité Statistique
- Topologie et calcul differentiel
- Mécanique quantique
- Statistique avec R
- Programmation python

Contact :
+ 225 07 87 98 94 43

Nouvelle édition à avoir absolument
Collection Succès

Scanné avec CamScanner

AVANT- PROPOS

Le VALIDEUR LMD est un recueil d'anciens sujets du système LMD, de propositions de corrections et des conseils absolument importants à savoir. Ce document a été confectionné dans le but d'aider les étudiants à valider efficacement leur crédit afin de passer en classe supérieur. L'avantage d'avoir ce document est qu'il vous servira de guide et qu'il vous permettra de rentrer dans la famille Valideur LMD.

La famille Valideur LMD prend en compte l'équipe Valideur et tous ceux qui ont acheté ce document. L'équipe Valideur est l'équipe qui est constituée d'aînés qui ont pour charge :

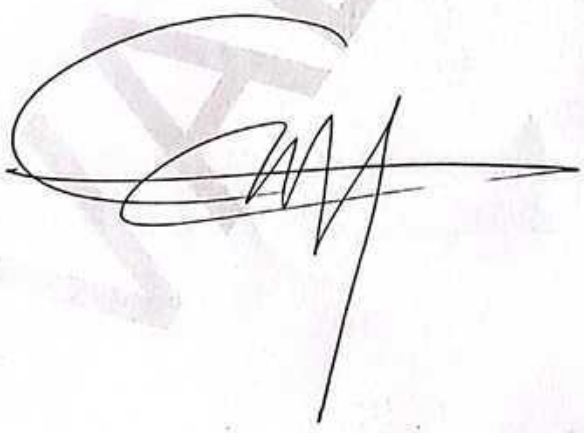
> De confectionner les documents (Valideur LMD) ;
> De coacher leurs cadets tant au niveau des stratégies de bosse que sur leurs projets professionnels ;
> La préparation de cours de renforcement pour améliorer davantage le niveau de chacun.

Sa mise à votre disposition vous permettra de vous imprégner du type de sujets auxquels vous pourriez être confrontés, des propositions de correction pour vous aider à avoir de très bonnes notes et d'un suivi de la part de vos ainés.

> La première partie de ce document présente quelques témoignages d'anciens et les opportunités qu'offre la filière.
> La seconde partie contient les sujets et propositions de corrections des années académiques antérieures.

Vous avez des questions au sujet du VALIDEUR LMD ? Un point de cours qui vous résiste ? Une erreur que vous avez croisée dans l'ouvrage ? Voulez-vous intégrer l'équipe ? Ou vous voulez juste nous laisser un petit mot gentil ? Et bien n'hésitez pas à nous contacter. Nous nous ferons un plaisir de vous répondre dans les meilleurs délais :groupviva1 @gmail.com
amysako98@gmail.com

L'ÉQUIPE VALIDEUR.



Scanné avec CamScanner

Sommaire

Introduction 6

Première partie

Témoignages des aînés 8

Vue globale des possibilités après des études en mathématiques informatique..... 11

Quelques précieux liens absolus pour mieux vous orienter..... 12

Deuxième partie

Résumé d'algèbre linéaire ***15***

Examens d'algèbre linéaire	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2015-2016	19	31
Examen session 2 2015-2016	20	
Examen session 1 2016-2017	21	34
Examen session 2 2016-2017	22	
Examen session 1 2017-2018	23	
Examen session 2 2017-2018	24	
Examen session 1 2018-2019	25	39
Examen session 2 2018-2019	26	44
Examen session 1 2019-2020	28	48
Examen session 1 2020-2021	29	51
Examen session 2 2020-2021	30	

Résumé d'algèbre bilinéaire ***56***

Examens d'algèbre bilinéaire	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2015-2016	58	
Examen session 1 2016-2017	59	
Examen session 2 2016-2017	60	69
Examen session 1 2017-2018	61	74
Examen session 2 2017-2018	62	
Examen session 1 2018-2019	63	76
Examen session 2 2018-2019	65	
Examen session 1 2019-2020	66	79
Examen session 1 2020- 2021	67	
Examen session 2 2020-2021	68	

Examens de suite et serie de fonctions	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2015-2016	84	
Examen session 1 2016-2017	82	93
Examen actuariat 2017-2018	84	100
Examen session 1 2017-2018	85	
Examen session 1 2018-2019	87	102
Examen session 2 2018-2019		107
Examen session 1 2019-2020	89	
Examen session 1 2020-2021	91	
Examen session 2 2020-2021		

Examens d'éléments d'intégrale généralisé	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2015-2016	110	
Examen session 1 2016-2017	111	
Examen session 1 2017-2018	112	119

Scanné avec CamScanner

Examen session 2 2018-2019	113	122
Examen session 1 2019-2020	115	127
Examen session 1 2020-2021	116	
Examen session 2 2020-2021	118	

Examens de géométrie plane	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2015-2016	133	
Examen session 1 2016-2017	134	141
Examen session 1 2017-2018	135	
Examen session 2 2017-2018	136	
Examen session 1 2018-2019	137	146
Examen session 2 2018-2019	138	150
Examen session 1 2019-2020	139	158
Examen session 1 2020-2021	140	160

Examens de géométrie de l'espace	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 2 2015-2016	167	
Examen session 1 2016-2017	168	175
Examen session 1 2017-2018	169	
Examen session 2 2017-2018	170	181
Examen session 1 2018-2019	171	
Examen session 1 2019- 2020	172	183
Examen session 1 2020- 2021	173	185

Examens Electromagnétisme	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2015-2016	189	207
Examen session 2 2015-2016	191	
Examen session 1 2016-2017	193	
Examen session 1 2017-2018	196	
Examen session 2 2017-2018	198	
Examen session 1 2018-2019	201	211
Examen session 1 2019-2020	202	
Examen session 1 2020-2021	205	215

Examens de mécanisme des systèmes	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 2 2015-2016	222	237
Examen session 1 2016-2017	225	243
Examen session 1 2017-2018	227	250
Examen session 1 2018-2019	229	258
Examen session 1 2019-2020	231	

Scanné avec CamScanner

Examen session 1 2020-202	233	264
Examen session 2 2020-2021	235	269

Examens de scilab et Latex	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2017-2018	274	
Examen session 1 2018-2019	276	
Examen session 1 2019-2020	279	
Examen session 1 SPI et correction	281	

Résumé de thermodynamique *283*

Examens de thermodynamique	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2016-2017	285	
Examen session 1 2017-2018	286	294
Examen session 2 2017-2018	287	
Examen session 1 2018-2019	288	300
Examen session 2 2018-2019	289	303
Examen session 1 2019-2020	290	306
Examen session 1 2020-2021	291	308
Examen session 2 2020-2021	292	312

Examens de probabilité	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2015-2016	314	
Examen session 2 2015-2016	315	
Examen session 1 2016-2017	316	328
Examen session 2 2016-2017	317	
Examen session 1 2017-2018	319	332
Examen session 2 2017-2018	321	
Examen session 1 2018-2019	322	336
Examen session 2 2018-2019	323	
Examen session 1 2019-2020	324	
Examen session 1 2020-2021	326	339

Examens de Statistique inférentielles	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2015-2016	346	
Examen session 1 2016-2017	347	
Examen session 1 2017-2018	349	360
Examen session 2 2017-2018	350	364
Examen session 1 2018-2019	352	368
Examen session 2 2018-2019	354	
Examen session 1 2019-2020	356	
Examen session 1 2020-2021	357	

Scanné avec CamScanner

Examens de Topologie et Calcul différentiel	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2016-2017	370	381
Examen session 2 2016-2017	372	389
Examen session 2 2017-2018	373	
Examen session 1 2017-2018	374	
Examen session 2 2018-2019	376	397
Examen session 1 2019-2020	378	408
Examen session 1 2020-2021	379	
Examen session 2 2020-2021	380	

Examens de Mécanique quantique	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2015-2016	411	422
Examen session 1 2016-2017	413	425
Examen session 1 2017-2018	414	430
Examen session 2 2017-2018	416	
Examen session 2 2018-2019	418	444
Examen session 1 2019-2020	420	
Examen session 1 2020-2021	421	448

Examens de statistique avec R	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2018-2019	453	463
Examen session 2 2018-2019	455	464
Examen session 1 2019-2020	457	469
Examen session 1 2020-2021	459	
Examen session 2 2020-2021	461	

Examens de programmation python	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2016-2017	471	480
Examen session 2 2016-2017	473	487
Examen session 1 2017-2018	475	483
Examen session 2 2018-2019		
Examen session 1 2019-2020	477	488
Examen session 1 2020-2021	478	497
Examen session 2 2020-2021	479	

Bibliographie

Scanné avec CamScanner

Introduction

L'équipe Valideur LMD vous souhaite la bienvenue en Licence 2 de mathématique. Toutes nos Félicitations !

Rien de ci agréable de se voir admis en Licence 2. Pour ceux qui sont autorisés, ce n'est pas grave. Comme on le dit souvent mieux vaut avoir un peu que de ne rien avoir (mieux vaut être autorisé que de reprendre l'année).

Bref ; la venue en Licence 2 est une chose, une autre est de pouvoir y faire face à ce deuxième niveau du premier cycle Universitaire. Nous pouvons vous dire qu'avec la Licence 2, beaucoup de portes s'ouvre à vous. Pour pouvoir avoir des informations sur le comportement à avoir, sur les opportunités, Nous allons plus ou moins répondre à quelques questions.

♦♦♦ Quel est le niveau de difficulté de la Licence 2 ?

Evidemment le niveau de difficulté augmente par rapport à celui de la Licence 1. Certains ont tendance à penser que plus tu avances plus c'est facile. Ce n'est pas vraiment le cas. Seulement il faut savoir que pour celui qui a acquis le niveau Licence 1 en toute honnêteté n'a pas à se préoccuper. A vrai dire les cours deviennent de plus en plus volumineux.

♦♦♦ Comment surmonter ces difficultés ?

En premier lieux, il faut avoir confiance en soi. Ah oui !! Et recommander le reste à DIEU.
En deuxième lieux, apprendre ses cours au jour le jour puis ses travaux dirigés (vraiment important) et voir les anciennes compositions qui se trouvent dans ce document.
Lors des compositions, svp faite bien les exercices que vous choisissez. Même lorsque vous rencontrez un exercice que vous avez déjà traité, faite bien attention à la rédaction. En troisième lieux travailler quelques fois en groupe *très important*. Attention ! Apprendre ses cours avant le travail en groupe ; sinon c'est inutile.

L'équipe VALIDEUR LMD 2022 se dit heureux de contribuer efficacement à la formation des futurs cadres de la nation. En outre elle se compose de :

MEMBRE VALIDEUR LMD 2022 ▪ **Sako Amy** MI/UFHB
MEMBRE VALIDEUR LMD 2022 ▪ **Koffi Yetran Ange Eric** MIActuariat/UFHB
MEMBRE VALIDEUR LMD 2022 ▪ **Soro K Hamed** MI/UFHB
MEMBRE VALIDEUR LMD 2022 ▪ **Yéo Nanga** MI/UFHB
MEMBRE VALIDEUR LMD 2022 ▪ **Bamba Adama** MI/UFHB
MEMBRE VALIDEUR LMD 2022 ▪ **Kouassi K David** MI/UFHB
MEMBRE VALIDEUR LMD 2022 ▪ **Kouakou Konan Marius** MI/UFHB
MEMBRE VALIDEUR LMD 2022 ▪ **Yéo Selwenin** MI/UFHB

Scanné avec CamScanner

PREMIERE PARTIE

VALIDEUR LIMD

Scanné avec CamScanner

Bienvenu dans cette première partie novatrice du document valideur LMD. Dans cette partie, il s'agira pour nous de vous donner cette propulsion à **votre projet professionnel**. Omniprésentes dans l'industrie - aérospatiale, imagerie, cryptographie..., ou dans les services banques, assurances., les mathématiques apparaissent aussi dans de nombreux autres secteurs : sondages, gestion des risques, protection des données...Elles interviennent dans notre vie quotidienne - télécommunication, transports, médecine, météorologie, musique...et contribuent à la résolution de problématiques actuelles : énergie, santé ; environnement, climatologie, développement durable.Pour renchérir de cette diversité des mathématiques informatiques auprès des étudiants de l'Université Félix Houphouët Boigny ; voici ci-après des témoignages d'anciens ayant effectués des études à l'UFR Math Info de ladite Université

Je suis **Bobet Goualo Victorien**, Ingénieur de Conception en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication (STIC) diplômé de l'Institut National Polytechnique Félix Houphouët Boigny de Yamoussoukro (INP-HB).

Actuellement j'exerce dans une entreprise de services informatique à savoir N-SOCITECH en tant qu'**Ingénieur des données et avant-vente**. Ainsi j'interviens sur les technologies **Bases de données, Big Data, Data Sciences**. En plus je suis aussi le conseillé auprès de nos clients sur ces technologies en ma qualité d'ingénieur Avant-Vente ou ingénieur d'affaires.

Après mon baccalauréat série C en 2013 au Lycée Tiapani Dominique de Dabou (**LTD**), je me suis inscrit en mathématique informatique à l'Université Félix Houphouët Boigny (**UFHB**) de Cocody, Abidjan. Ayant opter pour le couple mathématique appliquées et informatique ; j'ai accompli une partie de ma formation de maths au campus de Cocody puis complété celle-ci par la formation d'ingénieur en STIC de l'**INPHB** grâce à mon L2 de math info pour avoir un couple équilibré. Présentement en plus de mon activité professionnelle, je suis inscrit à Institut Supérieur de l'institut de l'aéronautique et de l'espace-institut Supmeca de paris (**ISAE-ISM Paris**) pour un Exécutive Master of Engineering Big Data & Data Science

Je puis vous assurer que vous avez fait l'un des meilleurs choix de filières. Et même ceux qu'on y a contraint, vous êtes au bon endroit. Alors je voudrais interpeler mes cadets sur l'importance d'avoir une idée de leur projet professionnel puis murir cette idée. Beaucoup de courage, ce n'est pas facile mais c'est possible car plusieurs ont pu le faire.

N'oubliez pas de vous approprier le **VALIDEUR LMD**, un document qui aide pour la validation des examens à travers des aperçus de la façon dont les profs composent. Le document VALIDEUR LMD qui est depuis 2015, un manuel très utile à la compréhension du système de l'enseignement supérieur est beaucoup apprécié des étudiants.

Scanné avec CamScanner

Je suis **Traoré Yacouba**. Après un BAC C au lycée moderne de Meagui, j'opte pour mes études supérieures, la filière MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE. Ce choix résulte du fait que mon professeur de math de Tle C qui a été un très bon enseignant pour moi est passé par cette filière et est celui qui m'a vraiment encouragé à suivre cette formation. De plus j'aimais vraiment les maths. Avant de venir, plusieurs personnes ont essayé de me dissuader de venir faire la filière car pour eux, c'est une « mission impossible ».

Alors une fois en math info, le début n'a pas été du tout facile pour un nouveau de la ville comme moi et surtout le système de transport ; il fallait faire un arbitrage le retard et risque d'agression. Une solution a été de rester au campus avec des amis et dormir dans les amphis (mais là encore j'étais constamment à cours de liquidité). Quant aux cours, je remercie l'équipe "LE VALIDEUR" pour avoir mis à notre disposition un document (LE VALIDEUR LMD) nous permettant d'avoir une idée de ce qui nous attendais dans les compos et de nous avoir dispensé des cours gratuitement. Avec détermination et persévérance, je valide la première année, la deuxième année et la licence en Mathématique. En licence 2, je passe le concours ITS sous réserve que plus tard, sans trop de concentration, j'échoue. En licence, je passe cette fois-ci **le concours ISE sous réserve, STIC et central Casablanca et je réussi au concours ISE**. Et depuis octobre 2018 je suis la formation des Ingénieurs Statisticiens Economistes.

Pour la jeune génération, j'aimerais d'abord vous dire que si vous avez été orientés en MATH INFO c'est parce-que vous en avez les capacités. Il ne faut surtout pas vous sous-estimer. Ne vous laisser pas dominer par les problèmes ; Faites face et avancez (parmi mes amis d'autre essuyaient le salon et faisaient d'autres corvées à la maison avant de venir, ils ont cependant validé les trois années sans reprendre et des concours). Empreignez-vous constamment de bons documents et entourez-vous d'amis qui aiment travailler sérieusement. Et pour finir un point sur lequel j'aimerais insister, c'est l'information : informez-vous régulièrement si possible et ne passez pas vos temps à surfer sur les réseaux sociaux à ne rien faire de bon. Utilisez plutôt ces réseaux à bon escient notamment en prenant des informations auprès des ainées.

Après mon **Baccalauréat série D en 2013**, j'ai été orienté à l'UFR Maths-Info à l'UFHB afin de poursuivre mes études. Après L1, L2 et L3 **mathématiques et applications** validées successivement avec beaucoup de difficulté, je décide de m'orienter en Master EDP Optimisation et analyse numérique suite à ma passion pour les maths appliquées et aussi dans le but de décrocher **un doctorat en Analyse numérique**. Vu l'évolution des choses à l'UFR et le départ de beaucoup d'autres personnes suite à des concours et aussi la difficulté à assimiler plusieurs cours, je décide d'aller continuer mes études en France par le biais de **Campus France**
qui se solda par un succès avec une admission en
Licence 3 Mathématiques Pures à l'Université Clermont Auvergne. Etant ici je m'aperçois des multitudes opportunités à accéder à des formations plus intéressantes. Avant la fin de l'année universitaire, je change mon objectif de devenir prof en postulant pour le concours « Master Econométrie et Statistique de l'ISFA » afin de devenir un Data Scientist ou un Data Analyst. Alhamdoulilah, depuis septembre 2021, je dispose d'un diplôme d'ingénieur Data Analyst et Risk Management et je suis en quête active d'emploi.
Mes conseils aux plus jeunes consiste d'abord à leur
dire de ranger leur « BAC avec mentions » dans leurs sacs et d'arrêter les débats inutiles comme « La série C ou Z est meilleure que D ou Y », ce qui

Scanné avec CamScanner

compte aujourd'hui c'est ta capacité à t'en sortir, tu n'auras pas un diplôme ou une bourse parce que tu as fait la série W, reste concentrer car, une autre histoire vient de commencer et la meilleure manière de vivre pleinement cette histoire est d'être endurant,
patient, motivé, courageux, bosseur et avoir la foi en Dieu comme on aimait si bien le dire **«c'est nous qui bossons mais c'est DIEU qui fait valider»** et **« Valideur »** est à coté de vous, il n'est plus un document à présenter pour moi, car ses bienfaits sont connus par tous, même hors des frontière de Math-Info. Soyez humble, respectueux envers vos aînés quelques soit leurs âges car pour moi, aînés signifie toute personne ayant intégrée l'université avant toi donc quel que soit ton intelligence, tu lui dois respect et considération et vice versa. **Surtout ne trainez pas à l'université**, ne vous attardez pas sur les futilités, ne vous adonnez pas aux vices, visez bien votre objectif et donnez-vous les moyens de les atteindre car les années passent très vite étant à la fac.

Enfin, ayez des objectifs clairs, renseignez-vous car plusieurs opportunités existent devant vous, en CI ou ailleurs et donnez-vous les moyens de les atteindre.
Merci pour votre attention, c'était votre frère, votre conseiller **KONE YACOUBA alias Scologie First**

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Pour une vue globale des possibilités après des études en mathématiques informatique

Etant en licence 1 math info	• Procédure CAMPUS France • Concours AD de l'ENSEA, TS de l'EAMAC • Des bourses pour les étudiants de L1	
Etant en licence 2 math info	• ITS sous réserve • Cycle ingénieur EAMAC sous réserve • ISFA, EURIA, ISUP...(BECEAS)	
Etant en licence 3 math info	• Concours ENS • ISE de l'ENSEA sous réserve • Cycle ingénieur Centrale Casablanca	
Une L3 math info validée	• Concours cycle ingénieur INPHB, ISE • Concours Master IFORD, IIA, Big Data, ESATIC, PSAV • Concours écoles de commerce HEC, ESSEC, ESCP...	Master 2 PSAV Probabilités, Statistique et Applications au Vivant

Qui peut le plus, peut le moins. Cela dit que si vous être de niveau sup vous avez la possibilité

Scanné avec CamScanner

Quelques précieux liens absolus pour mieux vous orienter

Campus France Côte d'Ivoire :
https://www.ivoire.campusfrance.org (site d'informations de base)
Concours Centrale Casablanca :
http://www.centrale-casablanca.ma/fr/ (site info et concours cycle ingénieur)
Concours INPHB Yamoussoukro (Bourse du gouvernement après admission) :
http://www.inphb.ci/2/vues/accueil/ (site info)
http://www.inphb.ci/ConCours_Ing-INPHB-2021/ (site concours Ingénieurs)
Concours ENSEA Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :
http://ensea.ed.ci/ (site info)
http://capesa.ensai.fr (site concours cycle AS/cycle ingénieur)
Concours HEC Paris (Bourse du gouvernement après admission) :
https://www.hec.edu/fr
https://www.hec.edu/fr/grande-ecole-masters/programme-grande-ecole/admissions
Concours ENS Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :
https://ens.laatech.com/ (site concours)
http://www.ensabidjan.ci/ (site info)
Concours IIA Yaoundé :
http://www.iiayaounde.com/
http://www.iiayaounde.com/linstitut/conditions-dadmission/
Concours X polytechnique de Paris (Bourse du gouvernement après admission) :
https://www.polytechnique.edu/ (site officiel)
https://www.polytechnique.edu/admission-cycle-ingenieur/fr/voie-universitaire-univ-filière-universitaire-internationale-fui (page admission)
Concours ESATIC Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :
https://www.esatic.ci/index1.php (site info)
https://www.esatic.ci/admission.php (page admission)
Concours ISFA Lyon (Actuariat) :
https://isfa.univ-lyon1.fr/
https://isfa.univ-lyon1.fr/formation/actuariat/admission-a-la-formation-d-actuaire-a-l-isfa-803812.kjsp
Bourse Japon 2020 (Bourse du gouvernement Japonais après admission) :
https://www.ci.emb-japan.go.jp/files/000475798.pdf (PDF d'information à télécharger)
https://www.ci.emb-japan.go.jp/itpr_ja/00_000401.html (site officiel de la bourse)
Bourse Russie 2020 (Bourse du gouvernement Russe après admission) :
https://cotedivoire.mid.ru/web/cote-d-ivoire-fr/conditions-a-remplir-pour-devenir-candidats-aux-bourses-du-gouvernement-russe
M2PSAV de l'UFR Math Info (Possibilité de Bourse du gouvernement après admission) :
http://m2psav.master.edu-math.org/ (site officiel)
http://m2psav.master.edu-math.org/?page_id=18 (page de candidature)
Concours IFORD Yaoundé (Bourse du gouvernement après admission) :
http://www.iford-cm.org/
http://www.iford-cm.org/index.php/etudes-formation/concours-entree/informations-utiles
Concours EAMAC de Niamey (Bourse d'organisme Aéronautique(ANAC,SODEXAME ...) après admission) :
http://www.anac.ci/anac/web/ (site de l'autorité nationale de l'aviation civile de Côte d'Ivoire)
http://www.anac.ci/anac/web/docs/BrochureANAC2017.pdf (PDF pour s'informer sur l'aviation en côte d'ivoire à télécharger)
de postuler à tous les opportunités de niveaux inférieurs.

Scanné avec CamScanner

DEUXIEME PARTIE

VALIDEUR LIMD

Scanné avec CamScanner

SEMESTRE 1

www.gvivaservices.com

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

RESUME ALGEBRE LINEAIRE (Important pour les concours)

• Valeur propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

Soit $u \in L(E)$. L ' ensemble des application linéaires de E dans E . Un scalaire $\lambda \in K$ est une valeur propre de u lorsqu'il existe un vecteur $x \neq 0_E$ de E tel que $u(x) = \lambda x$. Ce vecteur x est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ .

NB : Le vecteur nul n'est pas un vecteur propre de u .

• L'ensemble des valeurs propres de u est appelé le **spectre** de u, on le note $Sp(u)$.
Pour tout $\lambda \in K$, on note $E_\lambda(u) = Ker(u - \lambda\, IdE)$. *Si* $\lambda \in Sp(u)$, *alors* $E_\lambda(u)$ est constitué du vecteur nul et des vecteurs propres de valeur propre λ. On l'appelle **sous-espace propre associé à** λ . Si $\lambda \notin Sp(u)$, alors $E_\lambda(u) = \{0_E\}$.

• Le scalaire λ appartient à $Sp(u)$ si et seulement si $u - \lambda\, IdE$ est non injectif. En particulier 0 est valeur propre de u si et seulement si u est non injectif.

• Les vecteurs propres et les valeurs propres sont souvent appelés les **éléments propres de** u.
• **Propriété importante** : si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes de u, alors la somme $E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_p}$ est directe. Ainsi des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants. En particulier, dans un espace de dimension n, il ne peut y avoir plus de n valeurs propres distinctes.

• Elément propre d'une matrice

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$.
• On dit que $\lambda \in K$, est valeur propre de M lorsqu'il existe $X \in \mathcal{M}n, 1(\mathbb{R})$ non nul tel que $MX = \lambda X$. Ce vecteur X est appelé vecteur propre de M associé à la valeur propre λ.
• Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, B une base de E, u un endomorphisme de E et $M = Mat(u, B)$. Les valeurs propres de u et de M sont identiques, et x est vecteur propre de u pour la valeur propre I ssi $X = Mat(x, B)$ est vecteur propre de M pour la valeur propre λ. On peut donc appliquer à la matrice M les définitions et les propriétés concernant l'endomorphisme u.

• Polynôme caractéristique

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ et u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .
• La fonction $\chi_M : \begin{cases} K \to K \\ \lambda \mapsto \det(M - \lambda I_n) \end{cases}$, est polynomiale .Son polynôme associé , que l'on notera également χ_M , est appelé polynôme caractéristique de M .Il est de degré n et s'écrit :

$$\chi_M = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(tr\, M)X^{n-1} + \cdots + \det M$$

• Les racines dans K du polynôme caractéristique χ_M sont exactement les valeurs propres de M.

Scanné avec CamScanner

Lorsque le polynôme χ_M est scindé dans K[X], avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pour racines, on a $\det M = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $tr\, M = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.
On appelle **ordre de multiplicité** d'une valeur propre λ de M, et on note $m(\lambda)$, l'ordre de multiplicité de la racine λ du polynôme χ_M.
Une matrice à coefficients réels **d'ordre impair** admet au moins une valeur propre dans R. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. La réciproque est fausse.

- **Endomorphismes et matrices diagonalisables**

Soit E un K-espace vectoriel de **dimension finie** et u un endomorphisme de E. L'endomorphisme u est dit **diagonalisable** lorsque l'une des propositions équivalentes suivantes est vérifiée :
- il existe une base de E formée de vecteurs propres de u,
- On a $E = \oplus_{\lambda \in sp(u)} E_\lambda(u)$

Caractérisation des endomorphismes diagonalisables : l'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, il vérifie l'une des propositions équivalentes suivantes :
- $\sum_{\lambda \in sp(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$
- Le polynôme χ_M est scindé sur K et pour toute valeur propre λ, on a $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$

Cas particulier important : si χ_M est scindé sur K et à racines simples, alors l'endomorphisme u est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

Remarque pratique

Pour détermine $\dim E_\lambda(u)$,on étudie suivant les cas $Ker\,(u - \lambda IdE)$ (système linéaire) ou bien $rg(u - \lambda IdE)$ car, d'après le théorème du rang, on a :
$\dim E_\lambda(u) = \dim E - rg(u - \lambda IdE)$.

- **Exemples d'endomorphismes diagonalisables** : les **homothéties** sont les endomorphismes diagonalisables possédant une seule valeur propre, **les projecteurs** (resp. **les symétries**) sont les endomorphismes diagonalisables dont le spectre est inclus dans $\{0, 1\}$ $(resp.\, dans\, \{-1, 1\})$.

Remarque

- Lorsque u est diagonalisable, on a $tr\, u = \sum_{\lambda \in sp(u)} m(\lambda)\, \lambda$ et $detu = \prod_{\lambda \in sp(u)} \lambda^{m(\lambda)}$.
- On dit qu'une matrice M de $Mn(K)$ est **diagonalisable** lorsqu'elle est **semblable** à une matrice **diagonale**. Cela équivaut à l'existence d'une matrice P, inversible, dont les colonnes sont des vecteurs propres de M, telle que $P^{-1}MP$ est diagonale.

Il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs pour $P^{-1}MP$. En effet, cette matrice est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à M dans la nouvelle base formée des vecteurs propres. Les valeurs propres apparaissent sur la diagonale dans le même ordre que les vecteurs propres dans la matrice de passage P.

- **Polynômes d'endomorphismes, polynômes annulateurs**

Polynômes annulateurs

Scanné avec CamScanner

• On dit que le polynôme P est un **polynôme annulateur** de u lorsque $P(u)$ est l'endomorphisme nul de E, ce qu'on notera abusivement $P(u) = 0$.
• Si $P(u) = 0$, alors toute valeur propre de u est un zéro de P ;
• Lorsque E est de dimension finie, tout endomorphisme u de E admet au moins un polynôme annulateur. Ce n'est pas vrai lorsque E n'est pas de dimension finie.
• **Résultat important:**
Si P est un polynôme annulateur de u, alors toute valeur propre de u est racine de P. La réciproque est fausse.

Polynôme minimal

• En dimension finie, il existe un polynôme non nul de degré minimal π_u (que l'on pourra choisir unitaire) On l'appelle le **polynôme minimal** de u. Les racines de π_u sont **exactement** les valeurs propres de u.

Le théorème de Cayley-Hamilton

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors $\chi_M = 0$ ou de manière équivalente : π_u / χ_M. **Il en résulte que** $deg\ (\pi_u) \leq dim\ E$.

Remarque *: si le polynôme minimal de A est scindé simple alors A est diagonalisable.*

• Endomorphismes trigonalisables

Soit E un espace vectoriel **de dimension finie égale à** n ***sur*** K. Un endomorphisme u de E est dit **trigonalisable** lorsqu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

Remarque

Si dans une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ la matrice de u est triangulaire supérieure, alors dans la base $(e_n, \ldots, e_1)$, elle est triangulaire inférieure. Une matrice $M \in Mn(K)$ est dite trigonalisable dans $Mn(K)$ lorsqu'il existe une matrice $P \in GLn(K)$ telle que la matrice $P^{-1}MP$ soit triangulaire

• Diagonalisation, trigonalisation et polynôme annulateur

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$.

• Critères de diagonalisation

• L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si u admet un polynôme annulateur **non nul, scindé dans** $K[X]$ **et à racines simples**.
• L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si son **polynôme minimal** est **scindé dans** $K[X]$ **et à racines simples**.

• Critères de trigonalisation

• L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si u admet un polynôme annulateur **non nul, scindé dans** $K[X]$.
• L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé $dans\ K[X]$.

Scanné avec CamScanner

- **Quelques applications de la réduction des matrices**

Calcul des puissances de A : soit $A \in Mp(K)$.

• Lorsqu'on dispose d'un polynôme P annulateur de A, on effectue la division euclidienne de X^n par P. Il existe $(Q, R) \in K[X]^2$ tels que $X^n = PQ + R$ avec $deg\ R \leq n - 1$. On en déduit que

$$A^n = P(A)Q(A) + R(A) = R(A) \ .$$

En particulier, en notant p le degré de P, A^n est combinaison linéaire de $(I, A, \ldots, A^{p-1})$.

• Lorsque A est diagonalisable, il existe $P \in GLp(K)$ et D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P^{-1}A^nP = D^n$ et donc $A^n = PD^nP^{-1}$.

• Lorsque A est seulement trigonalisable, on essaie d'écrire $A = PTP^{-1}$ avec $P \in GLp(K)$, T triangulaire supérieure telle que $T = D + N$ avec D diagonale, N triangulaire strictement supérieure et $DN = ND$. Ainsi on peut utiliser la formule du binôme de Newton, et on obtient $T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$, N étant nilpotente, le calcul est alors plus simple.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2015-2016
UFRMI
L2 SM

UE ALGEBRE LINEAIRE ET BILINEAIRE
EVALUATION DE FIN D'ANNEE
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Date: 24-09-2016
Durée: 1 heure 30mn

Exercice 1 (8pts)

b) Donner un exemple de matrice de format $(4;5)$ échelonnée réduite par ligne de rang 3.

c) Donner une matrice diagonale par blocs qui n'est pas triangulaire (préciser les blocs).

d) Soit $M \in M_4(\mathbb{R})$ de polynôme minimal $m(X) = X^2(X+2)$. M est-elle inversible? diagonalisable? trigonalisabla? (seules les justifications à ces questions sont notées).

e) Soit E un espace vectoriel et F un sous espace vectoriel de E. Donner la définition de F^0, l'orthogonal dual de F et trois propriétés de l'orthogonal.

Exercice 2 (12pts) $P_{A_\lambda}(X) = -(X+1)^2(X-(\lambda-1))$

Soit la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \lambda+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

1° a) Calculer le polynôme caractéristique $P_\lambda(X)$ de A_λ. (Mettre sous forme factorisée).

b) Dites pour quelles valeurs de λ A_λ est diagonalisable.

c) Déterminer le polynôme minimal $m_\lambda(X)$ de A_λ suivant les valeurs de λ.

2° Calculer $(A_{-1})^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2015-2016
UFRMI L2 SM

1ère Session d'évaluation
Epreuve d'algèbre linéaire
Durée 1 heure 30 mn

Exercice 1
Soit le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$, pour $n \geq 2$, et $D_1 = a + b$.

a) Calculer D_2 et D_3
b) Exprimer D_n en fonction de D_{n-1} et D_{n-2}, $\forall n \geq 2$.
c) Déterminer le terme général de la suite récurrente (u_n) définie par: $u_{n+2} - (a+b)u_{n+1} + abu_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = a + b$.
d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$.
e) Application: calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 15 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$

Exercice 2
Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant: $A^2 = -2A$ et $rg(A) = 2$.
1° Montrer que A est diagonalisable.
2° Déterminer le polynôme minimal, les valeurs propres et le polynôme caractéristique de A.
3° Calculer A^n en fonction de A et n, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2016-2017
UFRMI L2 SM

1ère SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée:1 h 30 mn

Exercice 1

1) A quoi est égal le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs?

2) Soient $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$, (avec $n \in \mathbb{N}^*$) telles que D est inversible et $CD = DC$.

a) Calculer le produit suivant de matrices par blocs:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$$

b) En déduire qu'on a: $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$

3) Calculer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ -9 & 5 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 12 & -1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 2

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et A la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1) Montrer que si $a \neq 0$, alors A n'est pas diagonalisable.

2) Dans la suite on suppose $a = 0$.

a) Montrer que A est diagonalisable.

b) Calculer le polynôme minimal de A.

c) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

d) Calculer A^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2016-2017
UFRMI L2 TOUTES LES FILIERES

2ème SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée: 1 heure 45mn

Exercice 1 (6pts)
Soit M une matrice par blocs:

$$M = \begin{pmatrix} I_n & A & B \\ O_n & I_n & C \\ O_n & O_n & I_n \end{pmatrix}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est la matrice unité d'ordre n, O_n est la matrice nulle carrée d'ordre n et A, B et C des matrices carrées d'ordre n.

1) Montrer que M est inversible.
2) Donner une disposition par blocs de M^{-1} puis calculer M^{-1}.
3) Montrer que la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer T^{-1}.

Exercice 2 (14pts)
Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix} \text{ avec } m \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer et discuter les valeurs propres de A.
2) Pour quelles valeurs de m A est-elle diagonalisable?
3) On suppose $m = 2$. calculer A^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.
4) On suppose $m = 1$. Trigonaliser A

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2017-2018
UFRMI L2 TOUTES LES FILIERES

1ère SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée: 2 heures

Exercice 1

1° Donner une matrice de format $(4,5)$ échelonnée réduite par lignes de rang 3.

2° Donner une matrice diagonale par blocs qui n'est pas triangulaire.

3° a) Donner la définition d'une matrice diagonalisable.

b) Montrer que si une matrice est diagonalisable, alors son carré aussi est diagonalisable.

c) Montrer sur un contrexemple que la réciproque est fausse.

4° Dire si les assertions suivantes sont vraies (V) ou fausses (F). Pour chaque assertion fausse, proposer une assertion vraie qui la corrige:

a) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.

b) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

c) Toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est diagonalisable.

d) Toute matrice est produit fini de matrices d'opération élémentaire.

Exercice 2

Soit la matrice carrée d'ordre 4 à coefficient réels:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1° a) calculer M^2 et M^3

b) Vérifier que $M^3 = -2M^2$ puis exprimer M^n en fonction de n et M^2, $\forall n \geq 2$.

2° Calculer $e^M = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} M^n$ en fonction de I_4, M et M^2.

3° Déterminer le polynôme minimal et les valeurs propres de M.

4° Déterminer les sous espaces propres et les sous espaces caractéristiques de M.

5° Ecrire le polynôme caracteristique de M sans calcul de déterminant.

6° M est-elle jordanisable? Si oui, la jordaniser.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2017-2018
UFRMI L2 TOUTES LES FILIERES

2ème SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée: 1h 30 mn

Exercice 1 (6pts)

1° Donner une matrice carrée d'ordre 3 diagonale par blocs qui n'est pas diagonale.

2° a) Soit A une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réelles dont le polynôme minimal est $m_A(X) = X(X+1)^2$.

A est-elle inversible? diagonalisable? trigonalisable? (seules les justifications à ces questions sont notées).

b) Donner une réduite de Jordan de A.

3° a) Donner la définition d'une matrice diagonalisable.

b) soit M une matrice carrée à coefficients réelles. Montrer que si M est diagonalisable, alors M^2 l'est.

Exercice 2 (14 pts)

Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix} \text{ avec } m \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer et discuter les valeurs propres de A.

2) Pour quelles valeurs de m A est-elle diagonalisable?

3) On suppose $m = 1$. Trigonaliser A. (On pourra faire une trigonalisation ordinaire ou une réduction de Jordan)

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2018-2019
UFRMI L2 SM

1ère SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée:2 heures

Exercice 1

1° a) Echelonner la matrice M avec:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & m \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Discuter le rang de M suivant les valeurs de m.

c) Pour $m = -2$, donner la forme ligne canonique de M.

2° Résoudre et discuter le système linéaire:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$$

Exercice 2

Pour tout nombre réel λ, on considère l'endomorphisme f_λ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

1° Déterminer les valeurs propres de f_λ et discuter le nombre et les multiplicités suivant les valeurs de λ.

2° Pour quelles valeurs de λ f_λ est-il diagonalisable?

3° Déterminer le polynôme minimal de f_λ

4° Calculer $(A_1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY
UFRMI L2 TOUTES LES FILIERES

ANNEE 2018-2019

2ème SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée: 2 heures

Exercice 1 (6pts)

1° a) Donner la définition d'une matrice diagonalisable.

b) Montrer que si une matrice est diagonalisable, alors son carré aussi est diagonalisable.

2° Dire si les assertions suivantes sont vraies (V) ou fausses (F). Pour chaque assertion fausse, proposer une assertion vraie qui la corrige:

a) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.

b) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

c) Toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est diagonalisable.

Exercice 2 (6pts)

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$) telles que:

$$AB - BA = A$$

Le but de cet exercice est de montrer que A est nilpotente c.a.d $\exists k \in \mathbb{N}$, $A^k = 0$

On note E l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ et on considère l'application:

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & MA - MB \end{array}$$

φ $E \longrightarrow E$
$M \longmapsto MB - BM$.

1° Montrer que φ est un endomorphisme de E.

2° Montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(A^k) = kA^k$.

3° on suppose que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \neq 0$. Montrer que φ a une infinité de valeurs propres.

4° Conclure

Exercice 3 (8pts)

Soit la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

1° a) Determiner les valeurs propres et les sous espaces propres de A.

b) A t-elle diagonalisable? trigonalisable?

2° Trouver une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible P telles que $A = PTP^{-1}$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2019-2020
UFRMI L2 TOUTES LES FILIERES

1ère SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée: 2 heures

Exercice 1 (10*pts*)

Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1° a) f est-il un automorphisme de E?

b) Déterminer le noyau et l'image de f

2° Soit $B = (u, v, w)$ avec: $u = (3, 1, 0)$; $v = (1, -1, 1)$; $w = (2, -1, 1)$ une famille de vecteurs de E.

a) B est-il une base de E?

b) Déterminer la matrice A' de f dans la base B

3° a) Calculer A^2

b) En déduire la nature de f et donner ses éléments caractéristiques

Exercice 2 (10*pts*)

Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), \text{ où } a \text{ est un réel donné.}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de M et montrer que M est trigonalisable.

2) Montrer que si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, alors M est diagonalisable.

3) Montrer que si $a = 1$ ou $a = 0$, alors M n'est pas diagonalisable.

4) On suppose $a = 0$. trigonaliser M

VALIDER LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2020-2021
UFRMI L2 TOUTES LES FILIERES

1ère SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée: 2 heures

Exercice 1 (*8pts*)

1- Donner une matrice de format $(4,5)$ échelonnée réduite par lignes de rang 3.

2- Soit $H \in M_4(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est $m_H(X) = (X+5)^2$

a) H est-elle inversible?

b) H est-elle diagonalisable?

c) H est-elle jordanisable?

(Seules les justifications aux questions a),b) et c) sont notées)

d) On suppose que le sous espace propre de H associé à -5 est de dimension 2. Donner la réduite de Jordan J de H (Justifier entre trois et cinq lignes)

3- Dire si les assertions suivantes sont vraies (V) ou fausses (F). Pour chaque assertion fausse, proposer une assertion vraie qui la corrige:

a) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, det(\lambda A) = \lambda\, det(A)$.

b) Le rang d'une matrice est égal au nombre de ses lignes non nulles

c) Toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est diagonalisable.

d) Toute matrice est produit fini de matrices d'opération élémentaire.

Exercice 2 (*12pts*)

Pour tout nombre réel m, on considère l'endomorphisme f_m de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1-m & m-1 & m+1 \end{pmatrix}$$

1- Déterminer les valeurs propres de f_m et discuter le nombre et les multiplicités suivant les valeurs de m.

2- Pour quelles valeurs de m, f_m est-il diagonalisable?

3- Déterminer le polynôme minimal de f_m suivant les valeurs de m.

4- Calculer $(A_1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2020-2021
UFRMI L2 SM

2ème SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée: 2 heures

Exercice 1 (11*pts*)
Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1- f est-il un automorphisme de E?
2- a) calculer M^2
b) En déduire la nature de f et donner ses éléments caractéristiques.
3- Pourquoi f est-il diagonalisable?
4- Soient respectivement P et D la base et la direction de f.
a) Dire pourquoi on a $E = P \oplus D$ et donner la définition d'une base $B' = (u, v, w)$ de E adaptée à cette somme directe.
b) Soit $B' = (u, v, w)$ une base de E adaptée à la somme directe $E = P \oplus D$. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 2 (9*pts*)
Soit la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

1-a) Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de A.
b) A est-elle diagonalisable? trigonalisable?
2- Trouver une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible P telles que $A = PTP^{-1}$.

VALIDUR LMD

Scanné avec CamScanner

Correction Algèbre linéaire session 1 2015-2016
Exercice 1

b) Un exemple de matrice de format (4,5) échelonnée reduite par ligne de rang 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Une matrice diagonale par blocs qui n'est pas triangulaire

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ Avec $B_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $B_{12} = 0$ $B_{21} = 0$ $B_{22} = 4$

d) Soit $M \in M_4(\mathbb{R})$ de polynome minimale : $m(x) = x^2(x+2)$
M n'est pas inversible car $0 \in Sp(M)$
M n'est pas diagonalisable car son polynome minimale n'est pas scindé simple
M est trigonalisable car son polynome minimale est scindé dans $\mathbb{R}$

e) Soit E un espace vectoriel et F un sous espace vectoriel de E
$F^\circ = \{f \in E^*, f(x) = 0, \forall x \in F\}$ c'est l'ensemble des annihilateurs de F.
Les propriétés
- $F^\circ = (vect(F))^\circ$ c'est un sous espace vectoriel de E^*
- $dimF + dim(F^\circ) = dimE$
- $(F^\circ)^\circ = F = \{x \in F, f(x) = 0, \forall f \in E^*\}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 2

1 a) *Factorisons le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.*

On a

$$P_{A_\alpha}(X) = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ -1 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ -1-X & -2-X & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 0 & -2-X & -\alpha-1 \\ 0 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix}$$

$$= (-1-X)[(-2-X)(\alpha-X)+\alpha+1]$$

$$= -(X+1)[X^2+(2-\alpha)X+1-\alpha].$$

Factorisons le polynôme $X^2+(2-\alpha)X+1-\alpha$, son discriminant est égal à

$$\Delta = (2-\alpha)^2 - 4(1-\alpha) = \alpha^2.$$

On a donc $\sqrt{\Delta} = |\alpha|$, ce qui nous donne les deux racines

$$\lambda_1 = \frac{\alpha-2-\alpha}{2} = -1 \text{ et } \lambda_2 = \frac{\alpha-2+\alpha}{2} = \alpha-1.$$

Le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ se factorise donc en

$$P_{A_\alpha}(X) = -(X+1)^2(X-\alpha+1).$$

Déterminons selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.

Les valeurs propres de A_α sont les racines du polynôme caractéristique P_{A_α}, ainsi,

- si $\alpha = 0$, la matrice A_α admet une valeur propre triple $\lambda = -1$,
- si $\alpha \neq 0$, la matrice A_α admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = -1$ valeur propre double et $\lambda_2 = \alpha - 1$, valeur propre simple.

b) *Déterminons les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.*

Il est clair que dans le cas $\alpha = 0$, la matrice n'est pas diagonalisable, en effet si elle l'était, il existerait une matrice inversible P telle que $A_\alpha = P(-I)P^{-1} = -I$, ce qui n'est pas le cas.

Si $\alpha \neq 0$, la matrice A_α est diagonalisable si le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est de dimension 2. Déterminons ce sous-espace propre.

$$E_{-1} = \ker(A_\alpha + I) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \right\}$$

ainsi,

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x+(\alpha+1)z = -x \\ x-2y = -y \\ -x+y+\alpha z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha+1)z = 0 \\ x-y = 0 \end{cases}$$

Il faut distinguer les cas $\alpha = -1$ et $\alpha \neq -1$.

- Si $\alpha = -1$, le sous-espace E_{-1} est le plan vectoriel d'équation $x = y$, dans ce cas la matrice A_α est diagonalisable.
- Si $\alpha \neq -1$, le sous-espace E_{-1} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,0)$, dans ce cas la matrice A_α n'est pas diagonalisable.

c) Déterminons selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α.

Notons Q_A le polynôme minimal de A_α. On sait que la matrice A_α est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son polynôme minimal a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$ et que celles-ci sont simples. Or, nous venons de démontrer que A_α est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement $\alpha = -1$, on a donc

Scanné avec CamScanner

- Si $\alpha = -1$, A_α est diagonalisable, donc $Q_A(X) = (X+1)(X-\alpha+1) = (X+1)(X+2)$.
- Si $\alpha \neq -1$, on doit distinguer les cas $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$, en effet,
- si $\alpha \neq 0$, A_α n'est pas diagonalisable donc les racines de Q_A ne sont pas toutes les deux simples, et P_A admet deux racines distinctes, donc

$$Q_A(X) = -P_A(X) = (X+1)^2(X-\alpha+1).$$

- si $\alpha = 0$, on a $P_A(X) = -(X+1)^3$ et A_0 n'est pas diagonalisable, le polynôme minimal peut donc être égal à $(X+1)^2$ ou à $(X+1)^3$, or

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

donc le polynôme minimal Q_A est égal à $(X+1)^3$.

On suppose, dans cette partie, que $\alpha = -1$, on note $A = A_{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. *Vérifions que la matrice A est diagonalisable.*

que lorsque $\alpha = -1$, la matrice est diagonalisable, en effet, dans ce cas, elle admet deux valeurs propres : -1, valeur propre double et -2, valeur propre simple. Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 étant le plan d'équation $x = y$.

Diagonalisons la matrice A.

Pour cela déterminons une base de vecteurs propres. Le plan $x = y$ est engendré par les vecteurs $u(1,1,0)$ et $v(0,0,1)$, déterminons un vecteur directeur de la droite E_{-2} :

$$E_{-2} = \ker(A_\alpha + 2I) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \right\}$$

ainsi,

$$(x,y,z) \in E_{-2} \iff \begin{cases} x = -2x \\ x - 2y = 2y \\ -x + y - z = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

Le sous-espace propre E_{-2} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $w(0,1,-1)$. Ainsi, dans la base (u,v,w) la matrice est diagonale et s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

on a $A = PDP^{-1}$, où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

Correction de l'examen d'algèbre linéaire 1ère session 2016-2017'

Exercice 1

1- A quoi est égal le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs ?
Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants des matrices de la diagonale principale.

2-a Calculons le produit suivant les matrices par blocs

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_{2^n} \\ -C & D^{-}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-}1 \\ CD-DC & DD^{-}1 \end{pmatrix}$$ or $CD = DC$ et $DD^{-}1 = I_n$ donc on a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_{2^n} \\ -C & D^{-}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-}1 \\ 0_{2^n} & I_n \end{pmatrix}$$

2-b Déduisons-en qu'on a $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = det(AD-BC)$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}\begin{vmatrix} D & 0_{2^n} \\ -C & D^{-}1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AD-BC & BD^{-}1 \\ 0_{2^n} & I_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}|DD^{-}1| = |(AD-BC)*I_n|$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}I_n = |AD-BC| \text{ donc on a}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-BC|$$

3- Calculons Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ -9 & 5 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 12 & -1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 6 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ -15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 4 & 7 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

VALIDER LMD

Scanné avec CamScanner

$$\sim \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Soient $A_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -15 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}$; $A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

$A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ telles que :

$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$. $\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = |A_{11}| * |A_{22}|$

$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -15 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -15 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ alors

$\Delta = -174$

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

1- Montrons que si a $\neq 0$ alors A n'est pas diagonalisable

* Déterminons le polynôme caractéristique de A

$$P_A(X) = |A - I_3X| = \begin{vmatrix} 1-X & a & b \\ 0 & 1-X & c \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = -(X-1)^2(X-2)$$

* Déterminons les valeurs propres et les vecteurs propres de A

$P_A(X) = 0 \Leftrightarrow -(X-1)^2(X-2) = 0$

$\Leftrightarrow (X-1)^2 = 0$ ou $x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow X - 1 = 0$ ou $X - 2 = 0$

$\Leftrightarrow X = 1$ ou $X = 2$

$Sp(A) = \{1, 2\}$ où $m_1 = 2$ et $m_2 = 1$.

$E_1 = ker(A - I_3) = \{U(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (A - I_3)U = 0\}$

Scanné avec CamScanner

$$(A-I_3)=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(A-I_3)U=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}ay+bz=0\\cz=0\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ay=0\\z=0\\x\ quelconque\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\ donc\ y=0\\z=0\\x\ quelconque\end{cases}$$

$\Leftrightarrow E_1=<\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}>$. On a $dim\ E_1=1\neq m_1=2$.

Alors A n'est pas diagonalisable.

2-a) Montrons que A est diagonalisable

$$E_1=ker(A-I_3)=\{U(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(A-I_3)U=0\}$$

$$(A-I_3)U=0\Leftrightarrow\begin{cases}bz=0\\cz=0\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ est\ quelconque\\x\ est\ quelconque\\z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow U\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow E_1=<\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}>.\ dim\ E_1=2=m_1$$

$$E_2=ker(A-2I_3)=\{U(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(A-2I_3)U=0\}$$

$$(A-2I_3)=\begin{pmatrix}-1&0&b\\0&-1&c\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(A-2I_3)U=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&0&b\\0&-1&c\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

VALIDER LMD

Scanné avec CamScanner

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + bz = 0 \\ -y + cz = 0 \\ z \ quelconque \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = bz \\ y = cz \\ z \ quelconque \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow U \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz \\ cz \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} b \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$$

$E_2 = < \begin{pmatrix} b \\ c \\ 1 \end{pmatrix} > dim E_2 = m_2 = 1$. Par conséquent A est diagonalisable.

2-b) Calculons le polynôme minimal de A

Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique, aussi il est scindé simple dans $\mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal ont les mêmes racines. Alors $m_A(X) = -(X-1)(X-2)$.

2-c) Déterminons une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-}1$

Soit D une matrice diagonale composée des valeurs propres de A et soit P la matrice de A composée de ses vecteurs propres.

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P^{-}1 = \frac{1}{|P|} com({}^tP)$ où ${}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ et

$com({}^tP) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $|\mathrm{P}| = 1$. Alors $P^{-}1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = PDP^{-}1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2-d) Calculons A^n , $\forall n \in \mathbb{N}$

$A^n = PD^nP^{-}1$

VALIDUP LMD

Scanné avec CamScanner

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b(2^n-1) \\ 0 & 1 & c(2^n-1) \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI :L2 Année 2018-2019

CORRECTION :ALGEBRE LINEAIRE SESSION 1

EXERCICE 1

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & m \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. a) Echelonnons M

$$\text{On a : } M \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1-m \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & -4-2m \end{pmatrix}$$

b) $Rg(n)$ =Nomnbre de ligne non nulles de M.
Ainsi $Rg(n) = 2$ ssi $-4-2m = 0$
D'où $\begin{cases} Rg(n) = 2 & \text{ssi} \quad m = -2 \\ Rg(n) = 3 & \text{ssi} \quad m \neq -2 \end{cases}$

c) Après échelonnement de M,on a :

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & -4-2m \end{pmatrix}$$

$$\text{Pour } m = -2, \text{ on a : } M \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Soit $(E) : \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-2y+2z=m \\ 3x+y-z=1 \end{cases}$

La matrice du système est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

La matrice augmentée du système est :

$$\overline{A} = M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & m \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & -4-2m \end{pmatrix}$$

- Pour $m \neq -2$.

VALIDE PAR LIMD

Scanné avec CamScanner

On a : $Rg(\overline{A}) = Rg(M) = 3$ et $Rg(A) = 2$.
$\Rightarrow Rg(\overline{A}) > Rg(A)$ d'où (E) est incompatible et $S_{\mathbb{R}^3} = \emptyset$
• Pour $m = -2$.
On a : la forme ligne canonique de M est : $M \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$Rg(A) = Rg(M) = 2 < 3$ le nombre d'inconnu. Alors (E) admet une infinité de solutions.
Par interprétation à l'aide de la forme ligne canonique de M, on a :
$\begin{cases} y - z = 1 \quad (1) \\ x + y - z = 1 \quad (2) \end{cases}$
$(1) \Rightarrow y = 1 + z$
Dans (2),on a : $x + 1 + z - z = 1 \Rightarrow x = 0$
D'où $(E) = \{(0, 1 + z, z), z \in \mathbb{Q}\}$.

EXERCICE 2

Soit f_λ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice associée $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$

1. Valeur propre de f_λ.

on a : $|A_\lambda - XI_3| = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda+1-X \end{vmatrix}$
$|A_\lambda - XI_3| = -(X-1)(X-2)(X-(1+\lambda))$
Ainsi :
-Si $\lambda = 0$ alors $Sp(A_\lambda) = \{1, 2\}$ avec 1 de multiplicité 2 et 2 de multiplicité 1.
-Si $\lambda = 1$ alors $Sp(A_\lambda) = \{1, 2\}$ avec 1 de multiplicité 1 et la valeur propre 2 de multiplicité 2.
-Si $\lambda \notin \{0, 1\}$; $Sp(A_\lambda) = \{1, 2, 1+\lambda\}$

2. Les valeurs de λ pour lesquels A_λ est diagonalisable.
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a : le polygone caractéristique :
$|A_\lambda - XI_3| = -(X+1)(X-2)(X-(1+\lambda))$
Calculons les sous-espaces propres associés à chaque valeurs propres.

* E_1 ? Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1$

VALEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow (A_\lambda - XI_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ (1-\lambda)x + (\lambda-1)y + \lambda z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = x \\ (1-\lambda)x + (\lambda-1)y = 0 \end{cases}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$,on a : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow dim(E_1) = 1.$$

Or d'après le précédent, pour $\lambda = 0$ la valeur propre 1 est de multiplicité 2 différent de $dim(E_1) > 1$. Alors pour $\lambda = 0, A_\lambda$ n'est pas diagonalisable.

* E_2 ? Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2$

$$\Rightarrow (A_\lambda - 2I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ -x + z = 0 \\ (1-\lambda)x + (\lambda-1)y + (\lambda-1)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ (1-\lambda)x + (\lambda-1)y + (\lambda-1)z = \end{cases}$$

* Pour $\lambda = 1$, on a : $z = x; y = y$ (quelconque)

D'où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ et pour $\lambda = 1$ la valeur propre 2 est de multiplicité 2 et $dim E_2 = 2$.

* Pour $\lambda \neq 1$,On a :$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

* $E_{1+\lambda}$?

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{1+\lambda}$

$$\Rightarrow (A_\lambda - (1+\lambda)I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda x + z = 0 \\ -x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ (1-\lambda)x + (\lambda-1)y + = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \lambda x \\ y = x \\ (1-\lambda)x + (\lambda-1)y = 0 \end{cases}$$

avec $\lambda \notin \{1, 0\}$

$$\Rightarrow E_{1+\lambda} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \right\rangle$$

Finalement on en déduit que A_λ est diagonalisable ssi $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

3. Soit $m_{A_\lambda}(X)$ le plynôme minimal de A_λ

   * Pour $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ le polynôme caractéristique de A_λ est scindé simple, en plus $m_{A_\lambda}(X)$ et $P_{A_\lambda}(X)$(polynôme caractéristique) ont les mêmes racines et $m_{A_\lambda}(X)$ divise $P_{A_\lambda}(X)$. Alors :
   $m_{A_\lambda}(X) = (X-1)(X-2)(X-(\lambda+1))$

   * Pour $\lambda = 1$ on trouve $m_{A_\lambda}(X) = (X-1)(X-2)$

4. Calculons $(A_1)^n$

On a : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Sp\ A_1 = \{1, 2\}$

$$E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

A_1 est diagonalisable (question précédente) et $A_1 = PDP^{-1}$ avec

Scanné avec CamScanner

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice diagonale.

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage.

Déterminons P^{-1}

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$

$$PX = E \Rightarrow \begin{cases} y + z = e_1 \\ x + z = e_2 \\ y = e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -e_1 + e_2 + e_3 = x \\ e_1 - e_3 = z \\ e_3 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -e_1 + e_2 + e_3 = x \\ e_3 = y \\ e_1 - e_3 = z \end{cases}$$

D'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

On a : $A_1 = PDP^{-1} \Rightarrow A_1^n = PD^nP^{-1}$

On a : $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$PD^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n & 1 \\ 2^n & 0 & 1 \\ 0 & 2^n & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n & 1 \\ 2^n & 0 & 1 \\ 0 & 2^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Finalement $A_1^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

VALIDUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI :L2 Année 2018-2019

CORRECTION :ALGEBRE LINEAIRE SESSION 2

EXERCICE 1

1.a) Matrice diagonalisable

Une matrice diagonalisable est une matice semblable à une matrice diagonale.

b) Supposons $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.

Alors, $A = PDP^{-1}$ où P inversible et D diagonale.

$\Rightarrow A^2 = AA = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$

$\Rightarrow A^2 = PD^2P^{-1}$

Et comme le carré d'une matrice diagonale est u e matrice diagonale, alors D^2 est diagonale.

Ainsi, A^2 est semblable à une matrice diagonale D^2. D'où A^2 est diagonalisable.

2.a) **FAUX**.

L'assertion vraie est : $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$, $det(\lambda A) = \lambda^n\, det(A)$

b) **FAUX**.

Assertion vraie : $\forall A; B \in M_n(\mathbb{R})$, On a : $det(AB) = det(AB) = det(A)\, det(B)$

c) **FAUX**.

Assertion vraie : Toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est trigonalisable.

EXERCICE 2

$\varphi : E \longrightarrow E$ et $AB - BA = A$ pour $A, B \in E$

$M \longmapsto MB - BM$.

(2) Soit la proposition $P_k : \forall k \in \mathbb{N}, \varphi(A^k) = \varepsilon A^k$

• pour $k = 1$, on a : $\varepsilon(A) = AB - BA = A$

Par hypothèse $AB - BA = A$

$\Rightarrow \varphi(A) = 1 \times A^1$. Ainsi P_1 est vrai.

Supposons P_k vraie et montrons que P_{k+1} est vrai.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(A^k) = kA^k$

$\Rightarrow \varphi(A^k)A = kA^{k+1}$

$\Rightarrow \varphi(A^k)A + A^{k+1} = (k+1)A^{k+1}$ $(*)$

Par définition de φ, on a : $\varphi(A^k) = A^kB - BA^k$

$\Rightarrow \varphi(A^k)A = A^kBA - BA^{k+1}$

Scanné avec CamScanner

$$\varphi(A^k)A + A^{k+1} = A^kBA - BA^kA + A^kA$$
$$= A^k(BA + A) - BA^{k+1}$$

Or pour $(A, B) \in E^2, AB - BA = A \Rightarrow A + BA = AB$. D'où :

$$\varphi(A^k)A + A^{k+1} = A^k(AB) - BA^{k+1}$$
$$= A^{k+1}B - BA^{k+1} \quad (**)$$
$$= \varphi(A^{k+1})$$

$(*)$ et $(**)$ nous donne que : $\varphi(A^{k+1}) = (k+1)A^{k+1}$

Donc P_{k+1} est vrai sachant P_k est vraie.

On en déduit alors que P_k est vraie c'est-à-dire que $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(A^k) = kA^k$.

(3) On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \neq \mathbb{Q}$.

D'après précédent, $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(A^k) = kA^k$.

$\Rightarrow \varphi(U) = kU$ avec $U = A^k \in E$.

Ainsi pour k fixe dans $\mathbb{N}$, $\exists! U = A^k \in E$ tel que $\varphi(U) = kU$ alors k est une valeur propre dont le vecteur propre associé est : $U = A^k \neq O_E$.

Comme k parcourt $\mathbb{N}$ alors tout k élément de $\mathbb{N}$ est valeur propre de φ.

Ainsi il existe une infinité de valeur propre.

(4) Conclusion

On a montré précédemment que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \neq 0 \Rightarrow \varphi$ admet une infinité de valeur propre.

Soit $P \Rightarrow Q$ avec $\begin{cases} P : "\forall k \in \mathbb{N}, A^k \neq 0" \\ Q : "\varphi \text{ admet une infinité de valeur propre"} \end{cases}$

Or $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow non\, Q \Rightarrow non\, P$ avec :

$non\, P$: "$\exists k \in \mathbb{N} \backslash A^k = 0$"

$non\, Q$: "φ admet un nombre fini de valeur propre"

φ étant un endomorphisme de E alors $dim(\varphi) = n^2$ (E l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$).

Ainsi $S \leq n^2$ avec S le nombre de valeur propre de φ. Donc (S) est fini. D'où φ admet un nombre fini de valeur propre.

Comme $non\, Q \Rightarrow non\, P$, alors $\exists k \in \mathbb{N} \backslash A^k = 0$.

A est donc nilpotent.

EXERCICE 3

Scanné avec CamScanner

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.a) Valeur propre de A

$$\begin{aligned} P(X) &= det(A - XI) \\ &= \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -4 & 4-X & 0 \\ -2 & 1 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)\begin{vmatrix} -X & 1 \\ -4 & 4-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)[X(X-4)+4] \\ &= (2-X)(X^2-4X+4) \\ &= (2-X)(X-2)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X) = (X-2)^3}$$

Donc 2 est la seule valeur propre de A

Sous-espaces propre de A

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

$E_2 = ker(f - 2I_3)$

$$(x,y,z) \in E_2 \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \Rightarrow 2x - y = 0 \\ -2x + y = 0 \Rightarrow y = 2x \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $E_2 = Vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $dim\, E_2 = 2$ et $mult(2) = 3$

$dim\, E_2 \neq mult(2)$, donc A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable car son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

2) Trouvons une matrice triangulaire T et une matrice P telles que

VALIDUR LMD

Scanné avec CamScanner

$A = PTP^{-1}$

$$E_2 = Vect\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Posons $u_1 = (1,2,0)$ et $u_2 = (0,0,1)$.
Pour trigonaliser A, il suffit de completer la base pour un troisième vecteur indépendant de u_1 et u_2.

Par exemple $u_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. En effet, $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{vmatrix} = -1 \neq 0$

La matrice A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix}2 & 0 & a\\0 & 2 & b\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Déterminons a et b

On a : $A(u_3) = au_1 + bu_2 + 2u_3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2a + 2 = 4 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Donc $T = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

La matrice de passage P étant $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\-2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Il en resulte que : $A = PTP^{-1}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

Proposition de correction de la licence 2

Algèbre Linéaire : 2019-2020

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1) a) Vérifions si f est un automorphisme de E ou non :

f est un automorphisme de E si $det(A) \neq 0$

On a : $detA = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow det(A) = 0$

Donc f n'est pas un automorphisme de E.

b) Déterminons le noyau et l'image de f.

Noyau de f : $\left(ker(f) = < \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >\right)$

Image de f :

on a : $\dim(ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$

alors : $\dim(Im(f)) = 2$. D'où $Im(f)$ est engendré par 2 vecteurs. Soient v_1 et v_2 ces deux vecteurs et e_1 et e_2 deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a : $v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) a) B est-il une base de E ?
B est une base de E si
B est libre et génératrice.

On a : $\det(B) = \det(u, v, w) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\det(B) = 3\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2) = 1 \neq 0$

Donc, B est une famille libre.

On a : $card(B) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ alors B est génératrice par conséquent, B est une base de E.

b) Déterminons la matrice A' de f dans la base B.

$$\begin{matrix} & f(u) & f(v) & f(w) \end{matrix}$$

On a : $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}$

Déterminons a_{11}, a_{21} et a_{31}.

On a : $f(v) = a_{11}u + a_{21}v + a_{31}w$

Or : $f(v) = AV = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = 0 \\ a_{31} = 0 \end{cases}$ De même, on montre que $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) a) Calculons A^2

On a : $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Donc $A^2 = A$

b) Déduisons-en la nature de f et donnons ses éléments caractéristiques.

$inv(f) = \{X\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / f(X) = X\}$

On a : $f(X) = X \Leftrightarrow AX = X \Rightarrow \begin{cases} -x + 6y + 8z = x\ (E_1) \\ x - 2y - 4z = y\ (E_2) \\ -x + 3y + 5z = z\ (E_3) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x + 6y + 8z = 0\ (E_1) \\ x - 3y - 4z = 0\ (E_2) \\ -x + 3y + 4z = 0\ (E_3) \end{cases}$

Les trois équations $(E_1), (E_2)$ et (E_3) sont proportionnelles alors, on a :

$x = 3y + 4z$

D'où $inv(f) = \{(3y + 4z, y, z) / y, z \in \mathbb{R}\}$

$inv(f) = \{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \neq \emptyset$ et $A^2 = A$ donc,

f est une projection P.

Eléments caractéristique.

$inv(f) = < \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$ c'est la base de P.

$Ker(f) = < \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >$ c'est la direction de P.

Exercice 2

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

1) Polynôme caractéristique de M

Soit $P_M(X)$ le polynôme caractéristique de M.

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & -2 \\ 1 & a-X & -1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{vmatrix}$$

$$= (2-X)\begin{vmatrix} a-X & -1 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ a-X & -1 \end{vmatrix}$$

$$P_M(X) = -X(X-a)(X-1)$$

2) Montrons que si a≠ 0 et a≠ 1 alors M est diagonalisable.

On a : $P_M(X) = -X(X-a)(X-1)$.

Si a≠ 0 et a≠ 1 alors :

$m(X) = X(X-a)(X-1)$ où

$m(X)$ est le polynôme minimal de M.

Comme $m(X)$ est scindé simple sur $\mathbb{R}$ alors M est diagonalisable.

3) Montrons que si a= 1 ou a= 0, alors M n'est pas diagonalisable.

Supposons que a= 1 alors :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P_M(X) = -X(X-1)^2$$

$\Rightarrow S_p(M) = \{0; 1\}$ où $m_{(0)} = 1$ et $m_{(1)} = 2$.

Sous-espace propre

$$E_G = \{X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ MX = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$\text{On a : } MX = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ x+y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=0 \ (E_1') \\ x+y-z=0 \ (E_2') \end{cases}$$

$(E_2') \Rightarrow x = z - y$ (*)

(*) dans $(E_1') \Rightarrow 2z - 2y + y - 2z = 0$

$$\Rightarrow y = 0$$

Alors $x = z$.

D'où $E_0 = \{(z, 0, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\}$.

$$E_0 = <\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}> \Rightarrow \dim(E_0) = 1 = m_{(0)}$$

Autre méthode

On a : $1 \leq dim E_{(\lambda)} \leq m_\lambda$

Pour λ=0, $1 \leq dim E_{(0)} \leq m_{(0)} = 1$

$\Rightarrow dim E_{(0)} = 1 = m_0$

$$E_{(1)} = \{X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \ (M - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$\text{On a : } (M-I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ x-z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases}$$

Alors $E_{(1)} = \{(z, z, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\}$.

$$E_{(1)} = <\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}> \Rightarrow \dim(E_{(1)}) = 1 \neq m_{(1)} = 2$$

Par conséquent, M n'est pas diagonalisable.

Conclusion

Si $a = 1$, M n'est pas diagonalisable.

Supposons que $a = 0$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P_M(X) = -X^2(X-1)$$

$\Rightarrow S_p(M) = \{0; 1\}$ où $m_{(0)} = 2$ et $m_{(1)} = 1$.

Sous-espace propre

$$E_{(1)} = \{X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ (M - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$\text{On a : } (M-I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \ (1) \\ x-y-z=0 \ (2) \\ x+y-2z=0 \ (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \ (1) \\ x-y-z=0 \ (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x = z + y$ (*)

(*) dans $(1) \Rightarrow y + z + y - 2z = 0$

$$\Rightarrow z = 2y$$

Alors $x = 3y$.

D'où $E_{(1)} = \{(3y, y, 2y) \ / \ y \in \mathbb{R}\}$.

$$E_{(1)} = <\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}> \Rightarrow \dim(E_{(1)}) = 1 = m_{(1)}$$

$$E_{(0)} = \{X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ MX = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$MX = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=0 \ (1) \\ x-z=0 \quad (2) \\ x+y-z=0 \quad (3) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x = z$

Dans (1) on a : $y = 0$.

$E_{(0)} = \{(z, 0, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\}$

$$E_{(0)} = <\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}> \Rightarrow \dim(E_{(0)}) = 1 \neq m_{(1)} = 2.$$

Donc, M n'est pas diagonalisable.

Conclusion : *si* $a = 0$, M n'est pas diagonalisable.

4) On suppose $a = 0$.

Trigonalisons M

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$dont la matrice de la base canonique est M.

T la matrice Trigonaliser de M dans la $B' = (u, v, w)$

VALIDEUR MD

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

Avec $u = (3,1,2)$, $v = (1,0,1)$.

P la matrice de passage inversible $P_{BB'}$ telle que :

$$M = PTP^{-1} \text{ avec } T = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminons a, b et c

Prenons $w = e_1 = (1,0,0)$

On a : $f(u) = u$ (1)

$f(v) = au + 0 \times v$ (2)

$f(e_1) = bu + cv$ (3)

(2) $\Rightarrow f(v) = av$ alors $a = 0$.

(3) $\Rightarrow f(e_1) = bu + cv$

Or : $f(e_1) = M \times e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3b + c = 2 \\ b = 1 \\ 2b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Donc $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB
MATHS-INFO L2

Année 2020-2021

CORRECTION ALGEBRE LINEAIRE
Session 1

Exercice 1

1) Une matrice de format $(4,5)$ écholonnée réduite par ligne de rang 3 est :

Soit A cette matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2)a- VRAI car $0 \in Sp(H)$
b- FAUX car le polynôme minimal de H n'est pas scindé simple dans $\mathbb{R}$.
c- VRAI car le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$.
d- Comme -5 est la seule valeur propre de H alors H contient un seul élémentaire de Jordan. On a $E_{-5} = 2$ donc il y a 2 sous blocs de Jordan dans la matrice élémentaire de Jordan. Par ailleurs $m_H(X) = (X+S)^2$ donc l'ordre maximal des sous blocs de Jordan est 2.

Donc $J = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

3) a- FAUX car $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$
b- FAUX car c'est le nombre de lignes ou de colonnes non nuls.
c- VRAI
d- VRAI

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1-m & m-1 & m+1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminons les valeurs propres de f_m

* Déterminons le polynôme caractéristique

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

$$P_{A_m}(A) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1-m & m-1 & m+1-X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 1-X & 2-X & 1 \\ 0 & m-1 & m+1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 0 & m-1 & m+1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-X & 1 \\ X-(m+1) & m-1 & m+1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)(X-m-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-X & 1 \\ 1 & m-1 & m+1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)(X-m-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2-X & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)(X-m-1)(2-X)$$

$$= -(X-1)(X-m-1)(X-2)$$

$P_{A_m}(X) = -(X-1)(X-m-1)(X-2)$.

On a: $Sp(A_n) = \{m+1, 2, 1\}$
Soit l_i le nombre de multiplicité.
Si $m = 0$, on a: $P_{A_0}(X) = -(X-1)^2(X-2)$
Alors $l_1 = 2$ et $l_2 = 1$

Si $m = 1$, on a: $P_{A_1}(X) = -(X-1)(X-2)^2$
Alors $l_1 = 1$ et $l_2 = 2$

Si $m \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ alors P_{A_m} est scindé simple. D'où chaque valeur propre a pour multiplicité 1.

2) Si $m \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $P_{A_m}(X)$ est scindé simple donc f_m est diagonalisable.

Si $m = 0$ on a: $P_{A_0}(X) = -(X-1)^2(X-2)$

* Déterminons les sous espaces propres E_1 et E_2

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow (A_0 - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$(x, y, z) = (y, y, 0) = (1, 1, 0)y \Rightarrow \boxed{E_1 =< (1,1,0) >}$

On a $dim E_1 = 1 \neq m_1 = 2$ (la multiplicité de 1) donc A_0 n'est pas diagonalisable d'où f_m n'est pas diagonalisable.

- Si $m = 1$ on a $P_{A_1}(X) = -(X-1)(X-2)^2$

  * Déterminons E_2

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow (A_1 - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x + z = 0 \Leftrightarrow x = z$$

$(x, y, z) = (z, y, z) = (0, 1, 0)y + (1, 0, 1)z \Leftrightarrow E_2 =< (0,1,0); (1,0,1) >$

On a $dim\, E_2 = 2 = m_2 = 2$ et $dim\, E_1 = 1$ donc f_m est diagonalisable.

Conclusion

- Si $m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, f_m est diagonalisable.
- Si $m = 0$, f_m n'est pas diagonalisable.

3) Déterminons le polynôme minimal de f_m suivant les valeurs de m.

Soit $m_{A_m}(X)$ le polynôme minimal de f_m.

Pour $m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ f_m est diagonalisable donc $m_{A_m}(X)$ est scindé simple. Par conséquent $m_{A_m}(X) = (X-1)(X-2)(X-(m+1))$

$\boxed{m_{A_m}(X) = (X-1)(X-2)(X-(m+1))}$

Pour $m = 0$ ou $P(X) = -(X-1)^2(X-2)$ le polynôme minimal est soit $(X-1)^2(X-1)$, soit $(X-1)(X-2)$

On a: $(A_0 - I)(A_0 - 2I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$(A_0 - I)(A_0 - 2I) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A_0 - I)(A_0 - 2I) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$$

Donc nous pouvons dire que: $m_{A_0}(X) = (X-1)^2(X-2)$

Conclusion

- Si $m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $m_{A_m}(X) = (X-1)(X-2)(X-(m+1))$
- Si $m = 0$, $m_{A_0}(X) = (X-1)^2(X-2)$

4) Calculons $(A_1)^m$, $\forall n \in \mathbb{N}$

On a: $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Comme A_1 est diagonalisable, il existe une matrice D diagonale et P une matrice inversible telle que $A_1 = P\,D\,P^{-1}$

On a $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

* Déterminons E_1 pour $m = 1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow (A_1 - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$E_1 = <(1,1,0)>$

On a: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(À vous de déterminer l'inverse de P)

On a: $A_1 = P\,D\,P^{-1}$

$\Rightarrow A_1 \times A_1 = P\,D\,P^{-1}(P\,D\,P^{-1}) = P\,D(P^{-1}\,P)\,D\,P^{-1}$

$A_1^2 = P\,D^2\,P^{-1}$

Scanné avec CamScanner

$$A_1^n = P\,D^n\,P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_1^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

RESUME ALGEBRE BILINEAIRE

Soit E un espace vectoriel réel.

✓ Forme bilinéaire sur symétrique

-On appelle **forme bilinéaire symétrique** sur E toute application φdéfinie sur $E \times E$ à valeurs réelles telle que :

- pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire (linéarité à droite)
- pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x,y)$est linéaire (linéarité à gauche)
- pour tout $(x, y) \in E \times E$ $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ (symétrie).

◦ L'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E est un $\mathbb{R} - espace\ vectoriel$ ..

◦ On dit que la forme bilinéaire symétrique est **positive** lorsque, pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x,x) \geq 0$. On dit qu'elle est **définie positive**, lorsque de plus, l'égalité $\varphi(x,x) = 0$ implique $x = 0_E$ (la réciproque étant toujours vraie).

✓ Formes quadratiques

◦ Si φ est une forme bilinéaire symétrique, on appelle forme quadratique associée à φ, l'application q définie sur E à valeurs réelles, telle que, pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$ On dit qu'elle est **positive** lorsque, pour tout $x \in E$, $q(x) \geq 0$, et **définie positive** lorsque, pour tout $x \in E \setminus \{0\}, q(x) > 0$.

◦ **Formules de polarisation :** si q est la forme quadratique associée à φ, alors pour tout $(x,y) \in E \times E$, on a : $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big) - \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$

◦ **Inégalité de Cauchy-Schwarz :** si φ est une forme bilinéaire symétrique positive et si q est sa forme quadratique associée, alors pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $\varphi(x,y)^2 \leq q(x)q(y)$.

• **Matrice d'une forme bilinéaire symétrique**

Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur E, et $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. On pose $a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$ pour i et j compris entre 1 et n. La matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est appelée matrice de la forme bilinéaire symétrique φ (ou de sa forme quadratique associée q) dans la base B. Cette matrice est symétrique.

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, on note X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans la base B . Alors $\varphi(x,y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i y_j = {}'XAY$. En particulier ,

$q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j = {}'XAX$

✓ Endomorphismes orthogonaux

Un endomorphisme u de E est dit **orthogonal** lorsqu'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire $\forall (x,y) \in E^2, (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.

• L'endomorphisme u est orthogonal si et seulement si $u \circ u^* = Id_E$ (c'est-à-dire que u est inversible et $u^* = u^{-1}$.

Scanné avec CamScanner

• L'endomorphisme u est orthogonal si et seulement si l'image par u d'une base orthonormale est une base orthonormale.

• On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux. Muni de la loi $\circ$, $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$, appelé groupe orthogonal.

• Si $u \in \mathcal{O}(E)$, **alors** $\det u = \pm 1$. On note $S\mathcal{O}(E)$ le sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ formé des éléments de déterminant égal à 1, appelé groupe spécial orthogonal.

• Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque l'endomorphisme de $\mathbb{R}n$ canoniquement associé à M est orthogonal. Cela est équivalent à l'une des propositions suivantes :

- ✓ (i) les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}_n$.
- ✓ (ii) la matrice vérifie la relation $'MM = M'M = I_n$.

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathbb{R}^n$ est noté $O_n(\mathbb{R})$. C'est un groupe multiplicatif, appelé **groupe orthogonal.**

• **Caractérisation matricielle des endomorphismes orthogonaux:** l'endomorphisme u est orthogonal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale quelconque de E est orthogonale.

• **Changement de bases orthonormales :** si B et B' sont deux bases orthonormales de E, alors la matrice de passage de la base B à la base B' est une matrice orthogonale.

✓ **Endomorphismes orthogonaux particuliers:**

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle :

• **symétrie orthogonale** par rapport à F, la symétrie par rapport à F dans la direction $F^{\perp}$

• **réflexion** toute symétrie orthogonale parrapport à un hyperplan (son déterminant vaut alors -1).

- Lorsque **dim E = 2**, une rotation de E est un endomorphisme orthogonal de déterminant 1. Sa matrice dans toute base orthonormale s'écrit

$$\begin{pmatrix} COS\,\theta & -Sin\theta \\ Sin\theta & COS\theta \end{pmatrix} ou\ \theta\ (l'angle\ de\ rotation) \in \mathbb{R}.$$

- Lorsque **dim E = 3,** une rotation de E *est un endomorphisme orthogonal u de déterminant 1. Dans une base orthogonale dont le premier vecteur est dans* $Ker\ (u - Id_E)$. *Sa matrice s'écrit*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos\theta & -Sin\theta \\ 0 & Sin\theta & Cos\theta \end{pmatrix} ou\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Scanné avec CamScanner

UFHB

Maths-Info

EXAMEN D'ALGEBRE BILINEAIRE

Septembre 2016

Durée : 1 H 30

EXERCICE 1(09points)

Soit a un nombre réel. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$q(v) = x^2 + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 + 2xy - 2ayz$

pour $v = (x, y, z)$. Soit f la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1. Déterminer une décomposition de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
2. Donner le rang et la signature de q suivant les valeurs de a.
3. Pour quelles valeurs de a, f définit-elle un produit scalaire ?

EXERCICE 2(11points)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ considéré comme espace vectoriel euclidien orienté muni de la base orthonormée directe canonique (i, j, k).

Dans E le produit scalaire est noté $< x, y >$.

Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire de E.

Pour tout rée λ non nul on note f_λ l'endomorphisme de E qui à x associe

$$f_\lambda(x) = x + \lambda < x, u > u.$$

Répondez par vraie ou fausse en justifiant :

A) $f_{(-1)}$ est un automorphisme orthogonal de E.

B) $f_{(-1)}$ est une projection orthogonale de E.

C) f_λ est un automorphisme orthogonal de E si et seulement si $\lambda = -2$.

D) $f_{(-2)}$ est une réflexion de E.

Indication : Remarquez que $f_\lambda = (id_E - \lambda p)$ où p serait à déterminer.

(Si l'indication ne vous dit rien, laissez tomber).

Courage, ça peut aller maintenant !

Scanné avec CamScanner

Université F.H.B.
UFR MI

2016-2017

Examen d'Algèbre Bilinéaire
L2
Session de Septembre 2017
Durée : 01h30

Exercice (**20points**)
Moyennant la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et α, β, γ des réels donnés dans $[0, \pi[$,
$q(u) = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\alpha + 2zx\cos\beta + 2xy\cos\gamma$ où $u = (x, y, z)$.
1) Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.
2) Donner la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3) Décomposer en carrés de Gauss la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^3$.
4) Déterminer la signature et le rang de q. Est-elle non dégénérée ?
5) Donner une base q-orthogonale.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFHB Année 2016-2017
Maths-Info

EXAMEN D'ALGEBRE BILINEAIRE

2nde session

Durée : 1 H 30

EXERCICE 1(10 points)

Soit a un nombre réel. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$q(v) = x^2 + (1-a)y^2 + (1-a-a^2)z^2 + 2xy + 2ayz$

pour $v = (x, y, z)$. Soit f la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1. Déterminer une décomposition de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
2. Donner le rang et la signature de q suivant les valeurs de a.
3. Pour quelles valeurs de a, f définit-elle un produit scalaire ?

EXERCICE 2(10 points)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ considéré comme espace vectoriel euclidien orienté muni de la base orthonormée directe canonique (i, j, k).

Dans E le produit scalaire est noté $< x, y >$, le produit vectoriel $x \wedge y$ pour $x, y \in E$.

Soit $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire de E. Soit D l'axe orienté par v.

Pour tout réel λ non nul on note f_λ l'endomorphisme de E qui à x associe

$$f_\lambda(x) = x + \lambda < x, v > v.$$

1.1 a) Soit une base orthonormée directe (u, v, w) de E, donner la matrice A_λ de f_λ dans cette base.

b) Déterminer le noyau et l'image de f_λ .

c) Pour quelle valeur de λ, f_λ est-elle une projection orthogonale non triviale.

1.2 a) Pour quelle valeur de λ, f_λ est-elle un endomorphisme orthogonal ?

Cette valeur de λ est désormais notée λ_0.

b) Déterminer la nature de f_{λ_0}.

Courage, ça peut aller maintenant !

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

UFHB Année 2017-2018

Maths-Info

EXAMEN D'ALGEBRE BILINEAIRE

Septembre 2018

Durée : 1 H 30

EXERCICE 1(14 points)

Soit Φ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. Expliciter Φ la forme bilinéaire ainsi que la forme quadratique Q associée.
2. Déterminer son rang et son noyau. Est-ce une forme non dégénérée ?
3. Quel est l'orthogonal de $H = Vect((1,0,0),(1,0,1))$? A-t-on $dimH + dimH^{\perp} = 3$?
4. Mêmes questions lorsque $H = Vect((0,1,0),(1,0,1))$. Expliquer pourquoi ceci peut arriver.

EXERCICE 2(06 points)

Soient H un hyperplan d'un espace vectoriel euclidien $(E, <,>)$ et v un vecteur non nul normal (c'est à dire orthogonal) à H. Soient p_H la projection orthogonale sur H et s_H la réflexion (c'est à dire symétrie orthogonale) par rapport à H. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $p_H(x) = x - \frac{< x, v >}{\|v\|^2} v$ et $s_H(x) = x - 2\frac{< x, v >}{\|v\|^2} v$.

Courage, ça peut aller maintenant !

VALIDE UFHB LMD

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

UFHB
MATHS-INFO

Année 2017-2018

EXAMEN D'ALGEBRE BILINEAIRE

L2

Deuxième session

Durée : 1 H30

EXERCICE 1(14 points)

Sur $E = \mathbb{R}^4$ muni de la base canonique β, soit q la forme quadratique de forme polaire φ définie par :

$\forall (x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_4y_4 -$
$\frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) - (x_1y_4 + x_4y_1) -$
$(x_2y_3 + x_3y_2) + \frac{1}{2}(x_2y_4 + x_4y_2) - \frac{1}{2}(x_3y_4 + x_4y_3)$.

Donner une base q-orthogonale et montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^4$.

Indication : diagonaliser la matrice de φ et le tour est joué.

EXERCICE 2(6 points)

Soit $A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

Montrer que l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ euclidien dont la matrice est A est une réflexion avec le plan de symétrie à déterminer.

Courage, ça peut aller maintenant !

VALIDE UR LMD

Scanné avec CamScanner

Examen d'algèbre bilinéaire

1ère session ; L2 ; durée : 1 H 00

Répondez par VRAI ou FAUX.

Certaines questions nécessitent un travail au brouillon.

Une bonne réponse vaut 1,5 points(+1,5points), une mauvaise vaut moins 0,5point(-0,5point), aucune réponse vaut 0 point(0point)

Question 1(VRAI ou FAUX)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

On considère par leurs coordonnées les points :

$A(1; -1+\sqrt{2}; 2)$; $B(3; -1-\sqrt{2}; 4)$; $C(2; -1; 3)$.

On appelle :

Σ l'ensemble des points de coordonnées $(x; y; z)$ tels que :

$(x-1)(x-3)+(y+1-\sqrt{2})(y+1+\sqrt{2})+(z-2)(z-4)=0$.

$\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne : $x-y+z\sqrt{2}=3\sqrt{2}-1$.

a) Σ est une sphère dont un diamètre est $[AB]$.

b) Σ est une sphère de centre C.

c) La distance de C à $\mathcal{P}$ est $\dfrac{3(1+\sqrt{2})}{2}$

d) $\mathcal{P}$ est tangent à Σ

Question 2(VRAI ou FAUX)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on désigne par $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ les plans d'équations respectives :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} y-x=sin^2\theta \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \; ; \; \mathcal{Q} : \begin{cases} z-y=cos^2\theta \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On appelle (D) la droite d'intersection de ces deux plans.

a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont orthogonaux.

b) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la droite (D) est contenue dans le plan d'équation :

$$\begin{cases} z-x=1 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

c) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la droite (D) est orthogonale au plan d'équation :

$x+y+z=0$.

d) Il existe un réel θ tel que (D) soit parallèle au plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Exercice

On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les trois points non alignés A, B, C suivants, donnés par leurs coordonnées :

$A(1; 0; -1)$; $B(3; -1; 2)$; $C(2; -2; -1)$

et le point E de coordonnées : $E(4; -1; -2)$.

Scanné avec CamScanner

1. a) Montrer que la droite (CE) est orthogonale à la droite (AB) et à la droite (AC).

b) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A, B et C.

c) Calculer la distance $d(E;\mathcal{P})$ du point E au plan $\mathcal{P}$.

2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AE).

3. On considère la droite $(\mathcal{D})$ dont un système d'équations paramétriques est :

$$(\mathcal{D}):\begin{cases} x=0 \\ y=2+t \\ z=-1+t \\ t\in R \end{cases}$$

a) Donner un point J et un vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ de $(\mathcal{D})$.

b) Expliquer pourquoi la droite $(\mathcal{D})$ est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.

4. a) Déterminer le point M de $(\mathcal{D})$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{v}(0;1;1)$ soient orthogonaux.

b) En déduire la distance $d(E;(\mathcal{D}))$ du point E à la droite $(\mathcal{D})$.

Courage, ça peut aller maintenant !

VALIDE PAR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB
MATHS-INFO.

Année 2018-2019

Examen d'algèbre bilinéaire
2^{nde} session ; L2 ; durée : 1 H 30

Exercice

Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :
$q(x) = x_1^2 + (1+a)x_2^2 + (1+a+a^2)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_2x_3$; $a \in \mathbb{R}$;
$x = (x_1, x_2, x_3)$ dans β la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. Donner la matrice A de q dans β la base canonique de $\mathbb{R}^3$
2. Calculer le déterminant de A
3. Pour quelles valeurs de a la forme q est-elle non dégénérée ?
4. Réduire q et donner son rang en fonction de a
5. Déterminer une base orthogonale pour q
6. En déduire une matrice inversible P telle que $D = ({}^tP)\,AP$ soit diagonale.

VALIDE POUR LMD

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

Année 2019-2020

Université FHB
MATHS-INFO.

Examen d'algèbre bilinéaire
L2 ; durée : 1 H 30

Exercice

Répondez par **VRAI** ou **FAUX** avec justification dans l'ordre des questions

On note E l'espace vectoriel des matrices réelles de taille 2×2.

Pour toute matrice $A \in E$ on pose $q(A) = tr(A^2)$.

1) q est une forme quadratique

2) Sa forme polaire est : $b(A, B) = tr(AB) = tr(BA)$.

3)L'expression de q dans la base canonique de E,

pour $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est : $q(A) = a^2 + 2bc + d^2$.

4) Une décomposition de Gauss de q est : $q(A) = a^2 + \frac{1}{2}(b+c)^2 - \frac{1}{2}(b-c)^2 + d^2$.

5) La si- ture de q est : $(3, 1)$.

6) Pour tout $A \in E$, on a : $A^2 = (trA)A - (detA)I_2$, I_2 matrice identité d'ordre 2.

On considère maintenant le sous-espace $F \subset E$ des matrices de trace nulle.

7) Pour tout $A \in F$ on a $q(A) = -2det(A)$.

8) La signature de la restriction de q à F est : $(2, 1)$.

9) Une base orthogonale pour la restriction $q|F$ est :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

10) Pour que $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$, pour tout choix de sous-espace $F \subset E$,
il est nécessaire et suffiant que q soit non dégénérée

11) Pour que $F \oplus F^{\perp} = E$, pour tout choix de sous-espace $F \subset E$,
il est nécessaire et suffiant que $q|F$ soit non dégénérée.

VALIDUR LMD

Scanné avec CamScanner

VALIDUR LMD

Université FHB
MATHS-INFO.

Année 2020-2021

EXAMEN D'ALGEBRE BILINEAIRE
Session 1 ;L2; durée:1H30

EXERCICE

1) Décomposer en carés la forme quadratique $q(x,y,z) = xy + yz + xz$ sur $\mathbb{R}^3$.
Quelle est sa signature ? Quel est son rang ? Est-elle dégénérée ?

2) Ecrire une base orthogonale pour cette forme quadratique.

3) On désigne par (D) l'axe des x.

   a) Déterminer $(D^{\perp})$ pour cette forme quadratique.

   b) Déterminer $(D) \cap (D^{\perp})$

   c) Est-ce que (D) et $(D^{\perp})$ sont supplémentaires ?

Scanné avec CamScanner

2020-2021

UNIVERSITE FHB
Maths-Info

EXAMEN ALGEBRE BILINEAIRE

L2

2ème Session, Durée: 01h30'

Exercice 1 (06 points)

Soit a et b deux nombres réels et $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$\beta(\,(x_1, x_2), (y_1, y_2)\,) = x_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + ax_2y_2$.
Donnez, lorsqu'il y en a, les valeurs de a et b pour lesquelles β est
a) linéaire en la première variable,
b) linéaire en la deuxième,
c) symétriques,
d) positives,
e) non dégénérée,
f) un produit scalaire.

Exercice 2 (14 points)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}, \beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et f une forme bilinéaire sur E dont la matrice par rapport à β est

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

1) Calculer $f(x,y), f(x,x), f(y,y)$ dans les deux cas suivants:
   a) $x = e_1 + e_2 - e_3$ et $y = e_1 - e_2$.
   b) $x = e_1 + 2e_2$ et $y = e_2 + 7e_3$.
2) Trouver une nouvelle base de E par rapport à laquelle la matrice f est la matrice $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{91}{3} \end{pmatrix}$. En déduire une matrice inversible P telle que $({}^tP)MP = D$, où $({}^tP)$ est la transposée de P.

VALEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI Année 2016-2017

EXAMEN D'ALGEBRE BILINEAIRE
SESSION 2 SEMESTRE 1

EXERCICE 1

Soit a un réel, soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par $q(v) = x^2 + (1-a)y^2 + (1-a-a^2)z^2 + 2xy + 2ayz$

1. On a :
$$\begin{aligned} q(v) &= x^2 + (1-a)y^2 + (1-a-a^2)z^2 + 2xy + 2ayz \\ &= x^2 + 2xy + (1-a)y^2 + (1-a-a^2)z^2 + 2ayz \\ &= (x+y)^2 - y^2 + (1-a)y^2 + (1-a-a^2)z^2 + 2ayz \\ &= (x+y)^2 - ay^2 + (1-a-a^2)z^2 + 2ayz \\ &= (x+y)^2 - a(y-z)^2 + (1-a^2)z^2 \end{aligned}$$
On obtient : $q(v) = (x+y)^2 - a(y-z)^2 + (1-a^2)z^2$

2. On a : $q(v) = (x+y)^2 - a(y-z)^2 + (1-a^2)z^2$

* Signature
On a : $1 - a^2 = 0 \Rightarrow a = 1$ ou $a = -1$

* Pour $a = 1$
$q(V) = (x+y)^2 - (y-z)^2$, donc $sig(q) = (1,1) \Rightarrow rg(q) = 2$

* Pour $a = -1$
$q(V) = (x+y)^2 + (y-z)^2$, donc $sig(q) = (2,0) \Rightarrow rg(q) = 2$

* Pour $a = 0$
$q(V) = (x+y)^2 + z^2$,donc $sig(q) = (2,0) \Rightarrow rg(q) = 2$

* Pour $a \in]-1,0[$; $-a > 0$ et $1 - a^2 > 0$
D'où $sig(q) = (3,0) \Rightarrow rg(q) = 3$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

* Pour $a \in]0,1[$; $-a < 0$ et $1-a^2 > 0$
Donc $sig(q) = (2,1) \Rightarrow rg(q) = 3$

* Pour $a \in]-\infty,-1[$; $-a > 0$ et $1-a^2 < 0$
D'où $sig(q) = (2,1) \Rightarrow rg(q) = 3$

* Pour $a \in]1,+\infty[$, $-a < 0$ et $1-a^2 < 0$
Donc $sig(q) = (1,2) \Rightarrow rg(q) = 3$

Finalement on résume que :

* Pour $a = 1$ On a : $sig(q) = (1,1)$ et $rg(q) = 2$

* Pour $a \in]-1,0[$, On a : $sig(q) = (2,0)$ et $rg(q) = 2$

* Pour $a \in]-1,0[$, On a : $sig(q) = (3,0)$ et $rg(q) = 3$

* Pour $a \in]-\infty,-1[\cup]0,1[$, On a : $sig(q) = (2,1)$ et $rg(q) = 3$

* Pour $a \in]1,+\infty[$, On a : $sig(q) = (1,2)$ et $rg(q) = 3$

3. f définie un produit scalaire si et seulement si f est une forme bilinéaire symétrique définit positive.
f étant déjà symétrique prenons donc ce côté de la définition positive.
f est définit positive si et seulement si $\forall v \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \in E, q(v) = 0 \Rightarrow v = 0_E$ et $q(v) > 0$.

On a : $q(v) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y)^2 = 0 \ (1) \\ -a(y-z)^2 = 0 \ (2) \\ (1-a^2)z^2 = 0 \ (3) \end{cases}$

Car $(x+y)$, $(y-z)$ et z sont tous linéairement indépendants avec de différents coefficients.
On a : $(1) \Rightarrow x+y = 0 \Rightarrow x = -y$
Supposons $-a \neq 1-a^2 \neq 0$. Alors $(2) \Rightarrow y = z$; $(3) \Rightarrow z = 0$.
Ainsi $y = 0 \Rightarrow x = 0$, d'où $q(v) = 0 \Rightarrow v = 0_E$ si et seulement si $-a \neq 1-a^2 \neq 0$

Scanné avec CamScanner

Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$. Ainsi $q(v) = 0 \Rightarrow v = 0_E$ si et seulement si $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$.
De plus $q(v) > 0 \Rightarrow a \in]-1,0[$ d'où f définit un produit scalaire $a \in]-1,0[$

EXERCICE 2

Soit $B = (u, v, w)$ une base orthonormée de l'espace eucludien usuel $(E, <,>)$ avec $E = \mathbb{R}^3$.
$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, on note f l'endomorphisme de E qui à tout $x \in E$ associe $f_\lambda = x + \lambda < x, v > v$

1. a) La matrice A_λ de f_λ dans la base B.
Cette matrice est la matrice formée des images des éléments de B rangé en colonne.
On a : $f_\lambda(u) = u + \lambda < u, v > v$ d'où $f_\lambda(u) = u$ car $< u, v >= 0$, B étant orthogonal.

$$\begin{aligned} f_(\lambda)(v) &= v + \lambda < v, v > v \\ &= v + \lambda v, < v, v >= 1 \\ &= (1+\lambda)v \end{aligned}$$

$\Rightarrow f_\lambda(v) = (1+\lambda)v$
$f_\lambda(w) = w$ car $< w, v >= 0$

$$\text{Ainsi } A_\lambda = \begin{pmatrix} f_\lambda(u) & f_\lambda(v) & f_\lambda(w) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_B$$

b) $X \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \in Kerf_\lambda \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = 0_A$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (1+\lambda)y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

* Pour $\lambda = -1$, y quelconque dans $\mathbb{R}$. D'où $Kerf(f_\lambda) =< (0,1,0) >$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

* Pour $\lambda \neq -1$, $y = 0$. D'où $Kerf(f_\lambda) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

* Pour $\lambda \neq -1$; $Kerf(f_\lambda) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
D'où $Im(f_\lambda) = \mathbb{R}^3$.

* Pour $\lambda = -1$;
$Im(f_\lambda) =< f_{-1}(u); f_{-1}(v); f_{-1}(w) >$
$Im(f_\lambda) =< (1,0,0),(0,0,1) >$. L'endomorphisme f_λ est un projecteur si et seulement si $f_\lambda \circ f_\lambda = f_\lambda$.
Soit $A_\lambda A_\lambda = A_\lambda(1)$,
On a : $A_\lambda^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\lambda)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ car A_λ est une matrice symétrique.
$(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\lambda)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow (1+\lambda)^2 = 1+\lambda$
$\Rightarrow 1 + 2\lambda + \lambda^2 = 1 + \lambda$
$\Rightarrow \lambda + \lambda^2 = 0$
$\Rightarrow \lambda(1+\lambda) = 0$
$\Rightarrow \lambda = -1$ car $\lambda \neq 0$.
Ainsi f_λ est un projecteur si et seulement si $\lambda = -1$

* Pour $\lambda = -1$
$\begin{cases} Ker(f_\lambda) = < (0,1,0) > \\ Im(f_\lambda) = < (1,0,0);(0,0,1) > \end{cases}$
On a : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où $ker(f_\lambda) = (Im(f_\lambda))^\perp$
Finalement f_λ est bien un projecteur orthogonal si $\lambda = -1$

2. a)
f_λ est une isométrie si et seulement si ${}^t f_\lambda \circ f_\lambda = Id$.
Soit ${}^t A_\lambda . A_\lambda = I_3$ (I)
${}^t A_\lambda . A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\lambda)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

$$(I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\lambda)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (1+\lambda)^2 = 1$

$\Rightarrow 1 + 2\lambda + \lambda^2 = 1$

$\Rightarrow 2\lambda + \lambda^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda(2+\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda = -2$ car $\lambda \neq 0$

f_λ est une isometrie si et seulement si $\lambda = -2$

On a : $A_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|A_{-2}| = -1$

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & -1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix}$$

$P_A(X) = (1-X)^2(-1-X)$

$P_A(X) = -(1-X)^2(1+X)$

$\Rightarrow Sp(A) = \{-1, 1\}$. Ainsi f_λ est la reflexion par rapport à E_1

On a : $X \in E_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow -2y = 0$

$E_1 = < (1,0,0); (0,0,1) >$

$E_{-1} = < (0,1,0) >$.

VALIDEUR LIMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI :L2 Année 2017-2018

CORRECTION :ALGEBRE BILINEAIRE SESSION 1

EXERCICE 1

1. En se plaçant dans la base β canonique de $\mathbb{R}^3$: $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$ avec $X = Mat(x,\beta) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ et $Y = Mat(y,\beta) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$; On a :

$$\Phi(x;y) = ({}^tX)AY = [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(x;y) = y_2(x_1 + 2x_2 + 3x_3) + y_3(x_1 + 3x_2 + 5x_3) + y_1(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\Phi(x;y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 5x_3y_3 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + 3x_2y_3 + x_3y_1 + 3x_3y_2$$

$$Q(x) = ({}^tX)AX = [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$Q(x) = x_2(x_1 + 2x_2 + 3x_3) + x_3(x_1 + 3x_2 + 5x_3) + x_1(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

2. Détermination du rang et du noyau de Φ. Est-ce une forme non dégénérée ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rang(A) = 2 = rang(\Phi) = rang(Q)$$

Comme $A \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ alors $(x,y,z) \in ker(Q) \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases} \Rightarrow ker(Q) =< (1,-2,1) >$$

Vu ce qui précède, Q ou Φ est dégénérée.

3. Détermination de l'orthogonal de
$H = Vect((1,0,0) = V_1 = ({}^tMat(v_1,\beta)), (1,0,1) = V_2 = ({}^tMat(v_2,\beta)))$
A-t-on $dim\, H + dim\, H^{\perp} = 3$

VALIDE

Scanné avec CamScanner

$\forall [x_1 \ x_2 \ x_3] = X = ({}^tMat(x,\beta)) \in H^\perp$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi(x;v_1) = ({}^tX)AV_1 = [x_1 \ x_2 \ x_3]\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 0 \\ \Phi(x;v_2) = ({}^tX)AV_2 = [x_1 \ x_2 \ x_3]\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2x_2 - 3x_3$

$H^\perp =< (2,-1,0),(3,0,-1) >$.

De là, on a bien $dim\, H = 2, dim\, H^\perp = 2$ et $dim\, H + dim\, H^\perp = 4$

$H = Vect(v_1 = (0,1,0), v_2 = (1,0,1))$

On a : $w_2 - 2w_1 = (3,0,-1) - 2 \times (2,-1,0) = (-1,2,-1) = -v_2 + 2v_1$

Donc $H \cap H^\perp =< -1,2,-1 > \neq \varnothing$, c'est pourquoi on a :

$dim\, H + dim\, H^\perp = 4$.

EXERCICE 2

Soit $D =< v >= H^\perp$ avec $H \cap H^\perp = \{0_E\}$ donc $E = H \oplus H^\perp$.

(i) $\forall x \in E$, on a : $x = p_H(x) + p_{H^\perp}(x) \Leftrightarrow p_H(x) = x - p_{H^\perp}(x)$ et

$p_{H^\perp}(x) =< x, \dfrac{v}{||v||} > \dfrac{v}{||v||} = \dfrac{< x,v >}{||v||^2} v \Rightarrow p_H(x) = x - \dfrac{< x,v >}{||v||^2} v$

CQFD

(ii) $\forall x \in E$, on a : $x = p_H(x) + p_{H^\perp}(x) \Rightarrow s_H(x) = p_H(x) - p_{H^\perp}(x)$

$\Leftrightarrow s_H(x) = p_H(x) + p_{H^\perp}(x) - p_{H^\perp}(x) - p_{H^\perp}(x)$

$= p_H(x) + p_{H^\perp}(x) - 2p_{H^\perp}(x)$

$\Leftrightarrow s_H(x) = p_H(x) + p_{H^\perp}(x) - 2p_{H^\perp}(x)$

$= x - 2p_{H^\perp}(x)$

Or $p_{H^\perp}(x) =< x, \dfrac{v}{||v||} > \dfrac{v}{||v||} = \dfrac{< x,v >}{||v||^2} v$ donc on a bien :

$s_H(x) = x - 2\dfrac{< x,v >}{||v||^2} v$

CQFD

Scanné avec CamScanner

UFR :MI 2018-2019

CORRECTION D'ALGÈBRE BILINÉAIRE SESSION 1

EXERCICE 1

QCM

• Question 1

a) Vrai
Justification : Après développement.
On a : $(\sum) : (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$
$||\overrightarrow{AB}|| = 4 = 2r$ avec $r = 2$ le rayon de $\sum$.

b) Vrai.

c) Faux.

d) Faux.

• Question 2

a) Faux
Pour le voir, il suffit juste de faire le produit scalaire de leur vecteurs normaux et remarquer que c'est différent de 0.

b) Vrai

$$(D) : \begin{pmatrix} -\sin^2\theta \\ 0 \\ \cos^2\theta \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y - \sin^2\theta \\ y = y \\ z = y + \cos^2\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - x = 1 \\ y = y \end{cases}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Or $\begin{cases} z-x=1 \\ y=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z-x=1 \\ y=\mathbb{R} \end{cases}$
D'où le resultat.

c) Vrai.

Car (D) est dirigée par $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{V}$ est normal au plan donné.

d) Faux.

EXERCICE

1. a) On a : $(CE) \perp (AB)$ et $(CE) \perp (AC)$
On a : $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}, \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AE} = 0$. D'où le resultat.

b) Soit M un point de l'espace.
$(\mathcal{P})$ est le plan tels que $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AM} = 0$
$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AM} = 0 \Rightarrow 2x+y-z-3=0$
Donc $(\mathcal{P}) : 2x+y-z-3=0$

c) On a : $d(E,\mathcal{P}) = \dfrac{|2x_E + y_E - z_E - 3|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

2. Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un point de l'espace d'abscisse t dans le repère (A,E)
de la droite (AE), on a :
$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AE} \Rightarrow \begin{cases} x-1=3t \\ y=-t \\ z+1=-t \end{cases}, \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$
$\Rightarrow \begin{cases} x=1+3t \\ y=-t \\ z+1=-t \end{cases}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

3. a) $(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$

$\Rightarrow \forall M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{D}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2+t \\ -1+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{W} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $(\mathcal{D})$ est contenu dans $(\mathcal{P})$ si deux points de $(\mathcal{D})$ appartiennent à $(\mathcal{P})$.

$(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$, pour $t = 1$ on : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$

Soit $K = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

K et J appartiennent à $\mathcal{D}$.

On vérifie facilement que $K, J \in \mathcal{P}$

D'où $\mathcal{D}$ est condensée dans $\mathcal{P}$.

4. a) Soit M un point de $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{EM}.\overrightarrow{v} = 0$

On a : $\begin{pmatrix} 0-4 \\ 2+t+1 \\ -1+t+2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow t = -2$

Donc $M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $d(E, D) = \|\overrightarrow{EM}\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-1)^2}$

$d(E, D) = 3\sqrt{2}$ ($\overrightarrow{EM}$ orthogonal à $\overrightarrow{v}$)

SESSION 2 (Voir examen corrigé algèbre bilinéaire 2016-2017)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Proposition de correction Algèbre bilinéaire : 2019-2020

Exercice

1) Vrai

Justification

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in E$,

On a : $q(\lambda A) = tr(\lambda^2 A^2) = \lambda^2 tr(A^2) = \lambda^2 q(A)$

Par conséquent, q est une forme quadratique.

2) Vrai

Justification

$b(A,B) = \frac{1}{2}[q(A+B) - q(A) - q(B)]$

$b(A,B) = \frac{1}{2}[tr(A^2 + 2AB + B^2) - tr(A^2) - tr(B^2)]$

$b(A,B) = \frac{1}{2}[tr(A^2) + 2tr(AB) + tr(B^2) - tr(A^2) - tr(B^2)]$

$b(A,B) = \frac{1}{2}[2tr(AB)] = tr(AB)$ (*)

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

On a : $AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$

Et $BA = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix}$

Alors $tr(AB) = aa' + bc' + cb' + dd'$

$tr(BA) = a'a + b'c + c'b + d'd$

$\Rightarrow tr(AB) = tr(BA)$ (#)

De (*) et de (#), on en déduit que :

$b(A,B) = tr(AB) = tr(BA)$.

3) Vrai

Justification

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$q(A) = tr(A^2)$ alors :

$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{bmatrix}$

D'où $tr(A^2) = a^2 + bc + cb + d^2$

$tr(A^2) = a^2 + 2cb + d^2$

Donc $q(A) = a^2 + 2cb + d^2$

4) Vrai

Justification

On a : $q(A) = a^2 + 2cb + d^2$

Or : $bc = \frac{1}{4}[(b+c)^2 - (b-c)^2]$

$\Rightarrow 2bc = \frac{1}{2}(b+c)^2 - \frac{1}{2}(b-c)^2$

$d'où : q(A) = a^2 + \frac{1}{2}(b+c)^2 - \frac{1}{2}(b-c)^2 + d^2$.

5) Vrai

Justification

On a : $sign(q) = (r,s)$ où

$\begin{cases} r: le\ nombre\ de\ terme\ positif \\ s: le\ nombre\ de\ terme\ négatif \end{cases}$

Alors $sign(q) = (3,1)$

6) Vrai

$\forall A \in E, A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{bmatrix}$ (1)

On a : $tr(A)A = (a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ca + dc & ad + d^2 \end{bmatrix}$ et

$detAI_2 = (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$detAI_2 = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}$

D'où :

$tr(A)A - detAI_2 = \begin{bmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ca + dc & ad + d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}$ (2)

De (1) et (2), on déduit que :

$$A^2 = tr(A)A - (detA)I_2.$$

7) Vrai

Justification

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$Tr(A) = 0 \Leftrightarrow a + d = 0 \Leftrightarrow a = -d$

Prenons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

Alors $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix}$

$q(A) = tr(A^2) = 2a^2 + 2bc$ or :

$\det(A) = -a^2 - bc \Rightarrow -2detA = 2a^2 + 2bc$ d'où

$q(A) = -2\det(A)$

VALIDEURMD

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

8) Vrai

Justification

On a : $q(A) = 2a^2 + 2bc$ or :

$bc = \frac{1}{4}[(b+c)^2 - (b-c)^2]$

$\Rightarrow q(A) = 2a^2 + \frac{1}{2}(b+c)^2 - \frac{1}{2}(b-c)^2$

d'ou $sign(q|F) = (2,1)$

9) Vrai

Justification

Soit b' la forme polaire de $q|F$.

Alors $b'(A,B) = tr(AB) = tr(BA)$

Avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix}$

D'après 2),

$b'(A,B) = 2aa' + bc' + cb'$

Posons $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

La base $\{E_1, E_2, E_3\}$ est orthogonale si

$b'(E_1, E_2) = 0$, $b'(E_1, E_3) = 0$ et $b'(E_2, E_3) = 0$

On vérifie ça aisément.

10) Vrai

Justification

Par définition :

$dimF + dimF^{\perp} = dimE + dimKer(F \cap F^{\perp})$

Si q est non dégénérée alors :

$Ker(F \cap F^{\perp}) \Rightarrow dimKer(F \cap F^{\perp}) = 0$

D'où $dimF + dimF^{\perp} = dimE$

11) Vrai

Justification

(Voir cours)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB UFR MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

EXAMEN DE SUITES ET SERIES

DUREE: 2H

Exercice 1

a) Etudier la nature et la somme des séries de terme général:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \; ; v_n = (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

b) Soit la série de terme général:

$$u_n = Ln(n) + aLn(n+2) + bLn(n+3) \; , n \geq 1.$$

Trouver les valeurs de a et b pour lesquelles la série $\sum u_n$ converge et, dans ce cas, calculer sa somme.

c) Soit S_n la somme des n premiers termes de la série $\sum_1^{\infty} u_n \;\; (u_n > 0)$.

Montrer que l'on a:

$$\sum_1^{\infty} \frac{u_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \begin{cases} u_1^{-1} & \text{si } \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty \\ u_1^{-1} - S^{-1} & \text{si } \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S. \end{cases}$$

En déduire la somme des séries suivantes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

Exercice 2

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}^+$.

1)Montrer que la somme de cette série est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2)Montrer que $\forall a > 0$, la somme de cette série est dérivable sur $[a, +\infty[$.
3)La somme de cette série est-elle dérivable au point $x = 0$?

Exercice 3

Soit la série de terme général $u_n(x) = \frac{sinnx}{n^3}$

a) Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que sa somme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinnx}{n^3}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

c) Prouver que

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

d) Prouver que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cosnx}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

VALIDUM

Scanné avec CamScanner

UFB UFR de Mathématiques et Informatique

EXAMEN DE SUITES ET SERIES

DUREE: 2H

Exercice 1

a) Etudier la nature et la somme des séries de terme général:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \; ; \; v_n = (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

b) Soit la série de terme général:

$$u_n = Ln(n) + aLn(n+2) + bLn(n+3) \; , \; n \geq 1.$$

Trouver les valeurs de a et b pour lesquelles la série $\sum u_n$ converge et, dans ce cas, calculer sa somme.

c) Soit S_n la somme des n premiers termes de la série $\sum_1^\infty u_n \;\; (u_n > 0)$.

Montrer que l'on a:

$$\sum_1^\infty \frac{u_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \begin{cases} u_1^{-1} & \text{si } \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty \\ u_1^{-1} - S^{-1} & \text{si } \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S. \end{cases}$$

En déduire la somme des séries suivantes:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \text{ et } \sum_{n=1}^\infty \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

Exercice 2

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}, \;\; x \in \mathbb{R}^+$.

1)Montrer que la somme de cette série est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2)Montrer que $\forall a > 0$, la somme de cette série est dérivable sur $[a, +\infty[$.

3)La somme de cette série est-elle dérivable au point $x = 0$?

Exercice 3

Soit la série de terme général $u_n(x) = \frac{sinnx}{n^3}$.

a) Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que sa somme $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{sinnx}{n^3}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

c) Prouver que

$$\int_0^\pi f(x)dx = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

d) Prouver que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{cosnx}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 4

a) α étant un nombre réel positif, on considère la série numérique de terme général:

$$u_n = (\frac{n}{n+1})^{n^\alpha}.$$

Etablir que pour $\alpha \geq 2$, cette série est convergente.
Etablir que pour $\alpha = 1$, cette série est divergente. Que peut-on dire pour $\alpha < 1$?
Soit $1 < \alpha < 2$. Montrer que quand $n \longrightarrow +\infty$, la série de terme général u_n est équivalente à la série de terme général:

$$v_n = e^{-n^\beta} (\beta > 0).$$

Etudier la série de terme général v_n et conclure quant à la série proposée.
b) Etudier les séries de terme général:

$$u_n = (1 - \frac{3Lnn}{2n})^n; \quad v_n = 4^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

UFHB
UFRMI

Année Universitaire 2017-20

Examen de l'ECUE Séries (L2 Actuariat)
Durée : 3h
Documents non autorisés

Exercice 1 (6 points)

1) Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général

$$u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2) \quad n > 1$$

soit convergente. Calculer sa somme.

2) Calculer la somme de la série suivante si possible :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^4+n^2+1}$$

Exercice 2 (7 points)

Soit la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.

1) Etudier la convergene simple de cette suite de fonctions.

2) Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite (f_n) n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

3) Donner une démonstration directe de ce que la suite (f_n) n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

Exercice 3 (7 points)

On se donne un nombre réel $a > 0$, non entier et l'on considère la fonction f de période 2π telle que $f(x) = \cos(ax)$ sur $]-\pi,\pi[$.

1) Calculer les coefficients de Fourier de f. Étudier la convergence de la série de Fourier.

2) En déduire les égalités :

$$\coth(a\pi) = \frac{1}{a} + 2a\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2-n^2}, \quad \frac{\pi}{\sin(a\pi)} = \frac{1}{a} + 2a\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2-n^2}$$

VALEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB
UFR DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

EXAMEN DE SUITES ET SERIES
DUREE: 2H

Exercice 1

a) Etudier la nature et la somme des séries de terme général:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \; ; \; v_n = (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

b) Soit la série de terme général:

$$u_n = Ln(n) + aLn(n+2) + bLn(n+3) \; , \; n \geq 1.$$

Trouver les valeurs de a et b pour lesquelles la série $\sum u_n$ converge et, dans ce cas, calculer sa somme.

c) Soit S_n la somme des n premiers termes de la série $\sum_1^2 u_n \;\; (u_n > 0)$.

Montrer que l'on a:

$$\sum_1^{\infty} \frac{u_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \begin{cases} u_1^{-1} & \text{si } \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty \\ u_1^{-1} - S^{-1} & \text{si } \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S. \end{cases}$$

En déduire la somme des séries suivantes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

Exercice 2

Soit la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} tg \frac{1}{2^n}$

1) Démontrer qu'elle est convergente. On désigne par S sa somme.

2) a) Démontrer que $cotgx - 2cotg2x = tgx, \quad x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

b) En déduire un calcul de S.

Exercice 3

Soit la série de terme général $u_n(x) = \frac{sinnx}{n^3}$.

a) Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que sa somme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinnx}{n^3}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

c) Prouver que

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

d) Prouver que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cosnx}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 4

a) α étant un nombre réel positif, on considère la série numérique de terme général:

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^\alpha}.$$

Etablir que pour $\alpha \geq 2$, cette série est convergente.
Etablir que pour $\alpha = 1$, cette série est divergente. Que peut-on dire pour $\alpha < 1$?
Soit $1 < \alpha < 2$. Montrer que quand $n \longrightarrow +\infty$, la série de terme général u_n est équivalente à la série de terme général:

$$v_n = e^{-n^\beta} (\beta > 0).$$

Etudier la série de terme général v_n et conclure quant à la série proposée.
b) Etudier les séries de terme général:

$$u_n = \left(1 - \frac{3Lnn}{2n}\right)^n; \quad v_n = 4^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN DE SUITES ET SERIES
DUREE: 2H

Exercice 1

Soit la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} tg\frac{1}{2^n}$

1) Démontrer qu'elle est convergente. On désigne par S sa somme.

2) a) Démontrer que $\cot gx - 2\cot g2x = tgx, \quad x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

b) En déduire un calcul de S.

Exercice 2

a) Etudier la nature et la somme des séries de terme général:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \; ; \; v_n = (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

b) Soit la série de terme général:

$$u_n = Ln(n) + aLn(n+2) + bLn(n+3) \; , \; n \geq 1.$$

Trouver les valeurs de a et b pour lesquelles la série $\sum u_n$ converge et, dans ce cas, calculer sa somme.

c) Soit S_n la somme des n premiers termes de la série $\sum_1^\infty u_n$ $(u_n > 0)$.

Montrer que l'on a:

$$\sum_1^\infty \frac{u_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \begin{cases} u_1^{-1} & \text{si } \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty \\ u_1^{-1} - S^{-1} & \text{si } \lim_{n\to+\infty} S_n = S. \end{cases}$$

En déduire la somme des séries suivantes:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \text{ et } \sum_{n=1}^\infty \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

Exercice 3

1) Développer en série entière la fonction $f(x) = \frac{1}{2+x}$ au voisinage de $x = 0$.

2) Montrer que si p est un entier ≥ 0, on a:

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{2^n(n+p+1)}$$

3) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 4

Soit f la fonction paire, de période 2π, égale à $f(x) = (\pi - x)^2$ pour $0 \leq x \leq \pi$

1) Calculer les coefficients de Fourrier de f.

2) Montrer que la série de Fourrier de f est convergente de somme $f(x)$.

En déduire que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

VALIDE UP LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN SUITES ET SERIES
DUREE: 2H

Exercice 1

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$, x réel et $n \geq 0$.

a) Etudier la convergence simple, absolue, uniforme de cette série. Soit $f(x)$ sa somme.

b) Montrer que f est continue pour $x \geq 0$ et dérivable pour $x > 0$.

Exercice 2

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(z) = \frac{z}{(nz+1)[(n-1)z+1]}$, $z \in \mathbb{C}$ et $n \geq 1$.

a) Etudier la convergence simple et calculer sa somme $S(z)$.

b) Etudier la convergence uniforme et la convergence normale sur $\mathbb{C}$ puis sur l'ensemble $D = \{z \in \mathbb{C} / Re z > 0\}$.

Exercice 3

1) Développer en série entière la fonction $f(x) = \frac{1}{2+x}$ au voisinage de $x = 0$.

2) Montrer que si p est un entier ≥ 0, on a:

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x} dx = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{2^n (n+p+1)}$$

3) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n (n+4)}$$

Exercice 4

a) Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[0, +\infty[$.

Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a:

$$\int_0^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx.$$

b) Trouver un équivalent pour $n \to +\infty$ de $S_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}$.

En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{S_n}$.

Exercice 5

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π périodique définie par $f(x) = |\, sh x \,|$, pour $|\, x \,| \leq \pi$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

1) Tracer sommairement le graphe de f.

2)Montrer sans calcul que la série de Fourier de f converge vers f sur $\mathbb{R}$.
3)Déterminer le développement en série de Fourier de f; la convergence de la série de Fourier de f est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
4) En calculant $f(\pi) - f(0)$, en déduire la somme de la série $\Sigma_{p\geq 0}\frac{1}{2p^2+2p+1}$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN SUITES ET SERIES
DUREE: 2H

Exercice 1

a) Soit f une fonction, positive et croissante sur $[0, +\infty[$.
Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a:

$$\int_0^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx.$$

b) Trouver un équivalent pour $n \to +\infty$ de $S_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}$.
En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{S_n}$.

Exercice 2

On considère la série de fonctions de terme général:
$u_n(z) = \dfrac{z}{(nz+1)[(n-1)z+1]}$, $z \in \mathbb{C}$ et $n \geq 1$.
a) Etudier la convergence simple et calculer sa somme $S(z)$.
b) Etudier la convergence uniforme et la convergence normale sur $\mathbb{C}$ puis sur l'ensemble $D = \{z \in \mathbb{C}/Rez > 0\}$.

Exercice 3

On considère la série de fonction de terme général $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}$, $x \in \mathbb{R}^+$.
1) Montrer que la somme de cette série est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer que $\forall a > 0$, la somme de cette série est dérivable sur $[a, +\infty[$.
3) La somme de cette série est-elle dérivable au point $x = 0$?

Exercice 4

1) Développer en série entière la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ au voisinage de $x = 0$.
2) Montrer que si p est un entier ≥ 0, on a:

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{2^n(n+p+1)}$$

3) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)}$$

VALIDER LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 5

Soit f la fonction paire, de période 2π, égale à $f(x) = (\pi - x)^2$ pour $0 \leq x \leq \pi$.

1) Calculer les coefficients de Fourrier de f.

2) Montrer que la série de Fourrier de f est convergente de somme $f(x)$..

En déduire que: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Correction de suites et series 1ère session 2016-2017

Exercice 1

a- Etudions la nature et la somme des séries de terme général $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$ et $V_n = (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

* $U_n = \frac{1}{n(n+1)} \sim_{+\infty} \frac{1}{n^2}$ or $\Sigma\frac{1}{n^2}$ est une série convergente alors U_n converge.

$U_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{n(a+b)+a}{n(n+1)}$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

Posons $V_n = \frac{1}{n}$ et $V_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ tel que $U_n = V_n - V_{n+1}$

$S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ avec $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

$$\begin{aligned} U_1 &= V_1 - V_2 \\ U_2 &= V_2 - V_3 \\ U_3 &= V_3 - V_4 \\ \vdots &= \vdots \quad \vdots \\ U_n &= V_n - V_{n+1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow S_n = V_1 - V_{n+1} \Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$. Par conséquent $S = 1$.

$V_n = (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

$(-1)^{n+1}v_n = (-1)^{n+1} * (-1)^{n+1} * \frac{2n+1}{n(n+1)}$

$(-1)^{n+1}v_n = \frac{2n+1}{n(n+1)}$, donc V_n est une série alternée.

$V_n = \frac{2n+1}{n(n+1)}$ et $V_{n+1} = \frac{2n+3}{(n+1)(n+2}$

$V_{n+1} - V_n = \frac{-2}{n(n+2)} < 0$ donc $V_{n+1} < V_n$. Par conséquent (V_n) est décroissante.

Aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{n^2} = 0$. Alors (V_n) converge car les conditions de la suite alternée sont vérifiées.

$\lambda_n = \frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{n(a+b)+a}{n(n+1)}$

Scanné avec CamScanner

Par identification on a : $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

$\lambda_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

$V_n = (-1)^{n+1}\lambda_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

posons $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$ tel que $V_n = U_{n+1} - U_n$

On sait que $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ avec

$S_n = V_1 + V_2 + ... + V_n = U_2 - U_1 + U_3 - U_2 + ... + U_{n+1} - U_n = U_{n+1} - U_1$

$\Rightarrow S_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + 1$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$. C'est-à-dire $S = 1$

b) $U_n = \ln(n) + a\ln(n+2) + b\ln(n+3), \quad n \geq 1$

les valeurs de a et b pour lesquelles la série $\sum U_n$ converge.

On a $\sum U_n$ converge $\Rightarrow \lim\limits_{+\infty} U_n = 0$.

$$\text{On a } U_n = \ln(n) + a\ln(n(1+\frac{2}{n})) + b\ln(n(1+\frac{3}{n}))$$

$$= (1+a+b)\ln(n) + a\ln(1+\frac{2}{n}) + b\ln(1+\frac{3}{n})$$

Comme $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} \ln(1+\frac{2}{n}) = \lim\limits_{+\infty} \ln(1+\frac{3}{n}) = 0 \\ \lim\limits_{+\infty} \ln(n) = +\infty \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{+\infty} U_n = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \quad (*)$

Supposons $(*)$ vérifié.

Alors $U_n = a\ln(1+\frac{2}{n}) + b\ln(1+\frac{3}{n})$

D'où $U_n \underset{+\infty}{\sim} a(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}) + b(\frac{3}{n} - \frac{9}{2n^2})$

$U_n \underset{+\infty}{\sim} (2a+3b)\frac{1}{n} - (2a + \frac{9b}{2})\frac{1}{n^2}$

et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, alors U_n converge par équivalence ssi $2a + 3b = 0 \quad (**)$

De $(*)$ et $(**)$ on obtient : $\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$

D'où $U_n = \ln(n) - 3\ln(n+2) + 2\ln(n+3)$

Soit $W_n = \ln(n) \Rightarrow W_{n+2} = \ln(n+2)$ et $W_{n+3} = \ln(n+3)$

Alors $U_n = W_n - 3W_{n+2} + 2W_{n+3}$.

Scanné avec CamScanner

Soit U la somme de le série ΣU_n avec $U = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} U_k$

$$U = \lim_{n\to+\infty} (U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = U .$$

$$U_1 = (w_1 - 3w_3 + 2w_4)$$
$$U_2 = (w_2 - 3w_4 + 2w_5)$$
$$U_3 = (w_3 - 3w_5 + 2w_6)$$
$$U_4 = (w_4 - 3w_6 + 2w_7)$$
$$\vdots = \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$U_{n-3} = (w_{n-3} - 3w_{n-1} + 2w_n)$$
$$U_{n-2} = (w_{n-2} - 3w_n + 2w_{n+1})$$
$$U_{n-1} = (w_{n-1} - 3w_{n+1} + 2w_{n+2})$$
$$U_n = (w_n - 3w_{n+2} + 2w_{n+3})$$

$$S_n = w_1 + w_2 - 2w_3 - w_{n+1} - w_{n+2} + 2w_{n+3}$$
$$U = \lim_{n\to+\infty} S_n$$
$$U = \lim_{n\to+\infty} w_1 + w_2 - 2w_3 - w_{n+1} - w_{n+2} + 2w_{n+3}$$
$$U = \lim_{n\to+\infty} -2\ln(3) + \ln(2) + \frac{(n+3)^2}{(n+1)(n+2)}$$
$$U = \ln\left(\frac{2}{9}\right)$$

c- Montrons que l'on a : $\sum_{1}^{+\infty} \frac{U_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \begin{cases} u_1{}^{-}1 \; si \; \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty \\ u_1{}^{-}1 \; si \; \lim_{n\to+\infty} S_n = S \end{cases}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k \text{ et } S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} U_k .$$

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} U_k - \sum_{k=1}^{n} U_k = U_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{U_{n+1}{}'}{S_n S_{n+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n S_{n+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n S_{n+1}} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S_n}{S_n S_{n+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}$$

VALIDEUR LIMID

Scanné avec CamScanner

Déduisons la somme des séries suivantes : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

Applications $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

On a $u_n = n$; $u_{n+1} = n+1$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$; $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

$S_n S_{n+1} = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{4}$

$S_{n+1} - S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = n+1$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_{n+1} - S_n}{S_{n+1}S_n} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+1)^2(n+2)} = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = 1$ car

$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{U_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{S_{n+1}} = \frac{1}{u_1}$

$= 1$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

On a $u_n = 2n-1$; $u_{n+1} = 2n+1$

$S_n = 2\sum_{k=1}^{n} k - n = n^2$; $S_{n+1} = (n+1)^2$; $S_n S_{n+1} = n^2(n+1)^2$

$S_{n+1} - S_n = 2n+1$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{u_1} = 1$ car $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

VALIDE UFR LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 2

On considère la série de fonction de terme générale $U_n(x) = \frac{\exp(-nx)}{n^2+1}; x \in \mathbb{R}_+$

1. montrons que la somme de cette série est continue sur $\mathbb{R}_+$
les fonctions $x \mapsto \frac{\exp(-nx)}{n^2+1}$ sont continue sur $\mathbb{R}_+$
$\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 < U_n(x) \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente , donc $\sum U_n$ est normalement convergente. Par conséquent uniformement convergente.
A fortiori, la somme de cette série est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrons que pour $a > 0$, la somme de cette série est dérivable sur $[a, +\infty[$.
les fonctions $x \mapsto \frac{\exp(-nx)}{n^2+1}$ sont dérivable sur $[a, +\infty[$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+, U_n'(x) = \frac{-n\exp(-nx)}{n^2+1}$
$\forall a > 0, \forall x > a, \mid U_n'(x) \mid \leq \exp(-na)$
Or $\exp(-na)$ est le terme général d'une série géometrique convergente.
Donc $\sum U_n'(x)$ est uniforment convergente sur $[a, +\infty[$. D'où pour $a > 0$
$\sum U_n$ est dérivable sur $[a, +\infty[$.

3. Cherchons à savoir si la somme de cette série est dérivable au point $x = 0$
.
$\sum U_n'(x) = -\sum \frac{n\exp(-nx)}{n^2+1}$ et $\sum \frac{n}{1+n^2}$ diverge .
$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{1+n^2} > 2A$.
$\forall x \in]0, \frac{\ln c}{N}]$, $\exp(-Nx) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \exp(-nx) \geq \frac{1}{2}; n \in \mathbb{N} - \sum_{n=0}^{N} \frac{n\exp(-nx)}{1+n^2} \leq -A$

Donc $\forall x \in]0, \frac{\ln 2}{N}]$, $f'(x) \leq -A$.
D'après le theorème des accroissement finis , $\exists c \in]0, x]$, $f(x) - f(c) = xf'(x)$

donc $\frac{f(x)-f(0)}{x} \leq -A \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$ et la somme de cette série n'est pas dérivable en $x = 0$.

Exercice 3

Soit la suite de terme générale $U_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^3}$

1. (a) Montrons que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. On sait que :

$$\begin{array}{rll} -1 \leq & \sin nx & \leq 1 \\ & |\sin nx| & \leq 1 \\ & \frac{|\sin nx|}{n^3} & \leq \frac{1}{n^3} \quad or \end{array}$$

$\sum \frac{1}{n^3}$ est une série convergente donc $\sum U_n$ converge normalement.

Scanné avec CamScanner

(b) Moptrons que sa somme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{x^3}$ est une fonction continue. sur $\mathbb{R}$. Calculons $\lim_{x\to 0} f(x)$.

On sait que la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

D'après la question précedente $\sum \frac{\sin nx}{n^3}$ converge normalement donc uniformement. En conséquence $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

La somme f est une fontion continue comme limite uniforme de la suite U_n. Comme f est continue au point $x = 0$, on a :
$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$.

(c) Prouvons que $\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$

On sait que la fontion $f : \mapsto \frac{\sin nx}{n^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, \pi]$.

De plus, $\frac{\sin nx}{n^3}$ est uniformement convergente donc on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(x)dx &= \sum_{u=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \int_0^{\pi} \sin(nx)dx \\
&= \sum_{u\geq 1} \frac{1}{n^3} \left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\
&= \sum_{u\geq 1} -\frac{1}{n^4} [-\cos(nx)]_0^{\pi} \\
&= \sum_{u\geq 1} -\frac{1}{n^4} (\cos(n\pi) - 1) \\
&= \sum_{u\geq 1} -\frac{1}{n^4} ((-1)^n - 1) \\
&= \sum_{u\geq 1} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n^4} \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2p+1} + 1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2p+2} + 1}{(2p+1)^4} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)^4} = 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}
\end{aligned}$$

Posons $u = p + 1 \Rightarrow p = n - 1$

Pour $p = 0$, $n = 1$ $\boxed{\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}}$

VALIDE UMD

Scanné avec CamScanner

(d) Prouvons que : $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \forall x \in \mathbb{R}$. On a : $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ qui converge normalement donc simplement.

Soit $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$

$f'_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$

Montrons que $\sum f'_n(x)$ est uniformement convergente

$$\begin{aligned} -1 \leq \quad \cos(nx) \quad &\leq 1 \\ |\cos(nx| \quad &\leq 1 \\ \tfrac{|\cos(nx|}{n^2} \quad &\leq \tfrac{1}{n^2} \quad or \end{aligned}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente, donc $\sum \frac{|\cos(nx)|}{n^2}$ est normalement convergente d'où elle est uniformement convergente.

Par conséquent : $f'(x) = \sum f'_n(x)$

$$\boxed{f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}, \forall x \in \mathbb{R}}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

Proposition de correction suites et serie 2017-2018

Exercice 1 : (voir correction exo 1 2016-2017)

Exercice 2 : (voir correction exo 1 2018-2019)

Exercice 3 : (voir correction exo 3 2016-2017)

Exercice 4

a) Convergence de la serie de terme général $u_n, \alpha \in \mathbb{R} \quad n \geq 1$

On a , $u_n > 0$ et u_n est définie pour $n \geq 1$

$\forall\, n \geq 1$, $\ln(u_n) = n^\alpha \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -n^\alpha \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -n^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Le DL d'ordre 2 de $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ donne :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\epsilon(n) \; avec \lim_{+\infty} \epsilon(n) = 0 \Rightarrow \ln(u_n) = -n^\alpha \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\epsilon(n)\right]$$

$$d'ou\; u_n = e^{-\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} + \frac{1}{2n^{2-\alpha}} - \frac{1}{n^{2-\alpha}}\epsilon(n)\right)}$$

- Si $\alpha \geq 2$, $n^2 u_n = n^2 . e^{-\frac{1}{n^{2-\alpha}}\left(n - \frac{1}{2} - \epsilon(n)\right)}$

On a $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$, donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ est cv

- Si $\alpha \leq 1$, $u_n = e^{-\frac{1}{n^{1-\alpha}}\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)\right)}$

Et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ donc u_n diverge grossièrement

- Si $1 < \alpha < 2$

On a : $\lim_{n\to+\infty} e^{-\left(\frac{1}{2n^{2-\alpha}} + \frac{1}{n^{2-\alpha}}\epsilon(n)\right)} = 1$, donc $u_n \sim e^{-\frac{1}{n^{1-\alpha}}} = e^{-n^\beta} \quad avec\; \beta = \alpha - 1 > 0$

On a $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-\frac{1}{n^{1-\alpha}}} = 0$ car $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n^{1-\alpha}} = -\infty$

Donc $\sum e^{-n^\beta}$ cv , ainsi $\sum_{n\geq 1} u_n$ cv .

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

b) $u_n = \left(1 - \frac{3\ln n}{2n}\right)^n$.

En appliquant le test de Cauchy, on voit que :

$\sqrt[n]{u_n} = 1 - \frac{3}{2}\frac{\ln n}{n} \longrightarrow 1$ quand $n \to +\infty$. On ne peut pas conclure avec le test.Cherchons un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

On a : $n\ln(1 - \frac{3}{2}\frac{\ln n}{n}) = -\frac{3}{2}\ln n + 0(1)$ si $n \to +\infty$ d'où

$u_n = \exp[n\ln(1 - \frac{3}{2}\frac{\ln n}{n})] \sim n^{-\frac{3}{2}}$ or $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ converge, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

. $v_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$

on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 1$ pour tout n.

Donc la suite (v_n) est croissante et sa limite ne peut pas être 0.

Par conséquent la série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ diverge.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR :MI 2018-2019

CORRECTION SUITE ET SERIE SESSION 1

EXERCICE 1

Soit la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \tan \frac{1}{2^n}$

1. Convergence

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \tan x \underset{+\infty}{\sim} x$ d'où $\tan \frac{1}{2^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{2^n} \tan \frac{1}{2^n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{2^n} \tan \frac{1}{2^n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Comme la série $\sum_0 \left(\frac{1}{4}\right)^n$ est une série géométrie convergente alors par équivalence la série $\sum_1 \frac{1}{2^n} \tan \frac{1}{2^n}$ converge normalement donc converge.

2. a) Démontrons que $cotgx - 2cotg2x = \tan x, x \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

Notons d'abord que : $\begin{cases} cotgx = \frac{1}{\tan x} \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x \end{cases}$

Développons :

On a :$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, cotgx - 2cotg2x = \frac{1}{\tan x} - 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$

$$cotgx - 2cotg2x = \frac{1}{\tan x} - 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$
$$= \frac{1}{\tan x} + \left(-\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x}\right)$$
$$= \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\tan x} + \tan x$$
$$cotgx - 2cotg2x = \tan x$$

b) La somme S

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

On a : $S = \lim\limits_{+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan \frac{1}{2^k}$

Or d'après précédent $\tan(\frac{1}{2^k}) = cot(\frac{1}{2^k}) - 2\,cot(\frac{1}{2^{k-1}})$

$\Rightarrow S = \lim\limits_{+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cot \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}} \cot \frac{1}{2^{k-1}} \right)$

Posons $U_n = \frac{1}{2^n} \cot \frac{1}{2^n}$. Cette série est convergente et

$S = \lim\limits_{+\infty} \sum\limits_{1}^{n} U_k - U_{k-1} = \lim\limits_{+\infty} \left(-\sum\limits_{1}^{n} U_{k-1} - U_k \right)$

D'où par la formule des séries télescopiques.

Donc $S = \lim\limits_{+\infty} -(U_1 - U_n)$

$$S = -\frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} + \lim_{+\infty} \frac{1}{2^n} \cot \frac{1}{2^n}$$

$$S = 1 - \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2}$$

EXERCICE 2

Soit la série de fonction de terme général $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}, x \in \mathbb{R}^+$

1. Continuité de $\sum\limits_{0} u_n(x)$

   Considérons les applications u_n définie par $u_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$,

   $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x \in \mathbb{R}^+$

   On a bien les u_n continue.

   Comme $\left| \frac{e^{-nx}}{n^2+1} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_{0} \frac{1}{n^2}$ converge.

   Alors $\sum\limits_{0} u_n(x)$ converge normalement donc uniformement.

   Ainsi $\sum\limits_{0} u_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

2. Dérivabilité sur $[a, +\infty[$, a positive.

   On a l'application $x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$ est dérivable sur $[a, +\infty[, a > 0$.

   Et $\forall x \in [a, +\infty[, u_n'(x) = -\frac{ne^{-nx}}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}$

   On a : $|u_n'(x)| = \frac{ne^{nx}}{n^2+1}$

   $\forall x \in [a, +\infty[$, on a : $e^{-nx} \leq e^{-na}$

VALIDÉ LMD

Scanné avec CamScanner

$|u'_n(x)| \leq \frac{e^{-na}}{n}$

On a : $\lim_{+\infty} \frac{n^2 e^{-na}}{n} = \lim_{+\infty} n e^{-na} = 0$

D'où $\frac{e^{-na}}{n} = 0(\frac{1}{n^2})$

Comme $\sum_0 \frac{1}{n^2}$ converge alors $\sum_0 u'_n(x)$ converge absolument donc uniformement.

Conclusion : $\sum_0 u_n(x)$ est dérivable.

EXERCICE 3

1. Développement en série de fonction.

   On a : $f(x) = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}$

   $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\sum_0^{+\infty}(-1)^n(\frac{x}{2})^n$

2. Montrons que $\forall p \in \mathbb{N}, \int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_0(-1)^n \frac{1}{2^n(n+p+1)}$

   D'après précédent :

   $\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\sum_0^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^n}$

   $\Rightarrow \frac{x^p}{2+x} = \frac{1}{2}\sum_0^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{n+p}}{2^n}$ (Multiplier de par et d'autre par x^p)

   $\frac{x^p}{2+x} = \frac{1}{2}\sum_0 (-1)^n \frac{x^{n+p}}{2^n}$

   $(*)\begin{cases} \int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_0 (-1)^n \frac{x^{n+p}}{2^n}dx \\ &= \frac{1}{2}\sum_0 \frac{(-1)^n}{2^n}\int_0^1 x^{n+p}dx \end{cases}$

   $\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_0 \frac{(-1)^n}{2^n}\left[\frac{x^{n+p+1}}{n+p+1}\right]_0^1$

VALEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_0 \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1}{(n+p+1)} \quad (*)$$

(*) est possible car il s'agit d'une série alternée qui converge.

3. En déduire $\sum_0 \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)}$

Pour $p=3$ (*) devient :

$$\int_0^1 \frac{x^3}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_0 \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)}$$

$$\Rightarrow \sum_0 \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)} = 2\int_0^1 \frac{x^3}{2+x}dx$$

Une division eucludienne nouspermet de voir que :

$$\frac{x^3}{2+x} = x^3 - 2x + 4 - \frac{1}{2+x}$$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{2+x}dx = 8(\frac{2}{3} - \ln 3 + \ln 2)$$

D'où $\sum_0 \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)} = 16\left(\frac{2}{3} - \ln 3 + \ln 2\right)$

$$= 16\left(\frac{2}{3} + \ln\frac{2}{3}\right)$$

EXERCICE 4

Soit f la fonction paire définie par :

$f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = (\pi - x)^2 = (x-\pi)^2$

1. Les coefficients de Fourier de f.

f paire $\Rightarrow b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

On a : $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2\cos(nx)dx$$

Intégrons deux fois par partie a_n.

Première int'egration par partie : $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos(nx)dx$

Posons $u' = \cos nx \Rightarrow u = \frac{1}{n}\sin nx$

$v = (x-\pi)^2 \Rightarrow v' = 2(x-\pi)$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Donc $a_n = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}(x-\pi)^2 \sin x\right]_0^{2\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin nx\,dx\right)$

Comme $\sin n\pi = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Alors $a_n = -\frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin(nx)\,dx$

Deuxième intégration par partie.

Posons $u' = \sin nx \ \Rightarrow u = -\frac{1}{n}\cos nx$

$v = x - \pi \ \Rightarrow v' = 1$

$$\text{Donc} a_n = -\frac{2}{n\pi}\left(\left[-\frac{(x-\pi)}{n}\cos nx\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left[(x-\pi)\cos nx\right]_0^{2\pi}$$

$$a_n = \frac{4}{n^2}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\,dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(x-\pi)^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3}\right)$$

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

2. f étant une fonction polynôme donc continue sur $[0,\pi]$. De plus f est périodique de période 2π. Alors f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Ainsi d'après le théorème de Dirichlet, f est convergente de somme $f(x)$ et on a :

$\forall x \in [0,\pi], f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos nx$

Soit $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1}\frac{4}{n^2}\cos nx \quad (*)$

Pour $x = 0$ $(*)$ devient :

$$f(0) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_1 \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

VALIDE UR LMD

Scanné avec CamScanner

VALIDUR LIMD

Université FHB - Cocody Année Universitaire 2018-2019
UFR Mathématique-Informatique

LICENCE 2
Suites et séries
Examen Seconde Session

Exercice 1 (4 points)

1) Posons $u_n = \frac{1}{2^n} tg \frac{1}{2^n}$

On a : $u_n \approx \left(\frac{1}{4}\right)^n$ quand $n \to \infty$ or $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ est une série convergente, donc

$\sum_{n\geq 1} u_n$ converge **(1 points)**

2) a) $cotg\ x - 2cotg\ 2x = \frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\tan 2x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2cos2x}{\sin 2x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos^2 - \sin^2}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x}$

$cotg\ x - 2cotg\ 2x = \tan x$ **(1 points)**

b) Posons $u_n = \frac{1}{2^n} tg \frac{1}{2^n}$ et $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

En utilisant a) on obtient : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} v_k - v_{k-1} = -v_1 + v_n$ avec $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n cot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a : $S = \lim_{n-\infty} S_n = -v_1 + 1$ car $tg\left(\frac{1}{2}\right)^n \sim \left(\frac{1}{2}\right)^n$ en $\infty \Rightarrow cot\left(\frac{1}{2}\right)^n \sim \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$$\Rightarrow S = 1 - \frac{1}{2}\cot\left(\frac{1}{2}\right)$$

a) On a : $u_n \approx \frac{1}{n^2}$ si $n \to \infty$ or $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge

En utilisant la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

on a : $S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ Par itération

$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

On a : $\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$, d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} v_k = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ qui tend vers 1 quand $n \to \infty$

Scanné avec CamScanner

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge et on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)} = 1$

(2 points)

b) On a : $u_n = (a+b+1)\ln(n) + a\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + b\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)$

$u_n = (a+b+1)\ln(n) + (2a+3b)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ si $n \to \infty$

$\sum u_n$ converge si et seulement si $\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$

Or si $u_n = \ln(n) - 3\ln(n+2) + 2\ln(n+3)$,

on a : $S_n = \ln 2 - 2\ln 3 + \ln\frac{(n+3)^2}{(n+1)(n+2)}$ qui tend vers $\ln\frac{2}{9}$ quand $n \to \infty$

(2 points)

c) On a : $\frac{u_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}$ d'où $\sum_{k=1}^{n} \frac{u_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{n+1}}$ d'où quand $n \to \infty$, on obtient les égalités cherchées.

Soit la série $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Prenons $u_n = n$, on a : $S_n = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ d'où $\frac{u_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$,

on a alors : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}u_1^{-1} = \frac{1}{4}$

Pour la deuxième série, prenons $u_n = 2n-1$, on a : $S_n = 1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$,

d'où $\frac{u_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = u_1^{-1} = 1$

(4 points)

Exercice 3 (4 points)

1) $\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^n}{2^n}$ si $|x| < 2$ **(1 points)**

2) Pour p un entier ≥ 0, on écrit :

$\frac{x^p}{2+x} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n}x^{n+p}$ si $|x| < 2$.

La série est normalement convergente sur l'intervalle $[0, 1]$, donc par une intégration terme à terme, on obtient :

$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n}\int_0^1 x^{n+p}dx$.

VALIDUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n(n+p+1)}.$$

(2 points)

3) Prenons $p=3$, alors : $\int_0^1 \frac{x^3}{2+x}dx = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1}{n+4}$

or $\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \int_0^1 \frac{(x^3+8)-8}{2+x}dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8\ln(2+x)\right]_0^1$

On obtient donc que :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1}{n+4} = 2\left[\frac{10}{3} - 8\ln\frac{3}{2}\right]$$

(1 points)

Exercice 4 (4 points)

1) f étant paire, on a : $b_n = 0\ \forall n \geq 0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}\textbf{(0.5 points)}$$

$\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)^2\cos nx dx = \frac{4}{n^2}$**(1 points)**

2) f est continue et dérivable sauf aux points $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ où elle admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

La théorème de Dirichlet montre que la série de Fourier de f est convergente et que sa somme est $f(x)$: **(1.5 points)**

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Pour $x = 0$, on a : $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ d'où $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$**(1 points)**

VALIDE PAR LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN D'INTEGRALES GENERALISEES Session 1 2015-2016

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx, \quad \int_0^1 \frac{chx-\cos x}{x^3}dx, \quad \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx,\ t \in \mathbb{R}.$$

En cas de convergence, cette dernière intégrale est notée $\Gamma(t)$ (fonction Eulérienne).

Montrer que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ et en déduire $\Gamma(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

1) Démontrer que: $\forall X \in [1,+\infty[, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$2n\pi > n\pi > X$ et $\left|\int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx\right| \geq \frac{1}{4}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$

Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx, \quad 0 < \alpha \leq 1$?

2)Démontrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ est semi-convergente.

3)Vérifier que les deux fonctions définies sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = f(x) + \frac{\sin^2 x}{x}$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Les intégrales $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ sont-elles de même nature? conclusion?

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB UFR DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE Session 1 2016-2017

EXAMEN D'INTEGRALES GENERALISEES

DUREE: 1H30

Exercice 1

a) Etudier la nature des intégrales suivantes :

$\int_1^{+\infty} (e^{-\frac{1}{t}} - \cos\frac{1}{t})\frac{dt}{t}$,

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$,

$\int_1^{+\infty} \frac{Arctgx}{x} dx$.

b) Soit

$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} dx$,

Vérifier que cette intégrale est divergente. Trouver une fonction g sur $[1,+\infty[$ telle que $\int_1^{+\infty} [\frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} - g(x)]dx$ soit convergente.

Exercice 2

1) Démontrer que: $\forall X \in [1,+\infty[, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$2n\pi > n\pi > X$ et $|\int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx| \geq \frac{1}{4}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$

Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx, \quad 0 < \alpha \leq 1$?

2)Démontrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente.

3)Vérifier que les deux fonctions définies sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = f(x) + \frac{\sin^2 x}{x}$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Les intégrales $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ sont-elles de même nature? conclusion?

Exercice 3

1) Déterminer les points de l'intervalle $[\pi,+\infty[$, où la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2(\sin x)^{\frac{2}{3}}}$ n'est pas bornée. Montrer que sur tout intervalle borné de $[\pi,+\infty[$, f est intégrable.

2) A l'aide d'un changement de variable adéquat, déterminer la nature de la série de terme général:

$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x^2(\sin x)^{\frac{2}{3}}}$, avec $n \geq 1$.

3) Des questions précédentes, déduire la nature de l'intégrale

$\int_\pi^{+\infty} \frac{dx}{x^2(\sin x)^{\frac{2}{3}}}$.

VALEUR LIMID

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB
UFR DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

EXAMEN D'INTEGRALES GENERALISEES
DUREE: 1H

Exercice 1

1) Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} (e^{-\frac{1}{t}} - cos\frac{1}{t})\frac{dt}{t},$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{sint}}{t} dt,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{Arctgx}{x} dx.$$

2) Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}}$.

a) Montrer que I est convergente.

b) Calculer $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

c) En déduire I.

Exercice 2

Soit f une fonction définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

1) Etudier la convergence de l'intégrale impropre

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}dx, n > 0$$

2) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ et que $\lim_{n\to+\infty} nI_n = f(0)$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN D'INTEGRALES GENERALISEES
DUREE: 02H

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales suivantes:

a- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$

b- $\int_1^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} dx$

c- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx$

d- $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x\sqrt{x}} dx$

e- $\int_1^{+\infty} x^x dx$

f- $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)} dx$

Exercice 2

1) Démontrer que: $\forall X \in [1,+\infty[, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$2n\pi > n\pi > X$ et $|\int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx| \geq \frac{1}{4}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$

Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx, \quad 0 < \alpha \leq 1$?

2) Démontrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente.

3) Vérifier que les deux fonctions définies sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = f(x) + \frac{\sin^2 x}{x}$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Les intégrales $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ sont-elles de même nature? conclusion?

Exercice 3

Soit Γ la fonction réelle définie par:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

1- Déterminer l'ensemble de définition de Γ

2- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Scanné avec CamScanner

3- En déduire en fonction de n l'expression de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

4- En admettant que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,
Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN D'INTEGRALES GENERALISEES session 2019-2020
DUREE: 02H

Exercice 1

Soit f une fonction définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

1) Etudier la convergence de l'intégrale impropre

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}dx,\ n > 0$$

2) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ et que $\lim_{n\to+\infty} nI_n = f(0)$

Exercice 2

1) Soit l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
   a) Pour quelles valeurs réelles de x, $\Gamma(x)$ est-elle convergente?
   b) Evaluer $\Gamma(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(\frac{1}{2})$.

   On admettra l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2) Application: Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 x^m(\ln x)^n dx$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $m > -1$.

Exercice 3

a) Etudier la nature des intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx,$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{Arctgx}{x}dx,$$

$$I_3 = \int_1^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2-1}}dx,$$

$$I_4 = \int_{-1}^1 \frac{e^{Arctgx}}{x\sqrt{|x|}}dx.$$

b) Soit $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3}dx$

Vérifier que cette intégrale est divergente. Trouver une fonction g sur $[1, +\infty[$ telle que:

$\int_1^{+\infty} \left[\frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} - g(x)\right]dx$ soit convergente.

BONNE CHANCE

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN D'INTEGRALES GENERALISEES
DUREE: 2H

Exercice 1

Soit f une fonction définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

1) Etudier la convergence de l'intégrale impropre.

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}\,dx,\ n > 0$$

2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = f(0)$

Exercice 2

1) Soit l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

a) Pour quelles valeurs réelles de x, $\Gamma(x)$ est-elle convergente?

b) Evaluer $\Gamma(n), n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(\frac{1}{2})$.

On admettra l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2) Application: Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 x^m(\ln x)^n\,dx$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $m > -1$.

Exercice 3

a) Indiquer pour quelles valeurs du paramètre réel a l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-ax}\sqrt{1+x}}{x^2}\,dx$ converge.

b) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ est convergente et qu'elle est nulle.

c) Etudier la nature des intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx,$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}dx,$$

$$I_3 = \int_1^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}dx,$$

$$I_4 = \int_{-1}^1 \frac{e^{\arctan x}}{x\sqrt{|x|}}dx.$$

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 4

a) Soit $\int_1^{+\infty} \frac{x^4+1}{x+3}\,dx$

Vérifier que cette intégrale est divergente. Trouver une solution g sur $[1,+\infty[$ telle que:

$\int_1^{+\infty} [\frac{x^4+1}{x+3} - g(x)]\,dx$ soit convergente.

b) Soient f et g deux fonctions réelles localement intégrables sur $[a,+\infty[$ Si f est décroissante et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et s'il existe une constante M telle que $|\int_a^x g(t)\,dt| \leq M, \forall x \geq a$, alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,g(t)dt$ est convergente.

Montrer ce résultat dans l'hypothèse supplémentaire très souvent réalisée en pratique, que f et g soient de classe C^1.

BONNE CHANCE

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

EXAMEN D'INTEGRALES GENERALISEES
DUREE: 2H

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales suivantes:

a- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$

b- $\int_1^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} dx$

c- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}$

d- $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x\sqrt{x}} dx$

e- $\int_1^{+\infty} x^x dx$

f- $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)} dx$

Exercice 2

1) Démontrer que $\forall X \in [1,+\infty[$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$2n\pi > n\pi > X \text{ et } \left| \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \right| \geq \frac{1}{4},\ 0 < \alpha \leq 1.$$

Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx,\ 0 \leq \alpha \leq 1.$

2) Démontrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente.

3) Vérifier que les deux fonctions définies sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = f(x) + \frac{sin^2 x}{x}$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Les intégrales $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ sont-elles de même nature? conclusion?

Exercice 3

a) Etudier la nature des intégrales suivantes:

$$\int_1^{+\infty} (e^{-\frac{1}{t}} - \cos\frac{1}{t})\frac{dt}{t},\ \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt;\ \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$$

b) Soit $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} dx$

VALIDER LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI Année 2017-2018

INTEGRALES GENERALISEES
SEMESTRE 1

Exercice 1 (12points)

1. La fonction $f(t) = \frac{1}{t}\left(e^{-\frac{1}{t}} - \cos\frac{1}{t}\right)$ est continue.

   (2) Pour $1 \leq t < +\infty$

   Un développement limité montre que la fonction est équivalente à $-t^{-2}$ si $t \to +\infty$. Donc $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge car $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

   (1) comme $-1 \leq \sin t \leq 1$, alors $\frac{e^{-1}}{t} \leq \frac{e^{\sin t}}{t} \leq \frac{e}{t}$ or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est une intégrale divergente donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}$ diverge.

   (2) $f(x) = \frac{\arctan x}{x} \sim \frac{\pi}{2x}$ si $x \to +\infty$. Donc $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ est une intégrale divergente.

2. a) Pour $x > 0$, posons $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x}}$

   On a au voisinage de l'infini $f(x) \sim \frac{1}{x^{5/2}}$ est une intégrale de Riemann convergente. Donc $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

   Au voisinage de 0, on a cette fois $f(x) \sim \frac{1}{x^{1/2}}$ or $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ converge,donc $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge également au voisinage de 0. On peut donc conclure que l'inégalité I converge.

   b) Pour décomposer la fraction en éléments simples,On écrit tout d'abord :
   $t^4+1 = t^4+2t^2+1-2t^2 = (t^2+1)^2-(\sqrt{2}t)^2 = (t^2+\sqrt{2}t+1)(t^2-\sqrt{2}t+1)$.
   Alors $\frac{1}{t^4+1} = \frac{at+b}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{ct+d}{t^2-\sqrt{2}t+1}$
   Comme la fonction est paire,on obtient :
   $\frac{1}{t^4+1} = \frac{-at+b}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{-ct+d}{t^2-\sqrt{2}t+1}$
   L'uniticité de la décomposition entraine que : $a = -c$ et $b = d$.

Scanné avec CamScanner

On a donc : $\frac{1}{t^4+1} = \frac{at+b}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{ct+d}{t^2-\sqrt{2}t+1}$.

En donnant à t la valeur 0,on obtient : $b = \frac{1}{2}$.

D'autre part,si l'on réduit au même dénominateur, le coefficient de t^2 vaut : $-2a\sqrt{2}+2b$. On en déduit que : $a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

On peut donc écrire alors que :

$$\frac{at+b}{t^2+\sqrt{2}t+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2t+2\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2t+2\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}$$

Et cette fonction admet comme primitive : $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(t^2+\sqrt{2}t+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}t+1)$. On obtient de même pour la primitive de l'autre morceau : $-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(t^2-\sqrt{2}t+1) - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(-\sqrt{2}t+1)$ alors une primitive de $\frac{1}{t^4+1}$ est : $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(t^2+\sqrt{2}t+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan(\sqrt{2}t+1) + \arctan(\sqrt{2}t-1)\right)$

Ce qui montre que : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+t^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

c) En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{x}$ donc I,on a : $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ et l'on obtient : $I = 2J = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2(8points)

1. La fonction f étant bornée pour $\mathbb{R}^+$,il existe une constante $M > 0$ telle que,pour tout $x \in [0,+\infty[$,on ait :$|f(x)e^{-nx}| \leq Me^{-nx}$.
   Le second membre admet une intégrale généralité convergente sur $[0,+\infty[$.
   On en déduit que I_n est absolument convergente.

2. On sait que $|I_n| \leq \int_0^{+\infty} |f(x)e^{-nx}|\,dx \leq M\int_0^{+\infty} e^{-nx}\,dx = \frac{M}{n}$
   Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

puisque $n\int_0^{+\infty} e^{-nx}\,dx = 1$,on peut écrire que : $nI_n - f(0) = n\int_0^{+\infty}[f(x)-f(0)]e^{-nx}\,dx$
La fonction f étant continue en 0,pour tout $\varepsilon > 0$,il existe $\delta > 0$,tel que $0 < x < \delta \Rightarrow |f(x)-f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)
On peut donc écrire que :

$$nI_n - f(0) = n\int_0^{\delta}[f(x)-f(0)]e^{-nx}\,dx + n\int_{\delta}^{+\infty}[f(x)-f(0)]e^{-nx}\,dx$$
$$= I_1 + I_2 \ (2)$$

D'après (1), on a : $I_1 \leq n\frac{\varepsilon}{2}\int_0^{\delta} e^{-nx}\,dx = \frac{n\varepsilon}{2}\frac{1-e^{-n\varepsilon}}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (3)
D'autre part, $|f(x)-f(0)| \leq 2M$, donc $|I_2| \leq 2Mn\int_{\delta}^{+\infty} e^{-nx}\,dx = 2Me^{-n\delta}$ (4)
Il résulte de (2),(3) et (4) que, pour tout $\varepsilon > 0$,$|nI_n - f(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2Me^{-n\delta}$.
Ce qui montre que :
Pour n allez grand, $|nI_n - f(0)| \leq \varepsilon$. Ce qui prouve que :
$\lim_{n\to+\infty}(nI_n - f(0)) = 0$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

VALIDER LMD

Université FHB - Cocody Année Universitaire 2018-2019
UFR Mathématique-Informatique

LICENCE 2
EXAMEN D'INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES
Examen Seconde Session

Exercice 1 : Étude d'intégrales

a- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$

Posons $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

f est définie et continue sur $]0, +\infty[$

Au voisinage de 0 (0.5 points)

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Pas de problème de convergence en 0, car f peut être prolongée par continuité en $x = 0$

Au voisinage de l'infini (0.5 points)

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est positive, décroissante et tend vers 0 quand $x \to +\infty$

De plus on a : $\left|\int_1^A \sin x dx\right| = |\cos 1 - \cos A| \leq 2 \; \forall A > 1.$

Donc d'après Abel, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente

En définitive, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente

b- $\int_1^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} dx$

Posons $f(x) = \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$

f est définie et continue sur $[1, 3[$

$f(x) \approx_3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{10}}$

$\int_1^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{10}} dx$ est une intégrale divergente,

donc l'intégrale $\int_1^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} dx$ diverge

(1 points)

c- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx$

Scanné avec CamScanner

Posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}$

f est définie et continue sur $]1,+\infty[$

Au voisinage de l'infini (0.5 points)

$f(x) \approx_{+\infty} \frac{1}{x^2}$ or $\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ est convergente $\forall c > 1$, donc $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ est convergente $\forall c > 1$

Au voisinage de 1 (0.5 points)

$f(x) \approx_1 \frac{1}{2(x-1)^{\frac{1}{2}}}$ or $\int_1^c \frac{dx}{2(x-1)^{\frac{1}{2}}}$ est une intégrale convergente $\forall c > 1$, donc $\int_1^c \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ est une intégrale convergente

d- $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x\sqrt{x}}dx$

Posons $f(x) = \frac{\cos(x)}{1+x\sqrt{x}}$

f est définie et continue sur $[0,+\infty[$

Au voisinage de l'infini (1.5 points)

$|f(x)| = \left|\frac{\cos(x)}{1+x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{1+x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

or $\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ est convergente $\forall c > 0$, donc $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x\sqrt{x}}dx$ est convergente

e- $\int_1^{+\infty} x^x dx$

Posons $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$

f est définie et continue sur $[1,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{x\ln x}dx$ diverge.

(0.5 points)

f- $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(1+x)}dx$

Posons $f(x) = \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(1+x)}$

f est définie et continue sur $]0,+\infty[$

Au voisinage de l'infini (0.5 points)

$f(x) \approx_{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\ln x}$

or $\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\ln x}dx$ est une intégrale divergente, donc $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ est une intégrale divergente $\forall c > 0$

Au voisinage de 0 (0.5 points)

VALIDEUR LIMID

Scanné avec CamScanner

$f(x) \approx_0 \frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{x}$

or $\left|\frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{x}\right| \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

et $\int_0^c \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ est une intégrale convergente $\forall c > 0$.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(1+x)} dx$ est une intégrale divergente .

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 2 : 7 points

1) $\forall X \in [1,+\infty[, \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $2n\pi > 2n > X$ et
$\left|\int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx\right| \geq \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \geq \frac{1}{2n\pi} \int_{n\pi}^{2n\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{4}$. **(1 points)**
Le critère de Cauchy n'est pas satisfait (pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$).
Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ diverge pour $0 < \alpha \leq 1$ **(2 points)**

2) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge par **Abel.**

$\forall x \in [1,+\infty[, \left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x}$, d'après 1) on a :

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ diverge, il s'en suit que :

$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ diverge.

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente.

(2 points)

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) = 1$
Donc f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.
$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ converge par Abel, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ est divergente d'après 1)
Donc $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x}\right) dx$ est divergente. **(1 points)**
Conclusion : $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} g(x)$ ne sont pas de même nature bien que l'on ait $f \approx_{+\infty} g$ (car f et g ne gardent pas un signe constant au voisinage de $+\infty$) **(1 points)**

Exercice 3 : 7 points

a) * La fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ est continue pour $1 \leq t \leq +\infty$
Un développement limité montre que la fonction est équivalente à $-t^2$ si $t \to +\infty$
Donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge **(2 points)**
* Comme $-1 \leq \sin t \leq 1, \frac{e^{-1}}{t} \leq \frac{e^{\sin t}}{t} \leq \frac{e}{t}$
$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$ diverge **(2 points)**

VALIDUR LMD

Scanné avec CamScanner

$^{*}f(x) = \frac{Arctgx}{x} \approx \frac{\pi}{2x}$ si $x \to +\infty$
$\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge **(1 points)**

b) Posons $f(x) = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3}$
On a : $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ d'où $f(x) > 1\ \forall x \leq A$ (constante A)
ce qui implique que l'intégrale est divergente.
Le développement limité de f pour $x \to +\infty$ donne $f(x) = x-3+\frac{9}{x}-\frac{27}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Il suffit de poser $g(x) = x - 3 + \frac{9}{x}, x \in [1, +\infty[$
On obtient $f(x) - g(x) \approx \frac{-27}{x^2}$ pour $x \to +\infty$
Donc $\int_1^{+\infty} [f(x) - g(x)]\,dx$ converge.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN D'INTEGRALITES GENERALISEES

Exercice 1 (voir précédent)

Exercice 2

1- a) Soit l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$f:]0;+\infty] \to \mathbb{R}$$

$t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est positive et continue sur $]0,+\infty]$ et donc localement Intégrable sur $]0,+\infty]$.

*Etude de la convergence en 0

$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ donc f est intégrable sur $]0;1[$ si et seulement si $x > 0$ (d'après les Critère de Riemann)

*Etude en $+\infty$

On a: $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2e^{-t}t^{x-1} = 0$

c'est-à-dire $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} o(\frac{1}{t^2})$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les intégrables $\int_0^1 f(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ convergent toutes les deux pour tout $x \in]0,+\infty[$.

Par conséquent, en utilisant la relation de Charles, $\Gamma(x)$ converge si et seulement si $x \in]0,+\infty[$.

1- b) Evaluons $\Gamma(x), \forall x \in \mathbb{N}^*$:

Soit $x \in]0,+\infty[$. Soient a et A deux réels tels que $0 < a < A$.

Les fonctions $t \longmapsto t^x$ et $t \longmapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[a,A]$.

En effectuant une intégration par parties, on obtient :

En posant $\begin{cases} u = t^x \\ v' = -e^{-t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = xt^{x-1} \\ v = e^{-t} \end{cases}$

$$\int_a^A t^x e^{-t}dt = [-t^x e^{-t}]_a^A + x\int_a^A t^{x-1}e^{-t}dt$$

$$\int_a^A t^x e^{-t}dt = -A^x e^{-A} + a^x e^{-a} + x\int_a^A t^{x-1}e^{-t}dt$$

Puisque $x > 0$ et donc $x + 1 > 0$, quand $a \longrightarrow 0$ et $A \longrightarrow +\infty$, on obtient :

Scanné avec CamScanner

$$\Gamma(x+1) = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ a\to 0}} \int_a^A t^2 e^{-t} dt = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ a\to 0}} \left(-A^x e^{-A} + a^x e^{-a} + x\int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt\right)$$

$$\Gamma(x+1) = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ a\to 0}} x\int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

$$\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)$

De plus $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^t dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$,

Par récurrence, on obtient alors

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$

$\bullet\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$

On pose $u = \sqrt{t}$ et $t = u^2$ et $dt = 2u\,du$

et on obtient:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} \times 2u du$$
$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$$

2) Application,

Calculons $I = \int_0^1 x^m (lnx)^n dx$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $m > -1$.

Soit $f:]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$x \longmapsto x^m (lnx)^n$$

f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $m > -1$. Par conséquent I est bien défini.

Posons $u = lnx \Longrightarrow x = e^u, du = \frac{1}{x} dx$

$$\Longrightarrow xdu = dx \Longrightarrow e^u du = dx$$

quand $x \longrightarrow 0, u \longrightarrow -\infty$ et quand $x \longrightarrow 1, u \longrightarrow 0$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$I = \int_0^1 x^m (lnx)^n dx = \int_{-\infty}^0 e^{mn}\ u^n e^u du$

$I = \int_{-\infty}^0 u^n\, e^{(m+1)u} du$ posons $I = In$

$I_{n+1} = \int_{-\infty}^0 u^{n+1}\, e^{(m+1)n} du$

Posons $x = u^{n+1} = 0 \implies x' = (n+1)u^n$

$v' = e^{(m+1)u} \implies v = \frac{1}{m+1} e^{(m+1)u}$

$I_{n+1} = \left[\frac{n^{n+1}}{m+1} e^{(m+1)u}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{n^{n+1}}{m+1} \int_{-\infty}^0 u^n e^{(m+1)u} du$

$I_{m+1} = -\frac{n+1}{m+1} \int_{-\infty}^0 u^n e^{(m+1)u} du$

$I_{n+1} = -\frac{n+1}{m+1} In$

On a: $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = -\frac{n+1}{m+1} I_n$

On montre par récurrence que

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, I_n = -\frac{n}{m+1} I_{n-1}$

$\forall \in \mathbb{N}^*, I_n = -\frac{1}{m+1}(u\, I_{n-1})$

On a: $I_o = \int_0^1 x^m dx = \int_{-\infty}^0 e^{(m+1)u} du = \frac{1}{m+1}$

$I_1 = -\frac{1}{m+1} I_0 = -\frac{1}{(m+1)^2}$

$I_2 = -\frac{1}{m+1}(2\, I_1)$

$I_2 = -\frac{2}{m+1} I_1 = -\left(\frac{2}{(m+1)}\right)\left(-\frac{2}{(m+1)^u}\right)$

$I_2 = -\frac{2}{(m+1)^3}$

$I_n = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}} = (-1)^n\ \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 3

a) Etude de la nature d'intégrales :

- $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{sin\,(x)}{x} dx$

Posons $f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$

f est continue sur $-]0;+\infty[$, donc localement intégrable sur $]0;+\infty[$.

*Etude en 0

Soit $C \in]0,+\infty[$

On a: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Alors $\int_0^c f(x)dx$ est une fausse intégrale généralisée en zero. Par conséquent, elle converge en 0.

*Etude en $+\infty$

Posons $\forall\, x \in [c,+\infty[,\ f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \sin(x)$

$f \in C^\infty([c,+\infty[)$. De plus $\forall\, x \in]c,+\infty[$,

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Alors f est strictement décroissante sur $[c,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Aussi, $\forall x \in [c,+\infty[\,, \left|\int_c^x g(t)\,dt\right| = \left|\int_c^x \sin t\,dt\right|$

$$= |-[\cos t]_c^x| = |\cos(c) - \cos(x)|$$
$$= |\cos(c) - \cos(x)| \leq |\cos x| + |\cos(c)|$$
$$\leq 1 + 1 = 2$$

$$\left|\int_c^x g(t)\,dt\right| = 2$$

D'après la règle d'Abel, $\int_c^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_c^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge.

Comme les intégrales $\int_0^c \frac{\sin(x)}{x} dx$ et $\int_c^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ convergent, on conclut en utilisant la rélation que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge.

- $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{Arctg\,x}{x} dx$

Posons $f : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{Arctg\,x}{x}$

f est continue sur $[1;+\infty[$, donc localement intégrable sur $[1;+\infty[$.

Scanné avec CamScanner

*Etude en $+\infty$

$f(x) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$ donc les intégrales $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x}\,dx$ sont de même nature.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x}\,dx$ est Riemann divergente.

b) Vérifions que $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3}\,dx$ diverge.

Posons $f : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3}$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{x^4+1}}{x+3}$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x} = +\infty$$

Alors $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3}\,dx$ diverge (Règle de Riemann au voisinage de l'infini).

*Trouvons g sur $[1;+\infty[$ telle que $\int_1^{+\infty} [\frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} - g(x)]\,dx$ converge.

Posons $h : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} - g(x)$$

$$h(x) \underset{t\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} - g(x)\right) = x - g(x).$$

Comme $\int_1^{+\infty} h(x)\,dx$ converge, alors $\int_1^{+\infty} (x - g(x))\,dx$ converge.

La fonction $g : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x - \frac{1}{x^2}$ est suffisante. Par conséquent $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

- $I_3 = \int_1^3 \frac{dx}{(3-x)(\sqrt{x^2+1})}$

Posons $f : [1;3[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{(3-x)(\sqrt{x^2+1})}$$

f est continue sur $[1;3[$, donc localement intégrable sur $[1;3[$.

*<u>Etude en 3</u>

On a : $\lim\limits_{x\to 3^-}(-3+x)f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{\sqrt{10}} \neq 0$

Alors $\int_1^3 f(x)\,dx$ diverge (Règle de Riemann au voisinage d'un point).

- $I_4 = \int_{-1}^1 \frac{e^{Arctg\,x}}{x\sqrt{|x|}}dx$

Posons $f : [-1;0[\cup]0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{e^{Arctg\,x}}{x\sqrt{|x|}}$$

f est continue sur $[-1;0[\cup]0;1]$, donc elle est localement intégrable sur $[-1;0[\cup]0;1]$.

On a : $\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{Arctg\,x}}{x\sqrt{|x|}} = +\infty$

Donc $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ diverge (Règle de Riemann au voisinage d'un point).

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB de Cocody L2, Sujet de géométrie 1, Durée 2h. Session 1 2015-2016

NB : La précision des courbes avec preuve est très importante

Exercice 1 : Soit $(\mathcal{E}, E)$ l'espace affine muni de ses structures euclidienne et affine et de son repère cartésien $\mathcal{R} = \mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On pose les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1; 0; 1)$, $\overrightarrow{u_2} = (-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{u_3} = (1; 1; 1)$, le point $A(0; 1; 0)$, le plan vectoriel $\vec{P} = \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \rangle$ et la droite vectorielle $\vec{D} = \langle \overrightarrow{u_3} \rangle$ de sorte que $\mathbb{R}^3 = \vec{P} \oplus \vec{D}$ et $P = A + \vec{P}$.

1- Déterminer l'expression analytique de la projection sur P de direction $\vec{D}$.
2- Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u_3}$.

Exercice 2

Etudier et représenter graphiquement la courbe paramétrée (Γ) définie par :

$$M(t) = (x(t), y(t)) = (t - \frac{1}{t}\,; t + \frac{1}{t})$$

Exercice 3

Etudier et représenter graphiquement la courbe paramétrée (Γ) définie par une équation polaire $r(\theta) = 1 + cos\theta$.

Scanné avec CamScanner

UFHB EXAMEN de Géométrie 1 Durée : 2 heures Session 1 2016-2017

Exercice 1

1) Donner une équation cartésienne du plan P passant par A(2, -1, 1) tel que D_1//P et D_2 //P avec

$$D_1 : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = t \end{cases} \quad \text{et} \quad D_2 : \begin{cases} x + y + z = -1 \\ x - 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

2) Déterminer l'intersection de P avec la droite D_3 passant par B(1, 0, -2) et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1, 0, -1)$.

3) Déterminer l'expression analytique de la symétrie par rapport à P de direction $\overrightarrow{D_3}$.

Exercice 2

Faire une étude et construire la courbe paramétrée suivantes :

1) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} + \ln(2 + t) \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$

Exercice 3

Etudier et construire la courbe d'équation polaire : $r = 1 + 2\cos(2\theta)$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN DE GEOMETRIE 1 : Durée : 2 heures Session 1 2017-2018

Exercice 1 :

Soit $(\mathcal{E}, E)$l'espace affine muni de ses structures euclidienne et affine et de son repère cartésien $\mathcal{R} = \mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On pose les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1; 0; 1)$, $\overrightarrow{u_2} = (1; 1; 0)$, $\overrightarrow{u_3} = (1; 1; 1)$, le point $A(0; 1; 1)$, le plan vectoriel $\vec{P} = \langle \overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2} \rangle$ et la droite vectorielle $\vec{D} = \langle \overrightarrow{U_3} \rangle$de sorte que $\mathbb{R}^3 = \vec{P} \oplus \vec{D}$ et $P = A + \vec{P}$.

Déterminer l'expression analytique de l'affinité de base P, de direction $\vec{D}$ et de rapport (-2).

Exercice 2

Faire une étude et construire la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = t - \frac{1}{t} \\ y(t) = \frac{1}{t} + \ln(2 + t) \end{cases}$$

Exercice 3

Etudier et construire la courbe d'équation polaire suivante :

$$r = -1 + \sin(\theta)$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN DE GEOMETRIE 1 : Durée : 2 heures

Exercice 1 :

Soit $(\mathcal{E}, E)$ l'espace affine muni de ses structures euclidienne et affine et de son repère cartésien $\mathcal{R} = \mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On pose les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1; 0; 1)$, $\overrightarrow{u_2} = (1; 1; 0)$, $\overrightarrow{u_3} = (1; 1; 1)$, le point $A(0; -1; 1)$, le plan vectoriel $\vec{P} = \langle \overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2} \rangle$ et la droite vectorielle $\vec{D} = \langle \overrightarrow{U_3} \rangle$ de sorte que $\mathbb{R}^3 = \vec{P} \oplus \vec{D}$ et $P = A + \vec{P}$.

Déterminer l'expression analytique de l'affinité de base P, de direction $\vec{D}$ et de rapport (-3).

Exercice 2

Faire une étude et construire la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1-t} \\ y(t) = \frac{t^2}{1-t} \end{cases}$$

Exercice 3

Etudier et construire la courbe d'équation polaire suivante :

$$r = -1 + \cos(\theta)$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFHB Examen de Géométrie plane Durée : 2 heures

Session 1 Septembre 2019

NB On tiendra compte de la précision de la rédaction et aussi des courbes.

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de ses structures euclidienne et affine et de son repère cartésien canonique, $R = (O, e_1, e_2, e_3)$, on pose les vecteurs $u_1(1, 0, 1)$, $u_2(1, -1, 1)$, $u_3(1, 1, 0)$ et le point A(-1,0, 1), puis le plan vectoriel $\vec{P}$ $(u_1 ; u_2)$ et la droite vectorielle $\vec{D}(u_3)$ (de sorte que l'espace vectoriel à $\mathbb{R}^3$ $\vec{E} = \vec{P} \oplus \vec{D}$) et enfin le plan affine P=A+$\vec{P}$.

Déterminer l'expression analytique de :

i) La projection sur P, de direction $\vec{D}$

ii) L'affinité de base P, de rapport (-2), de direction $\overrightarrow{D}$.

Exercice 2

Faire une étude et construire la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = (t+2)e^{\frac{-1}{t}} \\ y(t) = (t-2)e^{\frac{-1}{t}} \end{cases}$$

Exercice 3

Etudier et construire la courbe d'équation polaire : $r(\theta) = \sin(2\theta)$

VALEURMID

Scanné avec CamScanner

UFHB Examen de Géométrie plane Durée : 2 heures

Session 2 Fevrier 2020

NB On tiendra compte de la précision de la rédaction et aussi des courbes.

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de ses structures euclidienne et affine et de son repère cartésien canonique, $R = (O, e_1, e_2, e_3)$, on pose les vecteurs $u_1(1, 0, 1)$, $u_2(1, -1, 1)$, $u_3(1, 1, 0)$ et le point A(-1,0, 1), puis le plan vectoriel $\vec{P} = \langle u_1 ; u_2 \rangle$ et la droite affine D= A+$\vec{D}(u_3)$ (de sorte que l'espace vectoriel à $\mathbb{R}^3$ $\vec{E} = \vec{P} \oplus \vec{D}$) et enfin le plan vectoriel $\vec{P}$.

Déterminer l'expression analytique de :

i) La projection sur D, de direction $\overrightarrow{P}$

ii) La symétrie sur D, de direction $\overrightarrow{P}$.

Exercice 2

Faire une étude et construire la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{-1}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t}{1+t^2} \end{cases}$$

Exercice 3

Etudier et construire la courbe d'équation polaire : $r(\theta) = -1 + \sin(2\theta)$

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFRMI L2 2019- 2020

EXAMEN DE GEOMETRIE 1 (ou GEOMETRIE Plane) : Durée 2 h

Exercice 1

Faire une étude et construire les courbes paramétrées suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = sin(2t) \\ y(t) = sin(t) \end{cases}$$

On précisera les tangentes aux points particuliers

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de ses structures euclidienne et affine et de son repère cartésien canonique, $R = (O, e_1, e_2, e_3)$. On considère la droite affine $\mathcal{D}$ d'équation : $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y - z - 1 = 0$.

1- Déterminer la position relative de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{P}$.
2- Déterminer l'expression analytique de :
   a- La symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$.
   b- L'affinité de base $\mathcal{P}$, de rapport (-2), de direction la droite vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ associée à $\mathcal{D}$.

VALIDER LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFR L2 2020-2021

EXAMEN DE GEOMETRIE 1(ou GEOMETRIE Plane)

Durée: 2H

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de ses structures euclidienne et affine et de son repère cartésien canonique, $R = (O, e_1, e_2, e_3)$, on considère la droite affine $\mathcal{D}$ d'équation : $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation: $x+y-z-2=0$.

1- Déterminer la position relative de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{P}$.

2- Déterminer l'expression analytique de:

a- La symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$.

b- L'affinité de base $\mathcal{P}$, de rapport (-3), de direction la droite vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ associée à $\mathcal{D}$.

Exercice 2

Etudier et représenter graphiquement la courbe paramétrée (Γ) définie par:

$$M(t) = (x(t), y(t)) = (-\cos t; \sin 2t)$$

On précisera les tangentes aux points particuliers.

Exercice 3

Etudier et construire la courbe d'équation polaire: $r = 1 - \sin(2\theta)$

VALIDE UMD

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE GEOMETRIE 1 L2 S1 2016/2017

Exercice 1

1- Déterminons une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A(2,-1,1) tel que $D_1 \,//\, \mathcal{P}$ et $D_2 \,//\, \mathcal{P}$

$$D_1 : \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 3t-2 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $D_1 = P_1 + t_1\overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $P_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$D_2 = \begin{cases} x+y+z = -1 \ (1) \\ x-2y+3z = 2 \ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)-(2) \Rightarrow 3y-2z = -3 \\ 2*(1)+(2) \Rightarrow 3x+5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 2z-3 \\ 3x = -5z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1+\frac{2}{3}z \\ x = \frac{-5}{3}z \\ z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } Z = \frac{z}{3}$$

On a donc $D_2 = P_2 + t_2\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $P_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

$$\text{Soit } M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t_1\vec{u} + t_2\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 2 & -5 \\ y+1 & 3 & 2 \\ z-1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7(x-2) - 11(y+1) + 19(z-1) = 0$$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 7x - 11y + 19z - 33 = 0$$

L'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est : $7x - 11y + 19z - 33 = 0$

2- Déterminons l'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite (D_3) passant par B(1,0,-2)

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in D_3 \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}$ tel que $D_3 = t\vec{w} + B = t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$

$$D_3 : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} ; \; D_3 : \begin{cases} x = t+1 \\ y = 0 \\ z = -t-2 \end{cases}$$

On a $M \in P \cap D_3$

Cherchons la valeur de t en remplaçant x, y, z par leurs valeurs dans l'équation du plan on obtient donc :

$7(t+1) - 11(0) + 19(-t-2) - 33 = 0 \Leftrightarrow 7t + 7 - 19t - 38 - 33 = 0 \Leftrightarrow -12t - 64 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-64}{12} = \frac{-16}{3}$.

VALIDUR LMD

Scanné avec CamScanner

En remplaçant t par sa valeur dans D_3 on obtient : $\begin{cases} x = \frac{-16}{3} + 1 \\ y = 0 \\ z = \frac{16}{3} - 2 \end{cases}$. Alors

l'intersection de $\mathcal{P}$ aves D_3 est M : $\begin{cases} x = \frac{13}{3} \\ y = 0 \\ z = \frac{10}{3} \end{cases}$

3- Déterminons l'expression analytique de la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ de direction D_3

Soient M $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et M' $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. M' est l'image de M par rapport à $\mathcal{P}$

$$M' = s(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} tel que \overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{u} \ (1) \\ \frac{1}{2}(M + M') \in \mathcal{P} \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y \\ z' = z - \lambda \end{cases} (S)$$

On a $\frac{1}{2}$(M+M') $= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+x'}{2} \\ \frac{y+y'}{2} \\ \frac{z+z'}{2} \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}$(M+M') $\in \mathcal{P} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{x+x'}{2} \\ \frac{y+y'}{2} \\ \frac{z+z'}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$.

Portons $\begin{pmatrix} \frac{x+x'}{2} \\ \frac{y+y'}{2} \\ \frac{z+z'}{2} \end{pmatrix}$ dans l'équation de $\mathcal{P}$, ainsi on obtient :

$7(\frac{x+x'}{2})$ - $11(\frac{y+y'}{2}) + 19(\frac{z+z'}{2})$ - 33] = 0

2 * [$7(\frac{x+x'}{2})$ - $11(\frac{y+y'}{2}) + 19(\frac{z+z'}{2})$ - 33 = 0

$7x' - 11y' + 19z' + 7x - 11y + 19z - 66 = 0$

$7(x + \lambda) - 11(y) + 19(z - \lambda) + 7x - 11y + 19z - 66 = 0$

$14x - 22y + 38z - 12\lambda - 66 = 0$

$12\lambda = 14x - 22y + 38z - 66 \Rightarrow \lambda = \frac{7}{6}x - \frac{11}{6}y + \frac{19}{6}z - \frac{11}{2}$

En remplaçant λ par sa valeur dans (S),on a l'expression analytique de la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ de direction D_3 qui est :

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} x' = \frac{13}{6}x - \frac{11}{6}y + \frac{19}{6}z - \frac{11}{2} \\ y' = y \\ z' = -\frac{7}{6}x + \frac{11}{6}y - \frac{13}{6}z + \frac{11}{2} \end{cases}$$

Exercice 2

Faire une étude et construire la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} + \ln(2+t) \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$$

Soit $f(t) = (x(t), y(t))$. Déterminons le domaine de définition de f.

$D_x = \{t \in \mathbb{R}, t > -2 \text{ et } t \neq 0\}$ et $D_y = \{t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$

$D_f = D_x \cap D_y =]-2, \infty[\backslash\{0\}$

Dérivée de $x(t)$ et $y(t)$

$\forall\, t \in D_f$ on a $\begin{cases} x'(t) = \frac{t^2-t-2}{t^2(t+2)} \\ y'(t) = \frac{t^2-1}{t^2} \end{cases}$

Signe de $x'(t)$, $\left\{t \neq 2 \text{ ou } t \neq 1 \text{ ou } t \neq -1\right.$

Branches infinies

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty \\ \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = +\infty \end{cases}$$ On a une branche parabolique de direction (O,J).

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to0} x(t) = -\infty \\ \lim\limits_{t\to0} y(t) = -\infty \\ \lim\limits_{t\to0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{t\to0}(y(t) - x(t)) = \lim\limits_{t\to0}$ t - $\ln(2+t)$ = - $\ln 2$ donc $\Delta : y = x - \ln 2$ est une asymptote à la courbe.

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to0} x(t) = +\infty \\ \lim\limits_{t\to0} y(t) = +\infty \\ \lim\limits_{t\to0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 1 \end{cases}$$. D'où $\Delta : y = x - \ln 2$ est une asymptote à la courbe.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$\begin{cases} \lim\limits_{t \to -2} x(t) = -\infty \\ \lim\limits_{t \to -2} y(t) = \dfrac{-3}{2} \end{cases}$. Donc la droite d'équation $y = \frac{-3}{2}$ est asymptote à la courbe.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Correction de géométrie 1 2018-2019 Session 1

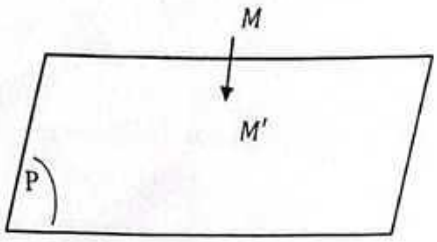
Exercice 1

On donne dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

$\vec{E} = \vec{P} \oplus \vec{D}$ *avec* $\vec{D} = \langle u_3 \rangle$, une droite vectorielle et $\vec{P} = \langle u_1, u_2 \rangle$ le plan vectoriel tel que $u_1(1,0,1), u_2(1,-1,1), u_3(1,1,0)$. Et enfin le plan affine $\mathcal{P} = A + \vec{P}$. $A(-1,0,1)$

i) Déterminions la projection sur $\mathcal{P}$, de direction $\vec{D}$.

Configuration :



$M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ la projection du point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ suivant la direction $\vec{D}$sur le plan $\mathcal{P}$.

Soit $\mathcal{P}(M) = M'$

On a $\begin{cases} \overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{U_3} & ❶ \\ M' \in (\mathcal{P}) & ❷ \end{cases}$

Déterminons l'équation de $(\mathcal{P})$

On a : $\mathcal{P} = A + vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$

Soit $H\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ alors $A.\vec{H} \in vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$

$$H \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ y & 0 & -1 \\ z-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -y - z + 1 + x + 1 + y = 0$$

$$\Leftrightarrow x - z + 2 = 0$$

On a : $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in (\mathcal{P})$ donc $x' - z' + 2 = 0$ ①

$$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = k\overrightarrow{U_3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'-x=k \\ y'-y=k \\ z'-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=k+x \\ y'=k+y \\ z'=0z \end{cases}$$ Dans ① on a : $k + x - z + 2 = 0$

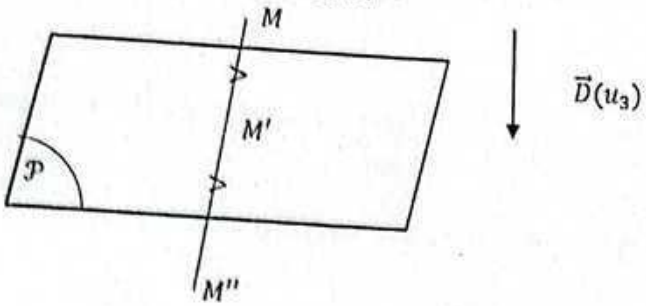
D'où : $k = -x + z - 2$

Ainsi $\begin{cases} x' = z - 2 \\ y' = -x + y + z - 2 \\ z' = z \end{cases}$ $(l'expression\ de\ la\ progression)$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

ii) La symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ de direction $\vec{D}$.



On a : $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{MM'}$

$M'' - M' = \overrightarrow{MM'}$

$\Rightarrow M'' = M' + \overrightarrow{MM'}$

Soit $S(M) = M'' = M' + \overrightarrow{MM'}$.

Où $S(M) = 2M' - M$ avec M'la projection de M et $M'' = S(M)$ la symétrie cherchée.

On a alors : $M''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} x'' = 2x' + x \\ y'' = 2y' - y \\ z'' = 2z' - z \end{cases}$

1ère méthode : (Après avoir trouver l'expression de la M'.)

Soit S la symétrie associé à la projection $\mathcal{P}$ trouvée précedement.

On a : $s(M) = 2p(M) - M$

$\Rightarrow \begin{cases} x'' = 2x' + x \\ y'' = 2y' - y \\ z'' = 2z' - z \end{cases}$

D'après précédent avec $M' = P(M)$

L'expression est : $\begin{cases} x' = z - 2 \\ y' = -x + y + z - 2 \\ z' = z \end{cases}$

D'où $\begin{cases} x'' = 2(z-2) - x \\ y'' = 2(-x + y + z - 2) - y \\ z' = 2z - z \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x'' = -x + 2z - 4 \\ y'' = -2x + y + 2z - 4 \ (expression\ analytique) \\ z'' = z \end{cases}$

2ième méthode : (Sans utilisation de la projection)

On a : $M'' = S(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM''} \in \vec{\theta} & ❶ \\ I - \frac{1}{2}(M + M'') \in \mathcal{P} & ❷ \end{cases}$

Avec $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $M''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$

❶ $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$,tel que $\overrightarrow{MM''} = \lambda\overrightarrow{u_3}$

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

D'où (II) $\begin{cases} x'' = \lambda + x \\ y'' = \lambda + y \\ z'' = z \end{cases}$

$I\left(\frac{1}{2}(x+x''), \frac{1}{2}(y+y''), \frac{1}{2}(z+z'')\right)$

❷ $\Rightarrow I \in \mathcal{P} : x - z + 2 = 0$

D'où $x + x'' - z - z'' + 4 = 0$

$\Rightarrow x'' - z'' = -x + z - 4$ (III)

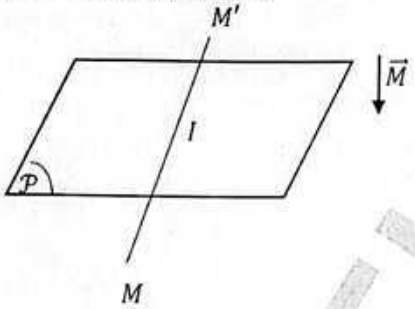
Portons (II) dans (III)

On a : $x'' - z'' = -x + z - 4 \Rightarrow \lambda + x - z = -x + z - 4$

$\Rightarrow \lambda = -2x + 2z - 4$

(II) devient donc $\begin{cases} x'' = -x + 2z - 4 \\ y'' = -2x + y + 2z - 4 \\ z'' = z \end{cases}$ (L'expression analytique)

iii) La symétrie par rapport à $\mathcal{P}$



On a : $\begin{cases} \overrightarrow{MM''} = k\vec{M} \quad (\vec{M} \text{ normal à } \mathcal{P}) \\ I \in \mathcal{P} \text{ avec } I = \frac{1}{2}(M + M'') \end{cases}$

$(\mathcal{P}) : x - z + 2 = 0$ d'où $\vec{M}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

NB : $(\mathcal{P}) : ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow \vec{M}(la\ normal\ du\ plan\ \mathcal{P})$

$\vec{M}\begin{pmatrix} a \\ b \\ -d \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MM''} = k\vec{M} \Rightarrow \begin{cases} x'' - x = k \\ y'' - y = 0 \\ z'' - z = -2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = k + x \\ y'' = y \\ z'' = -2k + z \end{cases}$ (I)

$I\left(\frac{1}{2}(x+x''), \frac{1}{2}(y+y''), \frac{1}{2}(z+z'')\right)$

$I \in (\mathcal{P}) \Rightarrow x'' - z'' = -x + z - 4$

(I) Nous permet : $k + x + 2k - z = -x + z - 4$

$3k - z = -2x + z - 4$

$k = \frac{1}{3}(-2x + z - 4)$

(I) Devient : $\begin{cases} x'' = \frac{1}{3}(x + 2z - 4) \\ y'' = y \\ z'' = \frac{1}{3}(4x - z - 4) \end{cases}$ (L'expression analytique)

iv) L'affinité de base $\mathcal{P}$ de rapport r = - 2 de direction $\vec{D}$

Scanné avec CamScanner

Comme r = -2 alors par la formule :

$a(M) = P(M) + 2M$

Or d'après i) l'expression analytique de la projection est : $P(M) : \begin{cases} x' = z - 2 \\ y' = -x + y + z - 2 \\ z' = z \end{cases}$

D'où : $a(M) = \begin{cases} x' = 2x + z - 2 \\ y' = -x + 3y + z - 2 \\ z' = 3z \end{cases}$ (l'expression analytique de l'affinité)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR :MI

CORRECTION GEOMETRIE 1 : COURBES POLAIRES

EXERCICE 1

On a : $r : r \mapsto r(\theta) = 1 + 2\cos 2\theta$ est définie de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

* Reduction d'ensemble de définition :

On a : $r(\theta + \pi) = 1 + 2\cos(2\theta + 2\pi)$

$= 1 + 2\cos 2\theta$

$\Rightarrow r(\theta + \pi) = r(\theta)$

On restreint donc l'étude sur un intervalle de longueur π puis on complète par la symétrie centrale de centre O pour avoir toute la courbe.

Soit $D_r = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

On a : $r(-\theta) = 1 + 2\cos(-2\theta) = 1 + 2\cos(2\theta) = r(\theta)$

Soit $M(-\theta) = S_{ox}(M(\theta))$

On se restreint donc à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis on complète la courbe par la symétrie axiale d'axe (ox).

* Variations :

r est dérivable sur son domaine d'étude $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

On a : $r'(\theta) = -4\sin(2\theta)$

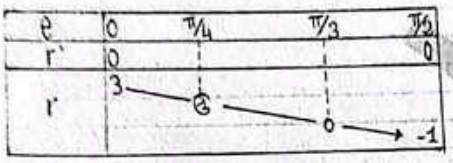
θ	0		$\pi/2$
2θ	0	π	π
$\sin(2\theta)$	+		+

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Ainsi $\forall \theta \in \left[0, \frac{\sigma}{2}\right]$, $r'(\theta) < 0$

*Tableau de variation



*Tangeantes aux points particuliers.

•Etude en 0

On a : $r'(0) = 0$ et $r(0) = 3$

La tangeante en 0 est de direction $\overrightarrow{d} = r'(0)\overrightarrow{u_0} + r(0)\overrightarrow{v_0}$ avec

$\overrightarrow{u_0} = \cos(0)\overrightarrow{i} + \sin(0)\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v_0} = -\sin(0)\overrightarrow{i} + \cos(0)\overrightarrow{j}$

$\Rightarrow \overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{j}$

D'où $\overrightarrow{d} = 3\overrightarrow{j} \equiv \overrightarrow{j}$

Tangente au point M avec $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{i}$.

•Etude en $\frac{\pi}{4}$

On a : $r'(\frac{\pi}{4}) = -4$ et $r(\frac{\pi}{4}) = 1$

La tangeante en $\frac{\pi}{4}$ est dirigée par $\overrightarrow{d}$ avec $\overrightarrow{d} = r'(\frac{\pi}{4})\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{4}}} + r(\frac{\pi}{4})\overrightarrow{v_{\frac{\pi}{4}}}$

On a : $\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{4}}} = \cos(\frac{\pi}{4})\overrightarrow{i} + \sin(\frac{\pi}{4})\overrightarrow{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{v_{\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{j} - \overrightarrow{i})$

$\Rightarrow \overrightarrow{d} = -2\sqrt{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$

$\Rightarrow \overrightarrow{d} = (\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2})\overrightarrow{i} - (\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2})\overrightarrow{j}$

Tangente au point T avec $\overrightarrow{OT} = r(\frac{\pi}{4})\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{4}}}$

On a : $\overrightarrow{OT} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$

•Etude en $\frac{\pi}{2}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

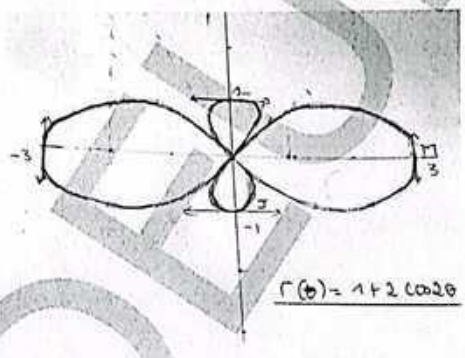
On a : $r'(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $r(\frac{\pi}{2}) = -1$
La tangeante en $\frac{\pi}{2}$ est dirigée par $\overrightarrow{d}$ avec $\overrightarrow{d} = r(\frac{\pi}{2})\overrightarrow{v_{\frac{\pi}{2}}} = \overrightarrow{i}$.
Au point J avec $\overrightarrow{OJ} = r(\frac{\pi}{2})\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{2}}}$.
$\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{J}$.

•Etude en $\frac{\pi}{3}$

$r'(\frac{\pi}{3}) = 0$ et $r(\frac{\pi}{3}) = 0$
D'où on a passage à l'origine.

Point remarque :

Toujours voir s'il n'existe pas de passage à l'origine et lire le tableau pour pouvoir bien tracer la courbe.



EXERCICE 2

On a : $r : r \longmapsto r(\theta) = -1 + \sin 2\theta$ est definie de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

*Reduction d'ensemble de définition :

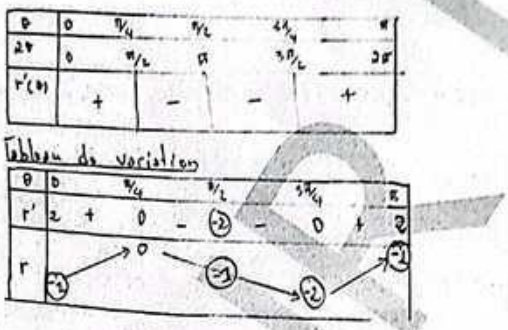
On a : $r(\theta + \pi) = -1 + \sin(2\theta + 2\pi)$
$= -1 + \sin 2\theta$
$= r(\theta)$
On restreint donc l'étude sur un intervalle de longueut πpuis on complète par

VALIDEUR LMD
Scanné avec CamScanner

la symétrie centrale de centre O pour avoir toute la courbe. Soit $D_r = [0, \pi]$

*Variations :

r est dérivable surson domaine détude $[0, \pi]$
On a : $r'(\theta) = 2\cos(2\theta)$.



*Tangentes aux points particuliers

•Etude en 0

On a : $r'(0) = 2$ et $r(0) = -1$
La tangeante en 0 est dirigée par $\overrightarrow{d}$ avec $\overrightarrow{d} = r'(0)\overrightarrow{u_0} + r(0)\overrightarrow{v_0}$
$\overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$
Tangente au point M avec $\overrightarrow{OM} = r(0)\overrightarrow{u_0}$
$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{i}$

•Etude en $\frac{\pi}{4}$

On a : $r'(\frac{\pi}{4}) = 0$ et $r(\frac{\pi}{4}) = -2$
On a donc passage à l'origine . (Point de reboursement de deuxième espèce).

•Etude en $\frac{\pi}{2}$

On a : $r'(\frac{\pi}{2}) = -2$ et $r(\frac{\pi}{2}) = -1$
La tangeante en $\frac{\pi}{2}$ est dirigée par $\overrightarrow{d}$ avec $\overrightarrow{d} = r'(\frac{\pi}{2})\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{2}}} + r(\frac{\pi}{2})\overrightarrow{v_{\frac{\pi}{2}}}$
$\overrightarrow{d} = -2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{i}$

Scanné avec CamScanner

Tangente au point T avec $\overrightarrow{OT} = r(\frac{\pi}{2})\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{2}}} = -\overrightarrow{j}$

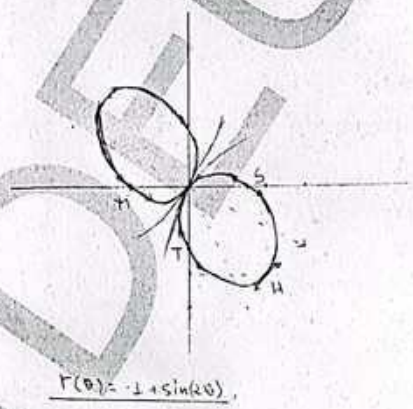
•Etude en $\frac{3\pi}{4}$

On a : $r'(\frac{3\pi}{4}) = 0$ et $r(\frac{3\pi}{4}) = -2$
La tangeante en $\frac{3\pi}{4}$ est dirigée par $\overrightarrow{d}$ avec $\overrightarrow{d} = r'(\frac{3\pi}{4})\overrightarrow{u_{\frac{3\pi}{4}}} + r(\frac{3\pi}{4})\overrightarrow{v_{\frac{3\pi}{4}}}$
$\overrightarrow{d} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{i} + \sqrt{2}\,\overrightarrow{j} \equiv \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$

Tangente au point H avec $\overrightarrow{OH} = r(\frac{3\pi}{4})\overrightarrow{u_{\frac{3\pi}{4}}} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{i} - \sqrt{2}\,\overrightarrow{j}$

•Etude en π

On a : $r'(\pi) = 2$ et $r(\pi) = -1$
La tangeante en π est dirigée par $\overrightarrow{d}$ avec $\overrightarrow{d} = r'(\pi)\overrightarrow{u_\pi} + r(\pi)\overrightarrow{v_\pi}$
$\overrightarrow{d} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$
Tangente au point S avec $\overrightarrow{OS} = r(\pi)\overrightarrow{u_\pi}$
$\Rightarrow \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{i}$



EXERCICE 3

On a : $\Gamma : r \mapsto r(\theta) = 1 + \cos\theta$ est définie de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

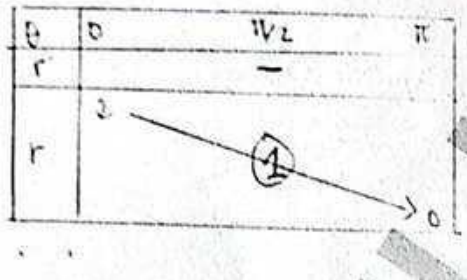
On a : $r(\theta + 2\pi) = 1 + \cos(\theta + 2\pi)$

$= 1 + \cos\theta$

$\Rightarrow r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$

Soit $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$. Donc $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$
De plus $r(-\theta) = r(\theta)$ donc $M(\theta)$ par rapport à l'axe (ox). On peut limiter l'étude sur $[0, \pi]$; la courbe obtenue sera complété par la symétrie d'axe (ox).
$\forall \in [0, \pi]$, $r'(\theta) = -\sin\theta$

*Tableau de varition



*Etude en $\theta = 0$

On a : $r(0) = 2$ et $r'(0) = 0$
Il yadonc une tangente de direction $\vec{d} = r(0)\vec{v_0} \Rightarrow \vec{d} \equiv \vec{j}$ et $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i}$.

*Etude en $\theta = \pi$

On a : $r(\pi) = 0$ donc il s'agit d'un passage à l'origine. $M(\pi) = 0$ est donc un point de reboursement de première espèce dont la tangente est la droite d'équation polaire $\theta = \pi$

*Points stationnaires :

(M, θ) tel que $r(\theta) = 0$ et $r'(\theta) = 0$ d'où $\theta = \pi$ et $M \equiv 0$

Nature de θ : $r''(\theta) = -\cos\theta \Rightarrow r''(\pi) = 1$
$\Rightarrow$ Point ordinaire.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

*Etude en $\frac{\pi}{2}$

On a : $r(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $r'(\frac{\pi}{2}) = -1$
$\overrightarrow{OH} = r(\frac{\pi}{2})\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{2}}} = \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

EXERCICE 4

$r : \theta \mapsto r(\theta) = \cos^{\theta}$ est définie de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$.

On a :$r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$
$r'(\theta) = r(\theta) \Rightarrow M(-\theta) = S_{ox}\, M(\theta)$ Donc on peut se reduire à l'intervalle $[0, \pi]$.
Le reste de la courbe sera obtenue par la symétrie d'axe (ox).
On a : $r'(\theta) = -2\sin\theta\cos\theta = -\sin(2\theta)$.

•Etude du signe de $r'(\theta)$.

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
2θ	0		π		2π
$\sin 2\theta$	0	+	0	−	0
$r'(\theta)$	0	−	0	+	0

•Tableau de variation.

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$r'(\theta)$	0	−	0	+	0
$r(\theta)$	1	↘	0	↗	1

Etude de la tangente au points particuliers.

*Etude en 0

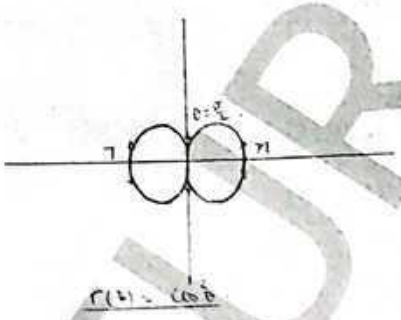
VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

On a : $r(0) = 0$ et $r'(0) = 1$
$\overrightarrow{d} = r(0)\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{i}$.
Au point M avec $\overrightarrow{OM} = r(0)\overrightarrow{u_0}$
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{i}$

*Etude en $\frac{\pi}{2}$

On a : $r'(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $r(\frac{\pi}{2}) = 0$. Il s'agit donc d'un passage à l'origine.
$M(\frac{\pi}{2}) = 0$ est un point de reboursement.



Courbe :

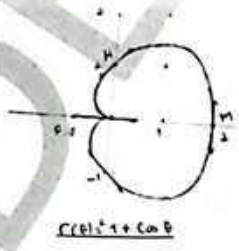


FIGURE 1 – La cardioide

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

Géométrie 1 : 2019-2020

Exercice 1

Soit $\Gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$

Faire une étude et construire la courbe paramétrée.

- **Domaine de définition D**

$D_x = \mathbb{R}$ et $D_y = \mathbb{R}$

$\Rightarrow D = D_x \cap D_y = \mathbb{R}$

- **Réduction du domaine D**

$\forall t \in \mathbb{R}, t + 2\pi \in \mathbb{R},$

$\Gamma(t + 2\pi) = \begin{cases} x(t + 2\pi) = \sin(2t) \\ y(t + 2\pi) = \sin(t) \end{cases}$

$\Gamma(t + 2\pi) = \Gamma(t)$

Donc, on réduit D sur un intervalle de longueur 2π

Prenons $D_1 = [-\pi; \pi]$

On obtient la courbe complète quand t décrit D_1

$\forall t \in D_1, -t_1 \in D_1,$

$\Gamma(-t) = \begin{cases} x(-t) = sin(-2t) \\ y(-t) = sin(-t) \end{cases}$

$\Gamma(-t) = \begin{cases} x(-t) = -\sin(2t) \\ y(-t) = -\sin(t) \end{cases}$

$\Gamma(-t) = \begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$

$\Rightarrow \Gamma(-t) = S_0\Gamma(t)$

Donc, on réduit le domaine de définition sur $D_2 = [0; \pi]$, puis on obtient la courbe complète par la symétrie centrale de centre O.

$\forall t \in [0; \pi],$

$\Gamma(\pi - t) = \begin{cases} x(\pi - t) = -sin(2t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = sin(t) = y(t) \end{cases}$

$\Gamma(\pi - t) = S_0 y\Gamma(t)$

On étudie et on construit la courbe sur $D_3 = [0; \frac{\pi}{2}]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy), puis par symétrie centrale de centre O.

- **Dérivée et sens de variation**
- **Dérivée**

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], x'(t) = 2\cos(2t)$

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], y'(t) = \cos(t)$

- **Sens de variation**

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], x'(t) \geq 0$

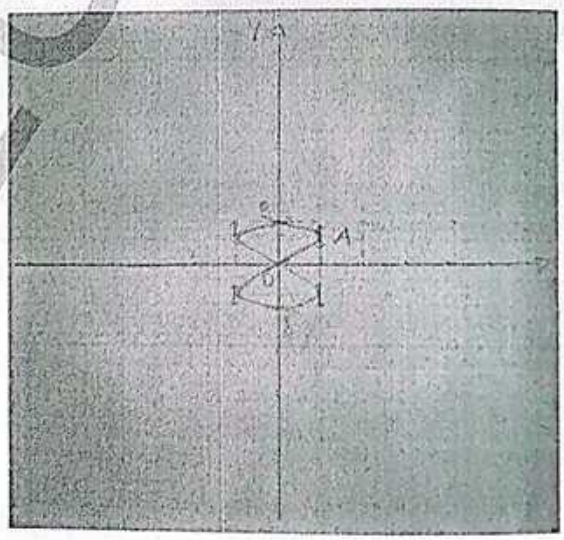
$\forall t \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right], x'(t) < 0$

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], y'(t) > 0$

Tableau de variation

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		+	0	-	
$x(t)$	0	↗	1	↘	0
$y(t)$	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	1
$y'(t)$			+		
Points particuliers	$O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$		$A\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\1\end{pmatrix}$		$B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
Vecteurs tangents	$\overrightarrow{T_0}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$		$\overrightarrow{T_A}\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$		$\overrightarrow{T_B}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

Construction



Exercice 2

1) Position relative de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{P}$.

Déterminons l'intersection de $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{P}$.

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$M \in P \cap D \Leftrightarrow M \in P \text{ et } M \in D$

Scanné avec CamScanner

$M \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z-1 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z-1 \\ y=-z \end{cases}$

$M \in P \Leftrightarrow x+y-z-1=0$

Alors $M \in P \cap D \Leftrightarrow z-1-z-z-1=0$

$\Leftrightarrow -z-2=0 \Leftrightarrow z=-2$

D'où $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \\ z=-2 \end{cases}$

Donc, $P \cap D = M\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

La droite D est sécante au plan P en $M\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2) Expression analytique de :

a) La symétrie orthogonale par rapport à D

Déterminons l'expression analytique de la projection orthogonale à D.

Soient $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

M' est la projection orthogonale de M sur D.

$P(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in D \\ \exists \lambda \in \mathbb{R} / \overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{n} \text{ où} \end{cases}$

$\vec{n}$ est un vecteur normal à D.

Avec $\vec{n}$ est un vecteur normal à D.

Avec $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a : $\overrightarrow{MM'} = \lambda\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x=\lambda \\ y'-y=\lambda \\ z'-z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (S): \begin{cases} x'=x+\lambda \\ y'=y+\lambda \\ z'=z \end{cases}$

Déterminons x

$M' \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x'+y'+1=0 \\ x'-z'+1=0 \end{cases}$

$M' \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2\lambda-y-1 \\ -\lambda=y+z \end{cases} \Rightarrow \lambda=-(y+z)$

D'où $\begin{cases} x'=x-y-z \\ y'=-z \\ z'=z \end{cases}$ est l'expression analytique de la projection orthogonale sur D.

Expression analytique de la symétrie orthogonale.

Soit S la symétrie orthogonale

$S(M)=M'+\overrightarrow{MM'}$

$= 2M'-M$

$S(M)=2P(M)-M$

B) Soit a l'affinité de rapport (-2), de base $\mathcal{P}$ et de direction $\vec{D}$.

$a(M) = M'-2\overrightarrow{M'M}$

$a(M) = 3M'-2M$

Posons $P(M)=M'$

La projection de M sur $\mathcal{P}$ de direction $\vec{D}$.

Déterminons l'expression analytique de la projection de base $\mathcal{P}$ et de direction $\vec{D}$.

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur directeur de D.

Alors $\vec{D} = <\vec{v}>$

Soient $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$P(M)=M' \Rightarrow \begin{cases} M' \in \mathcal{P} \\ \exists \alpha \in \mathbb{R} / \overrightarrow{MM'} = \alpha\vec{v} \end{cases}$

On a : $\overrightarrow{MM'} = \alpha\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x=\alpha \\ y'-y=-\alpha \\ z'-z=\alpha \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+\alpha \\ y'=y-\alpha \\ z'=z+\alpha \end{cases}$

Déterminons α

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow x+y-z-1=0$

$M' \in \mathcal{P} \Leftrightarrow x'+y'-z'-1=0$

$\Rightarrow \alpha = x+y-z-1$

Alors

$\begin{cases} x'=2x+y-z-1 \\ y'=-y+z+1 \\ z'=x+y-1 \end{cases}$ est l'expression analytique de la projection sur $\mathcal{P}$ de direction $\vec{D}$.

Posons $a(M)=M''$

Alors $a(M)=M''=3P(M)-2M \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x''=4x+3y-3z-3 \\ y''=3z-5y+3 \\ z''=3x+3y-3-2z \end{cases}$ est l'expression analytique de l'affinité de base $\mathcal{P}$ de rapport (-2) et de direction $\vec{D}$.

Scanné avec CamScanner

Correction de Géométrie 1

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de ses structures euclidiennes et affines et de son repère cartésien canonique. $\mathcal{R} = (0, e_1, e_2, e_3)$, on considère la droite affine $\mathcal{D}$ d'équation $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y-z-2=0$

1) Déterminons la position relative de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \begin{cases} x+y+1=0 \\ x-z+1=0 \\ x+y-z-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ z=x+1 \\ x+y-z-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ z=x+1 \\ x+(-x-1)-(x+1)-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ z=x+1 \\ -x-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ z=x+1 \\ x=-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ z=-3 \\ x=-4 \end{cases}$$

D'où $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = I(-4,3,-3)$

Donc $\mathcal{D}$ coupe le plan au point $I(-4,3,-3)$

1. Déterminons l'expression analytique de :

On a : $\mathcal{D} = \begin{cases} x+y+1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$

$$\mathcal{D} = \begin{cases} y=-x-1 \\ z=x+1 \\ x=x \end{cases}$$

Posons $t = x$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D} = \begin{cases} y=-t-1 \\ z=t+1 \\ x=t \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{D} = A + \vec{D}$$

Avec $A = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si M' est symétrie orthogonale de M par rapport à la droite $\mathcal{D}$ alors :

$$S(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ \overrightarrow{MM'}.\vec{D} = 0 \\ ii)\ \frac{1}{2}(M+M') \in D \end{cases}$$

Posons $I = \frac{1}{2}(M+M')$ et $A \in D$.

D'où $I \in D, \overrightarrow{AI} = \lambda \vec{D}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x'+x) \\ \frac{1}{2}(y+y')+1 \\ \frac{1}{2}(z+z')-1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'+x = 2\lambda \\ y+y'+2 = -2\lambda \\ z+z'-2 = 2\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2\lambda - x \\ y' = -2\lambda - y - 2 \ (E_1) \\ z' = 2\lambda - z + 2 \end{cases}$$

$i)\ \overrightarrow{MM'}.\vec{D} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x' - x - y' + y + z' - z = 0 \ (E_2)$

En remplaçant (E_1) dans (E_2) on a :

$2\lambda - x - x + 2\lambda + y + 2 + y + 2\lambda - z + 2 - z = 0$

$\Leftrightarrow 6\lambda - 2x + 2y - 2z + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 3\lambda - x + y - z + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 3\lambda = x - y + z - 2$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}(x - y + z - 2)$

En remplaçant λ dans (E_1) on a :

$$\Leftrightarrow S(M) = \begin{cases} x' = \frac{2}{3}(x-y+z-2) - x \\ y' = \frac{-2}{3}(x-y+z-2) - y - 2 \\ z' = \frac{2}{3}(x-y+z-2) - z + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow S(M) = \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x-2y+2z-4) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x+5y-2z-2) \\ z' = \frac{1}{3}(2x-2y-z+4) \end{cases}$$

b) l'affinité de base $\mathcal{P}$, de rapport (-3) de direction la droite vectorielle $\vec{D}$ associé à $\mathcal{D}$.

Soit $P(M)$ la projection associée à l'affinité $a(M)$ et λ le rapport de l'affinité.

On a : $a(M) = p(M) + \lambda\overrightarrow{p(M)M}$

VALIDEUR LIMD

Scanné avec CamScanner

$$a(M) = p(M) - \lambda\big(M - p(M)\big)$$

$$a(M) = p(M) + (1-\lambda)p(M)$$

- Déterminons $p(M)$

$$p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ M' \in \mathcal{P} \\ ii)\overrightarrow{MM'} = \lambda\vec{D} \end{cases}$$

On a : $\mathcal{P} = x + y - z - 2 = 0\ (E_1)$ et $D = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{D} = A + \vec{D}$$

$$i)\ M' \in \mathcal{P} \Leftrightarrow x' + y' - z' - 2 = 0$$

$$ii)\overrightarrow{MM'} = \lambda\vec{D} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = \lambda \\ y'-y = -\lambda \\ z'-z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \lambda + x \\ y' = -\lambda + y\ (E_2) \\ z' = \lambda + z \end{cases}$$

En remplaçant (E_2) dans (E_1) on a :

$$\lambda + x - \lambda + y - \lambda - z - 2 = 0$$

$$-\lambda + x + y - z - 2 = 0$$

$$\lambda = x + y - z - 2$$

En remplaçant λ dans (E_1)

On a : $p(M) = M' = \begin{cases} x' = x + y - z - 2 + x \\ y' = -(x + y - z - 2) + y\ (E_2) \\ z' = x + y - z - 2 + z \end{cases}$

$$p(M) = \begin{cases} x' = 2x + y - z - 2 \\ y' = -x + z + 2\ (E_2) \\ z' = x + y - 2 \end{cases}$$

Comme $a(M) = \lambda M + (1-\lambda)p(M)$

$$a(M) = \begin{cases} x'' = -3x + 4x' \\ y'' = -3y + 4y' \\ z'' = -3z + 4z' \end{cases}$$

$$a(M) = \begin{cases} x'' = -3x + 8x + 4y - 4z - 8 \\ y'' = -3y - 4x + 4z + 8 \\ z'' = -3z + 4x + 4y - 8 \end{cases}$$

VALEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$a(M) = \begin{cases} x'' = 5x + 4y - 4z - 8 \\ y'' = -4x - 3y + 4z + 8 \\ z'' = 4x + 4y - 3z - 8 \end{cases}$$

Exercice 2

$M(t) = (x(t); y(t)) = (-cost\,; sin2t)$

$$M(t) = \begin{cases} x(t) = -cost \\ y(t) = sin2t \end{cases}$$

Soit $f(t) = (x(t); y(t))$

Ensemble de définition

$D_f = \mathbb{R}$

Domaine de définition

$\forall t \in D_f, t + 2\pi \in D_f$ et $f(t + 2\pi) = f(t)$. D'où f est périodique de période 2π. On prend l'intervalle $D_1 = [-\pi; \pi]$ et obtient toutes les courbes par une rotation de centre O et d'angle π. $\forall t \in [0, \pi], -t \in [-\pi, 0]$ et $f(-t) = \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$

Nous allons restreindre le domaine à $D_2 = [0, \pi]$ et obtenir la courbe r_1 par symétrie d'axe O_x, $r_1 = S_{O_X}(M) \cup r_2$

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \pi - t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et $f(\pi - t) = (cost, -sin2t)$ soit $f(\pi - t) = -f(t)$.

D'où nous avons une symétrie centrale.

On se restreint à $D_3 = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et on complète à $[0; \pi]$ par symétrie centrale.

Variation

$$f'(t) = \begin{cases} x'(t) = sint \\ y'(t) = 2cos2t \end{cases}$$

$x'(t) = 0 \Leftrightarrow sint = 0$

$\Leftrightarrow t = 0$ ou $t = \pi$

$y'(t) = 0 \Leftrightarrow 2cos2t = 0$

$\Leftrightarrow cos2t = 0$

$\Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{2}$

Scanné avec CamScanner

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$

Tableau de variation

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$+$		$+$	
$x(t)$	-1	↗	$-0,707$	↗	0
$y(t)$	0	↗	1	↘	0
$y'(t)$		$+$		$-$	
$M.I.C.I$	$A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$		$B\begin{pmatrix}-0,707\\1\end{pmatrix}$		$C\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Pas de boucle infinie

Pas de points stationnaires

Tangente

En $0, \vec{d} = 2\vec{j} \equiv \vec{j}$

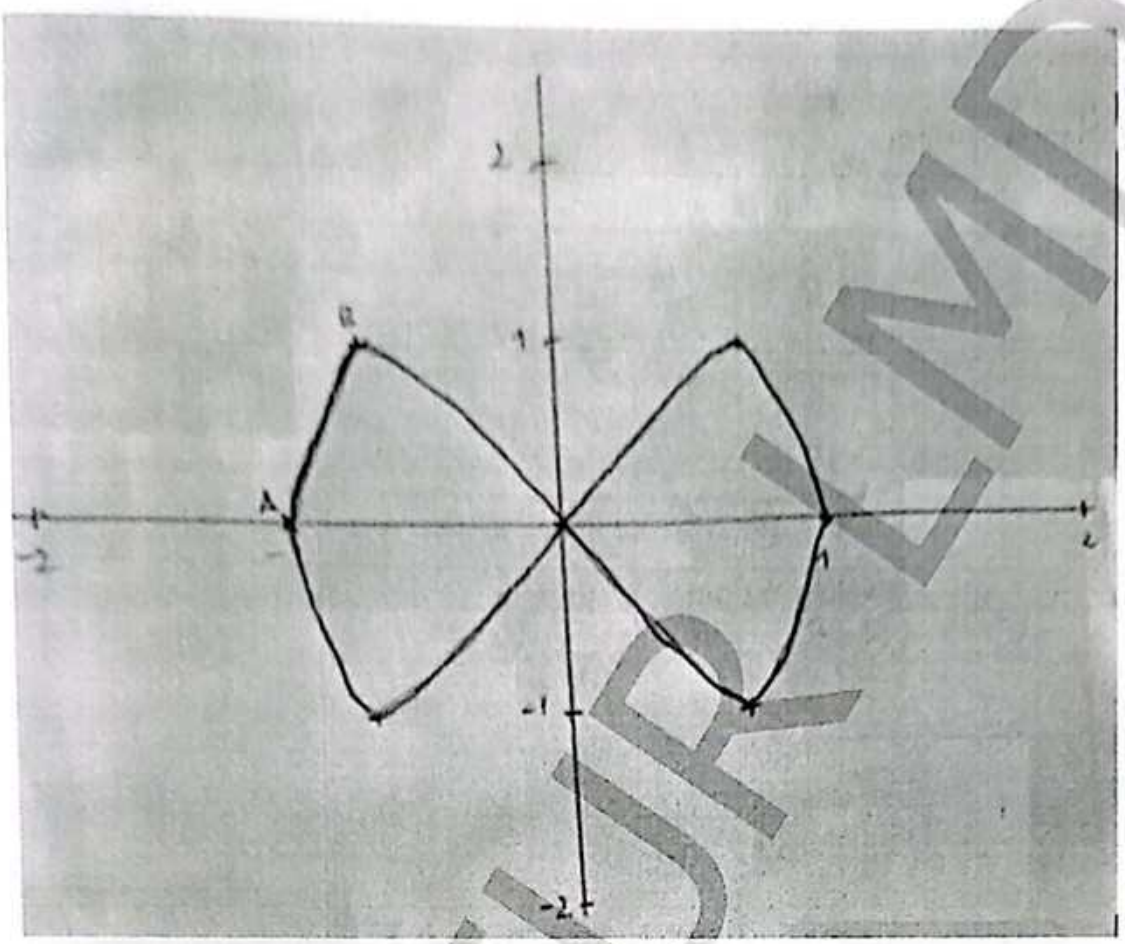
En $\frac{\pi}{4}, \vec{d} = -0,7\vec{i} \equiv -\vec{i}$

En $\frac{\pi}{2}, \vec{d} = \vec{i} - 2\vec{j}$

Construction de la courbe

VALIDE UR LMD

Scanné avec CamScanner



Exercice 3

$r = 1 - \sin(2\theta) = f(\theta)$

Ensemble de définition

$D_f = \mathbb{R}$

Domaine de définition

$f(\pi + \theta) = f(t)$. f est périodique de période π. Nous allons restreindre au domaine à

$D_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Plus de réduction possible.

Variation

$f'(\theta) = -2\cos(2\theta)$

$f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2cos2\theta = 0$

$\Leftrightarrow cos2\theta = 0$

$\Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$

VALIDE UR LMD

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

Tableau de variation

θ	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$	-		0	+	
$f(\theta)$	1	↘	0	↗	1
M.I.C.I	$r\begin{pmatrix}-\frac{\pi}{2}\\1\end{pmatrix}$		$B\begin{pmatrix}\frac{\pi}{4}\\0\end{pmatrix}$		$C\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\1\end{pmatrix}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université F.H.B
UFR MI

Année 2015 – 2016

LICENCE 2 : MATHEMATIQUES

Géométrie 2 : Examen semestre 2 Durée : 03 h

EXERCICE 1

L'espace affine ($\mathcal{E}$, E) est muni du repère cartésien (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) ; on considère l'endomorphisme affine f de $\mathcal{E}$ qui au point M = (x , y , z) de $\mathcal{E}$ associe le point

M'= (5x – y + 2z – 5, - 6x + 4y – 4z + 5, - 9x + 3y – 4z +10)

1° Montrer que f est une affinité de $\mathcal{E}$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

2° Donner les images directes par f de la droite $\mathcal{D}$ d'équations 3x + z – 5 = 0 et 5x – 2y + 3z - 5 = 0 , du plan $\mathcal{P}$ d'équation 3x – y + 2z + 1 = 0.

EXERCICE 2

L'espace affine euclidien orienté ($\mathcal{E}$, E) est muni du repère orthonormal direct

(O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) ; on considère les endomorphismes affines f_1 et f_2 de $\mathcal{E}$ tels que pour tout point M = (x , y , z) , on a :

$f_1(M) = (\frac{1}{3}(x - 2y - 2z - 2) , \frac{1}{3}(- 2x + y - 2z - 2) , \frac{1}{3}(- 2x - 2y + z - 2))$

$f_2(M) = (\frac{1}{3}(- x + 2y + 2z) , \frac{1}{3}(2x - y + 2z) , \frac{1}{3}(2x + 2y - z))$

1° Donner l'expression analytique de la composée f = f_2 o f_1.

2° Montrer que f est une isométrie affine de $\mathcal{E}$ dont on précisera les caractéristiques géométriques.

EXERCICE 3

On reprend le référentiel de l'Exercice 2 précédent.

En utilisant la réduction orthogonale, obtenir l'équation réduite et étudier la nature de la quadrique $\mathcal{S}$ d'équation :

$$xy + yz + zx + x + 2y - 4z - 2 = 0$$

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

Université Félix Houphouët Boigny
de Cocody Abidjan
UFR - MI

Année Académique 2016-201

LICENCE 2 : MATHEMATIQUES

Géométrie 2, Examen annuel : 1ere session 2017, Durée : 03 h

Exercice 1

L'espace affine $(\mathcal{E}, E)$ de dimension 3 est muni du repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1- Montrer que l'endomorphisme affine p de $\mathcal{E}$ qui au point $M(x, y, z)$ associe le point

$M'\left(\frac{1}{4}(7x + 3y - 2z - 10), \frac{1}{4}(-3x + y + 2z + 10), \frac{1}{4}(6x + 6y - 20)\right)$

est une projection de $\mathcal{E}$ dont on précisera les caractéristiques géométriques.

2- Déterminer les images directes par p de la droite affine $\mathcal{D}_1$ d'équations

$x - 2y - 3 = 0$ et $3x + z - 1 = 0$ et du plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $y + z + 2 = 0$.

3- Soit f l'affinité de rapport 5 dont la projection associée est p ; donner l'expression analytique de f.

Exercice 2

On considère l'espace affine euclidien orienté de dimension 3 muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit l'endomorphisme affine f de $\mathcal{E}$ qui au point $M(x, y, z)$ associe le point

$M'\left(\frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 1), \frac{1}{3}(-2x + y - 2z - 5), \frac{1}{3}(-2x - 2y + z - 4)\right)$.

Montrer que f est une isométrie de $\mathcal{E}$ dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 3

L'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ de dimension 3 est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. En utilisant la réduction orthogonale, déterminer la nature de la quadrique $\mathcal{Q}$ d'équation :

$$3x^2 - y^2 - z^2 + 4yz + y - 2z - 4 = 0.$$

Scanné avec CamScanner

Université Felix Houphouët Boigny **Année Académique : 2017-2018**
UFR MI

LICENCE 2 MATHEMATIQUES
Géométrie 2, Examen annuel session 1, durée 03 h

L'épreuve se compose de 3 exercices ayant pour référentiel commun l'espace affine euclidien (Ɛ, E) muni du repère orthonormé direct $(O\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 1

On considère l'endomorphisme affine p de $\mathcal{E}$ qui à un point M(x, y, z) associe le point

$M'\left(\frac{1}{2}(x-y-2z-1), \frac{1}{2}(x+3y+2z+1), \frac{1}{2}(-x-y-1)\right)$

1° Montrer que p est une projection de $\mathcal{E}$ dont on précisera la base et la direction.

2° Déterminer les images directes par p, de la droite affine $\mathcal{D}$ d'équations $x+y=0$ et $2x-z+1=0$ et du plan affine $\mathcal{P}$ d'équation $x-y-z-1=0$.

Exercice 2

On considère les endomorphismes affines f, g et gof de $\mathcal{E}$ qui au point M(x, y ,z) de $\mathcal{E}$ associent :

$f(M) = \left(\frac{1}{3}(-x+2y+2z-4), \frac{1}{3}(2x-y+2z+2), \frac{1}{3}(2x+2y-z+2)\right)$

$g(M) = \left(\frac{1}{3}(x-2y-2z-2), \frac{1}{3}(-2x+y-2z-2), \frac{1}{3}(-2x-2y+z-2)\right)$

Montrer que f, g et gof sont des isométries de $\mathcal{E}$ dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Exercice 3

Soit la quadrique S d'équation : $2xy+2yz+2zx-5x-1=0$.

En utilisant la réduction orthogonale, donner l'équation réduite de la quadrique S et en déduire sa nature .

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR MI

Année Académique 2017-2018

LICENCE 2 MATHEMATIQUES

GEOMETRIE 2, Examen 2ème session, Durée 02 h

Le sujet se compose de deux exercices sans aucun lien entre eux et ces deux peuvent être abordés dans un ordre arbitraire.

Exercice 1

On considère l'espace affine $(\mathcal{E}, E)$ muni du repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, s l'endomorphisme affine de $\mathcal{E}$ qui à un point M (x , y , z) de $\mathcal{E}$ associe le point

$$M'(-y-2z-1 \ , \ x+2y+2z+1 \ , \ -x-y-z-1)$$

1°) Montrer que s est une symétrie de $\mathcal{E}$ dont on précisera la base et la direction.

2°) Donner la projection p de $\mathcal{E}$ associée à s, puis l'affinité f de $\mathcal{E}$ de rapport 4 et de projection associée p.

3°) Donner les images directes par s :

De la droite $\mathcal{D}$ d'équations : $2x + 3y - z - 1 = 0$ et $x + 2y + 3z + 2 = 0$.

Du plan $\mathcal{P}$ d'équation : $2x + 3y - 2z + 6 = 0$.

Exercice 2

On considère l'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ muni du repère $(O, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de E , les endomorphismes affines f et g de $\mathcal{E}$ qui au point M(x , y , z) de $\mathcal{E}$ associent les points

$f(M) = (z+1 \ , \ y \ , \ x-1)$ et

$$g(M) = \left(\frac{1}{3}(x-2y-2z-2) \ , \ \frac{1}{3}(-2x+y-2z-2) \ , \ \frac{1}{3}(-2x-2y+z-2)\right).$$

Montrer que les endomorphismes f, g et g o f de $\mathcal{E}$ sont des isométries de $\mathcal{E}$ dont on précisera les caractéristiques géométriques.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny Année universitaire 2018-2019

UFRF MI

LICENCE 2 MATHEMATIQUES

Géométrie de l'ESPACE, Examen annuel, 1ère session, durée : 02 h.

L'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ orienté, muni du repère $(O, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{E}$, est le repère commun à tous les exercices qu'on peut, néanmoins, aborder dans un ordre arbitraire.

Exercice 1

Cet exercice n'utilise que la structure affine de $\mathcal{E}$.

On considère l'endomorphisme affine f de $\mathcal{E}$ qui, à un point M(x, y, z) de $\mathcal{E}$, associe le point

$$M'(-6x - 3y + 2z - 14,\ 3x - 2z + 6\ ,\ -6x - 6y + z - 12)$$

1° Montrer que f est une affinité de $\mathcal{E}$ dont on précisera la projection associée p et le rapport.

2° Donner la base et la direction de p.

3° Donner l'image directe par p de la droite $\mathcal{D}_o$ d'équations $x - y + 1 = 0$ et $2y + z = 0$, puis celle du plan $\mathcal{P}_o$ d'équation $x + y - \frac{2}{3}z + 2 = 0$.

Exercice 2

Montrer que l'endomorphisme affine f de $\mathcal{E}$ qui au point M (x, y, z) de $\mathcal{E}$ associe le point

$$M'\left(\frac{1}{3}(x + 2y - 2z + 6)\ ,\ \frac{1}{3}(2x + y + 2z + 3),\ \frac{1}{3}(-2x + 2y + z + 3)\right)$$

est une isométrie de $\mathcal{E}$ dont on précisera la nature et les caractéristiques géométriques.

Exercice 3

Soit la quadrique $\mathcal{S}$ d'équation

(e) : $x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy - 8yz - 4zx + 27x + 9y + 9z + \frac{9}{4} = 0$

En utilisant une réduction orthogonale, réduire la quadrique $\mathcal{S}$ et déterminer sa nature.

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

Université FHB Cocody UFRMI L2 2019- 2020

EXAMEN DE GEOMETRIE 2 (ou GEOMETRIE DANS L'ESPACE) : Durée 2 h

EXERCICE 1

L'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère l'endomorphisme affine f de $\mathcal{E}$ qui à $M(x, y, z)$ associe $M'(x', y', z')$ tel que : $f(M) = (y + 1, x + 1, z)$.

Montrer f est une isométrie de $\mathcal{E}$ dont on précisera les caractéristiques géométriques.

EXERCICE 2

L'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit la quadrique d'équation : (E) $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + x = 0$

Déterminer l'équation réduite de cette quadrique et préciser sa nature.

VALIDEURLMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFRMI L2 2020-2021

EXAMEN DE GEOMETRIE 2(ou GEOMETRIE DE L'ESPACE)

Durée: 2H

EXERCICE 1

L'espace affine euclidien (ε, E) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère l'endomorphisme affine f de ε qui à $M(x, y, z)$ associe $M'(x', y', z')$ tel que : $F(M) = M'(y, x, z+1)$.

Montrer f est une isométrie de ε dont on précisera la nature et les caractéristiques géométriques.

EXERCICE 2

L'espace affine euclidien (ε, E) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit la quadrique d'équation: $(E) : x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - x - z = 0$

Déterminer l'équation réduite de cette quadrique et préciser sa nature.

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFRMI
L2 2020-2021
Session 2 Septembre 2021

EXAMEN DE GEOMETRIE 2(ou GEOMETRIE DE L'ESPACE)
Durée: 2H

VALIDE UFR MI

EXERCICE 1

L'espace affine euclidien (ε, E) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère l'endomorphisme affine f de ε qui à $M(x, y, z)$ associe $M'(x', y', z')$ tel que : $F(M) = M'(y + 1, x, z + 1)$.

Montrer f est une isométrie de ε dont on précisera la nature et les caractéristiques géométriques.

EXERCICE 2

L'espace affine euclidien (ε, E) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit la quadrique d'équation: $(E) : x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + x = 0$

Déterminer une équation réduite de cette quadrique et préciser sa nature.

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE GEOMETRIE 2 S1 2016 - 2017

EXERCICE 1

$M'(\frac{1}{4}(7x+3y-2z-10), \frac{1}{4}(-3x+y+2z+10), \frac{1}{4}(6x+6y-20))$

1) Montrons que l'endomorphine affine P de ϵ est une projection de ϵ dont on precisera les caracteriques geometriques

$$P : \begin{cases} x' = \frac{1}{4}(7x+3y-2z-10) \\ y' = \frac{1}{4}(-3x+y+2z+10) \\ z' = \frac{1}{4}(6x+6y-20) \end{cases}$$

Soit $L(P)$ l'application linéaire de P ; P est une projection si et seulement si

$$\begin{cases} L(P) \circ L(P) = L(P) \\ Inv(P) \neq \phi \end{cases}$$

$$L(P) : \begin{cases} x' = \frac{1}{4}(7x-3y-2z) \\ y' = \frac{1}{4}(-3x+y+2z) \\ z' = \frac{1}{4}(6x+6y) \end{cases}$$

Soit A la matrice associée à $L(P)$

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L(P) \circ L(P) \Leftrightarrow A.A = (\tfrac{1}{4})^2 \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A.A = (\tfrac{1}{4})^2 \begin{pmatrix} 28 & 12 & -8 \\ -12 & 4 & 8 \\ 24 & 24 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $L(P) \circ L(P) = L(P)$

Determinons $inv(P)$

$M \in inv(P) \Leftrightarrow M = M'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4}(7x+3y-2z-10) \\ y = \frac{1}{4}(-3x+y+2z+10) \\ z = \frac{1}{4}(6x+6y-20) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3y-2z-10=0 \\ -3x-3y+2z+10=0 \\ 6x+6y-4z-20=0 \end{cases}$$

Les trois équations sont proportionnels deux à deux, donc le système est équivaut à une équation $3x+3y-2z-10=0$. D'où $inv(P)$ est le plan affine P_0 d'équation : $3x+3y-2z-10=0$. Donc P est une Projection

VALIDER LMD

Scanné avec CamScanner

La caracteristique (base et direction)

- La base de P est le plan P_0
- La direction est $ker(P)$

$$ker(P) = \left\{ X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | L(P)X = 0 \right\}$$

$$ker(P) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}(7x - 3y - 2z) = 0 \\ \frac{1}{4}(-3x + y + 2z) = 0 \\ \frac{1}{4}(6x + 6y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -x \\ z = 2x \end{cases}$$

Donc $(x, y, z) = x(1, -1, 2)$

$ker(P) = vect(1, -1, 2)$, la direction est la droite vectorielle $\mathbb{R}(1, -1, 2)$ 2)

2)Les images directes par P de la droite D_1

$$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 3x + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 3 \\ y = \frac{1}{2}(x - 3) \\ z = 1 - 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \\ z = 1 - 3x \end{cases} \text{ on obtient } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{3}{2} + \frac{x}{2} \\ 1 - 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ \frac{x}{2} \\ -3x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

Les images de D_1 est la droite passante par le point $A(0, -\frac{3}{2}, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$

$D = A + \mathbb{R}\vec{d}$

Posons $D' = P(D) = P(A) + \mathbb{R}(L(P)).\vec{d}$

$$P(A) = \begin{pmatrix} -\frac{33}{8} \\ \frac{21}{8} \\ -\frac{29}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\frac{33}{2} \\ \frac{21}{2} \\ -29 \end{pmatrix}$$

VALIDE MD

Scanné avec CamScanner

$$L(P)\overrightarrow{d} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{8} \\ -\frac{17}{8} \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix}$$

$$P(D) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\frac{33}{2} \\ \frac{21}{2} \\ -29 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \frac{29}{8} \\ -\frac{17}{8} \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix}$$

Image du plan P_1

$y + z + 2 = 0$

$$\begin{cases} y = -z - 2 \\ z = -y - 2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z - 2 \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z - 2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_1 = B + \mathbb{R}d_1\,;\ B\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix};\ d_1\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Posons $\mathcal{P}_1 = P(\mathcal{P}_1) = P(B) + \mathbb{R}L(P)d$

$$\mathcal{P}(B) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix};\ L(P)d = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

d'où $\mathcal{P}'$ est une droite

$$\mathcal{P}_1{}' = P(\mathcal{P}_1) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2

$$f : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 1) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z - 5) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z - 4) \end{cases}$$

Montrons que f est une isométrie

$$L(f) : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z) \end{cases}$$

Soit A la matrice associée à $L(f)$

VALERY MID

Scanné avec CamScanner

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons $A_0{}^tA$

$$A_0{}^tA = (\tfrac{1}{3})^2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_0{}^tA = \tfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_0{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \text{ donc } f \text{ est isometrie}$$

$$det(A) = \tfrac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{3}(-3) = -1$$

donc f est antideplacement

determinons $inv(P)$

$$M \in inv(P) \Leftrightarrow f(M) = M$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 1) \\ y = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z - 5) \\ z = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z - 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(-2y - 2z + 1) \\ y = \frac{1}{3}(-2x - 2z - 5) \\ z = \frac{1}{3}(-2x - 2y - 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z + \frac{1}{2} \\ y = -x - z - \frac{5}{2} \\ z = -x - y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = x + 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{5} \Rightarrow Impossible \\ y = x - 1 \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$inv(f) = \phi$ d'où f est la composée de translation et de reflexion S

EXERCICE 3

$3x^2 - y^2 - z^2 + 4yz + y - 2z - 4 = 0$

Soit A la matrice associée à la quatrice φ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$det(A) = -9 \neq 0$

VALIDUR LMD

Scanné avec CamScanner

$rang(A) = 3$ donc φ admet un centre de symetrie unique

$$\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta x} = 6x = 0 \\ \frac{\delta f}{\delta y} = -2y + 4z + 1 = 0 \\ \frac{\delta f}{\delta z} = -2z + 4y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -2y = -4z - 1 \\ y = 2z - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{6} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$r(0, \frac{5}{6}, \frac{3}{2})$; $f(r) = \frac{3}{4}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & 0 \\ 0 & -1-X & 2 \\ 0 & 2 & -1-X \end{vmatrix} = (3-X)((-1-X)(-1-X)-4)$$

$$P_A(X) = (3-X)((-1-X)^2-4) = (3-X)(-1-X-2)(-1-X+2)$$

$$P_A(X) = (3-X)(-X-3)(-X+1)$$

$$Sp(A) = \{3, -3, 1\}$$

$$E_3 = \left\{ X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | (A-3I)X = 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4y + 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \\ z = z \end{cases}$$

$$E_3 = < \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

E_{-3}

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ z = z \end{cases}$$

$$E_{-3} = < \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

$$E_1 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

VALIDE PAR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ z = z \end{cases}$$

$$E_1 = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

determinons une base orthonormé des sous-espaces p
Soit $\beta_1(V_1, V_2, V_3)$ zune base orthogonale directe telle que $det(V_1, V_2, V_3) = 1$

$$V_1 = \frac{E_{-3}}{\|E_{-3}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_{-3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \frac{E_1}{\|E_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \frac{E_3}{\|E_3\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de passage de β à β_1

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

φ devient

$-3x^2 + y^2 + 3z^2 + \frac{3}{4} = 0$

$\Rightarrow -4x^2 + \frac{4}{3}y^2 + 4z^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{3}{4}} - \frac{z^2}{\frac{1}{4}} + 1 = 0$

$\Rightarrow -\frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{z^2}{(\frac{1}{2})^2} - 1 = 0$

Posons $Z^2 = x^2$

$X^2 = z^2$

$\Rightarrow -\frac{Z^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{Y^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{X^2}{(\frac{1}{2})^2} - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{X^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{Y^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} - \frac{Z^2}{(\frac{1}{2})^2} - 1 = 0$

La matrice de cette quatrique est une hyperboloïde à une nappe.

VALIDER MD

Scanné avec CamScanner

GEOMETRIE 2 DEUXIEME SESSION 2017-20

EXERCICE 1

1-

s est une symétrie ssi $(L(s))^2 = Id_E$ et $Inv(s) \neq \emptyset$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inv(s) est le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+2z+1=0$.

La base est $\mathcal{P}$.

La direction est $\{v \in E; L(s)(v) = -v\}$=$\mathbb{R}(1,-1,1)$

2-

$\mathcal{P}$ tel que $\mathcal{P}(M) = \frac{1}{2}(M + s(M))$ d'où $\mathcal{P}$: $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x-y-2z-1) \\ y' = \frac{1}{2}(x+3y+2z+1) \\ z' = \frac{1}{2}(-x-y-1) \end{cases}$

f tel que $f(M) = 4M - 3p(M)$ d'ou f : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(5x+3y+6z+3) \\ y' = \frac{1}{2}(-3x-y-6z-3) \\ z' = \frac{1}{2}(3x+3y+8z+3) \end{cases}$

3-

$$\mathcal{D}=\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ 0 \\ -\frac{5}{7} \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}'=s(\mathcal{D})=\begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ x+\frac{3}{2}y+3 \end{pmatrix}; (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}=\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2

$P = matL(f)$, $P^tP=I_3 \Rightarrow f$ est une isométrie.

det(P)= $-1 \Rightarrow f$ est un antidéplacement.

Inv(f) est le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $x - z - 1 = 0$.

Alors f est une Réflexion du plan $\mathcal{P}$.

Q=$matL(g)$, $Q^tQ = I_3 \Rightarrow$ g est une isométrie.

$det(Q) = -1 \Rightarrow$ g est un antidéplacement.

Inv(g) est le plan $\mathcal{P}'$: d'équation $x+y+z+1=0$.

g est une Réflexion de $\mathcal{P}'$

Scanné avec CamScanner

$gof : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z + 1) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z - 2) \\ z' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 5) \end{cases}$

gof est une isométrie

gof est un déplacement.

Inv(gof) est la droite $\mathcal{D}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors gof est la rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ.

Angle θ ?

Considérons le plan vectoriel $\Pi = (\overrightarrow{d})^{\perp}$, avec $d = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

posons $\varphi = gof$.

$\overrightarrow{v} \in \Pi \backslash \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, arbitraire.

$\varphi(v) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -\overrightarrow{v}$.

Alors on a : $\theta = \pi$.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Proposition de correction Géométrie dans l'espace : 2019-2020

Exercice 1

$$f:\begin{cases}x'=y+1\\y'=x+1\\z'=z\end{cases}$$

Montrons que f est une isométrie de $\mathcal{E}$ dont on précisera les caractéristiques géométriques.

$$L(f)=\begin{cases}x'=y\\y'=x\\z'=z\end{cases}$$

Soit A la matrice associée à $L(f)$ telle que :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Calculons $A\times({}^tA)$

On a :

$$A\times({}^tA)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$A\times({}^tA)=I_3$ donc f est une isométrie

$$det(A)=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=-1$$

Donc f est un antidéplacement.

Déterminons $inv(f)$

$M\in inv(f)\Leftrightarrow f(M)=M$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y+1=x\\x+1=y\\z=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y-x+1=0\\x-y+1=0\\z=z\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+1+1=x\\y=x+1\\z=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=0\ impossible\\z=z\end{cases}$$

Donc $inv(f)=\emptyset$

D'où f est la composée de translation t et de réflexion S.

Alors $f=t_{\vec{u}}os$, où $\vec{u}$ est le vecteur de translation.

Déterminons $\vec{u}$

$f^2=fof=(t_{\vec{u}}os)o(t_{\vec{u}}os)$

$=(t_{\vec{u}}os)o(sot_{\vec{u}})$

$=t_{\vec{u}}o(sos)ot_{\vec{u}}$

$=t_{\vec{u}}o(Id_\epsilon)ot_{\vec{u}}$ car $sos=Id_\epsilon$

$=t_{\vec{u}}ot_{\vec{u}}=t_{2\vec{u}}$

Ainsi 0 étant l'origine du repère

$0f^2(0)=2\vec{u}$

Or $f(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ car $O\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow f^2(0)=f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow 2\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Donc, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Déterminons une équation de $\mathcal{P}$.

$M\in\mathcal{P}\Leftrightarrow M\overrightarrow{f(M)}=M\overrightarrow{t_{\vec{u}}(M)}=\vec{u}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\\z'-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x'-x=1\\y'-y=1\\z'-z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y+1-x=1\\x+1-y=1\\z-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y-x=0\ (1)\\x-y=0\ (2)\\z=z\ (3)\end{cases}$$

Les équations (1) et (2) sont proportionnelle d'où

$$\begin{cases}x-y=0\\z=z\end{cases}$$

Donc, $\mathcal{P}$ est le plan d'équation :

$$\begin{cases}x-y=0\\z\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Exercice 2

Soit y la quadratique d'équation :

$x^2+y^2-z^2-2xy+x=0$. Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{E}$

Posons $f(M)=x^2+y^2-z^2-2xy+x$

q la forme quadratique associée à f et φ la partie linéaire de f.

$q(M)=x^2+y^2-z^2-2xy+x$ et $\varphi(M)=x$

Prenons A la matrice associée à q telle que :

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&-1\end{vmatrix}$$

$$\det(A)=-\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=-(1-1)=0$$

D'où $rg(A)<3$

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

Alors y admet soit un centre vide, soit une droite affine ou un plan affine.

$$\text{On a : } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 1 = 0 \\ 2y - 2x = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \\ 1 = 0 \ \textit{impossible} \end{cases}$$

Donc, y n'a pas de centre.

Polynôme caractéristique de A $P_A(X)$.

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 0 \\ -1 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & -1-X \end{vmatrix}$$

$$P_A(X) = (-1-X)\begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ -1 & 1-X \end{vmatrix} = -(1+X)[(1-X)^2 - 1]$$

$$P_A(X) = -X(X+1)(X-2)$$

Alors $Sp(A) = \{0, -1, 2\}$

Sous espace propre

$$E_0 = \left\{ X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{E} / AX = 0_\mathcal{E} \right\}$$

$$AX = 0_\mathcal{E} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

D'où $E_0 = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$

$$E_{-1} = \{X \in \mathcal{E} / (A + I_3)X = 0_\mathcal{E}\}$$

$$(A + I_3)X = 0_\mathcal{E} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 0 \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D'où $E_{-1} = < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$

$$E_2 = \{X \in \mathcal{E} / (A - 2I_3)X = 0_\mathcal{E}\}$$

$$(A - 2I_3)X = 0_\mathcal{E} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \\ -3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

D'où $E_2 = < \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$

Déterminons une base orthonormée des sous-espaces propres.

Soit $\beta_1(V_1, V_2, V_3)$ une base orthogonale directe telle que $\det(V_1, V_2, V_3) = 1$

$$V_1 = \frac{E_0}{\|E_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \frac{E_{-1}}{\|E_{-1}\|} = E_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \frac{E_2}{\|E_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de passage β à β_1 où β est la base canonique de $\mathcal{E}$.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posons $X = PX'$ (Formule du changement de base.)

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ z = z' \end{cases}$$

Donc y *devient* :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 - z'^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' = 0$$

Après calcul on a :

$$\Leftrightarrow 2x'^2 - z'^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$$

Posons $X = x', Y = z'$ et $Z = y - x'$

Alors, on a : $2X^2 - Y^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}Z = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - Y^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}Z = 0$$

Donc, la quadratique y est une paraboloïde hyperbolique.

Scanné avec CamScanner

Université FHB
MATHS-INFO L2

Année 2020-2021

CORRECTION GEOMETRIE 2
Session 1

Exercice 1

On considère l'endomorphisme affine $f+\varepsilon$ qui à $M(x,y,z)$ associe $M(x',y',z')$ tel que :
$f(M) = M'(y,x,z+1)$
Montrons que f est une isométrie de ε dont on précisera la nature et les caractéristique géométriques.

Soit $\varphi = L(f)$ et $M = mat(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$${}^tM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; M{}^tM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M{}^tM = I_3$, donc f est isométrie.
$det(M) = -1$, donc f est antideplacement.
$Inv(f) = \{M(x,y,z) \backslash f(M) = M\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = x \\ z = z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - x = 0 \\ -1 = 0 \end{cases} \text{ absurde.}$$

Donc $Inv(f) = \emptyset$
Etant donné que f est un antidéplacement et que $Inv(f) = \emptyset$ donc f est la composée de translation et de réflexion.
$f = S \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S$ où S est une reflexion d'un plan $\mathcal{P}$ $\vec{u}$ appartient à la direction de $\mathcal{P}$.

Calculons $\vec{u}$
$f \circ f = (t_{\vec{u}} \circ S) \circ (S \circ t_{\vec{u}}) = t_{\vec{u}} \circ S \circ S \circ t_{\vec{u}}$ or $S \circ S = Id_\varepsilon$ où $f \circ f = t_{2\vec{u}}$
$f \circ f = t_{2\vec{u}} \Leftrightarrow \forall M \in \varepsilon f \circ f(M) = M + 2\vec{u}$
$\Leftrightarrow f[f(M)] = M + 2\vec{u}$
$\Leftrightarrow f[f(M)] - M = 2\vec{u}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{M f[f(M)]} = 2\vec{u}$

Pour $M = O$ origine du repère, on a: $\overrightarrow{O f[f(O)]} = 2\vec{u}$, $f(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

VALIDER

Scanné avec CamScanner

$$\overrightarrow{O\,f[f(O)]} = 2\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = 2\vec{u} \Leftrightarrow 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 2\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Déterminons l'équation du plan

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow S(M) = M \Leftrightarrow T_{\vec{u}}[S(M)] = T_{\vec{u}}(M)$
$\Rightarrow f(M) = M + \vec{u}$
$f(M) - M = \vec{u}$
$\overrightarrow{M\,f(M)} = \vec{u}$

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{M\,f(M)} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}y\\x\\z+1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-x=0 \\ x-y=0 \\ z+1-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x-y=0$$

D'où $\mathcal{P}$ d'équation $x - y = 0$

Exercice 2

Soit la quadratique d'équation:
$(E) : x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - x - z$
Déterminons l'équation réduite de cette quadratique et précisons sa nature.

* Equation réduite

$(E) : \overline{x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - x - z}$
$(E) : A + L + k$ Avec A la matrice de la partie quadratique, L la partie linéaire et k la constante.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} \text{ et } k = 0$$

On a $det(A) = 0$ d'où (E) n'a pas de centre de symétrie. Donc le nouveau repère sur $\mathcal{R}_1 = (O, \mathcal{B}_1)$ à $\mathcal{B}_1$ est une base orthonormale directe composée de vecteurs propres de A.

* Déterminons $\mathcal{B}_1$

$$P_A = \begin{vmatrix} 1\text{-x} & 1 & 0 \\ 1 & 2\text{-x} & -1 \\ 0 & -1 & 1\text{-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1+c_3 & & \\ 1\text{-x} & 1 & 0 \\ 0 & 2\text{-x} & -1 \\ 1\text{-x} & -1 & 1\text{-x} \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2\text{-x} & -1 \\ 1 & -1 & 1\text{-x} \end{vmatrix}$$

$$P_A = (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2\text{-x} & -1 \\ 1 & -2 & 1\text{-x} \end{vmatrix}_{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} = (1-x)\begin{vmatrix} 2\text{-x} & -1 \\ -2 & 1\text{-x} \end{vmatrix}$$

$P_A = (1-x)\left[(2-x)(1-x) - 2\right] = x(1-x)(x-3)$ D'où $Sp(A) = \{0, 1, 3\}$

Scanné avec CamScanner

Déterminer les vecteurs propres associés à chaque valeur propre.

$$U_0\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in Ker(A-0\times I_3) \Leftrightarrow [A-0\times I_3]U_0=0$$

$$\Leftrightarrow AU=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0\\ x+2y-z=0\\ -y+z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y\\ z=y\\ y=y\end{cases}$$

$Ker(A-0\times I_3)=\{(-y,y,y),\ y\in\mathbb{R}\}=\{y(-1,1,1),\ y\in\mathbb{R}\}$. D'où $U_0=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$U_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow AU_1=U_1$$

$$\begin{cases} x+y=x\\ x+2y-z=y\\ -y+z=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-x=0\\ x+2y-z-y=0\\ -y+z-z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0\\ x+y-z=0\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z\\ y=0\\ z=z\end{cases}$$

$Ker(A-I_3)=\{(z,0,z),\ z\in\mathbb{R}\}=\{z(1,0,1),\ z\in\mathbb{R}\}$. D'où $U_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$U_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow AU_3=3U_3$$

$$\begin{cases} x+y=3x\\ x+2y-z=3y\\ -y+z=3z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3x=0\\ x+2y-z-3y=0\\ -y+z-3z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y=0\\ x-y-z=0\\ -y-2z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}y\\ z=-\frac{1}{2}y\\ y=y\end{cases}$$

$Ker(A-I_3)=\{(\frac{1}{2}y,y,-\frac{1}{2}y),\ y\in\mathbb{R}\}=y(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})$. D'où $U_3=\begin{pmatrix}1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix}$

Déterminons $\mathcal{B}_1$

$$V_0=\frac{1}{||U_0||}U_0 \text{ avec } ||U_0||=\sqrt{3}$$

$$V_0=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$$

$$V_1=\frac{1}{||U_1||}U_1 \text{ avec } ||U_1||=\sqrt{2}$$

$$V_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$$

VALIDUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$V_3 = \frac{1}{\|U_3\|}U_3 \text{ avec } \|U_3\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$V_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}) \Rightarrow V_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$$

Dans l'ordre V_0 V_1 V_3 le déterminant est positif dans $\mathcal{B}_1 = (\vec{V_0}, \vec{V_1}, \vec{V_3})$ est une base orthonormale directe. D'où le nouveau repère $\mathcal{R}_1 = (O, \mathcal{B}_1)$

On a: $X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

Matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

On a: $X = P\,X_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}z_1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}z_1 \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}z_1 \end{cases}$

Dans le repère $\mathcal{R}_1$ l'équation de (E) devient:

$$(E) : 0x_1^2 + y_1^2 + 3z_1^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}z_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}z_1 = 0$$

$$(E) : y_1^2 + 3z_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1 = 0 \Leftrightarrow y_1^2$$

$$(E) : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z}{c} = 0$$

Donc (E) est l'équation d'une paraboloïde elliptique.

VALIDER LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITÉT DE COCODY
UFR SSMT

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2015-2016

LICENCE 2 SM, IG
ELECTROMAGNÉTISME
Durée 02H00
Session du 17 Décembre 2016

Questions (4 pts)
Répondre par Vrai ou par Faux

1. En tout point M appartement à un plan d'antisymétrie Q d'une distribution de courant, le potentiel vecteur est perpendiculaire au plan Q et le champ magnétique est contenu dans ce plan Q
2. Les champs magnétiques produits en deux points symétriques d'une distribution de courant possédant un plan de symétrie $\mathcal{P}$ sont symétriques.
3. Le vecteur surface associé à un contour orienté est indépendant de la surface s'appuyant sur ce contour.
4. Le vecteur moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ est l'analogue du vecteur moment dipolaire $\vec{p}$
5. Le théorème d'Ampère est au calcul de champ magnétostatique ce que le théorème de Gauss est au calcul de champ électrostatique.
6. Le théorème d'Ampère n'est valable que si le contour d'Ampère enlace des courants de la distribution.
7. Le théorème d'Ampère n'est valable que si le contour d'Ampère est fermé
8. Le théorème d'Ampère n'est valable que si le contour d'Ampère présente les symétries de la distribution de courant.

Exercice 1 (6 pts)
Dans un repère cylindrique (ρ, φ, z), on considère un solénoïde d'axe Oz (Figure 1) de rayon R, constitué de n spires par unité de longueur, parcourue par un courant d'intensité I, assimilable à une nappe cylindrique de courant surfacique de vecteur densité

$$\vec{J}_s = nI\vec{e}_\varphi$$

1. Etablir l'expression du champ mangétique $\vec{B}_{in}$ du solénoïde sur son axe Oz.

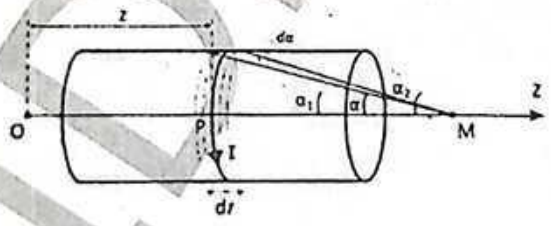


Figure 1:

2. Le champ magnétique étant uniforme, montrer que le potentiel vecteur créé par une telle distribution est pour $\rho \leqslant R$

$$\vec{A}_{in} = \frac{\mu_0 nI\rho}{2}\vec{e}_\varphi$$

3. L'inductance propre d'un circuit ayant une distribution surface est $L = \frac{1}{I^2}\int_{(S)} \vec{J}_s \cdot \vec{A}\, dS$, montrer que l'inductance propre par unité de longueur du solénoïde est

$$L/l = \mu_0 n^2 \pi R^2$$

4. Calculer L.
On donne $n = 1000$ spires par mètre, $l = 1m$, $R = 3cm$, $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} H/m$

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

Exercice 2 (10 pts)

L'espace est rapporté à un repère cartésien de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Soit le champ de pesenteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ (g une constante positive). Deux rails métalliques parallèles et distants de l, parfaitement conducteurs, sont reliés par une tige conductrice CD rectiligne, de resistance R. Ces conducteurs constituent un ensemble rigide immobile. Afin de fermer le circuit, une barre métallique, de masse m, parfaitement conductrice, est posée sur les rails orthogonalement à ceux-ci. Soient A et B les points de constact entre la barre et les rails. Cette barre peut effectuer un mouvement de translation sans frottement sur les rails (figure 2). L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}_o = B_o\vec{e}_z$, B_o est une constante positive. Le cadre ABCD est incliné d'un angle α constant par rapport au plan horizontal. Les rails sont parallèles à l'axe Dx' (orienté par le vecteur $\vec{e}_{x'}$) et la tige CD est maintenue parallèles à (Oy) (orienté par le vecteur $\vec{e}_y$). A l'instant $t = 0$, la barre est abandonnée sans vitesse initiale. Soit $\vec{v} = v\vec{e}_{x'}$, sa vitesse de translation au temps t.

1. La position de la barre est repérée par son abscisse $DA = x'$. Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, le flux Φ du champ magnétique à travers le cadre ABCD.
2. Exprimer, en fonction de R, v, B_o, l et α, l'intensité du courant induit i.
3. Quelles sont les forces qui s'exercent sur la barre.
4. Donner l'expression vectorielle de la résultante $\vec{F}$ des forces d'induction qui s'exercent sur la barre.
5. Etablir l'équation différentielle liant la vitesse algébrique v au temps t.
6. En déduire l'expression de $v(t)$

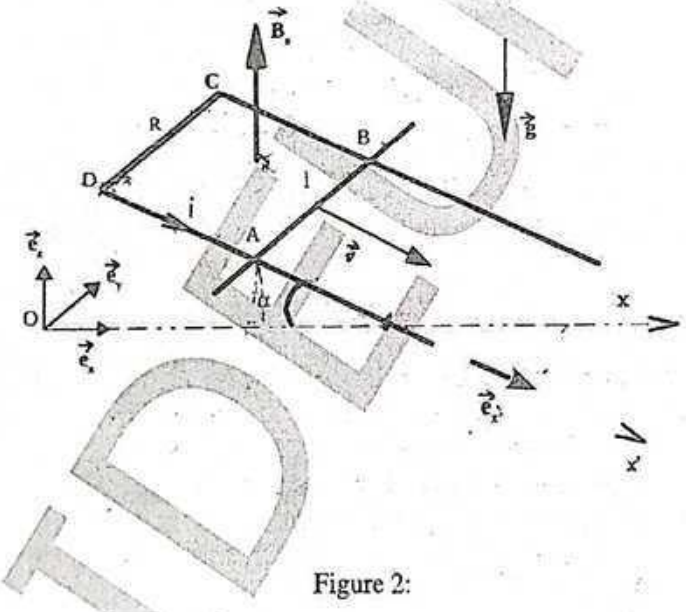


Figure 2:

VALIDE

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITÉ FHB COCODY
UFR SSMT

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2015-2016
SESSION DU 24 MARS 2017

LICENCE 2 SM & IG
EXAMEN D'ELECTROMAGNÉTISME
Durée : 2 heures

Questions (6 pts)

On considère le champ de vecteur $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ dans un repère cartésien.

1. Calculer $\vec{\nabla} \wedge \vec{r}$, le rotationnel de $\vec{r}$
2. Calculer $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{r}\right)$, la divergent du rotationnel de $\vec{r}$
3. Pourquoi dit on que le champ magnétique est non divergent?
4. Démontrer que quelque soit le champ magnétique $\vec{B}$, il existe un champ vectoriel $\vec{A}$, tel que $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$
5. Comment appelle t - on le champ vectoriel $\vec{A}$?
6. Enoncer la forme intégrale du th théorème d'Ampère.

Exercice 1 (6 pts)

Un solénoïde mince d'axe Oz et de longueur L est constitué de N spires circulaires jointives identiques de rayon R parcourues par un courant d'intensité I. On désigne par z la côte d'une spire vue sous un angle θ depuis un point M de l'axe Oz à la côte z_M (Figure 1).

Choisir la bonne réponse et justifier

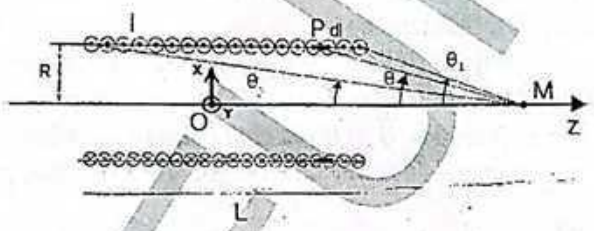


Figure 1:

1) Compte tenu de la symétrie des sources, on peut affirmer que :
   1.a en tout point de l'axe Oz, le champ magnétique est porté par cet axe.
   1.b le champ magnétique est orthogonal au plan xOy en tout point de ce plan.
   1.c le champ magnétique est uniforme en tout point de l'espace.
   1.d le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde.

2) Exprimer, en fonction de l'angle θ le champ magnétique créé en M par la spire située à la cote z . sur l'axe Oz.
   2.a $\vec{B} = (\mu_o I/R)\sin^2\theta\,\vec{e}_z$
   2.b $\vec{B} = (I/\mu_o R)\cos^3\theta\,\vec{e}_z$
   2.c $\vec{B} = (\mu_o I/2R)\sin^3\theta\,\vec{e}_z$
   2.d $\vec{B} = (I/\mu_o R)\tan^3\theta\,\vec{e}_z$

3) Une variation dz de la côte z d'une spire entraîne une variation $d\theta$ de l'angle θ. Exprimer dz en fonction de θ et $d\theta$.
   3.a $dz = (R/\tan^2\theta)d\theta$
   3.b $dz = (R/\cos^2\theta)d\theta$
   3.c $dz = (R/\sin^3\theta)d\theta$
   3.d $dz = (R/\sin^2\theta)d\theta$

4) Exprimer le nombre dN de spires contenues dans un élément de longueur dz de solénoïde.
   4.a $dN = (l/N)dz$

Scanné avec CamScanner

4.b $dN = (N/l)dz$
4.c $dN = (2l/N)dz$
4.d $dN = (N/2l)dz$

5) Exprimer le champ magnétique en tout point M de l'axe Oz en fonction des angles θ_1 et θ_2 tels que définis sur la figure 1.

5.a $\vec{B} = (\mu_o NI/2l)(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\vec{e}_z$
5.b $\vec{B} = (NI/2\mu_o l)(\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_2)\vec{e}_z$
5.c $\vec{B} = (NI/2\mu_o l)(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)\vec{e}_z$
5.d $\vec{B} = (\mu_o NI/2l)(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\vec{e}_z$

6) Exprimer le champ magnétique en tout point M de l'axe Oz d'un solénoïde infini constitué de n spires par unité de longueur parcourue par un courant d'intensité I.

6.a $\vec{B} = (\mu_o nI/4\pi)\vec{e}_z$
6.b $\vec{B} = \mu_o nI\vec{e}_z$
6.c $\vec{B} = (nI/\mu_o)\vec{e}_z$
6.d $\vec{B} = (nI/2\mu_o)\vec{e}_z$

Exercice 2 (8 pts)

On considère un câble coaxial constitué de deux conducteurs cylindriques coaxiaux (Figure 2). Le conducteur intérieur plein, de rayon a est parcouru par le courant I. Le second, creux de rayon intérieur $b > a$ et de rayon extérieur $c \simeq b$ est parcouru par le courant $-I$. L'espace est orienté selon un repère cylindrique (r, φ, z).

1. Calculer le champ magnétique $\vec{B}_{in}(M)$ créé par cette distribution en tout point M situé à une distance r de l'axe central Oz du câble telle que $r \leqslant a$.

2. Calculer le champ magnétique $\vec{B}_e(M)$ créé par la distribution en tout point M situé à une distance r de l'axe central telle que $a \leqslant r \leqslant b$.

3. Montrer que le champ magnétique $\vec{B}_{ex}(M)$ en tout point M situé à une distance $r > b$ est nul.

4. L'inductance propre d'un conducteur filiforme est donné par la relation

$$L = \frac{1}{I^2}\int_{\vartheta}\frac{\vec{B}^2}{\mu_o}d\vartheta$$

où $d\vartheta$ est le volume de l'espace où règne $\vec{B}$. Calculer l'inductance propre L_{in} intérieur et extérieur L_e d'une longueur l du câble coaxial.

5. En déduire l'inductance propre $L_u = L_{in} + L_e$ du câble coaxial.

6. Application numérique. Calculer L_u. On donne $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} H/m$, $l = 100cm$ et $(b/a) = 3$.

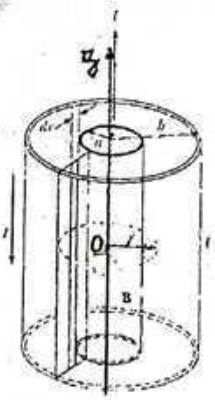


Figure 2:

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

LICENCE 2 SM, IG

ELECTROMAGNETISME

Durée 02H00
(Session 1 – 13 septembre 2017)

Question

1. Quand dit-on qu'une distribution de courant possède un plan de symétrie ?
2. Pourquoi dit-on que le champ magnétique est non divergent ?
3. *Répondre par Vrai ou Faux*

3.1. Les vecteurs champs magnétiques en deux points symétriques d'une distribution possédant un plan de symétrie sont eux même symétriques ?

3.2. Les vecteurs champs magnétiques en deux points symétriques d'une distribution possédant un plan d'antisymétrie sont eux même symétriques ?

Exercice 1

Une spire circulaire de centre O de rayon *R*, d'axe (Oz) est parcourue par un courant d'intensité *I (figure 1)*. On désigne par *z* la côte d'un point M de l'axe Oz.

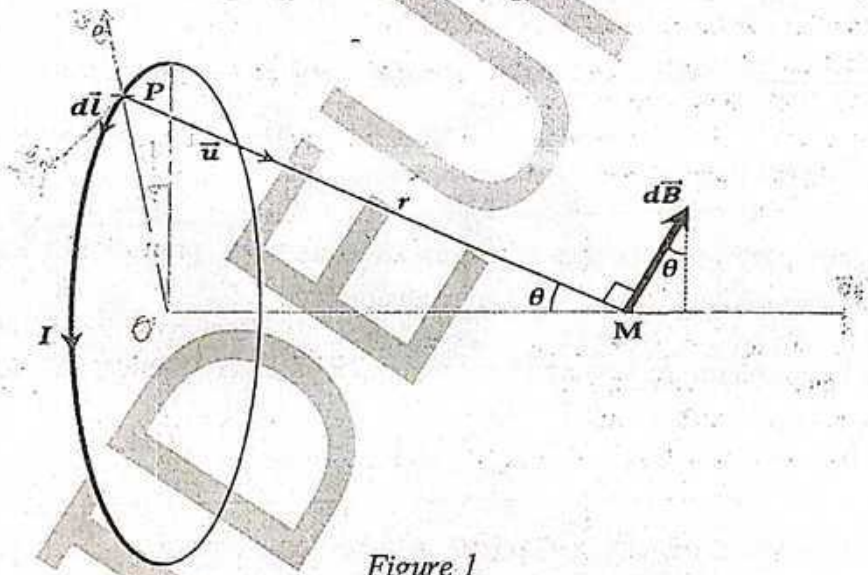


Figure 1

*Répondre aux questions 1 à 4 par **VRAI** ou **FAUX** en justifiant si possible*

1. Compte tenu de la symétrie des sources, on peut affirmer que :

1.a. Tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie pour la distribution de courant.

1.b. Tout plan orthogonal à l'axe Oz est un plan de symétrie pour la distribution de courant

1.c. Le plan de la spire est un plan de symétrie pour la distribution de courant.

1.d. En tout point de l'axe OZ, le champ magnétique est porté par axe.

1.e. En tout point de l'axe OZ, le champ magnétique est perpendiculaire à cet axe.

Scanné avec CamScanner

2. Le champ magnétique élémentaire créé en M par un élément de courant de la spire a pour expression :

2.a. $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\wedge\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^2}$

2.b. $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\wedge\vec{u}}{\|\overrightarrow{PM}\|^2}$ avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|}$

2.c. $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\wedge\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$ avec $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$

2.d. $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{\|\overrightarrow{PM}\|^2}\vec{k}$ avec $\vec{k} = \vec{e}_\varphi\vec{u}$

2.e. $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{\|\overrightarrow{PM}\|^2}\vec{e}_z$

3. Les termes suivants peuvent s'écrire :

3.a. $d\vec{l} = dl\vec{e}_z$

3.b. $d\vec{l} = Rd\varphi\vec{e}_\varphi$

3.c. $\|d\vec{l}\wedge\overrightarrow{PM}\| = dl \times PM \times sin\theta$

3.d. $\|d\vec{l}\wedge\overrightarrow{PM}\| = Rd\varphi \times PM$

3.e. $\|d\vec{l}\wedge\overrightarrow{PM}\| = dl \times PM$

4. La norme du champ magnétique élémentaire au point M peut donc s'écrire :

4.a. $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{PM^2}$

4.b. $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{PM^2}sin\theta$

4.c. $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{PM^2}$

4.d. $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}sin^3\theta d\varphi$

4.e. $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}sin^3\theta d\varphi$

5. Déterminer à partir des bonnes réponses aux questions précédentes l'expression du vecteur champ magnétique $\vec{B}$ créé par la spire au point M.

6. Retrouver l'expression du vecteur champ magnétique $\vec{B}$ en fonction de la côte z du point M

Exercice 2

1. On considère un conducteur rectiligne AB de longueur l parcouru par un courant permanent d'intensité I dans un repère cartésien (Oxyz) *(figure 2)*. Déterminer l'expression du vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$ crée par ce conducteur au point M(a, 0 ,0) situé sur son axe médian.

2. En déduire l'expression du champ magnétique d'un conducteur de longueur infinie.

3. On dispose côte à côte deux conducteurs rectilignes infinis (C_1) et (C_2) séparés d'une distance $2a$. Ces conducteurs sont parcourus par des courants de même intensité I comme l'indique la *figure 3*.

3.1. Cas (a) : déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}a(M_1)$, $\vec{B}a(M_2)$ et $\vec{B}a(M_3)$ créé par (C_1) et (C_2) aux points M_1, M_2, et M_3 respectivement.

Scanné avec CamScanner

3.2. Cas (b) : Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}b(M_1)$, $\vec{B}b(M_2)$ et $\vec{B}b(M_3)$ créé par (C_1) et (C_2) aux points M_1, M_2, et M_3 respectivement.

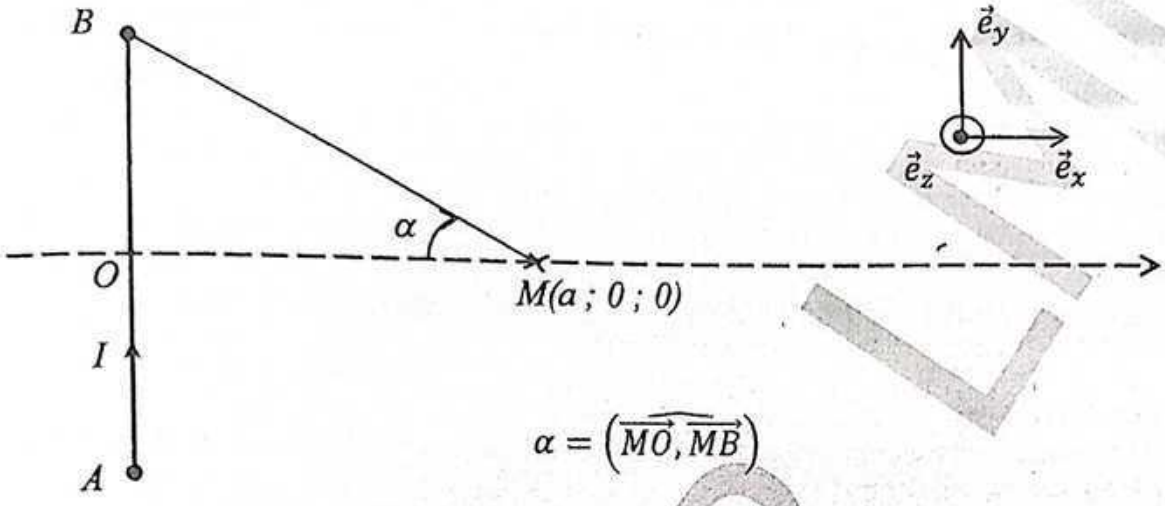
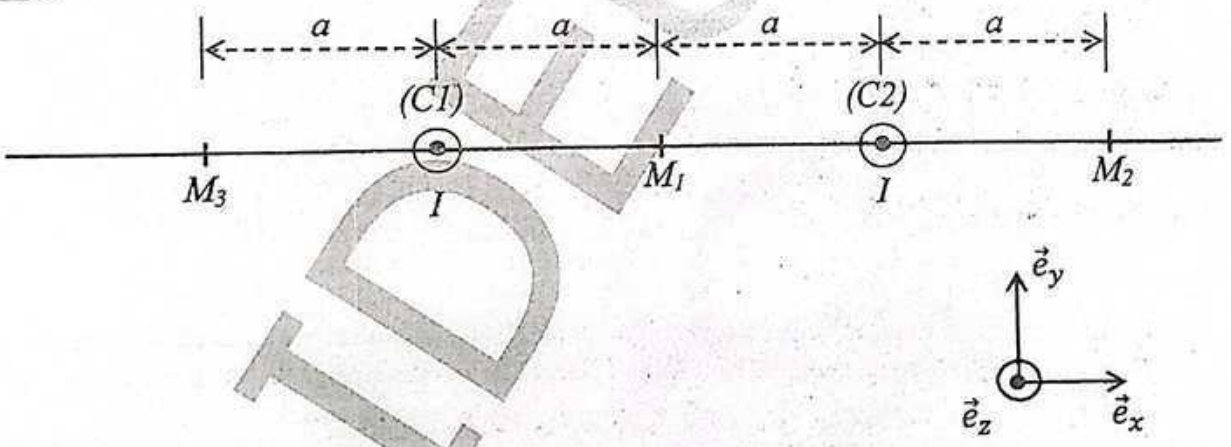


Figure 2

Cas a



Cas b

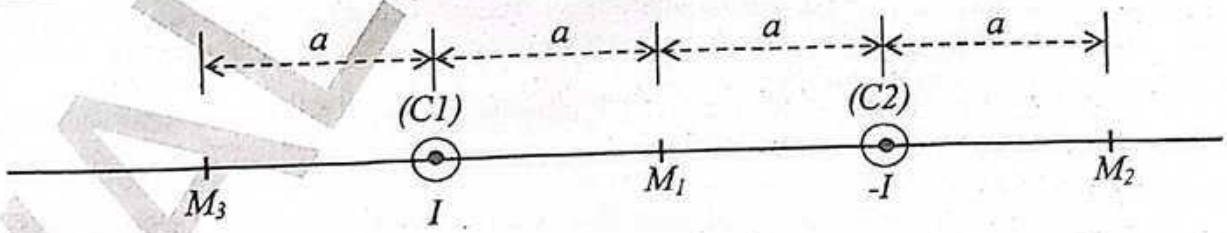


Figure 3

VALIDEUR LIND

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITÉ FHB COCODY
UFR SSMT

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017-2018
SESSION DU 14 SEPTEMBRE 2018

LICENCE 2 SM & IG
EXAMEN D'ELECTROMAGNÉTISME
Durée : 2 heures

Questions (3 pts)

1. Quand dit on qu'une distribution de courant possède un plan de symétrie (Π_s) ?
2. Quand dit on qu'une distribution de courant possède un plan d'antisymétrie (Π_{as})?
3. Pourquoi dit on que le champ magnétique est non divergent?
4. Démontrer que quelque soit le vecteur champ magnétique $\vec{B}$, il existe un champ vectoriel $\vec{A}$, tel que $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}$.
5. Comment appelle t - on le vecteur $\vec{A}$?
6. Enoncer la forme intégrale du théorème d'Ampère.

Exercice 1 (10 pts)

On considère un fil rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant d'intensité I dans un repère en coordonnées cartésiennes (Figure 1).

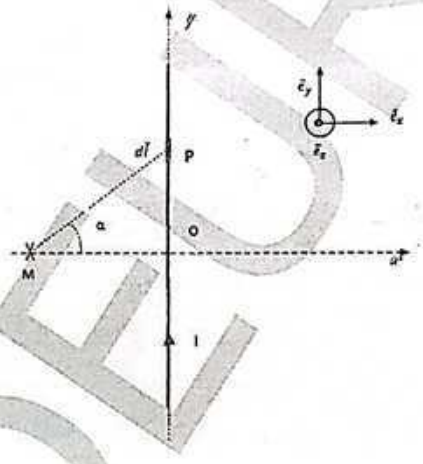


Figure 1:

1. Un élément de longueur dl pris autour d'un point P du conducteur cré un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}(M)$ en tout point M situé à une distance $OM = x$ du conducteur. Donner l'expression de $d\vec{B}(M)$.
2. Donner les expressions respectives des projetés des vecteur $d\vec{l}$ et $\overrightarrow{PM}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
3. En déduire le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par le fil au point M.
4. Une portion de ce conducteur est utilisée pour former un circuit carré $A(a,a,0); B(-a,a,0); C(-a,-a,0); D(a,-a,0)$ où a est une constante positive. Représenter dans un repère cartésien (O,x,y,z) le conducteur $ABCD$.
5. Le courant d'intensité I circulant de D vers A, déterminer le plan de symétrie de cette distribution de courant.
6. Quels sont les plans d'antisymétries de cette distribution?
7. Montrer que le champ créé par la portion [BC] du conducteur au point O (milieu des diagonales [AC] et [BD]) est

$$\vec{B}_{BC}(O) = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi a}\vec{e}_z$$

Scanné avec CamScanner

8. En déduire le champ magnétique $\vec{B}(O)$ créé par le circuit ABCD au point O.
9. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé en un point $M(0,0,z)$ de l'axe (Oz) du carré.
10. Retrouver le résultat de la question 8.

Exercice 2 (7 pts)

On considère une distribution volumique de courant dans tout l'espace de densité

$$\vec{J}(M) = J_o \exp\left(\frac{-r^2}{R_o^2}\right)\vec{e}_z$$

en coordonnées cylindriques $M(r,\varphi,z)$ où J_o et R_o sont des constantes positives.

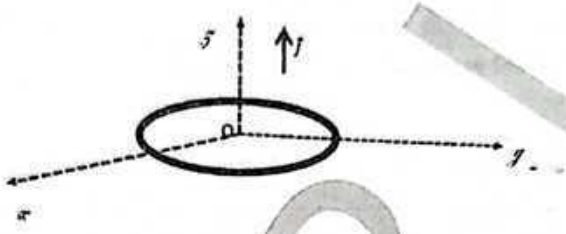


Figure 2:

1. Déterminer le courant $I(R)$ traversant un disque de rayon R centré sur l'axe (Oz) et perpendiculaire à cet axe (Figure 2).
2. Indiquer le ou les plans de symétries de cette distribution.
3. La distribution est invariate par rotation d'angle φ autour de l'axe (Oz). Elle est invariante par translation suivant l'axe (Oz), $\vec{B}(M) = B_\varphi(r)\vec{e}_\varphi$. Déterminer $B_\varphi(r)$:

a) en tout point M, tel que $r < R$.
b) en tout point M, tel que $r > R$.

VALIDE UR LMD

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

UNIVERSITÉ FHB COCODY
UFR SSMT

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017-2018
SESSION DU 6 FÉVRIER 2019

LICENCE 2 SM & IG
EXAMEN D'ELECTROMAGNÉTISME
Durée : 2 heures

Questions (2.5 pts)

1. Quand dit on qu'une distribution de courant possède un plan de symétrie π_s ?
2. Quand dit on qu'une distribution de courant possède un plan d'antisymétrie π_{as}?
3. Donner l'équation de continuité de la composante normale du champ magnétique à la traversée d'une surface de séparation parcourue par un courant surfacique.
4. Donner l'équation de la discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique à la traversée d'une surface de séparation parcouru par un courant surfacique.
5. Enoncer la forme intégrale du théorème d'Ampère.

Exercice 1 (5.5 pts)

Un plan conducteur xOy supposé infini est parcouru par un courant surfacique tel que $\vec{J} = j_s \vec{e}_y$ où j_s est un réel positif. L'intensité de ce courant est répartie uniformément sur le plan (figure 1). On a ainsi un courant d'intensité $I_o > 0$ sur un segment de longueur h selon l'axe (Ox).

1. Monter que $j_s = \frac{I_o}{h}$

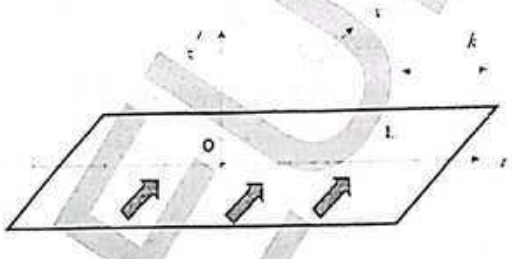


Figure 1:

2. Déterminer le ou les plans de symétries de cette distribution de courant.
3. Etudier les invariances de cette distribution de courant et montrer que $\vec{B} = B(z)\vec{e}_x$
4. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ en un point quelconque de l'espace à l'aide du théorème d'Ampère.
5. Monter que le champ admet une discontinuité au passage de cette nappe de couant.

Exercice 2 (6 pts)

On considère un solénoïde de longueur finie l constitué de spires circulaires jointives de rayon r, possédant n spires par unité de longueur; parcouru par un courant d'intensité permanent i_1 (figure 2).

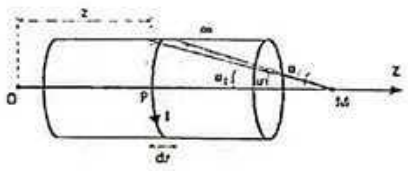


Figure 2:

1. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé sur l'axe (Oz) du solénoïde en tout

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

point M de l'axe (Oz).

2. Quelle est l'expression de $\vec{B}(M)$ lorsque l'angle α_1 tend vers 0.
3. En déduire l'expression de $\vec{B}(M)$ pour un solénoïde de longueur infinie.

Exercice 3 (6 pts)

Un solénoïde vertical de longueur semi-infinie à section circulaire, de rayon a et possédant n spires jointives par unité de longueur est parcouru par un courant sinusoïdale $i_1 = i_{m1}\cos(\omega t)$ où i_{m1} est l'amplitude et ω la pulsation. Une bobine circulaire constituée de N spires de rayon $b << a$, de résistance R, d'inductance L et de masse m, est placée au-dessus du solénoïde à une distance z de son extrémité. On repère la position de la bobine par l'angle θ (figure 3).

1. Calculer le flux Φ à travers la bobine créé par ce solénoïde.
2. Quel est le coefficient d'induction mutuelle M de la bobine et du solénoïde.
3. L'expression du courant induit dans la bobine est de la forme $i(t) = I_m \exp[j(\omega t + \varphi)]$. Déterminer l'expression de l'amplitude maximale I_m de $i(t)$ en fonction de M, ω, R, L et i_{m1} (On écrira $i_1 = i_{m1}\exp(j\omega t)$).

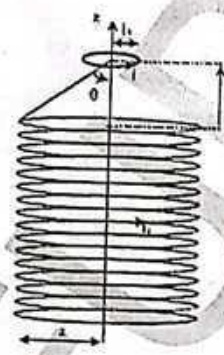


Figure 3:

VALIDE

Scanné avec CamScanner

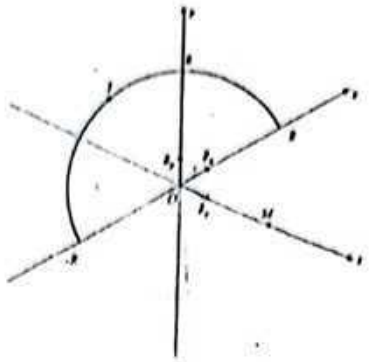


Figure 1:

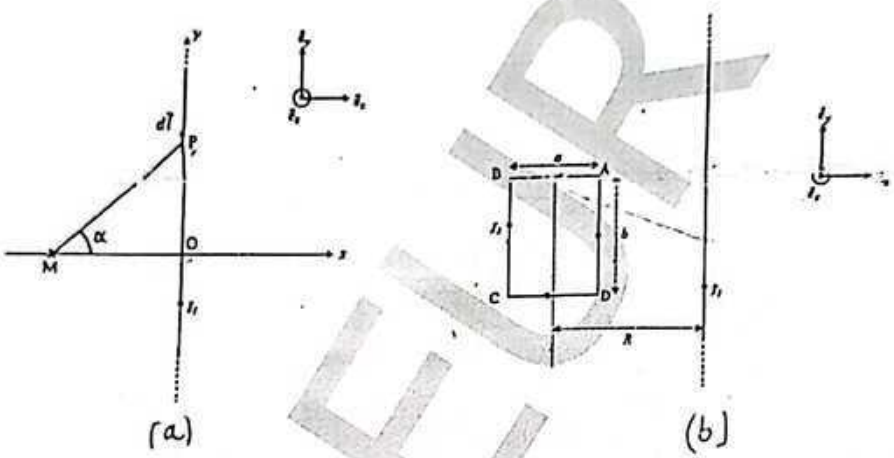


Figure 2:

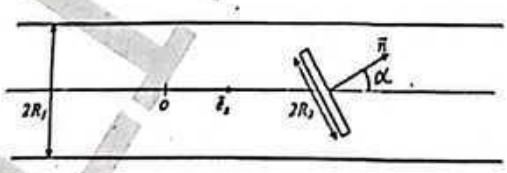


Figure 3:

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITÉ FHB COCODY
UFR SSMT

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018-2019
SESSION DU 18 FÉVRIER 2020

LICENCE 2 SM & IG
EXAMEN D'ELECTROMAGNÉTISME
Durée : 2 heures

Exercice 1. (3 pts)

On considère dans un repère cartésien (O, x, y, z), une demi spire de centre O, de rayon R, d'axe (Oz), située dans le plan (yOx) et parcourue par un courant continu d'intensité I (Figure 1).

1. Quel est le plan d'antisymétrie de cette distribution ?
2. Quel est le plan de symétrie de cette distribution ?
3. Montrer que le champ magnétique en tout point M(0,0,z) de son axe (Oz) est de la forme

$$\vec{B}(M) = B_z \vec{e}_z + B_y \vec{e}_y$$

4. Quelle est la forme du vecteur champ $\vec{B}(O)$ créé par la demi spire au point O?

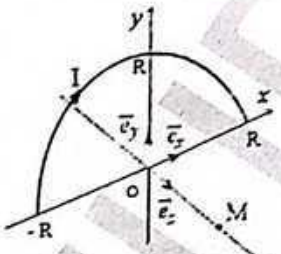


figure 1

Exercice 2. (3 pts)

On considère une distribution constituée par un fil rectiligne de longueur finie parcouru par un courant d'intensité I en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) (figure 2).

1. Faire l'étude des invariances et en déduire les coordonnées dont dépend le champ magnétique.
2. Donner l'orientation du vecteur $\vec{B}(M)$ pour tout point M appartenant à l'axe $Oy (y > 0)$.

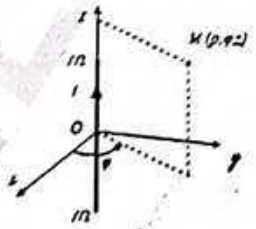


figure 2

Exercice 3. (8 pts)

On considère un fil rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant d'intensité I_1 dans un repère en coordonnées cartésiennes (Figure 3a).

1. Un élément de longueur dl pris autour d'un point P du conducteur cré un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}(M)$ en tout point M situé à une distance $OM = x$ du conducteur. Donner l'expression de $d\vec{B}(M)$.
2. Donner les expressions respectives des projetés des vecteur $d\vec{l}$ et $\overrightarrow{PM}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
3. En déduire le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par le fil au point M.
4. On place au voisinage de ce fil, un cadre rectangulaire ABCD $(AB = CD = a,\ BC = DA = b)$

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

UNIVERSITÉ FHB COCODY
UFR SSMT

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019-2020
SESSION DU 8 DÉCENBRE 2020

LICENCE 2 SM & IG
EXAMEN D'ELECTROMAGNÉTISME
Durée : 2 heures

Exercice 1. (5 pts)

On considère dans un repère cartésien (O,x,y,z), une demi spire de centre O, de rayon R, d'axe (Oz), située dans le plan (yOx) et parcourue par un courant continu d'intensité I (Figure 1).

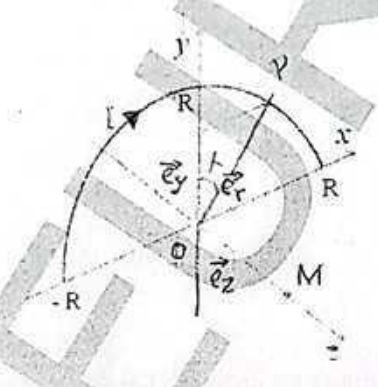
1. Quel est le plan d'antisymétrie de cette distribution de courant ?
2. Quel est le plan de symétrie de cette distribution de courant ?
3. Montrer que le champ magnétique en tout point M$(0,y,z)$ est de la forme

$$\vec{B}(M) = B_z \vec{e}_z + B_y \vec{e}_y$$

où B_z et B_y sont les composantes du champ $\vec{B}$

4. Quelle est la forme du vecteur champ $\vec{B}(O)$ créé par la demi spire au point O?

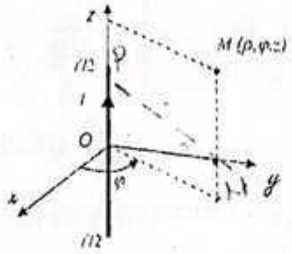
M ∈ (OY, OZ)



Exercice 2. (5 pts)

On considère une distribution constituée par un fil rectiligne de longueur finie parcouru par un courant d'intensité I en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) (figure 2).

1. Faire l'étude des invariances et en déduire les coordonnées dont dépend le champ magnétique.
2. D[illegible]r l'orientation du vecteur $\vec{B}(M)$ pour tout point M appartenant à l'axe $Oy(y > 0)$.



Exercice 3. (10 pts)

On considère un fil rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant d'intensité I_1 dans un repère en coordonnées cartésiennes (Figure 3a).

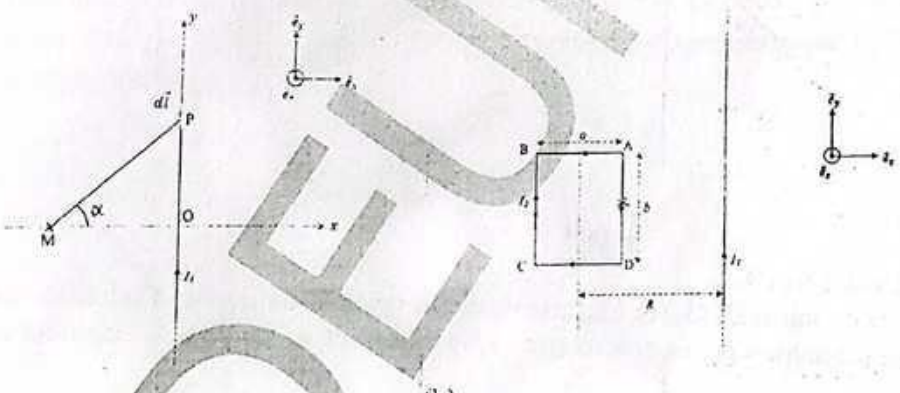
1. Un élément de longueur dl pris autour d'un point P du conducteur cré un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}(M)$ en tout point M situé à une distance $OM = x$ du conducteur. Donner l'expression de $d\vec{B}(M)$.
2. Donner les expressions respectives des projetés des vecteur $d\vec{l}$ et $\overrightarrow{PM}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Scanné avec CamScanner

3. En déduire le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par le fil au point M.
4. On place au voisinage de ce fil, un cadre rectangulaire ABCD ($AB = CD = a$, $BC = DA = b$) parcouru par un courant d'intensité I_2. La distance qui sépare le fil de la médiatrice principale du cadre ABCD est $R>a$ (Figure 3b). Le cadre baigne dans le champ magnétique créé par le fil de longueur infinie. Comment appelle t-on la force qui s'exerce sur ce circuit rectangulaire ABCD ?
5. Quelle est l'expression du champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le fil infini en tout point M ∈ [AD]?
6. Ce champ est-il uniforme en tout point du segment [AD]?
7. En déduire les forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ qui s'exercent respectivement sur les côtés AD et CB du cadre.
8. En tout point M, situé à une distance x du fil, le champ magnétique est donné par l'expression

$$\vec{B}_z(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\vec{e}_z$$

Déterminer les expressions des forces $\vec{f}_3$ et $\vec{f}_4$ qui s'exercent respectivement sur les côtés BA et DC.
9. Quelle est la résultante $\vec{f}$ des forces qui s'exercent sur le cadre?
10. A quelle(s) condition(s) le cadre se rapproche-t-il du fil?



(a) (b)

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

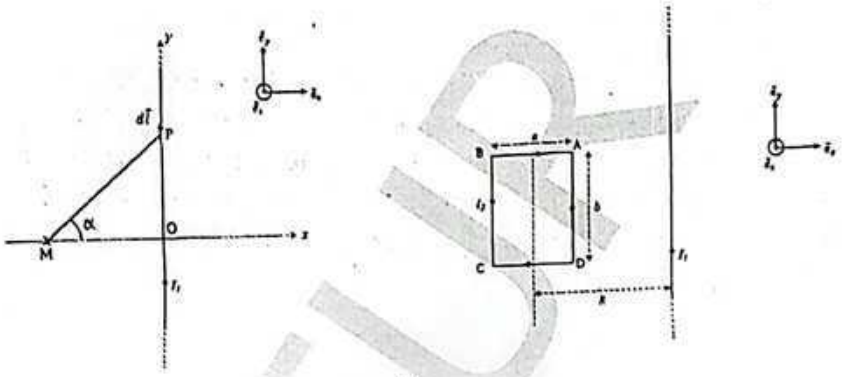
parcouru par un courant d'intensité I_2. La distance qui sépare le fil de la médiatrice principale du cadre ABCD est $R>a$ (Figure 3b). Le cadre baigne dans le champ magnétique créé par le fil de longueur infinie. Comment appelle t-on la force qui s'exerce sur ce circuit rectangulaire ABCD ?

5. Quelle est l'expression du champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le fil infini en tout point M ∈ [AD]?
6. Ce champ est-il uniforme en tout point du segment [AD]?
7. En déduire les forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ qui s'exercent respectivement sur les côtés AD et CB du cadre.
8. En tout point M, situé à une distance x du fil, le champ magnétique est donné par l'expression

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\vec{e}_t$$

Déterminer les expressions des forces $\vec{f}_3$ et $\vec{f}_4$ qui s'exercent respectivement sur les côtés BA et DC.

9. Quelle est la résultante $\vec{f}$ des forces qui s'exercent sur le cadre?
10. A quelle(s) condition(s) le cadre se rapproche-t-il du fil?



(a) (b)

figure 3

Exercice 4. (6 pts)

On considère un solénoïde (S_1) de longueur infinie, de rayon R_1 consitué de n spires jointives par unité de longueur parcourues par un courant permanant d'intensité I_1. On place à l'intérieur du solénoïde,

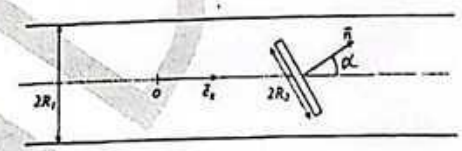


figure 4

une spire circulaire (S_2) de rayon $R_2 < R_1$. On définit $\alpha = (\vec{e}_z, \vec{n},)$ où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface de la spire (Figure 4).

1. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}_1$ créé sur l'axe du solénoïde.
2. Déterminer l'expression du flux Φ_{21} du champ $\vec{B}_1$ à travers la spire (S_2).
3. En déduire l'inductance mutuelle L_{21} des deux circuits.
4. En réalité, la spire circulaire est animée d'un mouvement de rotation avec une vitesse angulaire $\alpha = \omega t$, où ω désigne la pulsation. Déterminer la force électromotrice $e(t)$ induite dans la spire .
5. La spire ayant une résistance interne R, quelle est l'expression du courant $i(t)$ induit dans la spire?
6. Calculer l'amplitude maximale I_m de $i(t)$. On donne $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}\, SI$, $I_1 = 0,1\, A$, $\omega = 100\pi\, rd/s$, $R = 0,1\,\Omega$, $R_2 = 10^{-2}\, m$, $n = 10^3\, /m$

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody, Abidjan
UFR-SSMT/Département de Physique

Année universitaire 2020-2021
(Session du 16 Septembre 2021)

LICENCE 2 (MI-IG)
Examen d'ELECTROMAGNETISME
(Durée 02H00)

Questions (4 points)

1. Quand dit-on qu'une distribution de courant possède un plan de symétrie ?
2. Pourquoi dit-on que le champ magnétique est non divergent ?
3. *Répondre par Vrai ou Faux*

3.1. Les vecteurs champs magnétiques en deux points symétriques d'une distribution possédant un plan de symétrie sont eux même symétriques ?

3.2. Les vecteurs champs magnétiques en deux points symétriques d'une distribution possédant un plan d'antisymétrie sont eux même symétriques ?

Exercice 1 (6 points)

1. Déterminer le champ magnétostatique $\vec{B}(O)$ créé par une spire circulaire de centre O de rayon R et d'axe Oz parcourue par un courant d'intensité I *(figure 1)* au centre O de la spire.
2. On considère par la suite, le circuit représenté par la *figure 2* constitué de deux fils semi-infinis (d_1) et (d_2) reliés par une semi-spire circulaire de centre O et de rayon R. Le circuit est contenu dans le plan (xOy) et est parcouru par un courant I. Déterminer le champ magnétostatique $\vec{B}(O)$ au point O dans la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

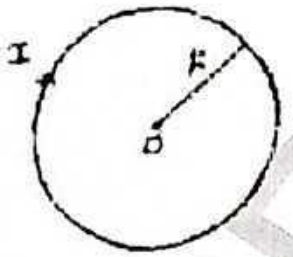


Figure 1

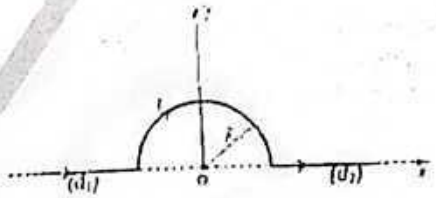


Figure 2

Exercice 2 (10 points)

Un conducteur (C_1) *filiforme* de longueur infinie est parcouru par un courant d'intensité I. L'espace est orienté selon une base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

1. Quelle est le champ magnétique $\vec{B}$ crée par (C_1) en un point M situé à la distance ρ du conducteur ?
2. Représenter le vecteur $\vec{B}$ et les lignes de champ.

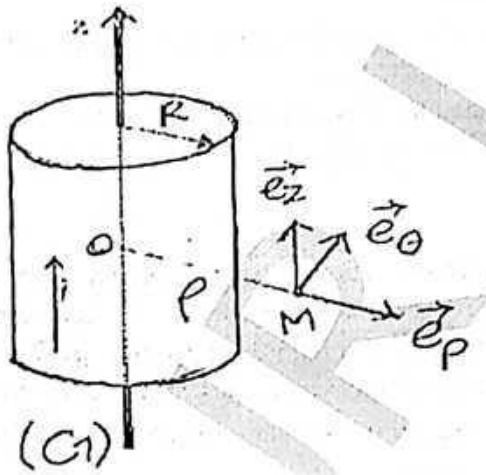
En réalité le conducteur (C_1) est un cylindrique de rayon R, d'axe Oz. Il est parcouru par un courant volumique uniforme de vecteur densité $\vec{j} = j_0\vec{e}_z$ où J_0 est un réel. A l'extérieur de (C_1), c'est-à-dire pour $\rho > R, \vec{j} = \vec{0}$.

3. Donner l'expression de l'intensité du courant enlacé par le contour circulaire de rayon ρ et d'axe Oz pour $\rho \geq R$ (désigné par I_{ext}) et pour $\rho \leq R$ (désigné par I)

Scanné avec CamScanner

4. Donner l'expression de la circulation (C) du champ magnétique $\vec{B}$ créée par ce conducteur (C_1) le long du contour circulaire de rayon ρ et d'axe Oz.
5. En déduire les expressions du champ magnétique $\vec{B}$ à $\rho \geq R$ puis à $\rho \leq R$.
6. Donner les composantes du potentiel vecteur $\vec{A}$ en fonction de A_0, ρ, R, μ_0 et J_0 à $\rho \geq R$ puis à $\rho \leq R$. On donne $A_z|0| = A_0$ à $\rho = 0$.
   On rappelle : $\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$ et le rotationnel d'un vecteur $\vec{F}$ dans une base cylindrique est :

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho F_\varphi)\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\varphi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$



VALIDE UIR
Scanné avec CamScanner

LICENCE 2 (MI-IG)
Examen d'ELECTROMAGNETISME
(Durée 02H00)

Questions (4 points)

1. Quand dit-on qu'une distribution de courant possède un plan de symétrie ?
2. Pourquoi dit-on que le champ magnétique est non divergent ?
3. *Répondre par Vrai ou Faux*

3.1. Les vecteurs champs magnétiques en deux points symétriques d'une distribution possédant un plan de symétrie sont eux même symétriques ?

3.2. Les vecteurs champs magnétiques en deux points symétriques d'une distribution possédant un plan d'antisymétrie sont eux même symétriques ?

Exercice 1 (6 points)

1. Déterminer le champ magnétostatique $\vec{B}(O)$ créé par une spire circulaire de centre O de rayon R et d'axe Oz parcourue par un courant d'intensité I *(figure 1)* au centre O de la spire.
2. On considère par la suite, le circuit représenté par la *figure 2* constitué de deux fils semi-infinis (d_1) et (d_2) reliés par une semi-spire circulaire de centre O et de rayon R. Le circuit est contenu dans le plan (xOy) et est parcouru par un courant I. Déterminer le champ magnétostatique $\vec{B}(O)$ au point O dans la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

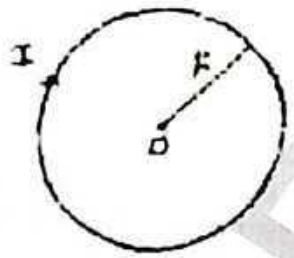


Figure 1

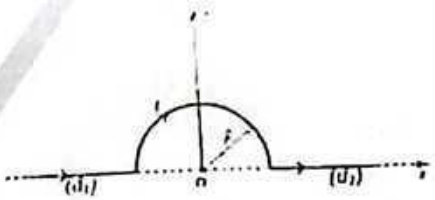


Figure 2

Exercice 2 (10 points)

Un conducteur (C_1) *filiforme* de longueur infinie est parcouru par un courant d'intensité I. L'espace est orienté selon une base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

1. Quelle est le champ magnétique $\vec{B}$ crée par (C_1) en un point M situé à la distance ρ du conducteur ?
2. Représenter le vecteur $\vec{B}$ et les lignes de champ.

En réalité le conducteur (C_1) est un cylindrique de rayon R, d'axe Oz. Il est parcouru par un courant volumique uniforme de vecteur densité $\vec{j} = j_0\vec{e}_z$ où J_0 est un réel. A l'extérieur de (C_1), c'est-à-dire pour $\rho > R, \vec{j} = \vec{0}$.

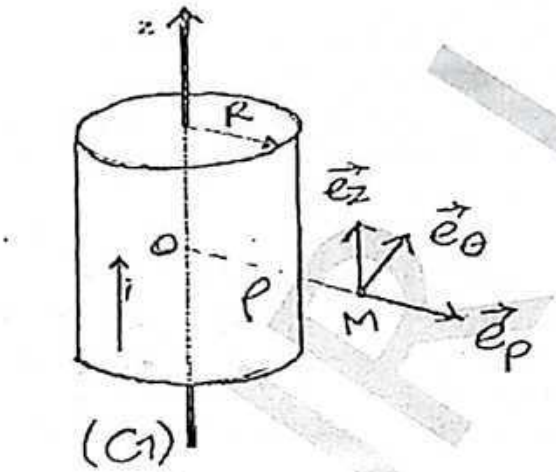
3. Donner l'expression de l'intensité du courant enlacé par le contour circulaire de rayon ρ et d'axe Oz pour $\rho \geq R$ (désigné par I_{ext}) et pour $\rho \leq R$ (désigné par I)

Scanné avec CamScanner

4. Donner l'expression de la circulation (C) du champ magnétique $\vec{B}$ créée par ce conducteur (C_1) le long du contour circulaire de rayon ρ et d'axe Oz.
5. En déduire les expressions du champ magnétique $\vec{B}$ à $\rho \geq R$ puis à $\rho \leq R$.
6. Donner les composantes du potentiel vecteur $\vec{A}$ en fonction de A_0, ρ, R, μ_0 et J_0 à $\rho \geq R$ puis à $\rho \leq R$. On donne $A_z|0| = A_0$ à $\rho = 0$.

On rappelle : $\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$ et le rotationnel d'un vecteur $\vec{F}$ dans une base cylindrique est :

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho F_\varphi)\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\varphi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$



Scanné avec CamScanner

UNIVERSITÉT DE COCODY
UFR SSMT

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2015-2016

LICENCE 2 SM, 1G
ELECTROMAGNÉTISME
Durée 02H00
Session du 17 Décembre 2016

Questions (4 pts)
Répondre par Vrai ou par Faux
1. V — 0,5
2. F — 0,5
3. V — 0,5
4. V — 0,5
5. V — 0,5
6. F — 0,5
7. V — 0,5
8. F — 0,5

Exercice 1 (6 pts)
Comme pour la spire simple, les propriétés de symétrie du courant montrent que le champ magnétique du solénoïde est la somme vectorielle des champs créés par chaque spire. Il est suivant l'axe z uniquement. Autour d'un point P situé (figure 1)

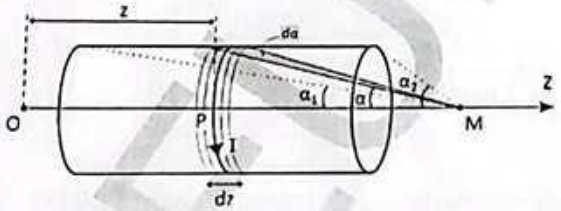


Figure 1:

en z sur une épaisseur dz, il y a ndz spires. Ces spires créent un champ élémentaire $d\vec{B}$ en un point M quelconque de l'axe

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o NIdz}{2R}\sin^3(\alpha)\vec{e}_z$$

Vérifier que l'étudiant a fait un raisonnement cohérent pour aboutir au résultat

Calculons dz

$$\tan\alpha = \frac{R}{OM - z}$$

$$OM - z = \frac{R}{\tan\alpha}$$

soit

$$dz = \frac{R}{\sin^2\alpha}d\alpha$$

Le champ magnétique total s'écrit donc

$$\vec{B} = \frac{\mu_o NI}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha d\alpha\,\vec{e}_z$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_o NI}{2}(\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2))\,\vec{e}_z$$

VALIDÉ UR LMD

Scanné avec CamScanner

Pour un solénoïde infini, l'angle α_1 tend vers 0 et l'angle α_2 tend vers π, d'où le champ sur l'axe

$$\vec{B}_{in} = \mu_0 n I \vec{e}_z \quad — 2$$

2. Le champ magnétique étant uniforme,

$$\vec{A}_{in} = \frac{\vec{B}_{in} \wedge \vec{r}}{2} \quad — 1$$

Ici

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho \quad — 0,5$$

En remplaçant chaque terme on

$$\vec{A}_{in} = \frac{\mu_0 n I \rho}{2} \vec{e}_\varphi \quad — 0,5$$

3. L'inductance propre d'un circuit ayant une distribution de courant surfacique est

$$L = \frac{1}{I^2} \int_s \vec{J}_s \cdot \vec{A}\, dS$$

Ici

$$dS = R d\varphi dz \quad — 0,5$$

$$L = \frac{1}{I^2} \int_0^l \int_0^{2\pi} n I \vec{e}_\varphi \cdot \frac{\mu_0 n I R}{2} \vec{e}_\varphi R d\varphi dz \quad \Big) — 0,5$$

Soit

$$L/l = \mu_0 n^2 \pi R^2$$

4. Application numérique $L = 3.6mH$ — 1

Exercice 2 (10 pts)

1.Expression du flux Φ du champ magnétique à travers le cadre ABCD.

Par définition

$$\Phi = \int_s \vec{B}_o \cdot \vec{n}\, dS = \int_s B_o dS \cos\alpha \quad — 1$$

$dS = l dx'$ — 0,5

$$\Phi = B_o l x' \cos\alpha \quad — 0,5$$

2. Expression de l'intensité du courant induit *i* La force électromotrice induite par la variation du flux à travers le cadre est

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = Ri$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_o l \frac{dx'}{dt} \cos\alpha = -B_o l v \cos\alpha$$

Soit

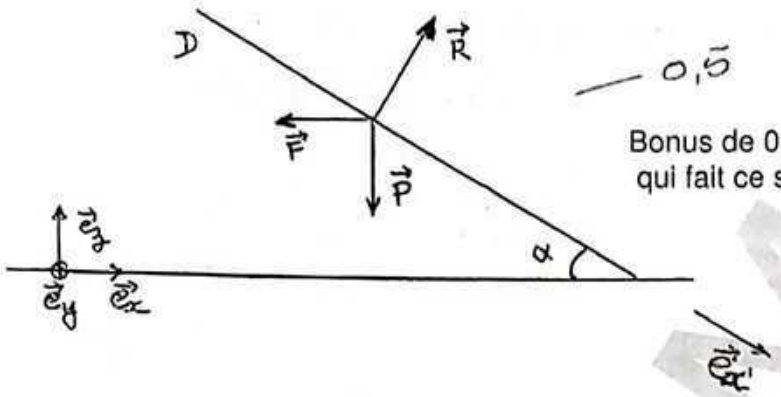
$$i = -\frac{B_o l v \cos\alpha}{R} \quad — 1$$

3. Inventaire des forces qui s'exercent sur la barre.

La force de Laplace $\vec{F}$, perpendiculaire au plan formé par $i\vec{AB}$ et $\vec{B}_o$ — 0,5

Le poids de la barre $\vec{P}$ orienté suivant la vertical du leulleu → 0,5

Scanné avec CamScanner



— 0,5

Bonus de 0.5 pour celui qui fait ce schéma

Figure 2:

La réaction de la barre $\vec{R}$ perpendiculaire au plan ABCD en raison de l'absence de frottements. — 0,5

4. La résultante $\vec{F}$ des forces d'induction ici est la force de Laplace elle s'exprime par la relation

$$\vec{F} = i\vec{AB} \wedge \vec{B}_o \longrightarrow 0,5$$

On sait que

$$\vec{AB} = l\vec{e}_y$$

$$\vec{B}_o = B_o\vec{e}_z$$

et

$$\vec{F} = -\frac{B_o l v \cos\alpha}{R} \times l \times B_o \vec{e}_x$$

$$\vec{F} = -\frac{B_o^2 l^2 v \cos\alpha}{R}\vec{e}_x \quad — 1,5$$

5. Equation différentielle du mouvement

Appliquons la Relation Fondamentale de la Dynamique à la barre AB.

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad — 0,5$$

Projetons cette relation suivant l'axe Dx'

On a

$$-\frac{B_o^2 l^2 (\cos\alpha)^2}{R} v + mg\sin\alpha = m\frac{dv}{dt}$$

soit

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B_o^2 l^2 (\cos\alpha)^2}{mR} v = g\sin\alpha \quad — 1$$

6. Expression de $v(t)$

Posons

$$\frac{1}{\tau} = \frac{B_o^2 l^2 (\cos\alpha)^2}{mR}$$

L'équation différentielle devient

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g\sin\alpha$$

La solution générale d'une telle équation différentielle est de la forme

$$v(t) = \tau g\sin\alpha + K\exp(-\frac{t}{\tau})$$

Scanné avec CamScanner

A $t = 0$, la vitesse de la barre est nulle, on a alors

$$K = -\tau g \sin\alpha \quad \text{— } 0,5$$

Il vient

$$v(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tau g \sin\alpha \quad \text{— } 1,5$$

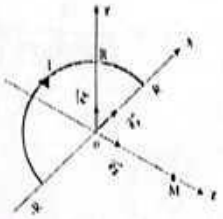
VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Examen d'électromagnétisme 2018-2019

Session 1 :

Exercice 1 :



1) Quel est le plan d'antisymétrie de cette distribution ?
Tout plan contenant l'axe (oz) est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant.

2) Plan de symétrique
(yox) est un plan de symétrique pour la distribution de courant.

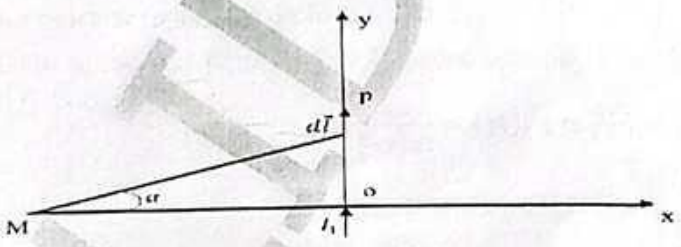
3) $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\sin^3(\alpha)\int_0^{\pi} d\varphi \overrightarrow{e_z}$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4R}\sin^3(\alpha)\overrightarrow{e_z}$$

4)

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{4R}\overrightarrow{e_z}$$

Exercice 2 :



1) Donnons l'expression de $d\vec{B}(M)$

$$\boxed{d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\wedge\overrightarrow{PM}}{\|PM\|}} \quad ①$$

2) Donnons l'expression de $d\vec{l}$ et $\overrightarrow{PM}$ dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

$d\vec{l} = dy\overrightarrow{e_y}$

Scanné avec CamScanner

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} = -y\overrightarrow{e_y} - x\overrightarrow{e_x}$$

3) Déduisons le champ magnétique $\vec{B}(M)$

$$d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM} = dy\overrightarrow{e_y} \wedge \left(-y\overrightarrow{e_y} - x\overrightarrow{e_x}\right) = xdy\overrightarrow{e_z}$$

$$tg\alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xtg\alpha \Rightarrow \frac{dy}{dy} = \frac{x}{(\cos^2\alpha)} \Rightarrow dy = \frac{x}{(\cos^2\alpha)}d\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{PM} \Rightarrow \left(\frac{1}{PM}\right)^3 = \left(\frac{cos\alpha}{x}\right)^3$$

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{x^2}{\cos^2\alpha}d\alpha\left(\frac{cos\alpha}{x}\right)^3\overrightarrow{e_z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}cos\alpha d\alpha\overrightarrow{e_z} \quad ①$$

Le fil d'infini,

Donc $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(cos\alpha d\alpha)\right)\overrightarrow{e_z}$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\overrightarrow{e_z}$$

4) Il s'agit de la force de Laplace.

5) L'expression du champ magnétique $\vec{B}_1$.

6) Oui le champ magnétique en tout point du segment est uniforme car $B_1 = cste$

7) En déduire les forces $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$

$$\overrightarrow{f_1} = I_2\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{B_1(M)} = -I_2 b\overrightarrow{e_z} \wedge \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\left(R - \frac{\alpha}{2}\right)}\right)\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{f_1} = \frac{\mu_0 b}{2\pi}I_1 I_2\left(\frac{1}{\left(R - \frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$

$$\overrightarrow{f_1} = \mu_0 b I_1 I_2\left(\frac{1}{0-a} - \frac{1}{\left(R - \frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$

$$\overrightarrow{f_2} = I_2\overrightarrow{CB} \wedge \vec{B}_2(M) \text{ où } \overrightarrow{CB} = b\overrightarrow{e_y} \text{ et } \vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\left(R - \frac{\alpha}{2}\right)}\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{f_2} = I_2\, b\overrightarrow{e_y} \wedge \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\left(R - \frac{\alpha}{2}\right)}\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{f_1} = \frac{\mu_0 b}{2\pi}I_1 I_2\left(\frac{1}{\left(R + \frac{\alpha}{2}\right)}\right)\overrightarrow{e_x}$$

8)

Scanné avec CamScanner

$$\vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\vec{e_z}$$

Déterminons les forces $\vec{f_3}$ et $\vec{f_4}$.

$d\vec{f_3} = I_2 d\vec{l} \wedge \vec{B_z}(M) d\vec{l}$ avec $d\vec{l} = dx\vec{e_x}$.

$= I_2 dx\vec{e_x} \wedge \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\vec{e_z}$

$$d\vec{f_3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{dx}{x}$$

$$\vec{f_3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_{R-\frac{\alpha}{2}}^{R+\frac{\alpha}{2}} \frac{dx}{x}$$

$$\vec{f_3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\left(\frac{R+\frac{\alpha}{2}}{R-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

De même , $\vec{f_4} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\left(\frac{R+\frac{\alpha}{2}}{R-\frac{\alpha}{2}}\right)$

9) La résultante de $\vec{f}$.

$\vec{f} = \vec{f_1} + \vec{f_2} + \vec{f_3} + \vec{f_4}$ *or* $\vec{f_3} + \vec{f_4} = \vec{0}$

$\vec{f} = \vec{f_1} + \vec{f_2}$

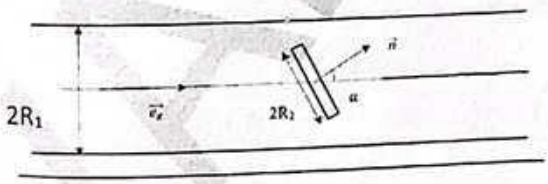
$$\vec{f} = \frac{\mu_0 b I_1 I_2}{2\pi}\left(\frac{1}{\left(R+\frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{1}{\left(R-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$

10) Conditions de rapprochement du cadre vers le fil.

Le cadre se rapproche du fil si $I_1 I_2 > 0$.

Donc le cadre se rapproche du fil à condition que la force de résistance $\vec{f} < 0 \Rightarrow$ $I_1 I_2 > 0$.

Exercice 3 :



1) Donnons l'expression du champ magnétique B_1.

Scanné avec CamScanner

$\overrightarrow{B_1} = \mu_0 n I_1 \overrightarrow{e_z}$

2) Déterminons l'expression du $\emptyset_{21}$.

$\emptyset_{21} = \int_{S_2} \overrightarrow{B_1} d\overrightarrow{S_2} = BS_2 \cos\alpha$ ou $\alpha = (\overrightarrow{e_z}, \vec{n})$

$\emptyset_{21} = \mu_0 n I_1 \pi R_2^2 \cos\alpha$

3) Inductance Mutuelle L_{21}

$L_{21} = \frac{\emptyset_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 n I_1 \pi R_2^2 \cos\alpha}{I_1}$

$L_{21} = \mu_0 n_1 \pi R_2^2 \cos\alpha$

4) Déterminons $e(t)$

$e(t) = -\frac{d\emptyset(t)}{dt} = -\frac{-d(\mu_0 n I_1 \pi R_2^2 \cos(wt))}{dt}$

$e(t) = \mu_0 n I_1 \pi R_2^2 w \sin(wt)$

5) $i(t) = \frac{e(t)}{R} \Rightarrow i(t) = \frac{\mu_0 n I_1 \pi R_2^2 w \sin(wt)}{R}$

6) Calculons I_m

On a : $i(t) = I_m \sin(wt)$; par identification

$I_m = \frac{\mu_0 n I_1 \pi R_2^2 w}{R}$

$I_m = ?$

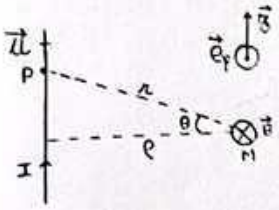
VALIDÉ UR LMD

Scanné avec CamScanner

Correction d'Electromagnétisme session 1

Exercice 1

1) Première méthode



Posons $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$ puisque $\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int \frac{\vec{dl}\wedge\vec{r}}{r^3}$

Et que $\vec{dl}\wedge\vec{r} = dl.r\ sin(\vec{dl},\vec{r})\vec{e}_\varphi$ et $sin(\vec{dl},\vec{r}) = cos\theta$

Alors $\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int \frac{dl.r}{r^3} cos\theta\ \vec{e}_\varphi$ ①

On a : $cos\theta = \frac{\rho}{r} \Rightarrow r = \frac{\rho}{cos\theta}$ et $l = \rho tg\theta$ car $tg\theta = \frac{l}{\rho} \Rightarrow dl = \frac{\rho}{cos^2\theta}d\theta$

D'où ① devient $\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int \frac{\rho}{cos^3\theta}\frac{cos^2\theta}{\rho^2} cos\theta\ \vec{e}_\varphi$

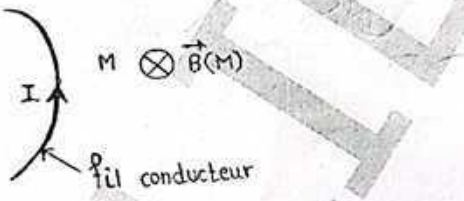
$$\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{cos\,\theta}{\rho}.d\theta\ \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}[sin\theta_1 - sin\theta_2]\ \vec{e}_\varphi$$

Et puisque le fil est infinie alors $\theta_1 = -\theta_2$ d'où

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu.I}{2\pi}.\vec{e}_\varphi}$$

2)



3) Le champ magnétique est non divergent.

Preuve : calcul la divergence du champ magnétique à partir du champ créé par un courant volumique.

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}\wedge\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}dv$$

$$div\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int div\left(\vec{j}\wedge\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right)dv$$

Scanné avec CamScanner

On rappelle que

$$\begin{cases} div(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b}.\overrightarrow{rot}(\vec{a}) - \vec{a}.\overrightarrow{rot}(\vec{b}) \\ \dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = -\overrightarrow{grad}\left(\dfrac{1}{PM}\right) \end{cases}$$

$$div\left(\vec{j} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right) = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\overrightarrow{rot}(\vec{j}) - \vec{j}.\overrightarrow{rot}\left(\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right)$$

Comme le vecteur densité volumique $\vec{j}$ est uniforme au point P, $\overrightarrow{rot}(\vec{j}) = \vec{0}$

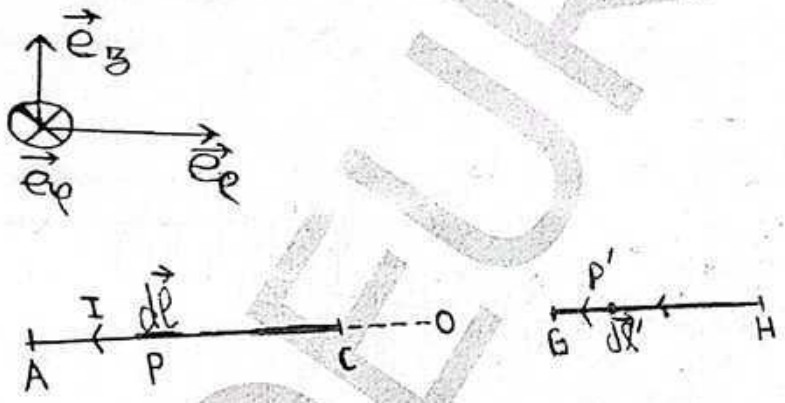
Par ailleurs $-\vec{j}.\overrightarrow{rot}\left(\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right) = -\vec{j}.\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{PM}\right)\right) = 0$

Donc $div\vec{B} = 0$

4) Sachant que Donc $div\vec{B} = 0$ et que la divergence du rotationnel d'un champ vectoriel est nulle, on en déduit qu'il existe un champ vectoriel $\vec{A}$ appelé potentiel de vecteur tel que : $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$

Exercice 2

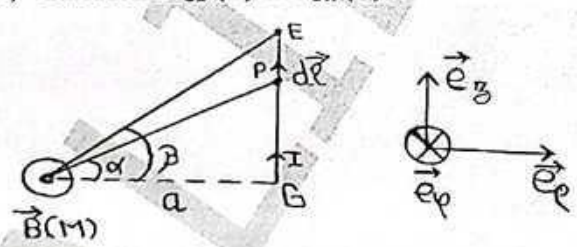
1) Calculons $\vec{B}_{AC}$ et $\vec{B}_{GH}$ au point O.



On a : $d\vec{l}//\overrightarrow{PO} \Rightarrow \vec{B}_{AC} = \vec{0}$

$d\vec{l}//\overrightarrow{PO} \Rightarrow \vec{B}_{GH} = \vec{0}$

2) Calculons $\vec{B}_{CD}(O)$ et $\vec{B}_{GH}(O)$



$$d\vec{B}_P(O) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}.\frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO}}{PO^3}$$

$$d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO} = -dl.PO\ sin(\overrightarrow{dl}, \vec{r})\vec{e}_\varphi$$

$$d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO} = -dl.POcos\alpha \text{ avec } dl = dz$$

Scanné avec CamScanner

Alors $\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{PO\,dz}{PO^3}\cos(\alpha)\vec{e}_\varphi$

$\cos(\alpha) = \frac{a}{PO} \Rightarrow PO = \frac{a}{\cos\alpha}$

$\tan(\alpha) = \frac{z}{a} \Rightarrow z = a.\tan\alpha$

$dz = \frac{a}{\cos^2\alpha}d\alpha$

D'où $\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^\beta \frac{a}{\cos\alpha}\times\frac{a}{\cos^2\alpha}\times\frac{\cos^3\alpha}{a^3}\times\cos(\alpha)d\alpha\vec{e}_\varphi$

$\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^\beta \cos(\alpha)\,d\alpha\vec{e}_\varphi$

$\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}[sin\alpha]_0^\beta\vec{e}_\varphi$

$\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}sin\beta\vec{e}_\varphi$

$\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\frac{a}{\sqrt{a^2+a^2}}\vec{e}_\varphi$

$\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\pi a}\vec{e}_\varphi = -\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi a}\vec{e}_\varphi$

Par symétrie, $\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi a}\vec{e}_\varphi$

3) On a : $DF = 2FG$

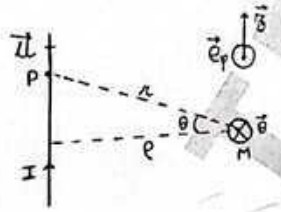
$\Rightarrow \vec{B}_{DF}(O) = 2\vec{B}_{FG}(O)$

$\vec{B}_{DF}(O) = -\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi a}\vec{e}_\varphi$

4) $\vec{B}(O) = \vec{B}_{AC} + \vec{B}_{GH} + \vec{B}_{DF} + \vec{B}_{FG} + \vec{B}_{GH}$

Exercice 3

1) Première méthode



Posons $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$ puisque $\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int\frac{\overrightarrow{dl}\wedge\vec{r}}{r^3}$

Et que $\overrightarrow{dl}\wedge\vec{r} = dl.r\,sin(\overrightarrow{dl},\vec{r})\vec{e}_\varphi$ et $sin(\overrightarrow{dl},\vec{r}) = cos\theta$

Alors $\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int\frac{dl.r}{r^3}cos\theta\,\vec{e}_\varphi$ ①

On a : $cos\theta = \frac{\rho}{r} \Rightarrow r = \frac{\rho}{cos\theta}$ et $l = \rho tg\theta$ car $tg\theta = \frac{l}{\rho} \Rightarrow dl = \frac{\rho}{\cos^2\theta}d\theta$

D'où ① devient $\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int\frac{\rho}{cos^3\theta}\frac{\cos^2\theta}{\rho^2}cos\theta\,\vec{e}_\varphi$

Scanné avec CamScanner

$$\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos\theta}{\rho}.d\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}[sin\theta_1 - sin\theta_2]\,\vec{e}_\varphi$$

Et puisque le fil est infinie alors $\theta_1 = -\theta_2$ d'où

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu.I}{2\pi}.\vec{e}_\varphi}$$

Deuxième méthode

D'après le théorème d'ampère on a :

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum I = \mu_0 I$$

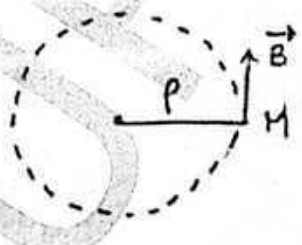
Or $\oint \vec{B}d\vec{l} = B.2\pi\rho$

D'où $B.2\pi\rho = \mu_0 I$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

Soit

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi}$$



2) Répresentation (Voir Cours)

3) Pour $\rho \geq R$

$$I = \int_{(S)} \vec{J}.d\vec{S}$$

Or $\vec{J} = J_0\vec{R}_z$

Et $d\vec{S} = dS\vec{e}_z$

D'où $I = \int_{(S)} J_0 d\vec{S}$

Avec $dS = \frac{1}{2}R^2 d\varphi$

$$I = J_0\int_{(S)} dS$$

$$I = J_0\int_{(S)} \frac{1}{2}R^2 d\varphi$$

$$I = J_0\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}R^2 d\varphi$$

$$I = \frac{1}{2}R^2 J_0\int_0^{2\pi} d\varphi$$

Scanné avec CamScanner

$$I = \frac{1}{2}R^2 J_0 2\pi$$

$$\boxed{I = \pi R^2 J_0}$$

Pour $\rho \leq R$

$$dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi$$

$I_{inF} = \int \vec{J}.d\vec{S}$ Or $\vec{J} = J_0\vec{e}_z$

Et $d\vec{S} = dS\vec{e}_z$

D'où $Int = \frac{1}{2}J_0\rho^2 \int_0^{2\pi} d\varphi$

$$Int = \frac{1}{2}J_0\rho^2 2\pi$$

$$Int = J_0\rho^2\pi$$

Or $J_0 = \frac{I}{\pi R^2}$ car on avait trouvé precedement que $I = \pi R^2 J_0$

Donc $Int = \frac{I}{\pi R^2}.\rho^2\pi$

$$\boxed{Int = I\left(\frac{\rho}{R}\right)^2}$$

4) Composantes du champ $\vec{B}$

à $\rho \leq k$

Dans la base cylindrique $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$

on a :

$$\begin{vmatrix} \beta_\rho = 0 \\ \beta_\varphi = \frac{\mu_0 I_{int}}{2\pi\rho} \\ \beta_z = 0 \end{vmatrix}$$ d'après l'expression de $\vec{B}$ vu dans la question 1) .

donc $\vec{B} = \frac{\mu_0 Int}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi\rho}\left[I\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]\vec{e}_\varphi$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\rho}{2\pi R^2} I\vec{e}_\varphi$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} \beta_\rho = 0 \\ \beta_\varphi = \frac{\mu_0\rho}{2\pi R^2} I\vec{e}_\varphi \\ \beta_z = 0 \end{vmatrix}}$$

à $\rho \geq k$

Dans la base cylindrique $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$

$$\vec{B}\begin{vmatrix} \beta_\rho = 0 \\ \beta_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \\ \beta_z = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{B}\begin{vmatrix} \beta_\rho = 0 \\ \beta_\varphi = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2\rho} \\ \beta_z = 0 \end{vmatrix}$$

5) Les composantes du potentiel vecteur $\vec{A}$.

Pour $\rho \leq R$

Nous avons ceci $\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{B}$

Scanné avec CamScanner

Comme l'expression du rotationnel en coordonnée cylindrique est :

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}[\rho A_\varphi]\right] \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right] \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\rho}\left[-\frac{\partial A_z}{\partial \varphi}\right] \\ -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ 0 \end{vmatrix}$$

En fait,

Nous savons que : $\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j} = -\mu_0 J_0 \vec{e}_z$

On remarque que : $A_z \neq 0$

$A_\rho = 0$

$A_\varphi = 0$

Ainsi $\vec{A} = A_z\vec{e}_z$

On vient de montrer que $\vec{A} = A_z\vec{e}_z$

D'où $\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = 0$

Par conséquent $\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ 0 \end{vmatrix}$

Donc

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\vec{e}_\varphi = B\varphi\vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2\rho}\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2\rho}$$

$$\Rightarrow A_z = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\int \frac{d\rho}{l}$$

$$\Rightarrow A_z = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\ln(\rho) + cste$$

Pour $\rho = R$ on a $A_z(R) = A_z$

$$\Rightarrow -\frac{\mu_0 I R^2}{2\pi R^2} + A_0 = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\ln(R) + cste$$

$$\Rightarrow cste = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} + \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\ln(R) + A_0$$

$$\Rightarrow cste = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{4} + \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\ln(R) + A_0$$

$$cste = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\left[-\frac{1}{2} + \ln(R)\right] + A_0$$

Donc $A_z = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\left[\frac{1}{2} - \ln(R) + \ln(\varphi)\right] + A_0$

$$\boxed{A_z = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\left[\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{R}{\varphi}\right)\right] + A_0}$$

Or $-\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = B_\varphi = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R^2}$

Scanné avec CamScanner

Car $\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\vec{e}_\varphi = B_\varphi \vec{e}_\varphi$

$dA_z = -\frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R^2} d\varphi$

$\Rightarrow A_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\rho^2 + cste$

Pour $\rho = 0$ on a $A_z(0) = A_0$

Donc $A_z(\rho) = -\frac{\mu_0 J_0}{4\pi R^2}\rho^2 + A_0$ or puisque $J_0 = \frac{I}{\pi R^2}$

$A_z(\rho) = -\frac{\mu_0 J_0}{4}\rho^2 + A_0$

$A_\rho = A_\varphi = 0$

Pour $\rho \geq R$

$\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2\rho}$

En effet

$rot\vec{A} = \vec{B}$

En coordonnée cylindrique

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}[\rho A_\varphi]\right] \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\varphi - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\right] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Car $\vec{A} = A_z\vec{e}_z \Rightarrow A_\rho = 0, A_\varphi = 0, \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = 0$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Examen de Mécanique des Systèmes

Année académique 2015/2016

Durée : 3heures

Exercice I *(8 points)*

Soit $R(o,\vec{x},\ \vec{y},\vec{z})$, un repère orthonormé direct donné. On considère le point P de coordonnées (x,y,z) et λ un paramètre réel. On note $\overrightarrow{T_p}$ le vecteur de composantes :

$$(z-1)e^{-\lambda}-\sqrt{2}y\ ;\quad (1-z)e^{\lambda}+\sqrt{2}\,x\ ;\quad ye^{\lambda}-xe^{-\lambda}\ .$$

1- Calculer $\overrightarrow{T_o}$, l'expression de $\overrightarrow{T_p}$ lorsque P est le point O.

2- Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{T}$, que l'on calculera, tel que :

$$\overrightarrow{T_p}-\overrightarrow{T_o}=\vec{T}\wedge\overrightarrow{OP}$$

En déduire que le champ vectoriel $T : P \to \overrightarrow{T_p}$ est un torseur.

3- prouver que T est un glisseur et que son axe central Δ passe par le point de coordonnées $(0,0,1)$.

4- Exprimer en fonction de λ les coordonnées x et y du point d'intersection Q de Δ avec le plan $z=0$. Préciser la nature géométrique de la courbe décrite par le point Q lorsque λ varie dans $\mathbb{R}$.

5- Quelle est la nature géométrique de la surface engendrée par Δ quand λ varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice II *(12 points)*

On se propose de faire l'étude mécanique de quelques propriétés d'un solide, de géométrie relativement simple, utilisé couramment dans les constructions civiles.

Scanné avec CamScanner

Un solide **(S)** a la forme d'une plaque triangulaire homogène, d'épaisseur négligeable, de masse **m**, et de côtés $AB = AC = a\sqrt{2}$; $BC = 2a$. Où **a** est un réel strictement positif. On appelle **H** le milieu du côté **BC**.

A- Eléments d'inertie du solide (S)

Soit $(R_H) = (H, X, Y, Z)$ un repère orthonormé lié à **(S)** tel que **(HX)** et **(HY)** sont confondus respectivement à **(HC)** et **(HA)** (*voir figure 1*).

1- Déterminer les coordonnées du centre d'inertie **G** du solide **(S)** dans (R_H).

2- Montrer que la matrice d'inertie du solide **(S)** en **G**, dans le repère orthonormé $(R_G) = (G, X, Y, Z)$ est de la forme

$$[J_G] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

Où I_1 ; I_2 ; et I_3 sont des scalaires que l'on déterminera en fonction de **m** et de **a**.

3- Quel est le moment d'inertie du solide **(S)** par rapport à la droite **(AB)** ?

B- Rotation uniforme du solide (S) autour d'un axe fixe

Dans toute la suite, on notera que

$$[J_H] = ma^2 \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Où $[J_H]$ est la matrice d'inertie du solide **(S)** en **H** dans le repère

$(R_H) = (H, X, Y, Z)$.

Soit **(Δ)** la droite parallèle à **(AB)** et passant par **H**. Le solide **(S)** effectue un mouvement de rotation autour de **(Δ)** avec une vitesse angulaire constante **ω**.

Scanné avec CamScanner

On définit une base orthonormée directe $(\vec{e}_1 ; \vec{e}_2; \vec{u})$ liée au solide (S) (*voir figure* 2), où $\vec{u}$ le vecteur directeur unitaire de (Δ) de même sens que $\overrightarrow{BA}$, et $\vec{e}_1$ appartenant au plan du solide (S).

1- Déterminer le moment cinétique de (S) en B dans le repère $(R_H) = (H, X, Y, Z)$.

2- En déduire sa valeur dans la base $(\vec{e}_1 ; \vec{e}_2; \vec{u})$.

3- Déterminer le moment dynamique de (S) en H dans le repère $(R_H) = (H, X, Y, Z)$.

4- Quelle est l'énergie cinétique du solide (S) ?

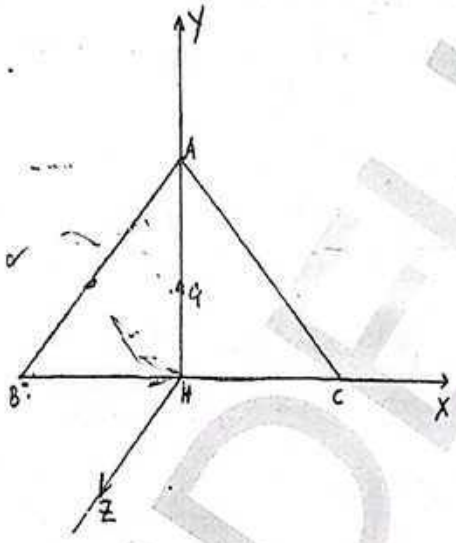


Figure 1

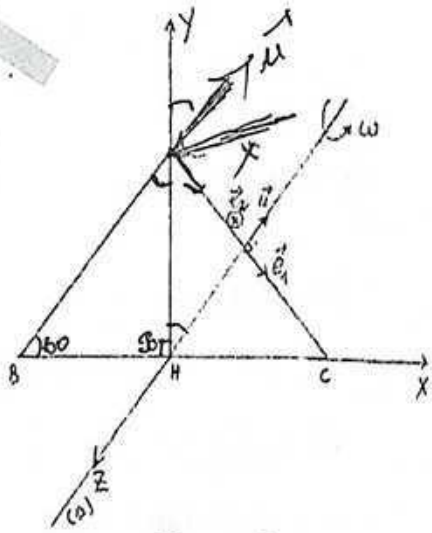


Figure 2

NB : *La cohérence du raisonnement et la clarté des propos seront prises en compte dans l'attribution ou non de l'intégralité des points.*

.../...

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR Mathématiques et Informatique

Année Académique 2016/2017

Licence 2

Examen de Mécanique des Systèmes

Première Session (Septembre 2017)

Durée : 3 Heures

Exercice 1

Soit $R(o,\vec{x},\ \vec{y},\vec{z})$, un repère orthonormé direct donné. On considère le point P de coordonnées (x,y,z) et λ un paramètre réel. On note $\overrightarrow{T_p}$ le vecteur de composantes :

$$\begin{pmatrix}(z-1)e^{-\lambda}-\sqrt{2}\,y\\(1-z)e^{\lambda}+\sqrt{2}\,x\\ye^{\lambda}-xe^{-\lambda}\end{pmatrix}$$

1- Calculer $\overrightarrow{T_o}$, l'expression de $\overrightarrow{T_p}$ lorsque P est le point O.

2- Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{T}$, que l'on calculera, tel que :

$$\overrightarrow{T_p}-\overrightarrow{T_o}=\vec{T}\wedge\overrightarrow{OP}$$

En déduire que le champ vectoriel $\mathbf{T}: P\to\overrightarrow{T_p}$ est un torseur.

3- Prouver que T est un glisseur et que son axe central Δ passe par le point de coordonnées (0,0,1).

4- Exprimer en fonction de λ les coordonnées x et y du point d'intersection Q de Δ avec le plan $z=0$. Préciser la nature géométrique de la courbe décrite par le point Q lorsque λ varie dans $\mathbb{R}$.

(5)

5- Quelle est la nature géométrique de la surface engendrée par Δ quand λ varie dans $\mathbb{R}$.

Scanné avec CamScanner

6- Calculer $\vec{T}/\|\vec{T}\|$ et montrer qu'il existe un vecteur $\vec{a}$ indépendant de λ (dont on précisera les composantes) tel que $\vec{T}.\vec{a}/\|\vec{T}\|$ est lui aussi indépendant de λ. Calculer l'angle $(\vec{T},\vec{a})$.

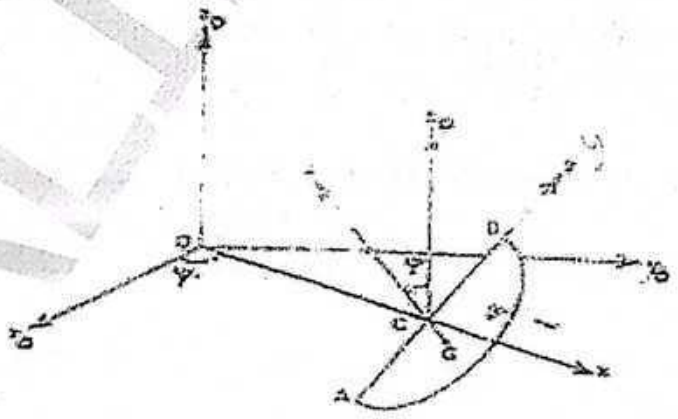
7- Montrer que S est une portion de Cône de révolution.

Exercice 2

Un solide plan S est constitué d'un demi-disque de rayon a, homogène de masse m, et d'épaisseur négligeable. On désigne par G le centre d'inertie de S et par C le milieu du diamètre AB (Figures). On note R le repère orthonormé direct $(C,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ lié à S tel que $\vec{y}$ est colinéaire à AB, dirigé de A vers B, l'axe $(C,\vec{z})$ est orthogonal à l'axe $(C,\vec{y})$ dans le plan du demi-disque.

Le repère $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ est orthonormé direct, avec l'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$ vertical ascendant. Le solide S est lié en C à l'extrémité d'une tige OC de longueur l et de masse négligeable. OC reste dans le plan $(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0})$ en étant confondu avec l'axe $(O,\vec{x})$. La liaison en C est telle que le plan de S reste vertical et perpendiculaire à OC. On pose : $\psi = (\overrightarrow{x_0},\vec{x})$ et $\varphi = (\overrightarrow{z_0},\vec{z})$.

1. Calculer les coordonnées de G dans R.
2. Déterminer l'opérateur d'inertie en C puis en G de S.
3. Calculer $\vec{\sigma}(G,S/R_0)$ et $\vec{\delta}(G,S/R_0)$.
4. Calculer $\vec{\sigma}(O,S/R_0)$ et $\vec{\delta}(O,S/R_0)$.



Scanné avec CamScanner

Examen de Mécanique des systèmes
Année académique 2017/2018
1ème session
3 heures

Exercice 1 (8 points)

Dans un repère orthonormé direct $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le champ de vecteurs $\vec{v}(M)$ dont les composantes sont définies en fonction des coordonnées (x, y, z) de M par :

$$\begin{cases} v_x = 1 + 3y - tz \\ v_y = -3x + 2tz \\ v_z = 2 + tx - t^2y \end{cases}$$ où t est un paramètre réel.

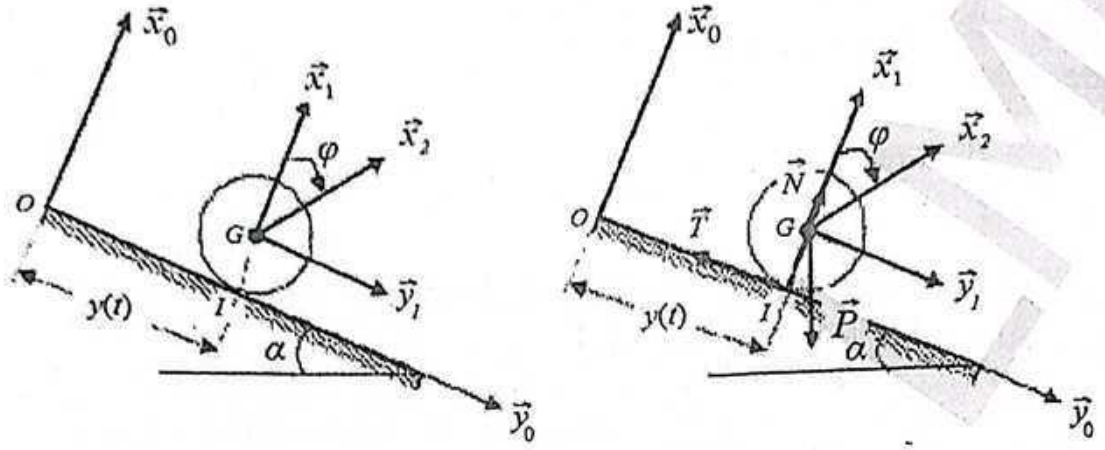
1. Calculer le vecteur $\vec{v}(M)$ au point O.
2. Pour quelles valeurs de t, ce champ est antisymétrique ?
3. Pour chaque valeur trouvée de t, déterminer les éléments de réduction du torseur (résultante et moment en O).
4. Décomposer le torseur associé à $\vec{v}(M)$ en une somme d'un couple et d'un glisseur dont on précisera les éléments de réduction.
5. Déterminer la position de l'axe central du torseur pour t = 0 et t = 2.

Exercice 2 (12 points)

Un disque plein **D** de rayon **a**, de masse **m** roule sans glisser sous l'effet de la gravitation sur un plan incliné d'un angle **α** par rapport à l'horizontal. Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère fixe lié au plan incline, $R_1(G,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ un repère lié au centre d'inertie G du disque et $R_2(G,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ un repère en rotation par rapport à l'axe $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$ tel que $(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = (\vec{y}_1,\vec{y}_2) = \boldsymbol{\varphi}$.

A l'instant initial, le disque est immobile. La réaction au point de contact entre le disque et le plan incliné a deux composantes, l'une $\vec{N}$ normale au plan incline, l'autre $\vec{T}$ tangentielle à ce dernier.

Scanné avec CamScanner



1.a) Justifier que la matrice d'inertie du disque **D** a pour expression :

$$J(G,R_2)=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 2A \end{pmatrix}_{R_2}.$$

b) Montrer que le moment d'inertie A peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{A=\frac{1}{4}ma^2.}$$

On prendra R_1 comme repère de projection.

2. Déterminer la vitesse $\vec{V}_0(G/R_0)$ et l'accélération $\vec{\gamma}_0(G/R_0)$ du point G.
3. Appliquer le théorème de la résultante dynamique au disque D.

4.a) Montrer que le moment cinétique en G du disque par rapport à R_0 est :

$$\mathbf{\vec{\sigma}(G\in D/R_0)=2A\dot{\varphi}\,\vec{z}_1.}$$

4.b) Appliquer le théorème du moment dynamique au disque D et donner l'expression de la réaction tangentielle T en fonction m, a et $\ddot{\varphi}$.

5. Utiliser la condition de roulement sans glissement du disque sur le plan incliné, pour justifier que :

$$\mathbf{\dot{y}-a\dot{\varphi}=0.}$$

6. En déduire les expressions de N, T, $\ddot{y}$ et $\ddot{\varphi}$ en fonction de m, g, a et α.
7. Exprimer l'énergie cinétique du disque en fonction de m et $\dot{y}$ en tenant compte de la condition de roulement sans glissement.

Scanné avec CamScanner

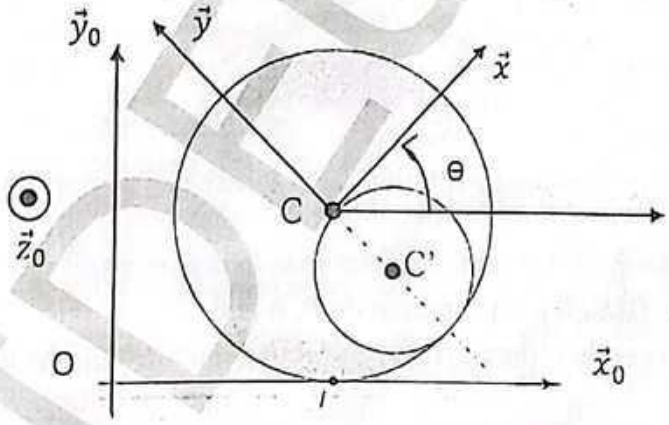
Examen de Mécanique des systèmes
Année académique 2018/2019
1ère session
3 h

Exercice 1 **4 points**

Dans un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on considère les trois glisseurs définis par les trois vecteurs :
$\vec{V}_1 = (1,0,-1)$ d'origine $A(1,0,0)$;
$\vec{V}_2 = (1,2,2)$ d'origine $B(0,1,0)$;
$\vec{V}_3 = (\lambda, \mu, \nu)$ d'origine $C(0,0,1)$.
Soit [T] la somme des trois glisseurs.
1. Déterminer (λ, μ, ν) pour que [T] soit un couple et trouver son moment.
2. Déterminer la relation doit lier λ, μ et ν pour que [T] soit un glisseur ?
3. Dans le cas où $(\lambda, \mu, \nu) = (-2; -2; 0)$, trouver les équations de l'axe central de [T]. Que peut-on dire de la direction de l'axe central.

Exercice 2 **8 points**

Le système D étudié, est un disque homogène D_1 de centre d'inertie C de rayon R et de masse M dont on a ôté un disque D_2 de rayon $\frac{R}{2}$ et de centre d'inertie C', tangent au premier disque.



Le repère fixe $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est orthonormé direct et le repère $\mathcal{R}(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au système D, avec $\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ et $\vec{z} = \vec{z}_0$.
On note $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}) = (\vec{y}_0, \vec{y})$.

1.a) Déterminer la masse M' du système D.
b) En déduire la position de son centre d'inertie G dans le repère $\mathcal{R}$.
2. On rappelle que le moment d'inertie d'un disque homogène de rayon a et de masse m, par rapport à un axe passant par son centre d'inertie C et orthogonal au plan du disque (plein et homogène) est $I = \frac{1}{2}ma^2$.
a) Déterminer le moment d'inertie du disque D_1 par rapport à l'axe $(G; \vec{z})$.
b) Déterminer le moment d'inertie du disque D_2 par rapport à l'axe $(G; \vec{z})$.
c) En déduire le moment d'inertie du système D par rapport à l'axe $(G; \vec{z})$.

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

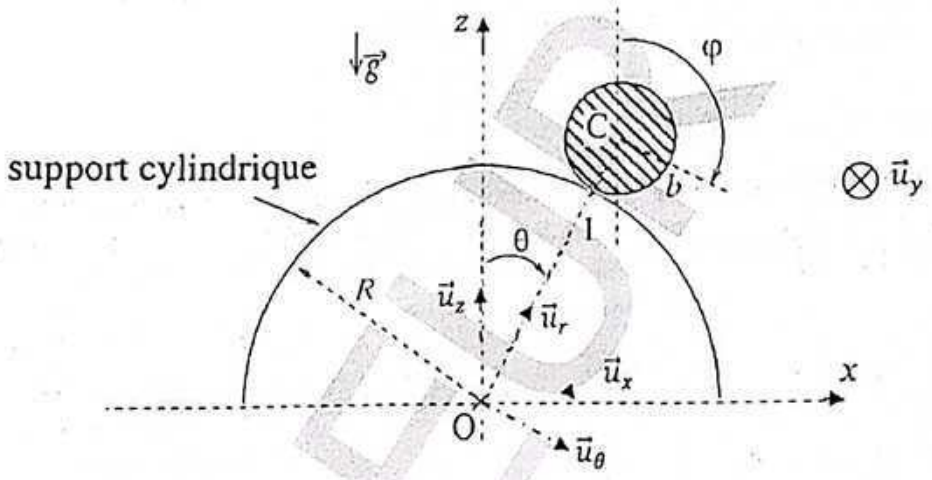
3. Le système D roule sans glisser sur un plan horizontal.
Montrer que le moment cinétique du système en G est

$$\vec{\sigma}(G, D/\mathcal{R}_0) = \frac{37}{96} MR^2 \dot{\theta} \vec{z}.$$

Exercice 3 **8 points**

Une sphère homogène (S), de masse m, de centre C et de rayon b, se déplace sur un support cylindrique (S_c) fixe de rayon R de centre O. On supposera que la sphère reste en permanence en contact avec le support cylindrique. La position de C est repérée par un angle θ avec la verticale et la rotation de la sphère est décrite par un angle φ entre un point fixe de la sphère et la verticale (voir figure).

La sphère est lâchée du sommet du cylindre ($\theta = 0$), sans vitesse initiale ; puis elle roule sans glisser du côté $\theta \geq 0$. On admettra que le mouvement de C se fait dans un plan (xOz).



1.a) Quel est le vecteur instantané de rotation de la sphère par rapport au repère fixe $\mathcal{R}(O, x, y, z)$?

b) Déterminer le vecteur vitesse en C de deux manières et montrer que $(R + b)\dot{\theta} = b\dot{\varphi}$. En déduire l'expression de $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$ en fonction de R, b et $\dot{\theta}$.

2. Déterminer les éléments de réduction du torseur dynamique en C en fonction de R, b, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.

3.a) Appliquer les théorèmes de la résultante et du moment dynamique à la sphère.

b) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{7}{5}(\mathrm{R} + \mathrm{b})\ddot{\theta}\,\dot{\theta} = \mathrm{g}sin\theta\,\dot{\theta}.$$

4. Intégrer la relation précédente et déduire, les expressions de la force de frottement (force de résistance au glissement) $\|\vec{T}\|$ sur la sphère et de la composante normale $\|\vec{N}\|$ de la réaction du cylindre sur la sphère, en fonction de m, g et θ.

NB : La matrice d'inertie de la sphère est

$$J(C, \mathcal{R}^*) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}_{(C,x,y,z)} \quad \text{avec } A = \frac{2}{5} mb^2.$$

Scanné avec CamScanner

EXAMEN – LICENCE 2 : 1ère session
Mécanique des systèmes
Année académique 2019/2020
Durée : 2h00
(Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1 et 2)

Exercice 1 (4 points)



Soit un quart de disque de rayon R de centre O et de masse surfacique non uniforme $\sigma(r) = a\,r$, avec a une constante positive.

1) Calculer la masse **m** du quart de disque.
2) Calculer son moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire au quart de disque passant par **O** en fonction de **R** et **m**.

Exercice 2 (6 points)

Dans un repère $\mathcal{R}(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé et direct, on considère les torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ dont les éléments de réduction au point O et au point O' **(0, 1, 1)** sont respectivement $[\vec{R}_1, \vec{M}_{1O}]$ et $[\vec{R}_2, \vec{M}_{2O'}]$ définis par :

$$[T_1(O)] = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & -a\sin\alpha \\ \sin\alpha & a\cos\alpha \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad [T_2(O')] = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & -(a+1)\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -(a+1)\cos\alpha \\ 0 & \cos\alpha \end{Bmatrix};$$

où a et α sont des constantes réelles.

1) Préciser la nature des deux torseurs.
2) Déterminer l'équation de l'axe central de $[T_1]$ et en déduire le moment $\vec{M}_{1P}$ en un point **P** de cet axe.
3) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles le torseur $[T] = [T_1] + [T_2]$ est un glisseur.
4) Calculer le co-moment des deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$.
5) Trouver l'axe central de **[T]**.

Exercice 3 (10 points)

On considère un référentiel auquel est associé lerepère orthonormé direct $\mathcal{R}_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ vis-à-vis duquel on étudie le mouvement du système **Σ** suivant constitué:

- d'une tige **T** infiniment mince, de masse négligeable et de longueur **2R**, de milieu E et dont l'une des extrémités est liée à l'axe $O\vec{z}_0$ au point **A** défini par $\overrightarrow{OA} = R\vec{z}_0$. La liaison en A est telle que **T** peut tourner autour de ce point vis-à-vis de $\mathcal{R}_0$.

Scanné avec CamScanner

- d'un disque **D** de centre B, de rayon R restant en contact ponctuel avec le plan $\Pi(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0)$. Le centre de **D** est lié à l'extrémité libre de **T** et la liaison est telle que **T** reste perpendiculaire à **D**, ce dernier pouvant tourner autour de **AB**. On note I le point de contact avec le plan Π à l'instant t.

Pour repérer Σ vis-à-vis de $\mathcal{R}_0$ on introduit la base orthonormée directe $(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ avec :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2R}$$

et on pose

$$\psi(t) = (\vec{x}_0,\vec{u}) = (\vec{y}_0,\vec{v}).$$

De même, en considérant un point **P** lié à lapériphérie de **D**, on introduit la base orthonormée directe $(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ avec

$$\vec{w} = \frac{\overrightarrow{BP}}{R}$$

et on pose

$$\theta(t) = (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{z}_0,\vec{z}).$$

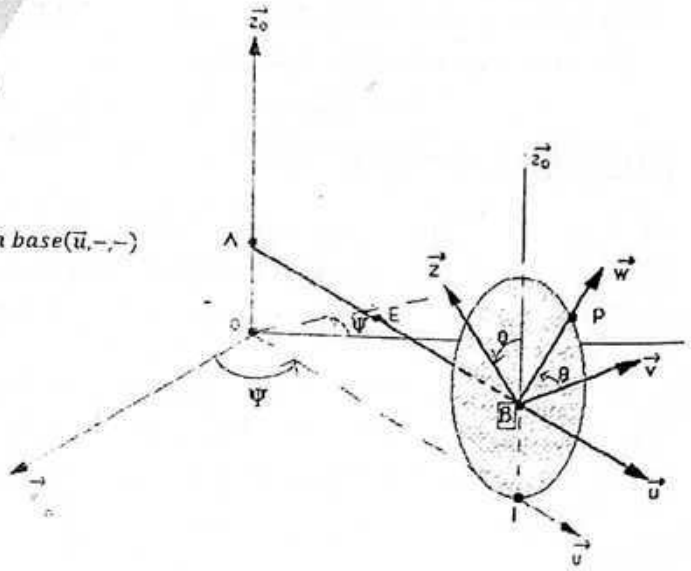
Dans tout ce qui suit, les résultats vectoriels seront donnés, projetés dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$.

1) a) Déterminer les éléments de réduction en **E** du torseur cinématique associé au mouvement de **T** vis-à-vis de $\mathcal{R}_0$.
   b) Déterminer les éléments de réduction en **B** du torseur cinématique associé au mouvement de **D** par rapport à $\mathcal{R}_0$.
2) On suppose que **D** roule sans glisser sur Π. Déterminer une relation entre $\dot{\theta}$ et $\dot{\psi}$ aduisant ce roulement sans glissement.
3) Calculer $\vec{\sigma}(B,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{\delta}(B,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0)$.
4) Calculer l'énergie cinétique $E_c(\Sigma/\mathcal{R}_0)$.

<u>On donne :</u>

Matrice d'inertie du disque de rayon R

$$J_B(D) = \frac{mR^2}{4}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{\forall\ la\ base(\vec{u},-,-)}$$



Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFRMI L2 2020-2021

EXAMEN DE MECANIQUE DES SYSTEMES
SESSION 1
Durée: 3heures

Exercice 1 (4 points)

Dans un repère orthonormé direct $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le champ de vecteurs $\vec{V}(M)$ dont les composantes sont définies en fonction des coordonnées (x, y, z) de M par:

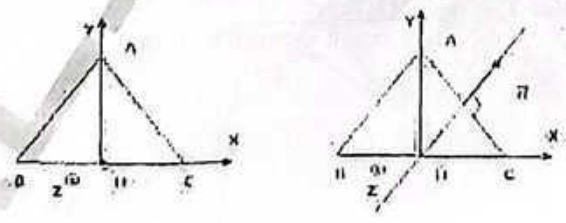
$$\begin{cases} V_x = 1 + 3y - tz \\ V_y = -3x + 2tz \\ V_z = 2 + tx - t^2 y \end{cases} \quad \text{où t est un paramètre réel.}$$

1) Calculer le vecteur $\vec{V}(M)$ au point O.
2) Pour quelles valeurs de t, ce champ est antisymétrique ?
3) Pour chaque valeur trouvée de t, déterminer les éléments de réduction du torseur (résultante et moment en O)
4) Décomposer le torseur associé à $\vec{V}(M)$ en une somme d'un couple et d'un glisseur dont on précisera les éléments de réduction.
5) Déterminer la position de l'axe central du torseur pour $t = 0$ et $t = 2$.

Exercice 2 (6 points)

Un solide (S) à la forme d'une plaque triangulaire homogène d'épaisseur négligeable, de masse m, et de côtés $AB = AC = a\sqrt{2}$, $BC = 2a$. Où a est un réel strictement positif. On appelle H le milieu du côté BC.
Soit $(R_H) = (H; X, Y, Z)$ un repère orthonormé lié à (S) tel que (HX) et (HY) sont confondus respectivement à (HC) et (HA) (*voir figure*).
1) Déterminer les coordonnées du centre d'inertie G du solide (S) dans (R_H).
2) a) Montrer que la matrice d'inertie du solide (S) en H dans le repère orthonormé (R_H) est de la forme $[J_M] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}$
où M, N et P sont des scalaires que l'on déterminera en fonction de n et de a.

b) En déduire la matrice d'inertie du solide (S) en G dans le repère orthonormé $(R_G) = (G; X, Y, Z)$.
3) Quel est le moment d'inertie du solide (S) par rapport à la droite (AB)?

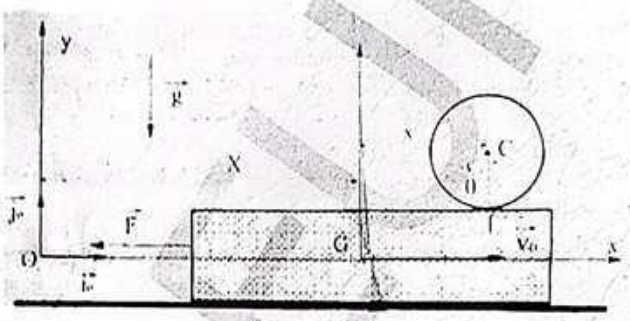


Scanné avec CamScanner

Exercice 3 (10 points)

On considère le système matériel composé d'un plateau (P) et d,un cylindre (C). Le plateau, de masse m est animé d'un mouvement rectiligne horizontal et uniforme de vitesse $\vec{v}_0$. Le cylindre (C), placé sur le plateau (P), est homogène , de masse m, de rayon a et son axe est perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}_0$. Le cylindre est initialement immobile par rapport au plateau. A l'instant $t = 0$, on applique au plateau une force $\vec{F}$ de freinage constante. La résultante des forces de réaction du plateau sur le cylindre est $\vec{R} = \vec{T} + N\,\vec{j}_0$ $(N > 0)$. Le coefficient de frottement de glissement du plateau sur le cylindre est f. On désigne par $\mathcal{R}_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ le repère fixe est par $\mathcal{R}_G(G, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ un repère lié au plateau. Le centre C du cylindre est repéré, par rapport à $\mathcal{R}_G$ par $x = KI$ avec $I = K$ en $x = 0$ à l'instant initial $(t = 0)$. La rotation du cylindre est repérée par l'angle θ tel que $\theta = 0$ à $t = 0$. Le mouvement de (P) par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ est repéré par $X = OG$ avec $X = 0$ pour $t = 0$ et $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{i}_0$.

Dans tout le problème, on considère que le cylindre roule sans glisser sur le plateau.



1) a) Faites un schéma montrant les différentes forces agissant sur le système.

b) Préciser la condition de roulement sans glissement du cylindre sur le plateau.

2) En appliquant le P.F.D dans le repère $\mathcal{R}_0$ au cylindre seul, puis au plateau seul, donner les équations différentielles qui régissent le mouvement du système.

3) Trouver la relation liant $\ddot{x}$ et $\ddot{X}$. En déduire que : $x(t) = \dfrac{F t^2}{3m + m_1}$

4) Exprimer $X(t)$ en fonction de F, v_0, m, m_1 et t. Trouver l'instant t_a correspondant à l'arrêt du plateau.

5) Sachant que le plateau restera immobile pour $t \geq t_a$ donner les valeurs de la force de frottement T et de $\vec{v}(C/\mathcal{R}_0)$.

6) Quelle est la nature du mouvement du cylindre pour $t \geq t_a$.

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFRMI L2 2020-2021

EXAMEN DE MECANIQUE DES SYSTEMES
SESSION 2
Durée: 3h00

Exercice 1 (4 points)

Dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient $A(3,0,0)$ et $B(-1,2,1)$ deux points de l'espace. Soit $\vec{M}$ un champ de vecteurs défini par:
$\vec{M}(O) = (1,1,4)$, $\vec{M}(A) = (1,1,1)$, $\vec{M}(B) = (2,-1,9)$.

1) Montrer que $\vec{M}$ est un champ antisymétrique.
2) Déterminer la résultante $\vec{R}$ du torseur associéau champ $\vec{M}$.
3) En déduire $\vec{M}(P)$ en tout point $P(x,y,z)$ de l'espace.
4) Déterminer l'axe central (Δ) du torseur, et calculer $\vec{M}$ sur (Δ).

Exercice 2 (8 points)

Soit $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct. Une tige rectiligne AB de longueur L, est mobile relativement à $\mathcal{R}_0$ de manière que A se déplace sur $O\vec{z}_0$ et B se déplace dans le plan $O\vec{x}_0\vec{y}_0$ (figure 1). On suppose que le montage permet pour la côte de A des valeurs positives et négatives, et que B ne vient jamais en O. On note $\mathcal{R}_1(O, \vec{u}, \vec{v}_1, \vec{z}_0)$ le repère orthonormé direct tel que $\vec{u}$ soit le vecteur unitaire de OB dirigé de O vers B.
On pose $\overrightarrow{BA} = L\vec{z}$ et $\vec{v} = \vec{v}_1 \wedge \vec{z}$.

1) Justifier le fait que la position de AB relativement à $\mathcal{R}_0$ est déterminée par les angles $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{u})$ autour de $\vec{z}_0$ et $\beta = (\vec{z}_0, \vec{z})$ autour de $\vec{v}_1$.
2) Calculer $\vec{\Omega}(AB/\mathcal{R}_0)$ par ses composantes dans $\mathcal{R}_1$.
3) Caculer $\vec{V}(A/\mathcal{R}_0)$, $\vec{V}(B/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{V}(B/\mathcal{R}_1)$ dans $\mathcal{R}_1$.
4) Retrouver $\vec{V}(B/\mathcal{R}_0)$ en utilisant la composition de mouvements.
5) Calculer les composantes dans la base de $\mathcal{R}_1$ de l'accélération absolue de B.

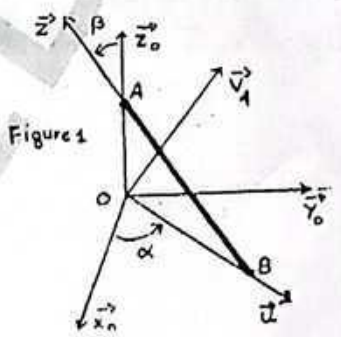


Figure 1

Scanné avec CamScanner

Exercice 3 (8 points)

On considère une tige (EF), homogène, de masse m, de longueur $2a$ et de centre d'inertie G qui glisse sans frottement à l'intérieur d'un anneau (Λ) circulaire de centre C et de rayon r (figure 2). Tout en restant dans le plan vertical (xOy) du repère $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, l'anneau roule sur l'axe Ox du repère $\mathcal{R}$ avec une vitesse angulaire angulaire ω **constante**. On désigne par, θ l'angle formé, à chaque instant, entre les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CG}$; x l'abscisse du point C sur l'axe Ox; $\vec{g} = -g\vec{y}$ le vecteur accélération de la pésanteur; I le point de contact de l'anneau avec l'axe Ox et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ une base orthonormée directe liée à la tige (EF).

On pose $\overrightarrow{GC} = L\vec{v}$ avec $L = \sqrt{r^2 - a^2}$, $\overrightarrow{CE} = r\vec{u}_2$ et $\overrightarrow{CF} = r\vec{u}_1$.

1)Montrer que $\vec{\Omega}(EF/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\vec{z}$ et calculer $\vec{V}(G)$.

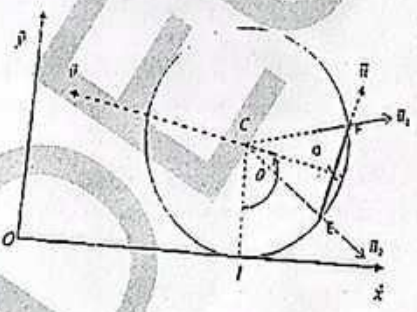
2) Calculer le moment d'inertie J de la tige (EF) par rapport à son axe $G\vec{z}$.

3) Déterminer le torseur dynamique de la tige (EF) au point G : $[m\vec{\gamma}(G), \delta(G, EF/\mathcal{R})]$.

4) En utilisant le théorème du moment dynamique à la tige (EF) au point C, montrer que l'une de ses équations dans le repère $\mathcal{R}$ s'écrit:

$$\ddot{\theta}\left[L + \frac{J}{mL}\right] + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0$$

5) En utilisant le théorème de la résultante dynamique, calculer les réactions de contact $\vec{R}_E$ et $\vec{R}_F$ aux points E et F.



VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

UFHB-UFR MI **Année academique :2015-2016**

Correction de Mécanique des systèmes session 2

Exercice 1

$$\overrightarrow{T_p} = \begin{cases} (z-1)e^{-\lambda} - \sqrt{2}y \\ (1-z)e^{\lambda} + \sqrt{2}x \\ ye^{\lambda} - xe^{-\lambda} \end{cases}$$

1. Calculons $\overrightarrow{T_o}$ avec $o \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{T_o} = \begin{cases} -e^{-\lambda} \\ e^{\lambda} \\ 0 \end{cases}$$

2. Montrons qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{T}$ que l'on calculera tel que $\overrightarrow{T_p} - \overrightarrow{T_o} = \overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{OP}$

$$\overrightarrow{T_p} = \begin{pmatrix} -e^{-\lambda} \\ e^{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & e^{-\lambda} \\ \sqrt{2} & 0 & -e^{\lambda} \\ -e^{-\lambda} & e^{\lambda} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

verifions que $F = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & e^{-\lambda} \\ \sqrt{2} & 0 & -e^{\lambda} \\ -e^{-\lambda} & e^{\lambda} & 0 \end{pmatrix}$ est egal $-{}^tF$

on a : ${}^tF = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -e^{-\lambda} \\ -\sqrt{2} & 0 & e^{\lambda} \\ e^{-\lambda} & -e^{\lambda} & 0 \end{pmatrix}$

on a : $-{}^tF = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & e^{-\lambda} \\ \sqrt{2} & 0 & -e^{\lambda} \\ -e^{-\lambda} & e^{\lambda} & 0 \end{pmatrix} = F$ donc il existe $\overrightarrow{T}$ telle que $\overrightarrow{T_p} - \overrightarrow{T_o} = \overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{OP}$

soit $\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

posons $\overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{OP} = K$

$K = (bz - cy)\overrightarrow{i} + (cx - az)\overrightarrow{j} + (ay - bx)\overrightarrow{k}$ (1)

or $\overrightarrow{T_p} - \overrightarrow{T_o} = (-\sqrt{2}y + e^{-\lambda}z)\overrightarrow{i} + (\sqrt{2}x - e^{\lambda})\overrightarrow{j} + (-e^{-\lambda}x + e^{\lambda}y)\overrightarrow{k}$ (2)

(1) = (2) et donc par identification on obtient :

$$\begin{cases} bz - cy = -\sqrt{2}y + e^{-\lambda}z \\ cx - az = \sqrt{2}x - e^{\lambda} \\ ay - bx = -e^{-\lambda}x + e^{\lambda}y \end{cases}$$

d'où $c = \sqrt{2}$

$b = e^{-\lambda}$

$a = e^{\lambda}$

on a : $\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} e^{\lambda} \\ e^{-\lambda} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Il existe un vecteur antisymetrie équiprojectif et donc $T : p \mapsto \overrightarrow{T_p}$ est un torseur

Scanné avec CamScanner

3. Prouvons que T est un glisseur et que son axe centrale Δ passe par le point de coordonnée $(0,0,1)$

$\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} e^{\lambda} \\ e^{-\lambda} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ qui est différent de zero

Calculons l'invariance scalaire

$\overrightarrow{T}.\overrightarrow{T_p} = e^{\lambda}.(z-1)e^{-\lambda} - \sqrt{2}ye^{\lambda} + (1-z)e^{\lambda}e^{-\lambda} + \sqrt{2}xe^{-\lambda} + \sqrt{2}ye^{\lambda} - \sqrt{2}xe^{-\lambda}$

$\overrightarrow{T}.\overrightarrow{T_p} = 0$

d'où $\overrightarrow{T}$ est un glisseur .

T étant un glisseur son axe central est l'ensemble des moment nul

Vérifions que $(0,0,1) \in \Delta$

posons $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calculons $\overrightarrow{T_u}$

$\overrightarrow{T_u} = \begin{pmatrix} (1-1)e^{-\lambda} \\ (1-1)e^{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{T_u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc le moment est nul d'où $\overrightarrow{T_u} \in \Delta$

4. exprimons en fonction de λ les cordonnées x et y du point d'inertsection Q de Δ avec le plan $Z = 0$

soit $\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} e^{\lambda} \\ e^{-\lambda} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

un point de Δ

$\Delta : \begin{cases} x = e^{\lambda}t + 0 \\ y = e^{-\lambda}t \\ z = \sqrt{2}t + 1 \end{cases} \Longrightarrow \Delta : \begin{cases} x = e^{\lambda}t + 0 \\ y = e^{-\lambda}t \\ z = \sqrt{2}t + 1 \end{cases}$ Q est telle que $z = 0$

$Q : \begin{cases} x = e^{\lambda}t + 0 \\ y = e^{-\lambda}t \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \sqrt{2}t + 1 = 0 \Longrightarrow t = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$Q : \begin{cases} x = \frac{-\sqrt{2}}{2}e^{\lambda}t + 0 \\ y = \frac{-\sqrt{2}}{2}e^{-\lambda}t \\ z = 0 \end{cases}$ précisons la nature lorsque λ varie dans $\mathbb{R}$

$xy = \frac{-\sqrt{2}}{2} \times \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow 2xy = 1$

d'où la courbe est une hyperpbole quand λ varie dans $\mathbb{R}$

5. $\Delta : \begin{cases} x = e^{\lambda}t + 0 \\ y = e^{-\lambda}t \\ z = \sqrt{2}t + 1 \end{cases} \Longrightarrow \Delta : \begin{cases} x = e^{\lambda}t \\ y = e^{-\lambda}t \\ z = \sqrt{2}t + 1 \end{cases}$

t étant fixe dans $\mathbb{R}$ la surface engendré est le plan de côte $z = \sqrt{2}t + 1$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2

$R_0(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$ repère fixe.

$R_1(G,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$ en translation par rapport à $R_0 \Rightarrow \vec{\Omega}_1^0 = \vec{0}$

$R_2(G,\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_2})$ est tel que : $(\vec{x_1},\vec{x_2}) = (\vec{y_1},\vec{y_2}) = \varphi$ et $\vec{\Omega}_2^1 = \dot{\varphi}\vec{z_1} = \dot{\varphi}\vec{z_0}$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IG} = \begin{matrix}0\\y+\\0\end{matrix}_{R_1} \begin{matrix}a\\0=\\0\end{matrix}_{R_1} \begin{matrix}a\\y\\0\end{matrix}_{R_1}$$

1. Vitesse $\vec{V}^0(G)$ et accélération $\vec{\gamma}^0(G)$ du point G ;

Par dérivation :

$$\vec{V}^0(G) = \frac{d^0\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{d^1\overrightarrow{OG}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OG} = \begin{matrix}0\\\dot{y}\\0\end{matrix}_{R_1} \quad ; \text{car } \vec{\Omega}_1^0 = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^0\vec{V}^0(G)}{dt} = \frac{d^1\vec{V}^0(G)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(G) = \begin{matrix}0\\\ddot{y}\\0\end{matrix}_{R_1} \quad ; \text{car } \vec{\Omega}_1^0 = \vec{0}$$

2. Théorème de la résultante dynamique appliqué au disque

La résultante des forces extérieures appliquées au disque est égale à la masse du disque par l'accélération de son centre d'inertie.

$$\sum_i \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}^0(G) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{T} + \vec{N} + \vec{P} = m\vec{\gamma}^0(G) \qquad (1)$$

La projection de cette équation sur les axes du repère R_1 donne deux équations scalaires :

$$N - mg\cos\alpha = 0 \qquad (3)$$

$$-T + mg\sin\alpha = m\ddot{y} \qquad (4)$$

3. Théorème du moment dynamique appliqué au disque

Le moment résultant des forces extérieures appliquées au disque est égale au moment dynamique du disque au même point G.

Scanné avec CamScanner

$\sum_i \vec{M}(\vec{F}_{ext})/_G = \vec{\delta}^0(G) \Leftrightarrow \vec{GI} \wedge \vec{T} + \vec{GI} \wedge \vec{N} = \vec{\delta}^0(G)$ comme $\vec{GI}$ // $\vec{N}$ elle devient :

$$\vec{GI} \wedge \vec{T} = \vec{\delta}^0(G) \qquad (4)$$

Exprimons chacun des termes de cette équation : $\vec{GI} \wedge \vec{T} = \begin{Bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ -T \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ aT \end{Bmatrix} = aT\vec{z}_1$

Le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique, d'où : $\vec{\delta}^0(G) = \dfrac{d^0\vec{\sigma}^0(G)}{dt}$

Le moment cinétique du disque est donné par : $\vec{\sigma}^0(G) = I_{C/R_2}.\vec{\Omega}_2^0$

$$\vec{\sigma}^0(G) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{R_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A\dot{\varphi} \end{pmatrix} = A\dot{\varphi}\vec{z}_1 = A\dot{\varphi}\vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}^0(G) = \frac{d^0\vec{\sigma}^0(G)}{dt} = \frac{d^1\vec{\sigma}^0(G)}{dt} = A\ddot{\varphi}\vec{z}_1 = \frac{ma^2}{2}\ddot{\varphi}\vec{z}_1 \quad \text{car } \vec{\Omega}_1^0 = \vec{0}$$

En égalisant les deux expressions des moments nous obtenons :

$$aT = \frac{ma^2}{2}\ddot{\varphi} \qquad \Rightarrow \quad T = \frac{ma}{2}\ddot{\varphi} \qquad (5)$$

4. Equation scalaire liant les paramètres cinématiques $\dot{x}, \dot{\theta}$ et a et qui traduisent la condition de roulement sans glissement du disque sur le plan incliné :

La condition de roulement sans glissement est vérifiée si la vitesse du point de contact du disque et du plan incliné est nulle : $\vec{V}_g(I) = \vec{V}_s^0(I) - \vec{V}_P^0(I) = \vec{0}$

Or : $\vec{V}_P^0(I) = \vec{0}$ alors : $\vec{V}_s^0(I) = \vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{GI} = \vec{0}$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{y} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{Bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{y} - a\dot{\varphi} = 0 \qquad (6)$$

Scanné avec CamScanner

5. Expressions de N, T, $\ddot{y}$ et $\ddot{\varphi}$ en fonction de m, g, α et a ;

L'équation **(3)** donne : $N = mg\cos\alpha$

L'équation **(6)** $\ddot{y} = a\ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \dfrac{\ddot{y}}{a}$ l'équation **(4)** devient : $-\dfrac{ma}{2}\dfrac{\ddot{y}}{a} + mg\sin\alpha = m\ddot{y}$

On déduit : $\ddot{y} = \dfrac{2}{3}g\sin\alpha$ d'où : $\ddot{\varphi} = \dfrac{2}{3a}g\sin\alpha$

L'équation **(5)** donne : $T = \dfrac{mg}{3}\sin\alpha$

6. Energie cinétique du disque en fonction de m, a, $\dot{y}$ et $\dot{\varphi}$;

L'énergie cinétique totale est égale à l'énergie cinétique de translation + l'énergie cinétique de rotation : $E_C = \dfrac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 + \dfrac{1}{2}\vec{\Omega}_1^{0T}.I_G(S/R_2).\vec{\Omega}_1^0$

$$E_C = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\left(0,0,\dot{\varphi}\right)\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2$$

7. Energie cinétique du disque en fonction de m et $\dot{y}$ en tenant compte de la condition de roulement sans glissement ;

Nous avons dans l'équation **(6)** qui exprime le roulement sans glissement : $\dot{y} = a\dot{\varphi}$ on déduit que : $\dot{\varphi} = \dfrac{\dot{y}}{a}$ alors l'expression de l'énergie cinétique devient :

$$E_C = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\frac{\dot{y}^2}{a^2} = \frac{3}{4}m\dot{y}^2 \qquad E_C = \frac{3}{4}m\dot{y}^2$$

Scanné avec CamScanner

$$\frac{dW}{dt}=\frac{dW(\vec{T})}{dt}+\frac{dW(\vec{N})}{dt}+\frac{dW(\vec{P})}{dt}=\vec{T}\cdot\frac{d\overrightarrow{OI}}{dt}+\vec{N}\cdot\frac{d\overrightarrow{OI}}{dt}+m\vec{g}\cdot\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}=m\vec{g}\cdot\vec{V}^{0}(G)$$

$$\frac{dW}{dt}=\vec{T}\cdot\vec{V}^{0}(I)+\vec{N}\cdot\vec{V}^{0}(I)+m\vec{g}\cdot\vec{V}^{0}(G)=m\vec{g}\cdot\vec{V}^{0}(G)\quad\text{car}\quad\vec{V}^{0}(I)=\vec{0}$$

$$\frac{dW}{dt}=m\vec{g}\cdot\vec{V}^{0}(G)=\underset{R_1}{\begin{pmatrix}-mg\cos\alpha\\ mg\sin\alpha\\ 0\end{pmatrix}}\cdot\underset{R_1}{\begin{pmatrix}0\\ \dot{y}\\ 0\end{pmatrix}}=mg\dot{y}\sin\alpha$$

L'égalité des deux expressions donne :

$$\frac{3}{2}m\dot{y}\ddot{y}=mg\dot{y}\sin\alpha\quad\Leftrightarrow\quad\ddot{y}=\frac{2}{3}g\sin\alpha$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR Mathématiques et Informatique

Année Académique 2016/2017

Licence 2

Corrigé de l'Examen de Mécanique des Systèmes

Première Session (Septembre 2017)

Remarque : L'exercice 1 a pour objet la vérification du niveau de l'étudiant dans le calcul des torseurs, particulièrement des glisseurs. L'exercice 2 passe en revue les aptitudes de l'étudiant dans l'orientation spatiale à travers les angles d'Euler, dans la détermination des éléments d'inerties, la cinématique et la cinétique d'un solide. Au-delà de la justesse des calculs, on scrutera particulièrement, dans la rédaction, la capacité de l'étudiant à structurer sa démarche autour des notions de base issues du cours et qui fondent les chapitres auxquels sont adossés les différents exercices.

Corrigé de l'Exercice 1 (Sur 10 points)

1/ Composantes de $\overrightarrow{T_0}$. On trouve $\overrightarrow{T_0}$: $(-e^{-\lambda},\ e^{\lambda},\ 0)$.....1pt

2/ Soit $(\alpha\ ,\beta\ ,\gamma)$ les composantes de $\vec{T}$. On trouve

Composantes de $\vec{T} \wedge \overrightarrow{OP}$: $(\beta z - \gamma y,\ \gamma x - \alpha z,\ \alpha y - \beta x)$

Composantes de $\overrightarrow{T_p} - \overrightarrow{T_o}$: $\left(e^{-\lambda} z - \sqrt{2} y,\ -e^{\lambda} z + \sqrt{2} x,\ e^{\lambda} y - e^{-\lambda} x\right)$

$\overrightarrow{T_p} - \overrightarrow{T_o} = \vec{T} \wedge \overrightarrow{OP}$ a lieu si et seulement si $\left(\alpha = e^{\lambda}\ ,\beta = e^{-\lambda}\ ,\gamma = \sqrt{2}\right)$.

Cette égalité prouve bien que T est un torseur de résultante $\vec{T}$ et de moment $\overrightarrow{T_0}$ en O.....1,5pts

Scanné avec CamScanner

3/ On trouve que l'invariant scalaire de T : $\vec{T}.\vec{T_0}$ est nul. Ainsi, comme la résultante de T n'est jamais nulle et son invariant scalaire toujours nul alors, on déduit que T est un glisseur et cela quelque soit le paramètre λ.

En tout point de l'axe central d'un glisseur, le moment de ce glisseur est nul. En remplaçant (x, y, z) par A(0,0,1) dans les expressions des composantes de $\vec{T_p}$, on obtient (0,0,0). Ceci équivalant à $\vec{T_A} = \vec{0}$ prouve par conséquent que $A \in \Delta$.....1,5pts

4/ Les composantes de $\vec{T_Q}$ sont nulles car $Q \in \Delta$. Les coordonnées x, y de Q vérifient donc le système $\begin{cases} -e^{-\lambda} - \sqrt{2}\,y = 0 \\ e^{\lambda} + \sqrt{2}\,x = 0 \\ e^{\lambda}y - e^{-\lambda}x = 0 \end{cases}$.

On obtient : $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\lambda}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\lambda}$.

La courbe décrite par Q admet pour équations paramétrées

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\lambda}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\lambda}, z = 0; \lambda \in \mathbb{R}$.

Son équation cartésienne dans le plan z=0 est : $xy = \frac{1}{2}$.

Il s'agit bien de l'équation d'une hyperbole. Cette hyperbole admet les axes (ox) et (oy) pour asymptotes. Comme les coordonnées x , y de Q sont négatives, cette hyperbole se résume à sa partie contenue dans le troisième quadrant.....1,5pts

5/ L'axe centrale Δ varie en passant constamment par le point A(0,0,1) et en s'appuyant en Q sur la branche hyperbolique indiquée plus haut. La surface engendrée est donc une forme conique de sommet A(0,0,1).....1pts

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

6/ On a $\vec{T}^2 = e^{2\lambda} + e^{-2\lambda} + 2 = \left(e^{\lambda} + e^{-\lambda}\right)^2$ de sorte que $\|\vec{T}\| = e^{\lambda} + e^{-\lambda}$.

Ainsi on trouve $\vec{T}/\|\vec{T}\|: \left(\frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}, \frac{e^{-\lambda}}{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}, \frac{\sqrt{2}}{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}\right)$.

Soient (α, β, γ) les composantes (indépendantes de λ) de $\vec{a}$ et δ la valeur (aussi indépendante de λ) du produit scalaire $\vec{T}.\vec{a}/\|\vec{T}\|$. On arrive à :

$(\alpha - \delta)e^{\lambda} + (\beta - \delta)e^{-\lambda} + \gamma\sqrt{2} = 0.$

Cette égalité doit être vérifiée quel que soit λ donc en particulier pour ses valeurs limites $\pm\infty$; la triplette $(\alpha - \delta) = 0, (\beta - \delta) = 0, \gamma = 0$ satisfait cette problématique. Ainsi, le vecteur $\vec{a}: (\delta, \delta, 0)$ où δ est une constante réelle arbitraire qui répond à la question.

Pour calculer l'angle $(\vec{T}, \vec{a})$, on choisit un des deux vecteurs unitaires de la direction définie par $\vec{a}$. Prenons $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

On a alors $\vec{T}.\vec{a}/\|\vec{T}\| = \cos(\vec{T}, \vec{a})$. On trouve $\cos(\vec{T}, \vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Donc $\cos(\vec{T}, \vec{a}) = \frac{\pi}{4}$.....2pts

7/ La droite Δ passe constamment par le point A(0,0,1) et son vecteur directeur $\vec{T}$ fait constamment l'angle $\frac{\pi}{4}$ avec le vecteur constant $\vec{a}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Par conséquent, la surface qu'engendre Δ fait partie du cône de révolution de sommet A(0,0,1), d'axe de révolution $(A ; \vec{a})$ et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{4}$. Ceci affine la réponse donnée à la question 5. .....1,5pts

VALIDE UMD

Scanné avec CamScanner

Corrigé de l'Exercice 2 (Sur 10 points)

1/ Notons x_G, y_G, et z_G les coordonnées de G. L'axe (C,$\vec{z}$) est axe de symétrie matérielle de S donc en a $x_G = y_G = 0$ car $G \in (c\vec{z})$.

On a $mz_G = \int_{(s)} zdm = \rho \int_{(s)} zds$ où ρ est la densité surfacique (constante) de S.

On considère les coordonnées polaires (r,θ) pour calculer l'intégral.

$$y = rcos\theta \ et \ z = rsin\theta$$

$$ds = rdrd\theta$$

$$mz_G = \rho \int_0^a \left[\int_{-\pi}^{0} r^2 sin\theta d\theta \right] dr$$

Comme $\rho = \frac{2m}{\pi a^2}$

On arrive à $z_G = \frac{-4}{3}\frac{a}{\pi}$ 1pt

2/ L'axe (C,$\vec{z}$) étant axe de symétrie matérielle de S, la direction $\vec{z}$ est principale d'inertie en C. Aussi, S est plan. Le plan de S (c,x,z) est plan de symétrie matérielle. Et comme $\vec{x}$ est orthogonal à ce plan, donc $\vec{x}$ est principal d'inertie en C. Enfin, $\vec{x}$ et $\vec{z}$ sont linéairement indépendant et $\vec{y}$ est orthogonal à $\vec{x}$ et à $\vec{z}$ donc $\vec{y}$ aussi est principal d'inertie. Au total la base ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) est principale d'inertie en C.

La matrice d'inertie $\varkappa_c$ de S en C dans la base ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) est donc de la forme (diagonale)

$$\varkappa_c = \begin{pmatrix} I_{C\vec{x}}(S) & 0 & 0 \\ 0 & I_{C\vec{y}}(S) & 0 \\ 0 & 0 & I_{C\vec{z}}(S) \end{pmatrix}_{(C,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

VALIDER LMD

Scanné avec CamScanner

On a, compte tenu des symétries $I_{C\vec{x}}(S) = I_{C\vec{y}}(S) + I_{C\vec{z}}(S)$

$$I_{C\vec{y}}(S) = \int_{(S)}(x^2 + z^2)\, dm = \int_{(S)} z^2\, dm = \rho \int_0^a \left[\int_{-\pi}^0 r^3 sin^2\theta d\theta\right] dr.$$

On trouve $$I_{C\vec{y}}(S) = \frac{ma^2}{4}$$

Aussi

$$I_{C\vec{z}}(S) = \int_{(S)}(x^2 + y^2)\, dm = \int_{(S)} y^2\, dm = \rho \int_0^a \left[\int_{-\pi}^0 r^3 cos^2\theta d\theta\right] dr$$

On trouve aussi, $$I_{C\vec{z}}(S) = \frac{ma^2}{4}$$

De sorte que $$I_{C\vec{x}}(S) = \frac{ma^2}{2}$$

Ainsi $$\varkappa_c = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{4} \end{pmatrix}_{(C,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Pour le calcul en G, on applique le théorème de Kœnigs.

$$J(C,S) = J(G,S) + J(C,\{G,m\}).$$

On a alors $$\varkappa_c = \varkappa_G + \varkappa$$

Les coordonnées de G dans le repère (C, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) sont $\left(0,0,\frac{-4}{3}\frac{a}{\pi}\right)$.

On trouve $$\varkappa = m\begin{pmatrix} \frac{16a^2}{9\pi^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16a^2}{9\pi^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

VALIDE UR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\mathcal{H}_G = \begin{pmatrix} \left(\frac{ma^2}{2} - \frac{16a^2}{9\pi^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{ma^2}{4} - \frac{16a^2}{9\pi^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{4} \end{pmatrix} \quad \text{.....3pts}$$

3/ On sait que $\vec{\sigma}(G,S/R_0) = J(G,S)\vec{\Omega}(S/R_0)$

On a après évaluation $\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\varphi}\vec{x} + \dot{\psi}sin\varphi\vec{y} + \dot{\varphi}cos\varphi\vec{z}$

Le calcul donne

$$\vec{\sigma}(G,S/R_0) = ma^2\left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)\dot{\varphi}\vec{x} + ma^2\left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)\dot{\psi}sin\varphi\vec{y} + \frac{ma^2}{4}\dot{\varphi}cos\varphi\vec{z}$$

On sait que $\vec{\delta}(G,S/R_0) = \frac{d}{dt}/_{R_0}\left(\vec{\sigma}(G,S/R_0)\right)$

$$\frac{d\vec{x}}{dt}/_{R_0} = \dot{\psi}cos\varphi\vec{y} - \dot{\psi}sin\varphi\vec{z}$$

$$\frac{d\vec{y}}{dt}/_{R_0} = -\dot{\psi}cos\varphi\vec{x} + \dot{\varphi}\vec{z}$$

$$\frac{d\vec{z}}{dt}/_{R_0} = \dot{\psi}sin\varphi\vec{x} - \dot{\varphi}\vec{y} \text{.....3pts}$$

4/ On a $\vec{\sigma}(0,S/R_0) = \vec{\sigma}(G,S/R_0) + m\vec{V}(G/R_0)\wedge\overrightarrow{GO}$

$$\vec{V}(G/R_0) = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}/_{R_0} = \frac{d\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG}\right)}{dt}/_{R_0}$$

$$\vec{V}(G/R_0) = l\frac{d\vec{x}}{dt}/_{R_0} + \left(\frac{-4}{3}\frac{a}{\pi}\right)\frac{d\vec{z}}{dt}/_{R_0}$$

VALIDE UMD

Scanné avec CamScanner

Aussi $\overrightarrow{GO} = -l\vec{x} + \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}\vec{z}$

$$m\vec{V}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{GO} = \frac{4am}{3\pi}\left(l\dot{\psi}cos\varphi + \frac{4a}{3\pi}\dot{\varphi}\right)\vec{x} + m\dot{\psi}sin\varphi\left(\frac{16a^2}{9\pi^2} + l^2\right)\vec{y} + ml\left(l\dot{\psi}cos\varphi + \frac{4a}{3\pi}\dot{\varphi}\right)\vec{z}$$

On compose alors $\vec{\sigma}(0, S/R_0)$ (Tous les points sont déjà attribués dans les différents nœuds de la démarche).....2pts

Pour le calcul de $\vec{\delta}(0, S/R_0)$ il suffit de dire que :

O est fixe par rapport à R_0 de sorte que $\vec{\delta}(O, S/R_0) = \frac{d}{dt}/_{R_0}\left(\vec{\sigma}(O, S/R_0)\right)$ pour obtenir l'ensemble des points inhérents à la question vu que ce calcul ne présente aucune difficulté nouvelle relativement au calcul de $\vec{\delta}(G, S/R_0)$.....1pt

VALIDE PAR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI Année 2017-2018

CORRECTION DE MECANIQUE DES SYSTEMES
SEMESTRE 1 SESSION 1

EXERCICE 1

Dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le champ de vecteur $\vec{V}(M)$ dont les composantes sont définis en fonction des coordonnées (x, y, z) de M par

$V_x = 1 + 3y - tz$
$V_y = -3x + 2tz$ où $t \in \mathbb{R}$
$V_z = 2 + tx - t^2 z$

1. Calculons $\vec{V}(M)$ au point O

Le point O a pour coordonnées $O\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ d'où $\vec{V}(O) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

2. Valeurs de t

Ce champ est antisymétrique si et seulement si (en utilisant les points O et M)

$\vec{V}(O)\overrightarrow{OM} = \vec{V}(M)\overrightarrow{OM}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3y-tz\\-3x+2tz\\2+tx-t^2z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 2$

Le champ $\vec{V}(M)$ est antisymétrique pour $t = 0$ ou $t = 2$
(Antisymétrique≡ équiprojectile).

3. Elements de réductions (Resultante et moment en O)

- Pour $t = 0$

Scanné avec CamScanner

Le moment en O est $\overrightarrow{V}(O) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

Le champ $\overrightarrow{V}(M)$ est un torseur d'où $\exists \overrightarrow{R}$

telque $\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{V}(O) + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{OM}$ avec $\overrightarrow{R} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{V}(O) + \overrightarrow{R} \wedge (\overrightarrow{OM})$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1+3y\\-3x\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y \\ -3x \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3y = bz - cy \\ -3x = cx - az \\ 0 = ay - bx \end{cases}$$

Par une identification, on obtient : $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases}$

Donc $\overrightarrow{R}(t=0) = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$

- Pour $t = 2$

Par un raisonnement analogue, on obtient comme resultante

$\overrightarrow{R}(t=2) = \begin{pmatrix}-4\\-2\\-3\end{pmatrix}$

4. Décomposition

Soient les deux torseurs associés à $t = 0$: $[\mathcal{T}_1]$ et à $t = 2$: $[\mathcal{T}_2]$

Scanné avec CamScanner

- Calculons l'invariant scalaire pour ces deux valeurs.

$$I_0 = \vec{V}(O).\vec{R}(t=0) = -6 \neq 0$$

$$I_2 = \vec{V}(O).\vec{R}(t=2) = -10 \neq 0$$

Donc ces deux torseurs sont quelconques (ni glisseur, ni couple) chacun peut cependant être décomposé en la somme d'un glisseur et d'un couple :

$[\mathcal{T}_0] = [\vec{V}(O), \vec{R}(t=0)]$

$[\mathcal{T}_0] = [\vec{V}(O), 0] + [\vec{R}(t=0), 0]$

De même
$[\mathcal{T}_2] = [\vec{V}(O), \vec{R}(t=2)]$

$[\mathcal{T}_2] = [\vec{V}(O), 0] + [0, \vec{R}(t=2)]$

Donc $\begin{cases} couples : C(M) = \vec{V}(O) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \ \forall M \\ Glisseur : G(M) = \vec{O} + \vec{R}(t) \wedge \overrightarrow{OM} \end{cases}$

5. Position de l'axe central du torseur.

Soit P appartenant à l'axe central du torseur, la position de P par rapport à O est donnée par :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R}(t) \wedge \vec{V}(M)}{R^2} + \lambda \vec{R}$$

Scanné avec CamScanner

Pour $\lambda = 0$, $\overrightarrow{OP_0} = \dfrac{\overrightarrow{R}(t) \wedge \overrightarrow{V}(0)}{R^2}$

donc pour $t = 0$, $\overrightarrow{R}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{V}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, On obtient alors

$\overrightarrow{OP_0} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{J}$

L'axe central pour $t = 0$, passe par p_0 et parallèle à $\overrightarrow{R}(t=0) \Rightarrow$ parallèle à $\overrightarrow{t}$.
De la même façon, on obtient l'axe central pour $t = 2$.

L'axe central pour $t = 2$ passe par $P_0 = \begin{pmatrix} -4/29 \\ -5/29 \\ 2/29 \end{pmatrix}$ et parallèle à

$\overrightarrow{R}(t=2) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2

1.

a) Justifions la matrice d'inertie du disque D

L'axe $\left(G_{Z_2}\right)$ est un axe de symétrie de revolutio, donc le repère $\mathcal{R}\left(G_{x_2y_2z_2}\right)$ muni de la base $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ est un repère principal d'inertie.
Or dans un répère principal d'inertie, la matrice d'inertie est diagonale.

$$J(G, R_2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

De plus, on a une symétrie cylindrique donc $A = B$ et comme le disque appartient au plan (xGy), $z = 0$ et donc $C = A + B \Rightarrow C = 2A$

Scanné avec CamScanner

La matrice est donc sous la forme

$$J(G,R_2)=\begin{pmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & 2A\end{pmatrix}_{R_2}$$

b) Montrons que $A=\frac{1}{4}m\,a^2$

Le disque appartient au plan (xGy), d'où $z=0$; $x=r\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi$; $dm=\sigma\,dS=\sigma\,r\,dr\,d\varphi$.
Le disque homogème $\sigma=cte$ donc $m=\sigma\,\pi\,a^2$

$$A=\int y^2\,dx=\sigma\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^3\sin^2 d\varphi dr$$

$$\boxed{A=\frac{1}{4}m\,a^2}$$

Rappel

$\mathcal{R}_0(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$ repère fixe $\mathcal{R}_1(G,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$ en translation par rapport à $R_0 \Rightarrow \vec{\Omega}_1^0=\vec{0}$.

$\mathcal{R}_2(G,\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_2})$ est tel que $(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=\vec{y}_1,\vec{y}_2=\varphi$ et
$\vec{\Omega}_1^2=\dot{\varphi}\,\vec{z}_1=\dot{\varphi}\,\vec{z}_0$

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IG}=\underset{R_1}{\begin{Bmatrix}0\\ y\\ 0\end{Bmatrix}}+\underset{R_1}{\begin{Bmatrix}a\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}}=\underset{R_1}{\begin{Bmatrix}a\\ y\\ 0\end{Bmatrix}}$$

2. Vitesse $\vec{V}_0(G/R_0)$ et accélération $\vec{r}_0(G/R_0)$ du point G

Par dérivation :

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\vec{V}_0(G/R_0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OG}$$

$$\vec{V}_0(G/R_0) = \begin{cases} 0 \\ \dot{y} \\ 0 \end{cases}_{R_1} \text{ car } \vec{\Omega}(R_1/R_0) = \vec{0}$$

$$\vec{\delta}_0(G/R_0) = \left(\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(G/R_0)$$

$$\vec{\delta}_0(G/R_0) = \begin{cases} 0 \\ \ddot{y} \\ 0 \end{cases}_{R_1} \text{ car } \vec{\Omega}(R_1/R_0) = \vec{0}$$

3. Théorème de la resultante dynamique appliqué au disque

La resultante des forces extérieures appliquées au disque est égale à la masse du disque par l'accélération de son centre d'inertie.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\delta(G/R_0)$$

$\Rightarrow \vec{T} + \vec{N} + \vec{P} = m\,\delta(G/R_0)$.
La projection de cette équation sur les axes du répère R_1 donne deux équations scalaires :

$N - m\,g\,\cos\alpha = 0 \;\; (i)$
$-T + m\,g\,\sin\alpha = m\,\ddot{y} \;\; (ii)$

4.

a) Montrons que $\vec{\sigma}(G \in D/R_0) = 2A\dot{\varphi}\vec{z}$

G étant le centre de masse, on a :
$\vec{\sigma}(G \in D/R_0) = J(G, R_2)\,\vec{\Omega}(D/R_2)$ où $\vec{\Omega}(D/R_2) = \vec{\Omega}(R_2/R_0)$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}(G \in D/R_0) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}(G \in D/R_0) = 2A\dot{\varphi}\vec{z}_1}$$

Scanné avec CamScanner

b) Théorème du moment dynamique appliqué au disque.

Le moment resultant des forces extérieures appliquées au disque est égale au moment dynamique du disque au même point G.

$$\sum \overrightarrow{M}(\vec{F}_{ext}) = \vec{\delta}(G/R_0)$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GI} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{GI} \wedge \vec{N} = \vec{\delta}(G/R_0)$. Comme $\overrightarrow{GI} // \overrightarrow{N}$ elle devient

$$\overrightarrow{GI} \wedge \vec{T} = \vec{\delta}(G/R_0) \qquad (1)$$

Exprimons chacun des termes de cette équation

$$\overrightarrow{GI} \wedge \vec{T} = \begin{Bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ -T \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ aT \end{Bmatrix}$$

$\overrightarrow{GI} \wedge \vec{T} = aT\,\vec{z}_1$

Le moment dynamique est égale à la dérivée du moment cinétique, d'où

$$\vec{\delta}(G/R_0) = \left(\frac{d\vec{\sigma}(G/R_0)}{dt}\right)_{R_0}$$

$$= \left(\frac{d\vec{\sigma}(G/R_0)}{dt}\right)_{R_1}$$

$$= 2A\ddot{\varphi}\vec{z}_1$$

$$\vec{\delta}(G/R_0) = \frac{1}{2}ma^2\ddot{\varphi}\vec{z}_1 \quad (2)$$

$(1) = (2) \Leftrightarrow aT = \frac{1}{2}ma^2\ddot{\varphi}$

$$\Leftrightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}ma\ddot{\varphi}} \quad (iii)$$

5. Justifions l'équation $\dot{y} - a\dot{\varphi} = 0$

La condition de roulement sans glissement est vérifiée si la vitesse du point de contact du disque et du plan incliné est nulle.

$\overrightarrow{V}_g(I) = \overrightarrow{V}_D(I/R_0) - \overrightarrow{V}_P(I/R_0) = \vec{0}$ or $\overrightarrow{V}_P(I/R_0) = \vec{0}$.

Alors $\overrightarrow{V}_D(I/R_0) = \overrightarrow{V}(G/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \overrightarrow{GI}$

Scanné avec CamScanner

$$\vec{V}(G/R_0) + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{GI} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{y} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix}_{R_1} = \begin{Bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{y} - a\dot{\varphi} = 0} \quad (3)$$

6. Expression de N,T, $\ddot{y}$ et $\ddot{\varphi}$

l'équation (i) donne $\boxed{N = m\,g\cos\alpha}$

l'équation $(3) \Rightarrow \ddot{y} = a\ddot{\varphi}$

$\Rightarrow \ddot{\varphi} = \dfrac{\ddot{y}}{a}$

L'équation (ii) devient : $-\dfrac{m\,a}{2}\dfrac{\ddot{y}}{a} \pm m\,g\,\sin\alpha = m\,\ddot{y}$, on déduit $\ddot{y} = \dfrac{2}{3}\,g\,\sin\alpha$

D'où $\ddot{\varphi} = \dfrac{2}{3a} g \sin\alpha$

L'équation (iii) donne $T = \dfrac{m\theta}{3}\sin\alpha$

7. Expression de l'énergie cinétique du disque

La condition de roulement sans glissement nous done $\dot{y} = a\dot{\varphi}$. On en déduit que $\dot{\varphi} = \dfrac{\dot{y}}{a}$.Alors l'expression de l'énergie cinétique devient

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{m\,a^2}{2}\frac{\dot{y}^2}{a^2}$$

$$\boxed{E_c = \frac{3}{4} m \dot{y}^2}$$

Scanné avec CamScanner

CORRECTION MECANIQUE DES SYSTEMES 2018-2019

EXERCICE 1

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = (1,0,-1) \text{ d'origine } A(1,0,0) \\ \vec{V}_2 = (1,2,2) \text{ d'origine } B(0,1,0) \\ \vec{V}_3 = (\lambda,\ \mu,\ \upsilon) \text{ d'origine } C(0,0,1) \end{cases}$$

Soit $[T]$ la somme des trois glisseurs.

1) Déterminons $(\lambda,\ \mu,\ \upsilon)$ pour que $[T]$ soit un couple.

Pour que $[T]$ soit un couple, il faut et il suffit que $\vec{R} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\upsilon\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2 = 0 \\ \mu + 2 = 0 \\ \upsilon + 1 = 0 \end{cases}$$

Donc $[T]$ est un couple pour $\lambda = -2, \mu = -2,$ et $\upsilon = -1 \Longrightarrow (\lambda,\ \mu,\ \upsilon) = (-2,-2,-1)$

*Trouvons son moment : le moment du couple $[T]$

$$\overrightarrow{M_p} = \overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}_1 + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{V}_2 + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{V}_3 \quad \forall p$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$$

Donc $\forall p, \overrightarrow{M_p} = \overrightarrow{M_o} = \begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$

2) Déterminons la relation qui doit lier $\lambda,\ \mu,$ et υ pour que $[T]$ soit un glisseur

Pour que $[T]$ soit un glisseur, il faut et il suffit que $\vec{R}.\overrightarrow{M_p} = \vec{0}$ et $\vec{R} \neq \vec{0}$;

avec $\overrightarrow{M_p} = \overrightarrow{M_o} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$ d'où $\vec{R}.\overrightarrow{M_p} = \vec{R}.(\overrightarrow{M_0} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}) = \vec{R}.\overrightarrow{M_0} + \vec{R}.(\vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}) = \vec{R}.\overrightarrow{M_0}$

donc l'invariant scolaire de $[T]$ est : $I = \vec{R}.\overrightarrow{M_p} = \vec{R}.\overrightarrow{M_O}$

$$I = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{R_0}.\overrightarrow{M_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\lambda+2\\\mu+2\\\upsilon+1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(\lambda+2) - (\mu+2) - (\upsilon+1) = 0$$

$$I = 0 \Leftrightarrow \boxed{4\lambda - \mu - \upsilon + 5 = 0}$$

- $\vec{R} \neq \vec{0} \Longrightarrow (\lambda,\ \mu,\ \upsilon) \neq (-2,-2,-1)$

3) Dans le cas où $(\lambda,\ \mu,\ \upsilon) = (-2,-2,-1)$, trouvons les équations de l'axe central de $[T]$

Soit $P = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$\forall p, O,$ on a : $\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{OM}}{R^2} + \alpha\vec{R}$

On a : $\overrightarrow{M_p} = \overrightarrow{M_o} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$

Comme $\overrightarrow{M_p} \wedge \vec{R} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{M_o} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = \alpha\vec{R}$

- $\vec{R} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{R} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
- $\vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{M_o} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}4-y\\x-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\end{pmatrix}$
- $\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_o} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$ et $R^2 = 1$

$\overrightarrow{OP} = \vec{R} \wedge \overrightarrow{M_o} + \alpha\vec{R}$

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\end{pmatrix}$

EXERCICE 2

- Repère fixe $R_o(0, \overrightarrow{x_0},\ \overrightarrow{y_0},\ \overrightarrow{z_0})$
- Repère lié au système D est $R\,(c, \vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z})$

Scanné avec CamScanner

Avec $\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ et $\vec{z} = \vec{z_0}$

On note $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x}) = (\vec{Y_0}, \vec{Y})$

1-a) Déterminons la masse M' du système D

On a : $D = D_1 - D_2$

$\Longrightarrow M' = M - M_2$ or le système est homogène donc $m = \sigma ds \Longrightarrow m = \sigma s$

$\Longrightarrow M' = \sigma(S - S_2)$ avec $S = \pi R^2$ et $S_2 = \pi(\frac{R}{2})^2$

$\Longrightarrow M' = \sigma(\pi R^2 - (\frac{\pi R^2}{4}))$

Donc $M' = \frac{3}{4}\sigma\pi R^2$

1-b) Déduisons-en la position de G dans le repère R

Le système D étant discrète, alors, on a :

$$\sum_{i=1}^{N} mi\,\overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \Leftrightarrow M\overrightarrow{GC} - M_2\overrightarrow{GC'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$M\overrightarrow{GC} - M_2(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC'}) = \vec{0}$$

2) Soit $I = \frac{1}{2}ma^2$

a) Déterminons le moment d'inertie de D_1/ à l'axe $(G, \vec{Z})$

On sait que $I_{\vec{z}}(G/D_1) = I_{zz}(C) + M(CG)^2$

$$I_{\vec{z}}(G/D_1) = \frac{1}{2}MR^2 + M(\frac{R}{6})^2$$

$$= \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{36}MR^2$$

$$I_{\vec{z}}(G/D_1) = \frac{19}{36}MR^2$$

b) Déterminons le moment d'inertie de D_2/ à l'axe $(G, \vec{Z})$

On a : $I_{\vec{z}}(G/D_2) = I_{zz}(C') + M_2(C'G)^2$

$$= -\frac{1}{2}M_2\left(\frac{R}{2}\right)^2 - M_2(C'G)^2$$

Avec $C'G = C'C + CG = \frac{R}{2} + \frac{R}{6} = \frac{2}{3}R$

Donc $I_z(G/D_2) = -\frac{1}{8}M_2R^2 - \frac{4}{9}M_2R^2$

$$I_z(G/D_2) = -\frac{41}{72}M_2R^2 \quad \text{or} \quad M_2 = \frac{1}{4}M$$

$$\Longrightarrow \quad I_{\vec{z}}(G/D_2) = -\frac{41}{288}MR^2$$

c) Déterminons le moment d'inertie du système D par rapport à l'axe $(G, \vec{Z})$

On a : $I_z(G/D) = I_{\vec{z}}(G/D_1) + I_{\vec{z}}(G/D_2)$

$$I_z(G/D) = \frac{19}{36}MR^2 - \frac{41}{288}MR^2$$

$$\boxed{I_z(G/D) = \frac{37}{96}MR^2}$$

3) Le système D roule sans glisser sur un plan horizontal

*Montrons que le moment cinétique du système en G est $\vec{\sigma}(G, D/R_0) = \frac{37}{96}MR^2\dot{\theta}\vec{z}$

On sait que $\vec{\sigma}(G, D/R_0) = I_{G\vec{z}}(D).\vec{\Omega}(D/R_0)$

Avec $I_{G\vec{z}}(D) = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$ et $\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\theta}\vec{z} = \dot{\theta}\vec{z_0}$

$$*I_{G\vec{z}}(D) = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_z(G/D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{37}{96}MR^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}(G, D/R_0) = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{37}{96}MR^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{\vec{\sigma}(G, D/R_0) = \frac{37}{96}MR^2\dot{\theta}\vec{z}}$

Scanné avec CamScanner

$\sum_{i=1}^{N} mi\,\overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \Leftrightarrow M\overrightarrow{GC} - M_2\overrightarrow{GC} - M_2\overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow M\overrightarrow{GC} - M_2\overrightarrow{GC} = M_2\overrightarrow{CC'}$

$\Leftrightarrow (M - M_2)\overrightarrow{GC} = M_2\overrightarrow{CC'}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GC} = \frac{M_2}{M-M_2}\overrightarrow{CC'}$

Or $M = \sigma\pi R^2$ et $M_2 = \frac{1}{4}\sigma\pi R^2 \Rightarrow M_2 = \frac{1}{4}M \Rightarrow M = 4M_2$

$\Rightarrow \overrightarrow{GC} = \frac{M_2}{4M_2 - M_2}\overrightarrow{CC'}$

$\overrightarrow{GC} = \frac{M_2}{3M_2}\overrightarrow{CC'}$ avec $\overrightarrow{CC'} = -\frac{R}{2}\vec{j}$

$\overrightarrow{GC} = -\frac{1}{6}R\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{CG} = \frac{R}{6}\vec{j}$

EXERCICE 3

1.a) Le vecteur instantané de rotation de la sphère par rapport au repère fixe (o, x, y, z)

$\Rightarrow R(o,x,y,z) \rightarrow R(c, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}) \rightarrow R(o, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_r})$

$$\boxed{\vec{\Omega}(S/R) = \dot{\varphi}\,\overrightarrow{U_u}}$$

1.b) déterminons $\vec{v}(c)$ de deux manières

* 1 ère méthode

$\vec{v}(c) = \frac{d\overrightarrow{oc}}{dt}/R = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC})/R =$

$\frac{d}{dt}(R\overrightarrow{U_r} + b\overrightarrow{U_r})/R$

$= \frac{d}{dt}(R+b)\overrightarrow{U_r}/R$

$= (R+b)\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt}/R$ or $\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} =$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{U_r}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}}$$

$$\boxed{\vec{v}(c) = (R+b)\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}}$$

* 2e méthode : ici $\vec{\Omega}(S/R) = \dot{\theta}\overrightarrow{U_y}$

D'après la formule de varignon, on a :

$\vec{v}(c) = \vec{v}(o) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{oc}$ or $\overrightarrow{oc} = (R+b)\overrightarrow{U_r}$

$\vec{v}(c) = \vec{v}(o) + \Omega(S/R) \wedge \overrightarrow{oc}$ avec $v(0) = 0$ et $\overrightarrow{oc} = (R+b)\overrightarrow{U_r}$

$\vec{v}(c) = \Omega(S/R) \wedge \overrightarrow{oc}$

$= \dot{\theta}\overrightarrow{U_y} \wedge (R+b)\overrightarrow{U_r}$

$= \dot{\theta}(R+b)\overrightarrow{U_y} \wedge \overrightarrow{U_r}$ or $\overrightarrow{U_y} \wedge \overrightarrow{U_r} = \overrightarrow{U_\theta}$

$$\boxed{\vec{v}(c) = (R+b)\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}}$$

* Montrons que $(R+b)\dot{\theta} = b\dot{\varphi}$

D'après la relation de roulement et pivotement au point de contact I on a :

$\vec{v}(c) = \vec{v}(i \in C/O) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{IC}$

$$\boxed{\vec{v}(c) = \overrightarrow{V_g} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{IC}}$$

$\overrightarrow{V_g} = 0 \Rightarrow \vec{v}(c) = \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{IC}$

$\vec{v}(c) = \dot{\varphi}\overrightarrow{U_y} \wedge b\overrightarrow{U_r}$

$\vec{v}(c) = \dot{\varphi}b\overrightarrow{U_y} \wedge \overrightarrow{U_r}$ Or $\overrightarrow{U_y} \wedge \overrightarrow{U_r} = \overrightarrow{U_\theta}$

$\vec{v}(c) = \dot{\varphi}b\overrightarrow{U_\theta}$ Or $\vec{v}(c) = (R+b)\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}$

Donc: $$\boxed{\dot{\theta}(R+b) = \dot{\varphi}b}$$

* Déduisons-en l'expression de $\vec{\Omega}(S/R)$ en fonction de R, b, et $\dot{\theta}$

$\dot{\varphi}b = \dot{\theta}(R+b) \Leftrightarrow \dot{\varphi} = (1 + \frac{R}{b})\dot{\theta}$

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

Comme $\vec{\Omega}(S/R) = \dot{\varphi}\vec{U_y}$; Alors

$\vec{\Omega}(S/R) = \dot{\theta}\,(1+\frac{R}{b})\,\vec{U_y}$

2°) Déterminons l'élément de la réduction du torseur dynamique en C en fonction de R, b, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$

On a: $\vec{a}(S/R) = m\,\vec{j}\,(G/R)$

$\vec{\delta_C}(S/R) = \frac{d\vec{\sigma_C}(S/R)}{dt}/R$

Avec $\vec{a}(S/R)$ la résistance dynamique du torseur au centre de masse G, on a : $C \equiv G$

$\Rightarrow \vec{j}(G/R) = \vec{j}(C/R) = \frac{d\vec{v}(C/R)}{dt}$ Or $\vec{v}(c) = (R+b)\dot{\theta}\vec{U_\theta}$

$= (R+b)\ddot{\theta}\vec{U_\theta}$

$= \vec{R}_{ext}(S)$

*D'après le théorème des moments dynamiqu+ $(R+b)\dot{\theta}\frac{d\vec{U_\theta}}{dt}/R$

$= (R+b)\ddot{\theta}\vec{U_\theta} + (R+b)\dot{\theta}\frac{d\vec{U_\theta}}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt}$ Or $\frac{d\vec{U_\theta}}{d\theta} = -\vec{U_r}$

$= (R+b)\ddot{\theta}\vec{U_\theta} + (R+b)\dot{\theta}^2(-\vec{U_r})$

$\vec{j}(C/R) = (R+b)(\ddot{\theta}\vec{U_\theta} - \dot{\theta}^2\vec{U_r})$

Donc $\vec{a}(S/R) = m(R+b)\ddot{\theta}\vec{U_\theta} - m(R+b)\dot{\theta}^2\vec{U_r}$

* $\vec{\sigma_C}(S/R) = J_C(s).\vec{\Omega}(S/R)$; avec $J_C(s) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$; $A \in \mathbb{R}$.

$= \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(R+b)\dot{\theta}}{b} \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \Lambda\frac{(R+b)\dot{\theta}}{b}\vec{U_y}$ or $\Lambda = \frac{2}{5}mb^2$

$\vec{\sigma_C}(S/R) = \frac{2mb}{5}(R+b)\dot{\theta}\vec{U_y}$

$\Rightarrow \vec{\delta_C}(S/R) = \frac{d\vec{\sigma}(S/R)}{dt}/R = \frac{2mb}{5}(R+b)\frac{d\dot{\theta}\vec{U_y}}{dt}/R$

$$\boxed{\vec{\delta_C}(S/R) = \frac{2mb}{5}(R+b)\ddot{\theta}\,\vec{U_y}}$$

$m(R+b)\ddot{\theta}\vec{U_\theta} - m(R+b)\dot{\theta}^2\vec{U_r}$

Conclusion :

$[D(S/R)]_C = \frac{2}{5}mb\,(R+b)\ddot{\theta}\,\vec{U_y}$ C

3-a) Appliquons les théorèmes de la résultante et du moment dynamique de la sphère.

*D'après le Théorème de la résultante dynamique, $m\vec{j}(G/R)$e

On a : $\vec{\delta_C}(S/R) = \vec{M}_{C\,ext}$

*Système : la sphère

*Bilan des forces :

- Le poids P de la sphère $\vec{P} = m\vec{g}$
- La force de contact $\vec{R}$ $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$

Projection sur l'axe $(C, \vec{u_\theta}, \vec{U_r})$

$\vec{P}\begin{vmatrix} P\cos\theta\,\vec{U_r} \\ P\sin\theta\,\vec{U_\theta} \end{vmatrix}$; $\vec{T}\begin{vmatrix} -T\,\vec{U_\theta} \\ 0 \end{vmatrix}$; $\vec{N}\begin{vmatrix} 0 \\ N\,\vec{U_r} \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \vec{R}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{R}$

$= (P\sin\theta - T)\vec{U_\theta} + (-P\cos\theta + N)\vec{U_r}$

$\vec{R}_{ext} = (mg\sin\theta - T)\vec{U_\theta} + (-mgcos + N)\vec{U_r}$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \vec{M}_{C\,ext} = \vec{M}_C(\vec{R}) + \vec{M}_C(\vec{P})$

$= \vec{M}_C(\vec{N}) + \vec{M}_C(\vec{T}) + \vec{M}_C(\vec{P})$

avec $\vec{M}_C(\vec{N}) = 0$

$\vec{M}_C(\vec{P}) = 0$

$= \vec{M}_C(\vec{T}) = \overrightarrow{CI} \wedge \vec{T}$

$\vec{M}_{C\,ext} = (-b\overrightarrow{U_r}) \wedge (-T)\overrightarrow{U_\theta} = bt(\overrightarrow{U_r} \wedge \overrightarrow{U_\theta})$

Donc $\vec{M}_{C\,ext} = (b\,T\,\overrightarrow{U_y})$

*Egalité entre les deux résultantes

$m\vec{j}(C/R) = \vec{R}_{ext\,(s)} \Leftrightarrow$

$-m(R+b)\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N \quad (1)$

$m(R+b)\ddot{\theta} = mg\sin\theta - T \quad (2)$

$(1) \Rightarrow N + m(R+b)\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta$

$\Rightarrow N = mg\cos\theta - m(R+b)\dot{\theta}^2$

$\Rightarrow N = m[g\cos\theta - (R+b)\dot{\theta}^2] \quad (3)$

*Egalité entre les moments

$\frac{d\overrightarrow{\sigma_C}(S/R)}{dt}/R = \vec{M}_{C\,ext} \Leftrightarrow \frac{2mb}{5}(R+b)\ddot{\theta} = bT$

$\Leftrightarrow T = \frac{2}{5}m(R+b)\ddot{\theta} \quad (4)$

3-b) Montrons que l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ peut se mettre sous la forme $\frac{7}{5}m(R+b)\ddot{\theta}\,\dot{\theta} = g\,sin(\theta)\dot{\theta}$

d'après l'équation (2) $\Rightarrow T + m(R+b)\ddot{\theta} = mg\sin\theta$

$\Rightarrow T = mg\sin\theta - m(R+b)\ddot{\theta}$

$\Rightarrow T = m[g\sin\theta - (R+b)\ddot{\theta}] \quad (5)$

$(4) = (5) \Rightarrow \frac{2}{5}(R+b)\ddot{\theta} = g\sin\theta - (R+b)\ddot{\theta}$

$\Rightarrow \frac{2}{5}(R+b)\ddot{\theta} + (R+b)\ddot{\theta} = g\sin\theta$

$\Rightarrow (R+b)\ddot{\theta} + \left(\frac{2}{5}+1\right) = g\sin\theta$

$\Rightarrow \frac{7}{5}(R+b)\ddot{\theta}\,\dot{\theta} = g\sin(\theta)\dot{\theta}$ (6)

4) Intégrons $\frac{7}{5}(R+b)\ddot{\theta}\,\dot{\theta} = g\sin(\theta)\dot{\theta}$

$\Rightarrow \frac{7}{5}(R+b)\int_0^t \ddot{\theta}\,\dot{\theta}\,d\theta = g\int_0^t \sin(\theta)\dot{\theta}\,d\theta$

$\Rightarrow \frac{7}{5}(R+b)[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2]_0^t = g[-\cos\theta]_0^t$

Soit $\frac{7}{10}(R+b)\dot{\theta}^2 = -g\cos(\theta) \quad (7)$

*En déduisons l'expression de $\|\vec{T}\|$ et $\|\vec{N}\|$ en fonction de m, g et θ

$(7) \Leftrightarrow 7(R+b)\dot{\theta}^2 = -10\,gcos\,\theta$

$\dot{\theta}^2 = -\frac{10\,gcos\,\theta}{7(R+b)}$

$(3) \Rightarrow N = m[g\cos\theta - (R+b)\dot{\theta}^2] = \|\vec{N}\|$

$N = m\left[g\cos\theta + (R+b)\frac{1}{(R+b)} \cdot \frac{10}{7}gcos\,\theta\right]$

$N = m(g\cos\theta + \frac{10}{7}gcos\,\theta)$

$N = mg\cos\theta(1 + \frac{10}{7})$

$\boxed{N = \frac{10}{7}mg\cos\theta}$

On a : $7(R+b)\ddot{\theta} = 5\,gsin\,\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{5g}{7(R+b)}\sin\theta$

Or $T = m[g\sin\theta - (R+b)\ddot{\theta}] = \|\vec{T}\|$

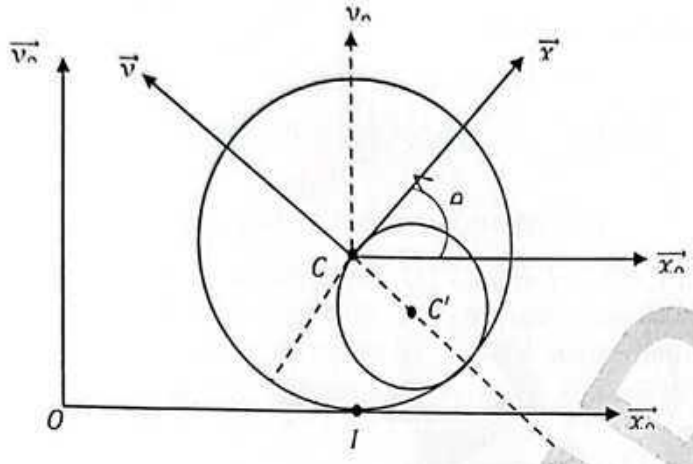
$T = m[g\sin\theta - (R+b)\frac{5g\sin\theta}{7(R+b)}]$

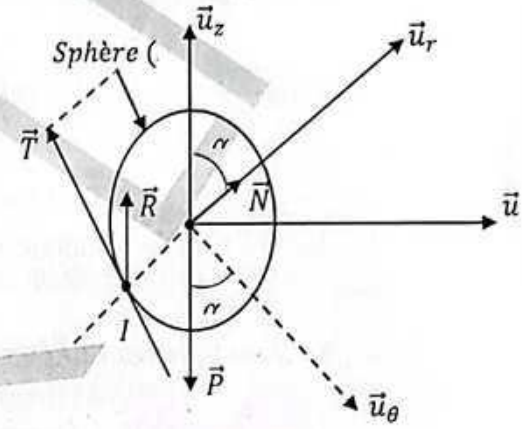
Scanné avec CamScanner

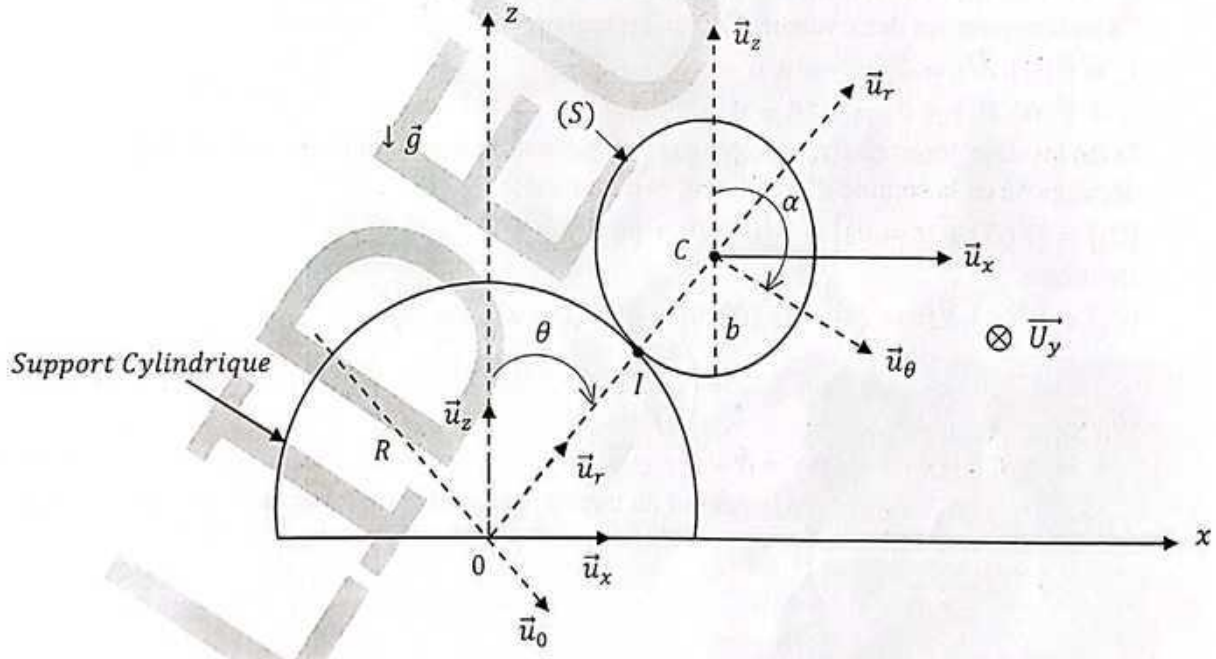
$T = m[g\sin\theta - \frac{5}{7}g\sin\theta]$

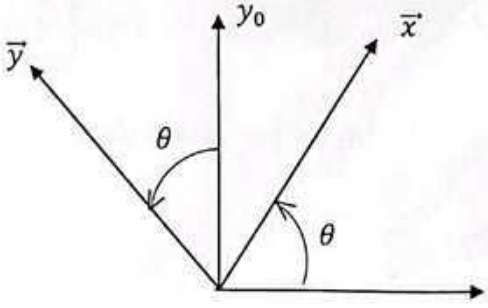
$T = mg\sin\theta(1 - \frac{5}{7})$

Donc $\boxed{T = \frac{2}{7}mg\sin\theta}$









Scanné avec CamScanner

Correction Mécanique des systèmes Session 1 2020-2021

Exercice 1

1. Le point O a pour coordonnée $O = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{V(O)} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

2. Equiprojectivité, on utilise les points O et M, tel que :

$$\overrightarrow{V(O)}\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{V(M)}\,\overrightarrow{OM} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3y-tz\\2tz-3x\\2+tx-t^2y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 2$

Le champ $\overrightarrow{V(M)}$ est équiprojectif pour $t = 0$ ou $t = 0$; $\overrightarrow{V(M)}$ est un torseur pour ces valeurs de t.

3. Pour $t = 0$ on a : $\vec{R}(t=0) = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$

   Pour $t = 2$ on a : $\vec{R}(t=2) = \begin{pmatrix}-4\\-2\\-3\end{pmatrix}$

4. Soit les deux torseurs associés à $t = 0$: $[\mathcal{C}_0]$ et à $t = 2$: $[\mathcal{C}_2]$

Calculons pour les deux valeurs l'invariant scalaire :

$I_0 = \vec{V}(O).\vec{R}(t=0) = -6 \neq 0$

$I_2 = \vec{V}(O).\vec{R}(t=2) = -10 \neq 0$

Donc les deux torseurs sont quelconques (ni glisseur ni couple) chacun peut cependant être décomposé en la somme d'un glisseur et d'un couple :

$[\mathcal{C}_0] = [\vec{V}(O), \vec{R}(t=0)] = [\vec{V}(O), 0] + [0, \vec{R}(t=0)]$

De même

$[\mathcal{C}_2] = [\vec{V}(O), \vec{R}(t=2)] = [\vec{V}(O), 0] + [0, \vec{R}(t=2)]$

Donc $\begin{cases} couples : \vec{C}(M) = \vec{V}(O) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \forall M \\ Glisseurs : \vec{G}(M) = \vec{0} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OM} \end{cases}$

5. Soit p appartient à l'axe central du torseur, la position de P par rapport à O est donnée par $\overrightarrow{OP} = \frac{R(t)\wedge\vec{V}(M)}{R^2} + \lambda\vec{R}$

   Avec $\lambda \in \mathbb{R}$

   Pour $\lambda = 0$, $\overrightarrow{OP_0} = \frac{R(t)\wedge\vec{V}(0)}{R^2}$

   Donc pour $t = 0$, $\vec{R}(t=0) = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$;

   $\vec{V}(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ on obtient alors $\overrightarrow{OP_0} = -\frac{1}{3}\vec{j}$

Scanné avec CamScanner

L'axe central pour $t = 0$ passe pour p_0 et parallèle à $\vec{R}(t=0)$ ⇒parallèle à $\vec{k}$. De la même façon on obtient l'axe central pour $t = 2$.

L'axe central pour $t = 0$ passe par

$$p_0 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{29} \\ -\frac{5}{29} \\ \frac{2}{29} \end{pmatrix} \text{ et parallèle à } \vec{R}(t=2) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. $G(0, y_G, 0)$ car l'axe y est un de symétrie et G appartient à l'axe de symétrie. On a :
   $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$
   $B(-a,0)\,; C(a,0)\,; A(0,y_A); y_A = AH = a$
   $A(0,a)\ y_G = \frac{a}{3}$ donc $G(0, \frac{a}{3}, 0)$.
2. Les plans (H,X,Y) et (H,Y,Z) sont des plans de symétrie matériel. Alors le repère (H,X,Y,Z) est un repère principale d'inertie d'où

$$J_H = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} M \text{ moment d'inertie par rapport à } (HX) \\ N \text{ moment d'inertie par rapport à } (HY) \\ P \text{ moment d'inertie par rapport à } (HZ) \end{cases}$$

- Déterminons M, N et P

Posons $(h = 0, b = 2a)$

$\frac{by}{b} = \frac{h-y}{h}$

$\Rightarrow by = \frac{b}{h}(h-y)$

$ds = \lambda by dy$

$m = \lambda \frac{b \times h}{2}$

$\lambda = \frac{2m}{b \times h}$

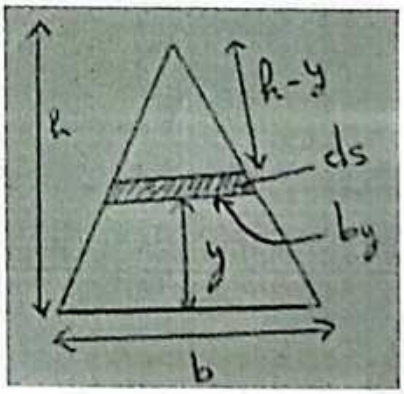
$$M = \int_s (y^2 + z^2) ds = \int_s (y^2) ds = \int_s (y^2) \lambda by dy = \lambda \frac{bh^3}{12}$$

$$\Rightarrow M = \frac{mh^2}{6} = \frac{ma^2}{6}$$

$$N = \int_s (x^2 + y^2) ds = \int_s x^2 ds = \int_0^h \lambda x^2 \left(\frac{b}{h}\right)(h-x)\, dx$$

$N = \frac{mh^2}{6} = \frac{ma^2}{6}$ or $M + N = P + 2\int_s z^2 ds$

Donc $P = \frac{ma^2}{3}$; $J_H(S) = \frac{ma^2}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$



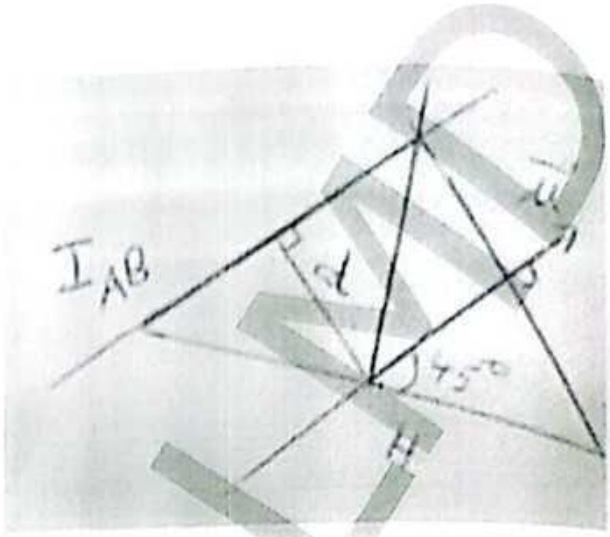
b) On a : $J_H(S) = J_G(S) + J(G,m)$

$\Rightarrow J_G(S) = J_H(S) - J(G,m)$

$$J_G(S) = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} - m\begin{pmatrix} y_G^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_G^2 \end{pmatrix}; y_G^2 = \frac{a^2}{9}$$

Scanné avec CamScanner

$$J_G(S) = \frac{ma^2}{6}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



3. Moment d'inertie par rapport à (AB)

$l_{AB} = l_{\Delta H} + md^2$

$l_{\Delta H} = t_{\vec{u}} j_H(S)\vec{u}$

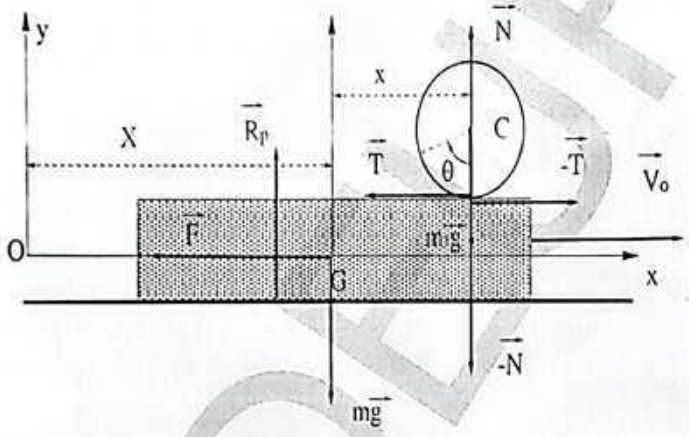
$\vec{u} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j}$

$l_{\Delta H} = \frac{ma^2}{6}, d = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$l_{AB} = \frac{2}{3}ma^2$

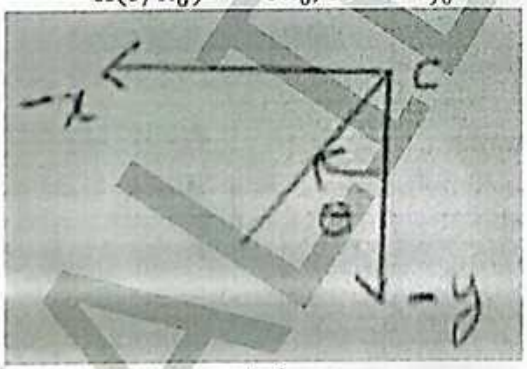
Exercice 3

1. a.



b. $\vec{V}_g(c/P) = \vec{V}(I \in c/R_G) = \vec{v}(c/R_G) + \vec{\Omega}(c/R_G) \wedge \overrightarrow{CI}$ avec

$\vec{\Omega}(c/R_G) = -\dot{\theta}\vec{k}_0; \overrightarrow{CI} = -a\vec{j}_0$



$\vec{v}(c/R_G) = \frac{dx\vec{i}_0}{dt}/R_G = \dot{x}\vec{i}_0$

$\vec{V}_g(c/P) = (\dot{x} - \dot{\theta}a)\vec{i}_0 = \vec{0}$ ①

Scanné avec CamScanner

2. Pour le cylindrique

$$\begin{cases} m_1\vec{\gamma}(c/R_0) = m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} \\ \vec{f}(C,c/R_0) = \dfrac{d}{dt}\vec{\sigma}\,(C,c/R_0)/R_0 \end{cases}$$

Car le cylindre roule sans glisser sur le plateau

Or $\vec{\sigma}\,(C,c/R_0) = J(c,R_0).\vec{\Omega}\,(c/R_0) = -\frac{ma^2\dot{\theta}}{2}\overrightarrow{k_0}$ or

D'où $\vec{f}(C,c/R_0) = -\frac{ma^2\ddot{\theta}}{2}\overrightarrow{k_0}$ or

$\vec{f}(C,c/R_0) = \vec{M}_c,ext = \vec{M}(\vec{P}) + \vec{M}(\vec{N}) + \vec{M}(\vec{T})$

$= \overrightarrow{CC} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{CI} \wedge \vec{N} + \overrightarrow{CI} \wedge \vec{T} = -aT\overrightarrow{k_0}$

$\vec{\gamma}(c/R_0) = \dfrac{d^2}{dt^2}(X+x)\vec{\imath}_0/R_0 = (\ddot{X}+\ddot{x})\vec{\imath}_0$

par projection sur les axes on obtient

$$\begin{cases} m_1(\ddot{X}+\ddot{x}) = -T \ (2) \\ 0 = N - m_1 g \ (3) \\ aT = \left(\dfrac{m_1 a^2}{2}\right)\ddot{\theta} \ (4) \end{cases}$$

- Pour le plateau

$$m\vec{\gamma}(G/R_0) = m\vec{g} + \overrightarrow{R_p} + \vec{F} - \vec{N} - \vec{T}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{X} = T - F \ (5) \\ 0 = Rp - N - mg \ (6) \end{cases}$$

3. L'équation (1) $\Rightarrow \dot{x} = a\dot{\theta}$

$\Rightarrow \ddot{x} = a\ddot{\theta}$

$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{a}$ dans l'équation (4)

$\Rightarrow \quad T = \left(\frac{m_1}{2}\right)\ddot{x}$ (7)

(7)dans(2) $\Rightarrow \quad m_1(\ddot{X}+\ddot{x}) = -\left(\frac{m_1\ddot{x}}{2}\right) \Rightarrow$

$m_1\left(\ddot{X} + \frac{3}{2}\ddot{x}\right) = 0 \Rightarrow \quad \ddot{X} + \frac{3}{2}\ddot{x} = 0$ (8)

(7) Et (8) dans (5) $\Rightarrow \quad m\ddot{X} = \left(\frac{m_1\ddot{x}}{2}\right) - F$

$\Rightarrow -\frac{3}{2}m\ddot{x} = \left(\frac{m_1\ddot{x}}{2}\right) - F \Rightarrow \ddot{X} = \dfrac{2F}{3m+m_1}$ (9)

(9) $\Rightarrow \dot{x}(t) = \dfrac{2Ft}{3m+m_1}$

$$\boxed{x(t) = \frac{Ft^2}{3m+m_1}}$$

4. L'équation (9) dans (8) $\Rightarrow$

Scanné avec CamScanner

$$\ddot{X} + \frac{2F}{3m + m_1} \times \frac{3}{2} = 0$$

$$\ddot{X} = -\frac{3F}{3m + m_1} \Rightarrow \dot{X} = -\frac{3Ft}{3m + m_1} + V_0$$

donc $X(t) = -\frac{3Ft^2}{3m+m_1} + V_0 t$

L'instant $t\alpha$ correspondent à l'arrêt du plateau correspond à

$$\dot{X}(t\alpha) = 0 \Rightarrow t\alpha = \frac{V_0(3m + m_1)}{3F}$$

5. $t \geq t\alpha$, le plateau s'immobilise $\Rightarrow \dot{X}(t) = \ddot{X}(t) = 0$
   L'équation ② devient $m_1\ddot{x} = -T$ et d'après ⑦ $m_1\ddot{x} = 2T \Rightarrow T = 0$
   Ainsi $m_1\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = cte = \dot{x}(t\alpha)$
6. Pour $t \leq t\alpha$, et en utilisant ⑧ $\dot{X} + \frac{3}{2}\dot{x} = V_0$ pour tout $t = t\alpha$,

   $\dot{X} = 0$ et $\dot{x} = \frac{2}{3}V_0$

   Or $\vec{V}(c/R_0) = \vec{V}(c/R_G) + \vec{V_e} = \dot{x}(t)\vec{\imath_0} = \frac{2}{3}V_0\vec{\imath_0}$

   Le mouvement du cylindre est uniforme

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB
MATHS-INFO L2

Année 2020-2021

CORRECTION MECANIQUE DES SYSTEMES
Session 2

Exercice 1

$A(3,0,0)$; $B(-1,2,1)$

$\vec{M}(0) = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$; $\vec{M}(A) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{M}(B) = \begin{pmatrix}2\\-1\\9\end{pmatrix}$

1) Champ antisymétrique $\Leftrightarrow$ champ équiprojectif.

$\overrightarrow{OA}.\vec{M}(0) = 3$

$\overrightarrow{OA}.\vec{M}(0) = 3 \Rightarrow \overrightarrow{OA}.\vec{M}(0) = \overrightarrow{OA}.\vec{M}(A)$ même chose pour $\overrightarrow{OB}.\vec{M}(0) = \overrightarrow{OB}.\vec{M}(B)$

$\overrightarrow{AB}.\vec{M}(A) = \overrightarrow{AB}.\vec{M}(B)$.

Donc $\vec{M}$ est un champ antisymétrique.

2) $\vec{M}$ est antisymétrique donc $\exists!\ \vec{R}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tel que

$\forall A, O,\ \vec{M}(A) = \vec{M}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OA} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

$\forall A, B,\ \vec{M}(B) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

$\forall O, B,\ \vec{M}(B) = \vec{M}(0) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OB}$ alors $\vec{R}$ est unique et $\vec{R} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

3) $\vec{M}(P)$ en tout point $P(x,y,z)$ de l'espace

On a: $\vec{M}(P) = \vec{M}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$

$\vec{M}(P) = \begin{cases} 1+z \\ 1-2z \\ 4-x+2y \end{cases}$

4) $\vec{M}(P) = \lambda\vec{R} / P \in (\Delta)$

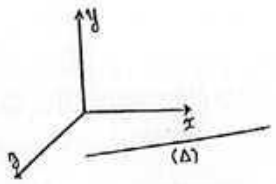
$\begin{cases} 1+z = 2\lambda \\ 1-2z = \lambda \\ 4+2y-x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1/5 \\ y = \frac{1}{2}(x-4) \end{cases} \Rightarrow (\Delta)$ est la droite d'équation

$y = \frac{1}{2}(x-4)$ qui se trouve dans le plan $z = \frac{1}{5}$

$z = \frac{1}{5} \Rightarrow \lambda = \frac{3}{5} \Rightarrow \vec{M}(P \in \Delta) = \frac{3}{5}\vec{R}$

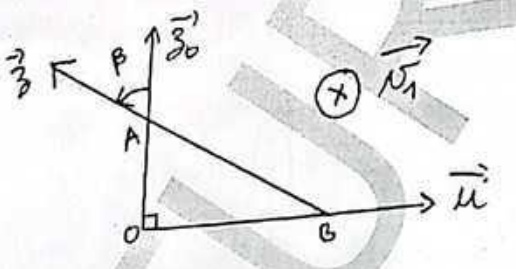
Scanné avec CamScanner

$$\vec{M}(P \in \Delta) = \frac{\vec{R}.\vec{M}(0)}{R^2}\vec{R} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$



Exercice 2

1) À tout instant t la tige se trouve dans le plan $(O, \vec{u}, \vec{z}_0)$



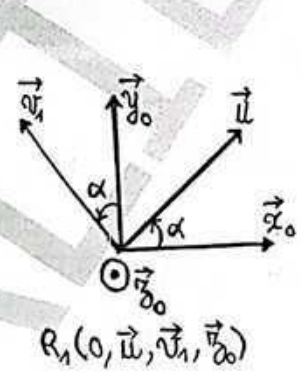
Or $\vec{v}_1$ est orthogonal à tout instant à ce plan$\Rightarrow$ $\vec{v}_1$ est lié à la tige. $\vec{z}$ vecteur unitaire de la tige est lié à la tige. $\vec{v}_1$ et $\vec{z}$ sont orthogonaux or $\vec{v} = \vec{v}_1 \wedge \vec{z} \Rightarrow (\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{z})$ est orthonormé direct et $\vec{v}$ est aussi lié à la tige. Donc le repère $R(A, \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{z})$ est lié à la tige.

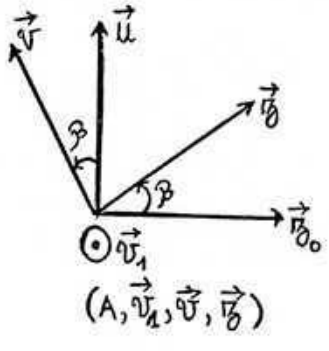
$\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{z}_0 \Rightarrow \lambda = \overrightarrow{OA}.\vec{z}_0$

$= \overrightarrow{OB}.\vec{z}_0 + \overrightarrow{BA}.\vec{z}_0$

$= 0 + L\vec{z}.\vec{z}_0$

Donc $\lambda = L\vec{z}.\vec{z}_0$





VALIDUR LMD

Scanné avec CamScanner

$\vec{z} = \cos\beta\,\vec{z}_0 + \sin\beta\,\vec{u}$

$\lambda = L\vec{z}.\vec{z}_0 = L\cos\beta$
$\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{z}_0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} = L\cos\beta\,\vec{z}_0$
$(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow[\vec{z}_0]{\alpha} (\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{z}_0) \xrightarrow[\vec{v}_1]{\beta} (\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{z})$

On passe de la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ à la base $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{z}_0)$ par rotation d'angle α autour de $\vec{z}_0$ et on passe de la base $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{z}_0)$ à la base $(\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{z})$ par rotation d'angle β autour de $\vec{v}_1$ donc α et β déterminent la position de $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{z})$ par rapport à $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$or $(\overrightarrow{OA} = L\cos\beta\,\vec{z}_0)$ β donne la position de A par rapport à $\mathcal{R}_0$.
Finalement α et β donnent la position de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ et comme $\mathcal{R}$ est lié à la tige , α et β donnent la position de la tige par rapport à $\mathcal{R}$.

2) Calculons $\vec{\Omega}(AB/\mathcal{R}_0)$ dans $\mathcal{R}_1$
$\vec{\Omega}(\overrightarrow{AB}/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)$
$= \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$
$= \dot{\beta}\,\vec{v}_1 + \dot{\alpha}\,\vec{z}_0$

3)
$\vec{V}(A/\mathcal{R}_0) = \dfrac{d\overrightarrow{OA}}{dt/\mathcal{R}_0} = \dfrac{Ld(\cos\beta\,\vec{z}_0)}{dt/\mathcal{R}_0}$
$= L\left(\cos\beta\dfrac{d\vec{z}_0}{dt/\mathcal{R}_0} + \dfrac{d\cos\beta}{dt}\vec{z}_0\right)$
$\vec{V}(A/\mathcal{R}_0) = -L\dot{\beta}\sin\beta\,\vec{z}_0$
$\vec{V}(B/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(A/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\overrightarrow{AB}/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{AB}$
$= -L\dot{\beta}\sin\beta\,\vec{z}_0 + (\dot{\beta} + \dot{\alpha}\,\vec{z}_0) \wedge (-L\vec{z})$
$= \vec{V}(A/\mathcal{R}_0) - L\dot{\beta}\,\vec{v} - L\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{v}_1$
$\vec{z_0} = \cos\beta\,\vec{z} - \sin\beta\,\vec{v}$; $\vec{v} = \cos\beta\,\vec{u} - \sin\beta\,\vec{z}_0$
$\vec{V}(B/\mathcal{R}_0) = -L(\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{u} + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{v}_1)$

$\vec{V}(B/\mathcal{R}_1) = \dfrac{d\overrightarrow{OB}}{dt/\mathcal{R}_1}$
$\overrightarrow{OB} = \delta\vec{u} \Rightarrow \delta = \overrightarrow{OB}.\vec{u} = \overrightarrow{OA}.\vec{u} + \overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0 - L\vec{z}.\vec{u}$
$\Rightarrow \delta = -L\cos(\dfrac{1}{2} - \beta)$
$\Rightarrow \delta = -L\sin\beta$
$\overrightarrow{OB} = -L\sin\beta\,\vec{u}$
$\vec{V}(B/\mathcal{R}_1) = -L\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{u}$
4) Prenons comme repère absolue $\mathcal{R}_0$ et repère relatif $\mathcal{R}_1$
$\vec{V}_a(B) = \vec{V}_r(B) + \vec{V}_e(B) = \vec{V}(B/\mathcal{R}_0)$
$\vec{V}_r(B) = \vec{V}(B/\mathcal{R}_1)$
$\vec{V}_e(B) = \vec{V}(B \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$

Scanné avec CamScanner

$$\vec{V}(B \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{OB}$$
$$= \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 \wedge (-L\sin\beta\,\vec{u})$$
$$= -L\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{u}$$
$$\vec{V}(B/\mathcal{R}_0) = -L\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{u} - L\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{v}_1$$

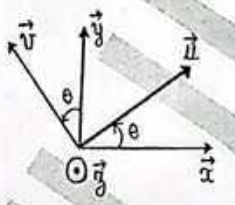
5) $\vec{\gamma}(B/\mathcal{R}_0) = \dfrac{d\vec{V}(B/\mathcal{R}_0)}{dt/\mathcal{R}_0}$

$$\vec{\gamma}(B/\mathcal{R}_0) = L(\sin\beta(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2) - \ddot{\beta}\cos\beta)\vec{u} - L(2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta + \ddot{\alpha}\sin\beta)\vec{v}_1$$

Exercice 3

1) Montrons que $\vec{\Omega}(EF/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\,\vec{z}$; la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ est une base orthonormée directe liée à la tige (EF)

On a: $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \xrightarrow[\vec{z}]{\theta} (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ donc $\vec{\Omega}(EF/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\,\vec{z}$



* Calculons $\vec{V}(G)$

$$\vec{V}(G) = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt/\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CG})_{/\mathcal{R}} = \frac{dx}{dt}\vec{x} + r\frac{d\vec{y}}{dt/\mathcal{R}} - L\frac{d\vec{v}}{dt/\mathcal{R}} \text{ avec}$$

$$\frac{d\vec{y}}{dt/\mathcal{R}} = \vec{0};\ \frac{d\vec{v}}{dt/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(EF/\mathcal{R}) \wedge \vec{v} = \dot{\theta}\,\vec{z} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{V}(G) = \dot{x}\,\vec{x} + L\dot{\theta}\,\vec{u} \text{ avec } L = \sqrt{a^2 - r^2} = Cste$$

2) Caculons J le moment d'inertie de la tige par rapport à son axe $\overrightarrow{Gz}$

$$J = \lambda\int(u^2 + v^2)du = \lambda\int_{-a}^{a} u^2\,du;\ m = \lambda 2a \Rightarrow \boxed{J = \frac{ma^2}{3}}$$

3) Déterminons le torseur dynamique de la tige au point G : $[m\vec{\gamma}(G), \vec{\delta}(G, EF/\mathcal{R})]$

$$\vec{\gamma}(G) = \frac{d\vec{V}(G)}{dt/\mathcal{R}} = \ddot{x}\,\vec{x} + L\ddot{\theta}\,\vec{u} + L\dot{\theta}^2\,\vec{v}$$

$$\vec{\delta}(G, EF/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt}\vec{\sigma}(G, EF/\mathcal{R}) \text{ Or } \vec{\sigma}(G, EF/\mathcal{R}) = J\,\vec{\Omega}(EF/\mathcal{R}) = J\dot{\theta}\,\vec{z}$$

$$\vec{\delta}(G, EF/\mathcal{R}) = J\ddot{\theta}\,\vec{z}$$

4) Théorème du moment dynamique de la tige au point C

$$\vec{\delta}(C, EF/\mathcal{R}) = \overrightarrow{CE} \wedge \vec{R}_E + \overrightarrow{CF} \wedge \vec{R}_F + \overrightarrow{CG} \wedge \vec{P}$$

$$\vec{R}_E = -R_E\,\vec{u}_2;\ \vec{R}_F = -R_F\,\vec{u}_1;\ \overrightarrow{CE} = r\,\vec{u}_2;\ \overrightarrow{CF} = r\,\vec{u}_1;\ \overrightarrow{CG} = -L\,\vec{v};$$

$$\vec{P} = -mg\,\vec{y};\ \vec{v} = -\sin\theta\,\vec{x} + \cos\theta\,\vec{y}$$

$$\overrightarrow{CE} \wedge \vec{R}_E = \overrightarrow{CF} \wedge \vec{R}_F = \vec{0};\ \overrightarrow{CG} \wedge \vec{P} = -mgL\sin\theta\,\vec{z}$$

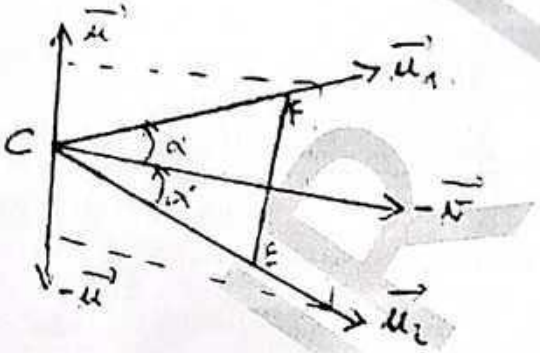
$$\vec{\delta}(C, EF/\mathcal{R}) = \vec{S}(G, EF/\mathcal{R}) + m\,\vec{\sigma}(G) \wedge \overrightarrow{GC} = [J\ddot{\theta} + mL^2\ddot{\theta} + m\ddot{x}L\cos\theta]\vec{z}$$

Scanné avec CamScanner

$\vec{\delta}(C, EF/\mathcal{R}) = Lm[\ddot{\theta}(L+J/mL)+\ddot{x}\cos\theta]\vec{z}$ or $\vec{\delta}(C, EF/\mathcal{R}) = -Lmg\sin\theta\,\vec{z}$
d'où l'une de ses équations dans le repère $\mathcal{R}$ est:

$$\ddot{\theta}(L + J/mL) + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0$$

5) Théorème de la résultante dynamique
$m\vec{\gamma}(G) = \vec{P} + \vec{R}_E + \vec{R}_F = -mg\,\vec{y} - R_E\,\vec{u}_2 - R_F\,\vec{u}_1$



$\vec{u}_2 = -\sin\alpha\,\vec{u} - \cos\alpha\,\vec{v}$ avec $\cos\alpha = \frac{L}{r}$; $\sin\alpha = \frac{a}{r}$
$\vec{u}_1 = \sin\alpha\,\vec{u} - \cos\alpha\,\vec{v}$
$m\vec{\gamma}(G) = -mg\,\vec{y} + (R_E - R_F)\sin\alpha\,\vec{u} + (R_E + R_F)\cos\alpha\,\vec{v}$

$$= -mg\,\vec{y} + (R_E - R_F)\frac{a}{r}\vec{u} + (R_E + R_F)\frac{L}{r}\vec{v}$$

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{y} \\ \vec{v} = -\sin\theta\,\vec{x} + \cos\theta\,\vec{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{x} = \cos\theta\,\vec{u} - \sin\theta\,\vec{v} \\ \vec{y} = \sin\theta\,\vec{u} + \cos\theta\,\vec{v} \end{cases}$$

$m[(\ddot{x}\cos\theta + L\ddot{\theta})\vec{u} + (L\dot{\theta}^2 - \ddot{x}\sin\theta)\vec{v}] = [-mg\sin\theta + (R_E - R_F)\frac{a}{r}]\vec{u} +$
$[-mg\cos\theta + (R_E + R_F)\frac{L}{r}]\vec{v}$

$$\begin{cases} (R_E - R_F) = \frac{r}{a}[mg\sin\theta + m(\ddot{x}\cos\theta + L\ddot{\theta})] \\ (R_E + R_F) = \frac{r}{L}[mg\cos\theta + m(L\dot{\theta}^2 - \ddot{x}\sin\theta)] \end{cases}$$

Après résolution on obtient R_E et R_F.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUËT-BOIGNY(UNIV-FHB)
UFR MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

SUJET D'EXAMEN DE LA DEUXIÈME SESSION
LOGICIEL LATEX, SCILAB et R

Licence 2 (2ième année)	Durée du sujet : 2 heures 30
Logiciels Scientifiques	Année 2017-2018
(Latex, Scilab et R)	Documents non autorisés
Prof. DOSSO M.	Outils informatiques non autorisées

Les 3 exercices sont indépendants. Rédiger avec soin.

Exercice 1 (Logiciel Scilab)
Soit la fonction Scilab ci-dessous :

```
fonction [S] ← Somq(N)
%% Programme SCILAB prenant
%% en entrée une matrice de taille (p,q)
[p,q] ← size(N);
n ← sum(N);
S ← 0;
for i = 1 : p
  N_i ← sum(N(i,:));
  for j = 1 : q
    N_j ← sum(N(:,j));
    V ← (N_i * N_J)/n;
    S ← S + (N(i,j) − V)/V;
  fin;
fin;
endfonction
```

1. *Combien d'érreur y'a-t-il dans la fonction Scilab ci-dessus ?*
2. *Déterminer les et corriger le programme ?*
3. *Quel calcul effectue la fonction Scilab de la question* 1. *qui prend en entrée une matrice N donnée.*
4. *Sans utiliser de boucle* **for**, *reprendre la fonction corrigée (N.B. : vous pouvez utiliser la boucle* **while**)

Exercice 2 (Logiciel R)

Scanné avec CamScanner

1. *Écrire une fonction R (à l'aide de deux boucles* for*) résolvant un système linéaire* $Ax = b$, *ou encore sous la forme*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A(1,1) & A(1,2) & \cdots & \cdots & A(1,n) \\ 0 & A(2,2) & \cdots & \cdots & A(2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & A(n-1,n) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A(n,n) \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(n) \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b(1) \\ b(2) \\ \vdots \\ b(n) \end{pmatrix}}_{b}$$

où A est une matrice carrée triangulaire supérieure. On pourra utiliser l'instruction dim *qui permet de récuperer les deux dimensions d'une matrice*
$---> d = dim(A)$ *ou* $n = dim(A)[1]$ *et* $m = dim(A)[2]$
Dans cet exercice, on condidère que les deux dimensions sont les mêmes (i.e. $n = m$*) et qu'aucun element de la diagonal de la matrice A est nul.*

2. *Reprendre la question 1. (en renplacçant la boucle interne par une instruction matricielle c'est-à-dire à l"aide d'une seule boucle) si le système* $Ax = b$ *est de la forme*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A(1,1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ A(2,1) & A(2,2) & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ A(n-1,1) & A(n-2,1) & \cdots & & 0 \\ A(n,1) & A(n,2) & \cdots & A(n,n-1) & A(n,n) \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(n) \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b(1) \\ b(2) \\ \vdots \\ b(n) \end{pmatrix}}_{b}$$

où A est une matrice carrée triangulaire inférieure.

3. *Reprendre la question 2. pour une matrice carrée trianulaire inférieur ayant des zeros sur la diagonal principale.*

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET-BOIGNY D'ABIDJAN-COCODY
UFR MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
(Année universitaire 2018 – 2019)

Examen de la deuxième session des Logiciels Latex et Scilab
LICENCE 2 (2ème année)
(Durée : 2 heures)
Documents et outils informatiques non autorisés
Les 3 exercices sont indépendants. Rédiger avec soin.

Exercice 1 (LATEX)
En s'aidant éventuellement des fichiers de documentation

- *du package amsmath*
- *du package amsthm (ou, ntheorem)*
- *du package babel*

et en écrivant dans le préambule

```
\theoremstyle{plain}
\newtheorem{thm}{Théorème}
\theoremstyle{definition}
\newtheorem{defi}[thm]{Définition}
\theoremstyle{remark}
\newtheorem{exe}{Exemple}
\newtheorem{rmq}{Remarque}
```

donner le code qui reproduit le texte suivant, en utilisant au cas échéant, des macros personnelles appropriés :

***Définition 1** (Base hilbertienne) . Soit $(H, <\cdot,\cdot>)$ un espace de Hilbert. On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilberteinne de H si elle est orthogonale, normée et totale.*

***Définition 2** Un espace métrique (E, d) est dit séparable si tout ouvert non vide de E contient au moins un point d'une partie dénombrable de E.*

***Exemple 1** $\mathbb{R}^n$ est séparable.*

***Théorème 1** (Caractérisation) . Soit $(H, <\cdot,\cdot>)$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de H. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La famille orthonormée $(e_n)_n$ est une base hilbertienne.*
2. *Pour tout $x \in H$,*

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} < x, e_n > e_n \qquad \text{(égalité de Parseval).}$$

Scanné avec CamScanner

3. On a

$$(e_n, \quad n \in \mathbb{N})^{\perp} = \{0\}. \tag{1}$$

Remarque 1 Le théorème 1 s'étend au cas des espaces de Hilbert non séparables.

Exercice 2 (SCILAB)

1. *Il y a combien d'érreur dans la fonction Scilab ci-dessous ; déterminer les et les corriger.*

```
function [X] = resol(A, b)
%%ce programme resourd l'équation
%%AX = b
tol ← 1e − 3;
[n, m] ← size(A);

if n = m then
 X(m) ← b(n)/A(n, m);
 for k = m − 1 : −1 : 1
     S ← 0;
     for p = k + 1 : m
       S ← S + A(k, p) * X(p);
     end;
     X(k) ← [b(k) − S] / A(k, k);
end;
elseif n > m,
    if norm(b(n + 1 : m)) >= tol then
      X ←' pas de solution';
    end;
else
  X ←' pas de solution unique';
end;
endfunction
```

2. *Reprendre la fonction corrigée en remplaçant la boucle interne par une instruction matricielle.*

Scanné avec CamScanner

Exercice 3 (SCILAB)

1. *Écrire une fonction SCILAB qui prend en entrée les 3 coefficients a, b et c d'un polynôme de dégré 2 (i.e $aX^2 + bX + c$) et qui détermine ses racines dans $\mathbb{C}$.*

2. *Construire une fonction SCILAB (en utilisant une seule boucle et non deux) qui resout le système linéaire*

$$AX = b$$

où $A = \begin{bmatrix} A(1,1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A(2,1) & A(2,2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ A(n,1) & A(n,2) & \cdots & \cdots & A(n,m) \end{bmatrix}$ *est une matrice triangulaire inférieur ayant des coefficients nulles sur sa diagonale et* $b = \begin{pmatrix} b(1) \\ b(2) \\ \vdots \\ b(p) \end{pmatrix}$ *est vecteur de longeur p.*

N.B.: Considerez les cas ou le nombre de lignes de la matrice est différent de la longueur du vecteur b ; et celui ou la matrice n'est pas néssairement carrée.

Bonne chance

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny
UFR Mathématique et Informatique
Niveau : Licence 2

Année Académique
2019-2020
Session 1

EXAMEN
SCILAB ET LATEX
Durée : 02H 00

1 Scilab

EXERCICE 1 : (5 points)

1. Ecrire le code scilab de chacun des vecteurs lignes suivants :
   a) I est constitué de la suite des entiers de 1 à n ;
   b) J est constitué de la suite des entiers de 1 à m ;
   c) $x = 2I - 5$ et $y = J^3 + 9$
2. Soit la variable z codée en scilab par : $z = (x') * y$
   a) la variable z est-elle une matrice ou un scalaire ? Justifier votre réponse.
   b) Ecris le code scilab pour déterminer la taille de la variable z et préciser les résultats obtenus.
3. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ et la matrice A de taille $n \times m$ dont l'élément de la ligne i et de la colonne j est donnée par $A_{ij} = (2i - 5)(j^3 + 9)$.
   a) Construire sans utiliser de boucle "for", une fonction nommée "creatmatrice" prennant en arguments d'entrée les entiers n et m et qui renvoi (comme argument de sortie) la matrice A.
   b) Ecrire sur votre feuille le code scilab de la matrice obtenue en supprimant la première ligne de A.

VALIDE UR LMD

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2 : (5 points)

1. Soit l'algorithme :

```
function [C] = algo1(n)
if n >= 0  & int(n)==n then
C = zeros(1,n + 1);
for k=0 :n
 C(k+1) = factorial(n)/ (factorial(k)*factorial(n-k)) ;
end
else
disp( 'n doit etre un entier positif ou nul' );
end
endfunction
```

(1)

(a) Quelle formule mathématique est-elle codée en scilab par l'algorithme (1) ? Préciser les éléments du vecteur C résultat de l'algorithme (1) pour $n = 3$ (c'est à dire [C] = algo1(3)).

(b) En utilisant l'algorithme (1), écrire la fonction nommée "algo2" qui prend en arguments d'entrée deux réels x, y et un entier n et qui renvoie la valeur $r = (x + y)^n$ donnée par $r = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$.

2. Soit la fonction $f(x) = 0.75x(1 - x)$.

   a) Définir le vecteur x de 101 nombres allant de 0 à 1 grace à la commande "linspace" de scilab.

   b) En déduire le code scilab de la création du vecteur $y = f(x)$.

   c) Trace la courbe (x,y=f(x)) en rouge, ligne continue, en utilisant la fonction "plot" puis par la commande "xtitle" de scilab,
   - nommer l'axe des abscisse par "x",
   - l'axe des ordonnées par "y=f(x)"
   - et donner le titre "courbe de $f(x) = 0.75x(1 - x)$."

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Proposition de correction scilab 2018 SPI)

1) Scilab est-il un logiciel de calcul formel ?

Scilab n 'est pas un logiciel de calcul formel. Il calcule uniquement avec des nombres, des valeurs exactes.

2) Pourquoi Scilab est un langage interprété ?

Parce qu' un script scilab est lu ligne par ligne par la machine, qui exécute au fur et à mesure c haque ligne.

3) Que font les instructions suivantes :

- pwd : Renvoie dans "ans" le répertoire courant
- help : est utilisé pour avoir l'aide e n ligne des différentes commandes. Il permet d'avoir plus d'information s ur la commande

4)Scilab nécessite-t-il une déclaration de type?

Il n'est pas nécessaire de déclarer un type en Scilab parce que le type d'une variable est connu dès l'instant où on affecte une valeur à la variable.

5) Citez les différents types sous Scilab

Il existe plusieurs « types » d'objets Scilab , avec, par exemple les types :

- **constant** : Les nombres réels ou complexes ou matrices de réels ou complexes
- **string** : Les chaînes de caractères ou matrices de chaînes.

- **boolean** : Les booléens ou matrices de b ooléens.
- **function** : les fonctions.
- **polynomial** : les polynômes ou matrices de p olynômes.
- **rational** : les fractions rationnelles ou matrice de les fractions rationnelles.

Chaque type possède sa propre syntaxe.

6) **On considère la matrice**

A=[1,2,3;-3,-5,4;10,8,12]

Que donne :

a)diag A : un vecteur contenant l es éléments de la diagonale de la matrice A.

b)diag(diag(A)) : une matrice diagonale contenant l a diagonale de la matrice A.

Scanné avec CamScanner

SEMESTRE 2

www.gvivaservices.com

VALIDE UMD

Scanné avec CamScanner

RESUME THERMODYNAMIQUE
EXEMPLES DE TRANSFORMATION QUASI-STATIQUES POUR UN GAZ PARFAIT

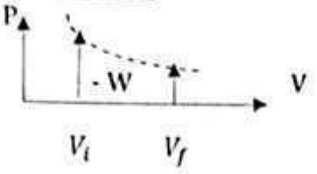
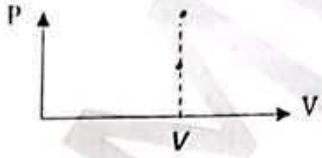
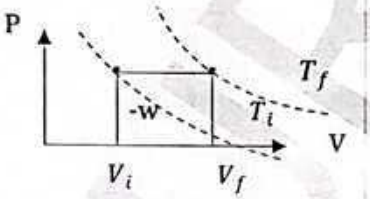
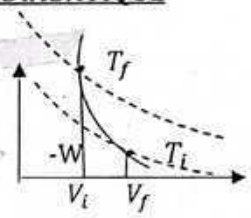
Diagramme P - V	ISOTHERME	ISOCHORE
		
Caractéristique de la transformation	$T = Cste$	$V = Cste$
1er principe	$Q = -W$	$\Delta U = Q$
Travail	$W = -nRTln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$	$W = 0$
Autres relations	$PV = Cste$	$Q = nC\Delta T$ (pour C = Cste)
Diagramme P- V	ISOBARE	ADIABATIQUE
		
Caractéristique de la transformation	P = Cste	Q = 0
1er principe	$Q = \Delta U - W$	$\Delta U = W$
Travail	$W = -P(V_f - V_i)$	$W = \frac{(P_f V_f - P_i V_i)}{(k-1)}$
Autres relations	$Q = nC\Delta T$ (pour C = cste)	$PV^{\gamma} = Cste$ $TV^{\gamma-1} = Cste$ $T^{\gamma}P^{1-\gamma} = Cste$ $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

TABLEAU DE FORMULES THERMODYNAMIQUE

2e identité thermodynamique	dH = TdS + VdP	
3e identité thermodynamique	dF = -SdT - PdV	
4e identité thermodynamique	dG = -SdT + VdP	
Capacité thermique a volume constant	$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)v$ en J.K^{-1}	. V : volume . T : température
Capacité thermique a pression constante	$C_r = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)p$ en J.K^{-1}	. H : enthalpie . P : Pression

Scanné avec CamScanner

Capacité thermique massique a volume/ pression constant(c)	$c_v = \frac{C_v}{m}$ $c_p = \frac{C_p}{m}$	. m : masse du système . c_v : en $j.kg^{-1}.K^{-1}$. c_p : en $j.kg^{-1}.K^{-1}$
Capacité thermique molaire a volume/ pression constant(c)	$c_{vm} = \frac{C_v}{m}$ $c_{pm} = \frac{C_p}{m}$	. c_{vm} : en $j.mol^{-1}.K^{-1}$. c_{pm} : en $j.mol^{-1}.K^{-1}$
Energie interne d'un gaz parfait monoatomique	$U = \frac{3}{2}nRT$	. n : quantité de matière . R : constante des gaz parfaits
Energie interne d'un gaz parfait diatomique	$U = \frac{5}{2}nRT$	
Enthalpie d'un gaz parfait monoatomique	$H = \frac{5}{2}nRT$	. H : enthalpie en joules
Enthalpie d'un gaz parfait diatomique	$H = \frac{7}{2}nRT$	
Loi de Mayer	$C_p - C_v = nR$ $C_{pm} - C_{vm} = R$	. R : en $J.mol^{-1}.K^{-1}$
Coefficient gamma	$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$	
Coefficient gamma d'un GPM (gaz parfait monoatomique)	$\gamma(GPM) = \frac{5}{3}$	
Coefficient gamma d'un gaz diatomique	$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{2}$	
Lois de Laplace	$TV^{\gamma-1} = cste$ $PV^{\gamma} = cste$ $T^{\gamma}P^{1-\gamma} = cste$	. valable pour un gaz parfait à γ constant subissant une transformation adiabatique et mécaniquement réversible

- <u>Enfin quelques définitions :</u>

Système fermé : n'échange pas de particules avec l'extérieur

Système calorifugé : n'échange pas de chaleur avec l'extérieur

Système isolé : n'échange pas de chaleur, ni de travail avec l'extérieur

Transformation adiabatique : Sans échange de chaleur (attention, T peut varier lors d'une telle transformation !)

Transformation isotherme : à température constante

Transformation isobare : à pression constante

Transformation isochore : à volume constant

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet Boigny
UFR Mathématique et Informatique

Année Universitaire : 2016-2017
L2
1ère Session

Epreuve de Thermodynamique
(Durée 2h00)

Exercice 1

Un cylindre d'axe horizontal, indéformable, adiabatique est séparé en deux compartiments par un piston adiabatique, mobile sans frottement. A partir d'un état initial identique pour chaque compartiment (1 mole de gaz parfait monoatomique P_0, V_0, T_0), on chauffe le compartiment de droite D au moyen d'une résistance électrique jusqu'à la température T_1. Le compartiment de gauche G, dont la base est remplacée par un thermostat (paroi diatherme) reste à la température T_0 par contact thermique avec le thermostat.

1) **Faire** le schéma expérimental.
2) **Déterminer** et **calculer** la pression P_D du compartiment de droite D à l'équilibre en fonction de T_0, T_1 et V_0.
3) **Faire** le bilan d'énergie pour chaque compartiment et pour le système global (W_G, Q_G, ΔU_G, W_D, Q_D, ΔU_D, ΔU). En **déduire** la chaleur Q_R fournie par la résistance électrique. **Faire** l'application numérique de W_G, Q_G, ΔU_G, W_D, Q_D, ΔU_D, ΔU et Q_R.
   Données : $P_0 = 1$ bar, $T_0 = 20°C$ et $T_1 = 627°C$.

Exercice 2

Une masse m d'un gaz parfait monoatomique est prise dans les conditions initiales A_0 (P_0, V_0, T_0). Au cours d'une expérience de laboratoire, on lui fait subir successivement à partir de cet état initial les quatre transformations quasi-statiques suivantes :

a) Transformation isobare de A_0 à A_1 ($V_1 = V_0/4$)
b) Transformation isotherme de A_0 à A_2 ($V_2 = V_0/4$)
c) Transformation adiabatique de A_0 à A_3 ($P_3 = 4\ P_0$)
d) Transformation isochore de A_0 à A_4 ($P_4 = 4\ P_0$)

1) **Déterminer** et **reporter** dans un tableau les coordonnées des A_i (P_i, V_i, T_i).
2) **Représenter** dans le même diagramme de Clapeyron ces quatre évolutions.
3) **Calculer** les échanges d'énergie W et Q pour les transformations isotherme et adiabatique.

Données : m = 1 kg, M = 70 g.mol^{-1}, P_0 = 1 bar et T_0 = 20°C.

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

Université Félix Houphouët Boigny — 2017-2018

UFR Mathématique et Informatique — Licence 2

1ère Session

Epreuve de Thermodynamique *(durée 2 heures)*

Exercice 1

On considère une mole de gaz parfait monoatomique ($\gamma = 1,66$) décrivant un cycle de Carnot récepteur. Ce cycle modélise le fonctionnement d'une frigo-pompe utilisée pour maintenir l'intérieur d'un local de congélation à - 25° C. La température extérieure est de 23° C. Les sommets du cycle sont désignés par les points 1, 2, 3, 4. La phase 1-2 correspond à la compression insentropique du gaz. Les pressions aux points 1 et 3 valent respectivement $P_1 = 1$ bar et $P_3 = 4$ bar.

1) **Faire** le schéma du principe de fonctionnement de cette frigo-pompe.
2) **Représenter** l'allure du cycle dans le diagramme de Clapeyron.
3) **Calculer** la pression au point 2.
4) **Calculer** la chaleur Q_C transférée au gaz lors de la transformation 2-3. **Commenter** son signe.
5) En **déduire** la valeur de la chaleur Q_F transférée au gaz lors de la transformation 4-1. **Commenter** le signe.
6) **Calculer** le travail W fourni au gaz et en **déduire** le rendement ε de cette frigo-pompe.

Exercice 2

Un récipient de volume V, parfaitement calorifugé est partagé en deux compartiments (1) et (2) par un piston mobile sans frottement, également calorifugé. Chaque compartiment contient n moles d'un gaz parfait diatomique ($\gamma = 1,4$) qui occupe initialement un volume $V = 1$ L sous la pression $P = 1$ bar, à la température $T = 15°$ C. Dans le compartiment (1), un conducteur ohmique de résistance R peut fournir un transfert thermique Q_1 par effet Joule. On fait passer un courant d'intensité I dans la résistance R jusqu'à ce que la pression du compartiment (1) soit égale à $2P$. Le chauffage est suffisamment lent pour considérer les évolutions comme quasi statiques.

1) **Faire** le schéma de cette expérience.
2) **Déterminer** les volumes V_1, V_2 et les températures T_1, T_2 à la fin de l'évolution.
3) **Exprimer** puis calculer **numériquement** les travaux W_1 et W_2 reçus par les deux gaz, le transfert thermique Q_2 reçu par le gaz dans le compartiment (2), ainsi que les variations d'énergie interne ΔU_1 et ΔU_2 de chacun des gaz.
4) **Calculer** le transfert thermique Q fourni par le conducteur ohmique.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny **2017-2018**

UFR Mathématique et Informatique **Licence 2**

2ème Session

Epreuve de Thermodynamique *(durée 2 heures)*

Exercice 1

On envisage deux possibilités de détente dans le vide à partir de deux récipients de même volume V = 15 L, pouvant communiquer par un tube fin de volume négligeable muni d'un robinet. Initialement, le récipient A contient une mole de gaz parfait monoatomique, à la pression P et à la température T = 60 °C, et le récipient B est vide. Les deux récipients sont adiabatiques.

1- On ouvre le robinet et on attend que l'état d'équilibre thermodynamique soit réalisé.
   a) **En quoi consiste** cet état d'équilibre ?
   b) **Déterminer** les températures T_A et T_B et les pressions P_A et P_B à la fin de cette transformation.

2 Dans une seconde expérience, en partant du même état initial, on ouvre le robinet. Dès que la pression finale est identique dans les deux récipients, on ferme le robinet sans possibilité d'échange thermique entre les deux fractions du gaz. En admettant que la fraction de gaz restant dans le récipient A subit une évolution adiabatique, quasi statique, **déterminer** les nouvelles températures T'_A et T'_B et les pressions P'_A et P'_B dans ce nouvel état d'équilibre.

Exercice 2

On considère $1200\ g$ d'un gaz parfait monoatomique, subissant un cycle de Carnot ABCDA : AB et CD isothermes et BC et DA adiabatiques réversibles.

La température au point A est $T_1 = 27$ °C. Les pressions aux points A, B et C sont respectivement $P_1 = 1\ atm$, $P_2 = 3\ atm$ et $P_3 = 9\ atm$.

1- **Représenter** ce cycle dans les diagrammes de Clapeyron et Entropique.
2- **Calculer** le rendement du cycle de deux manières :
   a) En faisant le bilan thermique du cycle ;
   b) A partir des températures extrêmes du cycle.
3- **Calculer** les variations d'entropie de ce gaz, au cours des quatre transformations du cycle.

On donne : $C_p = 10^3\ J/kg.K$

Scanné avec CamScanner

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
UNION - DISCIPLINE - TRAVAIL

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

UNITE DE FORMATION ET DE RECHERCHE
SCIENCES DES STRUCTURES DE LA MATIERE
ET DE TECHNOLOGIE

Année universitaire 2018-2019

1ère SESSION : EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE (Licence 2 - MI)

Exercice 1: (7 points)

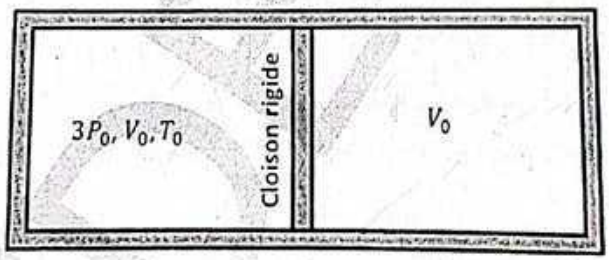
Un moteur de nature irréversible reçoit au cours de son fonctionnement de l'énergie thermique d'une source chaude de capacité thermique μ, initialement à $T_1 = 373\ K$, et en restitue une partie à la source froide de capacité thermique 5μ, initialement à $T_2 < T_1$, avec $T_2 = 273\ K$.

1- Quelle est la température finale de chacune des sources quand le moteur s'arrête de fonctionner ?
2- Trouver un encadrement de la température finale.

Exercice 2: (7 points)

Une enceinte est délimitée par une paroi indéformable et adiabatique. Une cloison rigide sépare cette enceinte en deux parties de même volume V_0. A l'état initial, une des cellules est remplie d'hydrogène (gaz parfait), à la pression $3P_0$ et à la température T_0, et l'autre cellule est vide. On enlève la cloison centrale et on attend l'état d'équilibre.

1- Déterminer le travail W_{01} et la chaleur Q_{01} échangés par le système. En déduire la température finale T_1. Quelle est la nature de la transformation ?
2- Déterminer la pression P_1 du gaz à l'état final.
3- Déterminer la variation d'entropie ΔS du système et les entropies échangée S_e et créée S_c en fonction de P_0, V_0 et T_0 uniquement.



Exercice 3: (6 points)

1- On considère une machine ditherme réversible fonctionnant entre une source chaude à la température T_1 et une source froide à la température T_2. La quantité de travail reçue par la machine en un cycle est W.
   a) Donner l'expression du rendement de la machine quand elle fonctionne, en machine fournissant du travail, en machine frigorifique et en pompe à chaleur.
   b) Quelle relation lie Q_1, Q_2, T_1 et T_2 dans le cas d'une machine irréversible ?
2- n moles d'un gaz parfait décrivent un cycle de Carnot ABCD entre les isothermes AB et CD de températures respectives T_1 et T_2. On note $\alpha = V_B/V_A$ le rapport volumétrique.
   a) Montrer que $V_C/V_D = \alpha$.
   b) Dans quel sens le cycle doit-il être parcouru pour être résistant ?
   c) Exprimer alors Q_1 et Q_2, en fonction de T_1, T_2, et α.

Scanné avec CamScanner

Année universitaire 2018-2019

2ème SESSION : EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE (Licence 2 - MI)

Questions de cours : (6 points)

On rappelle les expressions des différentielles de l'énergie interne U, de l'énthalpie H et de l'entropie S d'un gaz. Pour l'entropie S, deux expressions de la différentielle sont données :

$$dU = C_v dT + (l - P)dV \quad , \quad dH = C_p dT + (h + V)dP \quad , \quad dS = \frac{C_v}{T}dT + \frac{l}{T}dV = \frac{C_p}{T}dT + \frac{h}{T}dP$$

1- Sachant que dU, dH et dS sont des différentielles totales exactes, démontrer à partir de leurs expressions les relations :

$$l = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \quad , \quad h = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

2- En déduire, à partir des résultats de la question 1, les expressions de l et h pour un gaz parfait.

3- En vous servant des expressions de la différentielle de l'entropie S, démontrer que pour une mole de gaz parfait, les coefficients calorimétriques C_v et C_p satisfont la relation de Mayer $C_p - C_v = R$, avec R qui est la constante des gaz parfaits.

Exercice 1 : (6 points)

Un gaz, dont l'équation d'état est $P(V - 1) = 0.3\,T$, décrit un cycle formé des transformations quasi-statiques suivantes :

- Une transformation isotherme de (T_1, V_1) à (T_1, V_2)
- Une transformation isochore de (T_1, V_2) à (T_2, V_2)
- Une transformation isotherme de (T_2, V_2) à (T_2, V_1)
- Une transformation isochore de (T_2, V_1) à (T_1, V_1)

Le rapport des deux volumes est tel que $\frac{V_1 - 1}{V_2 - 1} = \sqrt{e}$, et celui des températures est $\frac{T_1}{T_2} = 2$. Le travail par cycle est de $62.7\,Joules$.

1- Dans quel sens se déroule la transformation ?

2- Représenter qualitativement le cycle de transformations dans un diagramme de Clapeyron en justifiant la position des volumes et des températures.

3- Calculer les différents travaux échangés lors des transformations en fonction de T_1 uniquement. En déduire la température T_1.

4- En appliquant le premier principe, calculer la quantité de chaleur échangée au cours du cycle.

Exercice 2 : (8 points)

Un moteur de nature irréversible reçoit au cours de son fonctionnement de l'énergie thermique d'une source chaude de capacité thermique μ, initialement à $T_1 = 373\,K$, et en restitue une partie à la source froide de capacité thermique 5μ, initialement à $T_2 < T_1$, avec $T_2 = 273\,K$.

1- Quand le moteur arrête-t-il de fonctionner ?

2- En appliquant le premier principe, trouver la borne supérieure de la température finale.

3- En appliquant l'inégalité de Clausius pour les machines irréversibles, trouver la borne inférieure de la température finale.

4- En déduire, des deux questions précédentes, un encadrement de la température finale.

Scanné avec CamScanner

Année universitaire 2019-2020

EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE (Licence 2 - MI)

Exercice 1 : (4 points)

L'expression du travail élémentaire échangé par un système homogène quelconque a pour expression $\delta W = -PdV$.

1- Montrer que pendant une transformation réversible, ce travail peut s'écrire :

$$\delta W = A\,dP + B\,dT$$

Où A et B sont des grandeurs que l'on déterminera en fonction de l'état thermodynamique (P, T, V) et des coefficients thermoélastiques α, β et/ou χ.

2- Un solide de volume $V_0 = 1\ litre$, de compressibilité isotherme constante $\chi = 10^{-11}\ Pa^{-1}$, subit une compression isotherme, quasi-statique, de la pression $P_0 = 1\ atm$ jusqu'à la pression $P_1 = 100\ atm$. En supposant que le volume du solide ne change presque pas, déterminer le travail reçu par le solide.

On donne : $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$; $\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$; $\chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$

Exercice 2 : (7 points)

On considère n moles d'un gaz réel dont l'équation d'état est :

$P(V - nb) - nRT - aP\,ln(P) = 0$; Où R, a et b sont des constantes.

On note que C et h sont des coefficients calorimétriques qui dépendent des variables d'état P, T et V tels que :

$h = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$; $\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P - \frac{h}{T}$

1- Calculer h.

2- Montrer que C ne dépend pas de P. De quelle variable dépend alors C ?

3- On pose que la différentielle totale de l'entropie $S(T, P)$ peut s'écrire sous la forme :

$$dS = \frac{C}{T}\,dT + \frac{h}{T}\,dP$$

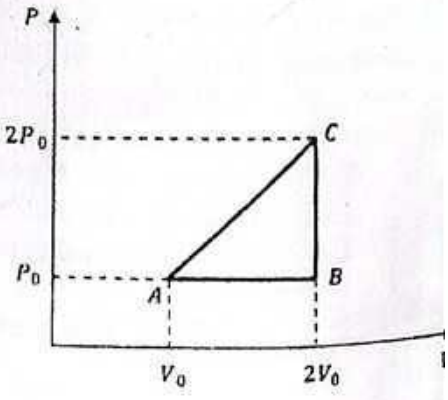
Où C et h représentent les valeurs calculées dans les deux questions précédentes.

a- Calculer la quantité de chaleur échangée entre le gaz et le milieu extérieur au cours d'une transformation isotherme réversible. Donner le résultat en fonction de la pression initiale P_i, la pression finale P_f et la température du thermostat T_{th}.

b- Monter que pour une transformation isentropique de ce gaz réel, la température et la pression sont reliés par la relation $TP^{-\lambda} = cte$, où λ est une constante à déterminer. On supposera que C est une constante qui n'est pas fonction d'une variable d'état.

Exercice 3 (points)

On considère le cycle réversible triangulaire ci-contre décrit par une mole d'un gaz parfait.



1- Dans quel sens ce cycle doit-il être parcouru pour que le fonctionnement soit de type moteur ? Quel sera alors le signe du travail ?

2- On suppose maintenant que le cycle est moteur.

a- Calculer le travail et la chaleur échangée lors du cycle.

b- Calculer les chaleurs échangées pendant les trois transformations constituant le cycle.

3- Calculer le rendement de ce cycle moteur en fonction de $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ supposé constant. Application numérique : $\gamma = 1.4$.

Scanné avec CamScanner

EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE (Licence 2-MI, Première session)

Exercice 1 : (5 points)

Une mole d'eau liquide est caractérisée, dans un certain domaine de températures et de pressions autour de l'état 0 où ($P_0 = 1bar$; $T_0 = 293\ K$; $V_0 = 10^{-3}m^3$), par un coefficient de dilatation isobare $a = 10^{-4}K^{-1}$ et par un coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = 5x10^{-10}Pa^{-1}$ constants.

1. Etablir que l'équation d'état liant V, P et T de ce liquide est : $\ln\frac{V}{V_0} = a(T - T_0) - \chi T(P - P_0)$
2. Calculer le volume de la mole d'eau sous P= 1000 bars et à T= 293 K.
3. Cette mole d'eau liquide est enfermée dans une bouteille métallique de volume v constant. Par suite d'un incendie, la température passe de $T_0 = 293\ K$ à $T = 586K$. Calculer la pression P dans le récipient.

Exercice 2 : (7 points)

Lors d'une transformation infinitésimale réversible au cours de laquelle sa pression P, son volume V et sa température T varient respectivement de dP, dV et dT, une mole de gaz reçoit une quantité de chaleur infinitésimale δQ que l'on peut écrire sous trois formes équivalentes :

$$\delta Q = C_V dT + ldv = C_p dT + hdP = \lambda dP + \mu dV$$

1. Exprimer λ *et* μ *en fonction de* C_o *et* C_v *et des dérivées partielles* $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)P$ *et* $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)V$
2. Dans la suite du problème, la mole de gaz est considérée comme un gaz parfait pour lequel le rapport $y = \frac{C_p}{C_v}$ est une fonction linéaire de la température telle que $y = aT + b$, et où a et b sont deux constantes positives.
   a. Exprimer λ *et* μ *en fonction de* P, V *et* y.
   b. Déterminer l'énergie interne U(T) de ce gaz en fonction de T, a, b, R, On notera U_o la constante.
   c. Démontrer en utilisant $\partial Q = C_V dT\ ldV$ que les transformations isentropiques obéissent à l'équation $\frac{TV^{b-1}}{aT+b-1} = cte$. On réalisera un changement de variables en posant Z= 1/T.

Exercice 3 : (8 points)

Une mole de gaz parfait de rapport $y = aT + b$ (a et b deux constantes positives), décrit un cycle constitué des transformations suivantes :

- Une compression isotherme $A(v_1, T_1) \rightarrow B(V_2, T_1)$ pendant laquelle le gaz est en contact avec une source de chaleur de température T_1 ;
- Un échauffement à volume constant $B \rightarrow C(V_2, T_2)$ pendant lequel le gaz est en contact avec la source de température T_2;
- Une détente isotherme $C \rightarrow D(V_1, T_2)$ pendant laquelle le gaz reste en contact avec la source de température T_2;
- Un refroidissement isochore $D \rightarrow A$ pendant lequel le gaz est en contact avec la source de température T_1;

1. Quelle est la nature de la machine thermique ditherme dans laquelle circule le gaz ?
2. Calculer le travail W et la chaleur Q reçue par le gaz pour chacune des transformations en fonction de $T_1, T_2, V_1, V_2,\ a,\ b, R$. On précisera le signe des chaleurs Q.
3. Quelles sont-les quantités de chaleur Q_V et Q_C fournie au gaz respectivement par la source froide et par la source chaude ? En déduire que le rendement de cette machine est :

$$\eta = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) X \text{ avec } X = \frac{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) + \frac{1}{aT_2}\ln\left(\frac{aT2+b-1}{aT1+b-1}\right)}$$

Scanné avec CamScanner

Université FHB UFR Maths-Informatique

Licence 2: 2020-2021

EXAMEN THERMODYNAMIQUE (Licence 2-MI,Deuxième session)

Exercice 1: (4 points)

Chaque question peut avoir une ou plusieurs réponses. Donnez le ou les numéro(s) des bonne(s) réponse (s).

A- L'entropie interne, créée à l'intérieur du système est toujours:
1) positive
2) négative
3) positive ou nulle
4) négative ou nulle
5) aucune réponse ne convient

B- L'identité thermodynamique, c'est:
1) $\delta Q = T\,dS$
2) $dU = T\,dS + P\,dV$
3) $dH = T\,dS + V\,dP$
4) $dS \geq 0$ pour un système isolé
5) aucune réponse ne convient

C- L'entropie totale d'un gaz parfait, lors d'une transformation réversible, dépend:
1) uniquement de la température
2) uniquement du volume
3) dépend de deux variables
4) dépend de trois variables
5) aucune réponse ne convient

D- L'entropie est liée, au niveau microscopique:
1) à l'agitation des molécules
2) aux chocs des molécules
3) au désordre des molécules
4) à la structure des molécules
5) aucune réponse ne convient

Exercice 2: (8 points)

A des pressions inférieures à 20 bars et des températures entre $273\,K$ et $283\,K$, le volume massique de l'eau liquide est donnée par l'équation d'état:

Scanné avec CamScanner

$v = v_0[1 + a(T - T_0)^2 - (k - bT)(P - P_0)]$
où $v_0 = 1\,cm^3.g^{-1}$; $T_0 = 277\,K$; $P_0 = 10^5\,Pa = 1\,bar$
$a = 8.25 \times 10^{-6}\,K^{-2}$; $b = 7.0 \times 10^{-13}\,Pa^{-1}$; $k = 6.94 \times 10^{-10}\,Pa^{-1}.K^{-1}$.

1. Montrer qu'à pression constante v passe par un minimum pour une valeur T_m de la température.
Calculer T_m pour $P = P_0$.

2. Calculer les coefficients thermoélastiques a et χ de l'eau à $P = 1\,bar$ et $T = 283\,K$.

3. On prend désormais pour l'eau au voisinage de $277\,K$ et $1\,bar$ un modèle incompressible et indilatable.

a) Quelle est la nouvelle équation d'état ?
b) Quelle est la variation d'énergie interne lorsque $1g$ d'eau liquide passe de $273\,K$ à $283\,K$ sous $1\,bar$?
On donne: c(eau liquide)$= 4.18\,j.g^{-1}.K^{-1}$

Exercice 3:(8 points)
Une transformation polytropique est une tranformation d'un gaz pour laquelle il existe un coefficient $K > 0$ tel que $PV^k = Cte$ tout au long de la transformation. De telles transformations sont intermédiaires entre des adiabatiques et des isothermes, et se rencontrent en thermodynamique industrielles, par exemple lorsque le système réfrigérant ne permet par d'éliminer tout le transfert thermique produit par une réaction chimique. On raisonnera à partir d'une transformation quasi-statique d'un gaz parfait.

Données pour un gaz parfait:
$C_v = \dfrac{nR}{\gamma - 1}$ $C_p = \dfrac{\gamma nR}{\gamma - 1}$

1. À quelles transformations connues correspondent les cas $k = 0$ et $k = 1$?
2. Calculer le travail des forces de pression pour un gaz subissant une transformation polytropique entre deux états (P_0, V_0, T_0) et (P_1, V_1, T_1) en fonction des pressions et de volumes.
3. En déduire l'expression du travail en fonction des températures uniquement.
4. Montrer que le transfert thermique au cours de la transformation précédente s'écrit:
$$Q = nR\left(\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{1}{k - 1}\right)(T_1 - T_0)$$
5. On se sert maintenant de l'expression de Q trouvée à la question précédente.
À quelles transformations correspondent les cas $k = 0$, $k = +\infty$ et $k = \gamma$?

Scanné avec CamScanner

THERMODYNAMIQUE PREMIERE SESSION 2017-2018

EXERCICE 1

1- schéma du principe de fonctionnement :Frigo-Pompe

FIGURE1

2-Diagramma de Clapeyron

FIGURE2

$P_1 = 1bar$ et $P_3 = 4bar$

$T_2 = T_3 = T_c = 23°C \Rightarrow T_c = 296,15K$

$T_1 = T_4 = -25°C \Rightarrow T_j = 248,15K$

3-

$1 \rightarrow 2$ transformation isentropique (Adiabatique).

d'après la loi de Laplace on a :

$T_1^{\gamma}.P_1^{1-\gamma} = T_2^{\gamma}.P_2^{1-\gamma}$

$P_2^{1-\gamma} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma}.P_1^{1-\gamma}$

$P_2 = P_1.\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$

$\underline{AN}$: $P_2 = 1.\left(\frac{248,15}{296,15}\right)^{\frac{1,66}{1-1,66}}$

$P_2 = 1,56bar$

4- Calcul de la charleur Q_c transférée lors de la transformation $2 \rightarrow 3$.

La transformation $2 \rightarrow 3$ est Isotherme (T=cte).

$\delta Q_c = C_v dT + PdV.$

$T = cte \rightarrow \delta Q_c = PdV$

$Q_c = \int_{V_2}^{V_3} PdV = -W_{2\rightarrow 3}$

$Q_c = nRT_2 \times \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right).$

$Q_c = nRT_2 \times \ln\left(\frac{P_2}{P_3}\right).$

Scanné avec CamScanner

$Q_c = 1 \times 8,32 \times 296,15 \times \ln\left(\frac{1,56}{1}\right)$.

$\underline{Q_c = -2320,09J}$.

$Q_c < 0$ donc la ftigo-pompe fournit un transfert thermique à la source chaude .

5-Déduisons-en Q_f los de la transformation $4 \rightarrow 1$.

La transformation $4 \rightarrow 1$ est Isotherme .

Le cycle de Cannot étant réversible alors , d'après la relation de Clausius ,on :

$\left(\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0\right) \rightarrow Q_f = -T_f\left(\frac{Q_c}{T_c}\right)$

$Q_f = -248,15 \times \left(\frac{-2320,09}{296,15}\right)$

$\underline{Q_f = 1944,05J}$

$Q_f > 0$ donc la frigo-pompe recoit du transfert thermique de la source froide.

6-Calculons le travail W.

On a : $W = W_1^2 + W_2^3 + W_3^4 + W_4^1$

*On a une transformation Isentropique de 1 à 2 alors

${W_1}^2 = C_v \Delta T$ car ${Q_1}^2 = 0$

$W_1^2 = \frac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$

$AN : W_1^2 = \frac{8,32}{1,66-1}(296,15 - 248,15)$

$\underline{W_1^2 = 605,09J}$

*Une transformation Isentropique $3 \rightarrow 4$. Alors

$W_3^4 = C_v \Delta T$ car $Q_3^4 = 0$.

$W_3^4 = \frac{R}{\gamma - 1}(T_4 - T_3)$

$AN : W_3^4 = \frac{8,32}{1,66-1}(248,15 - 296,15)$

$W_3^4 = -605,09J$

Ainsi $W_1^2 + W_3^4 = 0$

Scanné avec CamScanner

D'où $W = W_2^3 + W_4^1$

*Transformation Isotherme de $2 \rightarrow 3$

Alors $C_v \Delta T = 0$ $(T = ctc)$

Donc $W_2^3 = -Q_2^3 = -Q_c$

*Transformation $4 \rightarrow 1$ est Isotherme.

Alors $C_v \Delta T = 0$ $(T = ctc)$

Donc $W_4^1 = -Q_4^1 = -Q_f$

Soit $\underline{W_4^1 = -1944,05J}$

Finalement par application numérique on a :

$W = 2320,093 - 1944,05$

$\underline{W = 376,043J}$

*Le rendement

On sait que $\varepsilon = \frac{Q_c}{W}$

Donc $\varepsilon = \frac{1944,05}{376,043}$

$\varepsilon = 5,16$

EXERCICE 2

1-Scéma de l'expérience

FIGURE3
2-Déterminons :

*Les températures T_1 et T_2

*Les volumes V_1 et V_2

A la fin de l'évolution, l'équilibre mécanique est réalisée et $P_1 = P_2 = 2P = 2bar$.

L'évolution (2) est adiabatique quasi statique ;il est donc possible d'utiliser les

Scanné avec CamScanner

lois de Laplace.

$$\begin{cases} PV^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma} & (1) \\ P^{1-\gamma}T^{\gamma} = P_2^{1-\gamma}T_2^{\gamma} & (2) \end{cases}$$

$(1) \rightarrow PV^{\gamma} = 2PV_2^{\gamma}$

Donc $V_2 = V \times 2^{-\frac{1}{\gamma}}$

$AN : V_2 = 2^{-\frac{1}{1,4}} \rightarrow V_2 = 0,609L$

$(2) \rightarrow T_2 = T \times 2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

On a : $T = 15°C = (15 + 273,15)$

Soit $\underline{T = 288?15K}$

$AN : T_2 = 288,15 \times 2^{\frac{1,4-1}{1,4}}$

Soit $\underline{T_2 = 351,26K}$

Dans le compatiment (1), l'évolution est quelconque mais on peut déduire V_1 par :$V_2 + V_1 = 2V$

Donc $V_1 = 2V - V_2$

$AN : V_1 = 2 - 0,609$

Soit $\underline{V_1 = 1,391L}$

La loi des gaz parfaits permet d'écrire $\frac{PV}{T} = \frac{P_1V_1}{T_1}$

Donc $T_1 = T \times \frac{P_1V_1}{PV}$

$AN : T_1 = 288,15 \times \frac{2 \times 1,391}{1 \times 1}$

Soit $\underline{T_1 = 801,63K}$

3-

Dans le compatiment (2) : l'évolution est *adiabatique*.

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_2 = 0 \\ W_2 = \Delta U_2 = C_v(T_2 - T) \end{cases}$$

Or $C_v = \frac{nR}{\gamma-1} = \frac{PV}{T(\gamma-1)}$

Scanné avec CamScanner

$AN : C_v = \frac{10^5 \times 10^{-3}}{288,15 \times (1,4-1)}$

Soit $C_v = 0,87 J.K^{-1}$

$\Rightarrow \Delta U_2 = 0,87 \times (351,26 - 288,15)$

$\Delta U_2 = 54,91 J$

*Dans le compatiment (1) l'évolution est quelconque ,on a donc : $W_1 = -P\Delta V$

$\Rightarrow W_1 = -2P(V_1 - V)$

$AN : W_1 = -2.10^5(1,391 - 1).10^{-3}$

$W_1 = -78,2 J$

On sai que $\Delta U_1 = C_v \Delta T$

Soit $\Delta U_1 = C_v(T_1 - T)$

$AN : \Delta U_1 = 0,87(801,63 - 288,15)$

$\Delta U_1 = 446,73 J$

4-Le transfert thermique

$Q = Q_1$

$\Delta U_1 = Q + W_1$

$\Rightarrow Q = \Delta U_1 - W_1$

$AN : Q = 446,73 + 78,2$

$\Rightarrow Q = 524,93 J$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

FIGURE 1 –

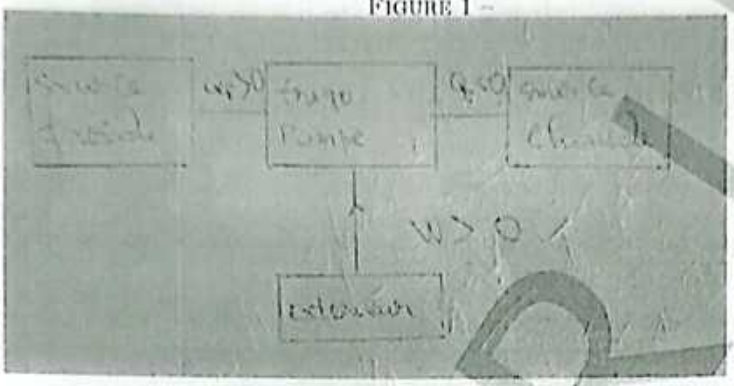


FIGURE 2 –

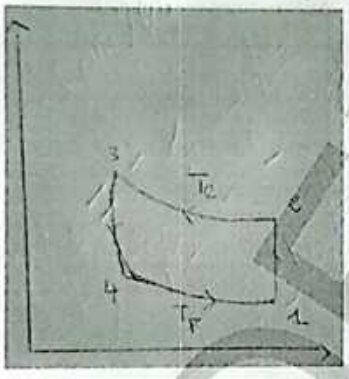
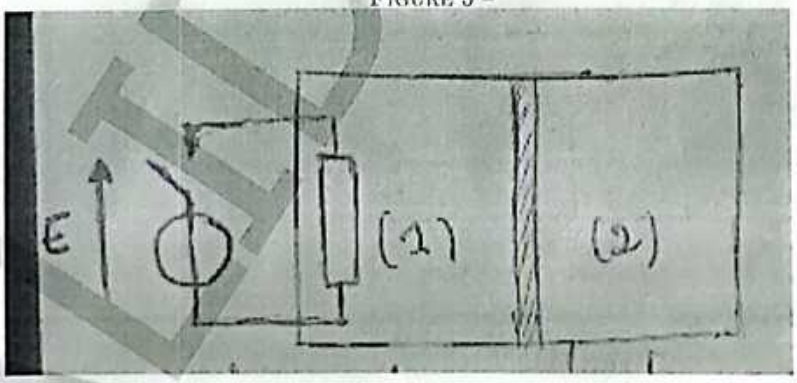


FIGURE 3 –



VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR :MI 2018-2019

CORRECTION THERMODYNAMIQUE SESSION 1

EXERCICE 1 (voir 2e session)

EXERCICE 2

1. Nous avons une detente de joule dans le vide. elle se fait en energie constante donc $\Delta u = \text{cst}$
   $\Delta u = 0 \Rightarrow W_{0_1}$ et $Q_{0_1} = 0$
   * si $\Delta u = 0 \Rightarrow \Delta T = 0$ donc $T_1 = T_0$ par conéquent la transformation est isotherme.

2. D'après la conservation de la quantité de matière :
   $P_1V_1 = 3P_0V_0 \Rightarrow P_1 = \dfrac{3P_0V_0}{V_1}$ or $V_1 = 2V_0$
   $\Rightarrow P_1 = \dfrac{3P_0V_0}{2V_0}$
   $\boxed{P_1 = \dfrac{3P_0}{2}}$

3. Variation d'entropie.

   $\Delta S = S_1 - S_0$
   $\Delta S = \int \dfrac{Q_1}{T_1} - \int \dfrac{Q_0}{T_0}$

   $\Delta S = n\,R\,\ln(\frac{2V_0}{V_0}) + 0$ Or $\Delta S = S_e + S_{cr}$ avec $S_{cr} = 0$
   $\Delta S = n\,R\,\ln 2$ (1)
   On a : $3P_0V_0 = n\,RT_0$

   $n\,R = \dfrac{3P_0V_0}{T_0}$ (2)

   Remplaçons (2) dans (1)
   $(1) \Rightarrow \Delta S = \dfrac{3P_0V_0}{T_0}\ln 2$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\boxed{\Delta S = \frac{3P_0V_0}{T_0}\ln 2}$$

EXERCICE 3

1. a) expression du rendement.
   * machine fournissant du travail.

$$\eta = \left|\frac{W}{Q_1}\right| = -\frac{W}{Q_1}$$

   * machine frigorifique

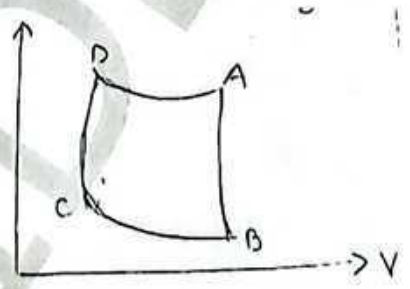
$$\eta = \frac{Q_e}{W}$$

   * pompe à chaleur

$$\eta = \frac{|Q_1|}{W} = -\frac{Q_1}{W}$$

   b) $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} < 0$

2. a) Montrons que $\frac{V_C}{V_D} = \alpha$



On a : $T_A V_A^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$ (1)
$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$ (2) avec $V_A = V_B$ et $V_C = V_D$

$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} = \alpha$

Scanné avec CamScanner

$$\boxed{\frac{V_C}{V_D} = \alpha}$$

b) Pour que le cycle soit resistant, il faut qu'il soit parcouru dans le sens anti-horaire ou le sens trignométrique.

c) D'après le 1er principe, on a :

$\Delta U_{AB} = W_{AB} + Q_1 = 0$
$Q_1 = -W_{AB} = n\,R\,T_1\,\ln(\frac{V_B}{V_A})$
$\boxed{Q_1 = n\,R\,T_1\,ln(\alpha)}$

$\Delta U_{CD} = W_{CD} + Q_2 = 0$
$Q_2 = -W_{CD} = n\,R\,T_2\,\ln(\frac{1}{\alpha})$
$\boxed{Q_2 = n\,R\,T_2\,\ln(\alpha)}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE L'EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE SESSION 2 2018-2019

QUESTIONS DE COURS

dV étant une DTE on a : $dU = C_V dT + (l-p)dv$; $\frac{\partial C_V}{\partial V} = \frac{\partial (l-p)}{\partial T} = \frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial p}{\partial T}$ ①

$$dS = \frac{C_V}{T}dT + \frac{L}{T}dV,$$

dS étant une DTE on a: $\frac{\partial\left(\frac{C_V}{T}\right)}{\partial V} = \frac{\partial\left(\frac{L}{T}\right)}{\partial V} \Rightarrow \frac{1}{T}\frac{\partial C_V}{\partial V} + C_V\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial V} = \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right) + \frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial T}L \Rightarrow \frac{1}{T}\frac{\partial C_V}{\partial V} = \frac{1}{T}\frac{\partial L}{\partial T} - \frac{1}{T^2}l$

On multiplie par T $\frac{\partial C_V}{\partial V} = \frac{\partial L}{\partial T} - \frac{1}{T}l$ ②

① = ② $\Rightarrow \frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial L}{\partial T} - \frac{1}{T}l$ $\quad l = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)V$

$dU = C_P dT + (h+V)d_P$ $\quad \frac{\partial C_P}{\partial P} = \frac{\partial h}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial T}$ ① $\quad dH = \frac{C_P}{T}dT + \frac{h}{T}dP$

$$\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{C_P}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{h}{T}\right) \Rightarrow \frac{1}{T}\frac{\partial C_P}{\partial P} + C_P\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial P} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right) + h\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial T} \Rightarrow \frac{1}{T}\frac{\partial C_P}{\partial P} = \frac{1}{T}\frac{\partial h}{\partial T} - \frac{1}{T^2}h$$

$\frac{\partial C_P}{\partial P} = \frac{\partial h}{\partial T} - \frac{h}{T}$ ②

① = ② $\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{\partial h}{\partial T} - \frac{h}{T}$ $\quad h = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)P$

2) déduisons h et l pour un gaz parfait.

Pour un gaz parfait on a : $PV = nRT$

$P = \frac{nRT}{V}$ $\quad \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V}$ $\quad \boxed{T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) = \frac{nRT}{V} = l}$

Pour h

$PV = nRT$ $\quad V = \frac{nRT}{P}$ $\quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)P = \frac{nR}{P}$ $\quad \boxed{-T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)P = \frac{nRT}{P} = h}$

3)

On a : $dS = \frac{C_V}{T}dT + \frac{L}{T}dV$ $\quad dH = \frac{C_P}{T}dT + \frac{h}{T}dP$

$\frac{C_V}{T}dT - \frac{C_P}{T}dT = -\frac{l}{T} + \frac{h}{T} \Rightarrow (C_V - Cp)dT = -ldV + hPV \Rightarrow (C_P - C_V)dT = ldV - hdP$

$\Rightarrow (C_P - C_V)dT = \frac{nRT}{V}dV + \frac{nRT}{P}dP$

Pour $n = 1$ $\quad (C_P - C_V)dT = \frac{RT}{V}dV + \frac{RT}{P}dP \Rightarrow C_P - C_V = \frac{R}{V}\frac{dV}{dT} + \frac{RT}{P}\frac{dP}{dT}$

On a $\frac{dV}{dT} = \frac{R}{P}$ et $\frac{dP}{dT} = \frac{R}{V}$. Ainsi $C_P - C_V = \frac{PV}{V}\frac{R}{P} + \frac{PV}{P}\frac{R}{V} = R + R$

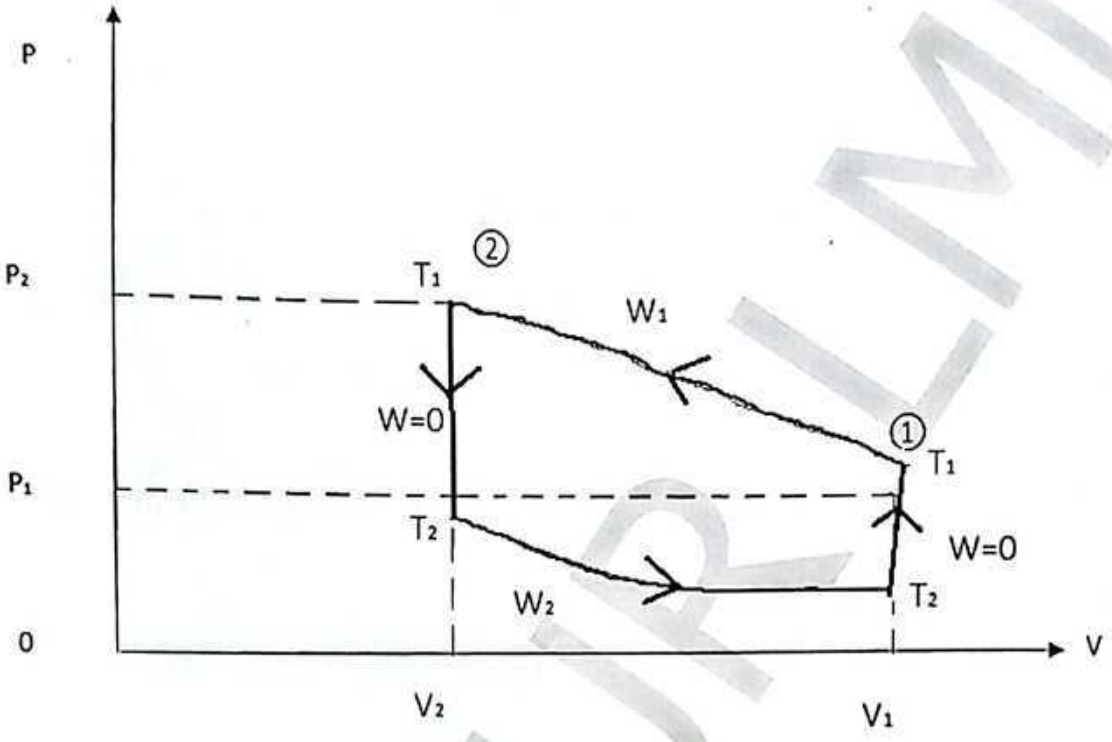
$\boxed{\Rightarrow C_P - C_V = 2R}$

EXERCICE 1

$P(V-1) = 0.3T$; $\frac{V_1 - 1}{V_2 - 1} = \sqrt{e}$; $\frac{T_1}{T_2} = 2$ et $W_{cycle} = 62.7j$

Scanné avec CamScanner

1) Si $M \rightarrow aigu$
Si $R \rightarrow Trigo$
Comme $W_{cycle} > 0$, alors le travail est resistant.
C'est le sens trigonométrique
2)



$①\rightarrow②\begin{vmatrix} T_1 = T_2 \\ V_1 \\ P_1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} T_1 = T_2 \\ V_2 \\ P_2 \end{vmatrix}$ Comme $\frac{V_1-1}{V_2-1} = \sqrt{e} > 1$ alors $V_1 > V_2$ donc $P_1 < P_2$

$\frac{T_1}{T_2} = 2 \Rightarrow T_1 = 2T_2$

3) Les travaux $W_{1,2}$: $W_{2,1}$
$W_{1,2} = -PdV$

$$P(V-1) = 0.3T \Rightarrow P = \frac{0.3T}{(V-1)} \Rightarrow W_{1,2} = -\int_1^2 \frac{0.3T}{(V-1)} dV = -0.3T[\ln(V-1)]_1^2 = 0.3T_1 \ln(\sqrt{e})$$

$W_{2,1} = 0.3T_2 \ln(\frac{1}{\sqrt{e}})$
$W_{cycle} = W_{1,2} + W_{2,1}$

4) $dU = SQ + SW$ à $T = cste$
$dU = 0 \Leftrightarrow SQ_{cycle} = -SW_{cycle} \quad \Rightarrow \quad Q_{cycle} = -62.7$

EXERCICE 2

1) Lorsque l'équilibre thermique est atteint.
$T_{F_1} = T_{F_2} = T_f$

2) $SQ_1 = -\mu dT \begin{pmatrix} \mu > 0 \\ dT_1 < 0 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

$SQ_2 = -5\mu dT \begin{pmatrix} \mu > 0 \\ dT_2 > 0 \end{pmatrix}$ Or $dU = SQ + SW = 0$

$dU = SQ_1 + SQ_2$; $SW = -SQ_1 - SQ_2 < 0$; $SQ_1 + SQ_2 > 0$

$-\mu dT_1 > 5\mu dT_2 \Rightarrow dT_1 < -5dT_2 \Rightarrow \int_{T_{F_1}}^{T_{F_2}} dT_1 < \int_{T_{F_1}}^{T_{F_2}} dT_2$

$\Rightarrow T_F - T_1 < -5(T_f - T_2) \Rightarrow T_F + 5T_F < 5T_2 + T_1 \Rightarrow 6T_F < 5T_2 + T_1 \Rightarrow T_F < \frac{5}{6}T_2 + \frac{1}{6}T_1$

2ième Principe:

$\frac{SQ_1}{T_1} + \frac{SQ_2}{T_2} < 0 \Rightarrow -\frac{\mu dT_1}{T_1} - 5\frac{\mu dT_2}{T_2} < 0 \Rightarrow \frac{dT_1}{T_1} > -5\frac{dT_2}{T_2} \Rightarrow \ln\left(\frac{T_F}{T_1}\right) > -5\ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right)$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{T_F}{T_1}\right) > \ln\left(\frac{T_2}{T_f}\right)^5 \Rightarrow \frac{T_F}{T_1} > \left(\frac{T_2}{T_f}\right)^5 \Rightarrow T_f T_f^5 > T_2^5 T_1 \Rightarrow T_f^6 > T_2^5 T_1 \Rightarrow T_f > (T_2^5 T_1)^{\frac{1}{6}}$

4)

$(T_2^5 T_1)^{\frac{1}{6}} T_f < \frac{5}{6}T_2 + \frac{1}{6}T_1$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

CORRECTION EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE 2019-2020

EXERCICE 1

On sait que $\partial w = -PdV$

1) Montrons que pendant une transformation réversible le travail peut

s'écrire $\partial w = A\,dP + B\,dT$

$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT$ or $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -V\chi \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP = -V\chi\, dP$

$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = V\alpha \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT = V\alpha\, dT$

$\partial w = -PdV$ or $dV = -V\chi\, dP + V\alpha\, dT \Rightarrow Sw = VP\chi\, dP - VP\alpha\, dT$

2) Déterminons le travail

D'après la question précédente on a :

$\partial w = VP\chi\, dP - VP\alpha\, dT$

La compression est interne par conséquent : $dT = 0$

$\Rightarrow VP\alpha\, dT = 0$

$\Rightarrow \partial w = VP\chi\, dP$

$\Rightarrow w = \int_{P_2}^{P_1} V_0\, P\chi\, dP$

$\Rightarrow w = \frac{1}{2} V_0 \chi \left(P_1^2 - P_0^2\right)$

EXERCICE 2

1) Calculons h

$h = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

L'équation d'état est : $P(V - nb) - nRT - aP\ln(P) = 0$

$\Rightarrow V - nb = \frac{nRT + aP\ln P}{P}$

$\Rightarrow V = \frac{nRT}{P} + a\ln(P) + nb$

$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = nR\,\frac{P - T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_P}{P^2} + a\left(\frac{\partial[\ln(P)]}{\partial T}\right)_P$

$\Rightarrow h = \frac{1}{P} nRT - \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_P}{P^2} nRT + \left(\frac{\partial[\ln(P)]}{\partial T}\right)_P T$

2) Montrons que C ne dépends pas de P

On a:

$\left(\frac{\partial C}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P - \frac{h}{T}$

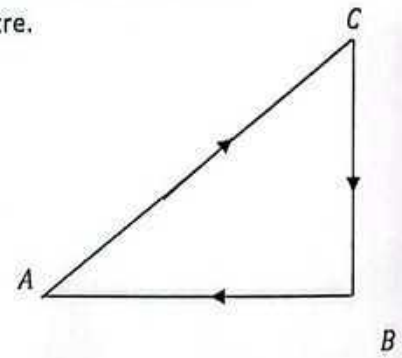
$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{P} nR - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_P \frac{nR}{P^2} + \left(\frac{\partial[\ln P]}{\partial T}\right)_P = \frac{h}{T}$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)_T = 0$; Par conséquent C ne dépend pas de P.

Etant donné que C ne dépend pas de P alors C dépend de T et de V.

EXERCICE 3

1) Le cycle doit être dans le sens horaire d'une montre.



Le moniteur fournit du travail alors que le travail du système sera négatif $w < 0$

2) Cycle moteur

a) Calculons le travail et la chaleur échangée

Le travail est l'aire délimité par le triangle ABC

$w = -\frac{AB \times BC}{2} = -\frac{V_0 \times P_0}{2}$

$$w = -\frac{V_0 P_0}{2}$$

VALIDE UIMD

Scanné avec CamScanner

D'après le premier principe $\Delta U = W + Q = 0$

$\Rightarrow Q = -W \Rightarrow Q = \frac{V_0 P_0}{2}$

3) Calculons les chaleurs échangées

Transformation BA : Isobare $(P = Cste)$
$P_A = P_B$

$W_{BA} = -P_B(V_A - V_B)$ et $Q_{BA} = n\,Cp\,dT$

$Q_{BA} = nCp(T_B - T_A)$ or $n = 1$ et $Cp = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$

$Q_{BA} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_B - T_A)$ or $PV = nRT \Rightarrow T = \frac{PV}{nR}$

$Q_{BA} = \frac{\alpha R}{\alpha - 1}(T_B - T_A) = \frac{\alpha R}{\alpha - 1}\left(\frac{P_B V_B}{R} - \frac{P_A V_A}{R}\right)$

$Q_{BA} = \frac{\alpha P_B}{\alpha - 1}(V_B - V_A) = \frac{\gamma P_0}{\gamma - 1}(V_0)$

Transformation CB : Isochore $(V_C = V_B)$

$W_{CB} = -\int_{V_C}^{V_B} PdV = 0$ Et $Q_{CB} = n\,Cv dT$

$Q_{CB} = n\,Cv(T_C - T_B)$ or $n = 1$ et $C_v = \frac{R}{\alpha - 1}$

$Q_{CB} = \frac{R}{\gamma - 1}\left(\frac{P_C V_C}{R} - \frac{P_B V_B}{R}\right)$

$Q_{CB} = \frac{V_C}{\gamma - 1}\left(\frac{P_C}{1} - P_B\right) = \frac{2V_0 P_0}{\alpha - 1}$

Transformation AC : Quelconque

$Q = Q_{BA} + Q_{CB} + Q_{AC}$

$\Rightarrow Q_{AC} = Q - Q_{BA} - Q_{CB}$

$Q_{AC} = \frac{P_0 V_0}{2} - \frac{\gamma P_0 V_0}{\gamma - 1} - \frac{2P_0 V_0}{\gamma - 1}$

$= \frac{P_0 V_0}{2} - \frac{P_0 V_0 (2+\gamma)}{\gamma - 1}$

$Q_{AC} = P_0 V_0\left(\frac{1}{2} - \frac{2+\gamma}{\gamma - 1}\right)$

$Q_{AC} = \frac{-P_0 V_0 (\gamma + 5)}{2(\gamma - 1)}$

3) calculons le rendement de ce cycle.

Soit Q_1 la source chaude et Q_2 la source froide

On a un cycle moteur donc $Q_1 > 0$ et $Q_2 < 0$

Soit η ce rendement

On a : $\eta = \left|\frac{W}{Q_1}\right|$

$\eta = \left|\frac{W}{Q_1}\right|$

$Q_{CA} < 0$ donc $Q_{CA} = Q_2$ et $Q_1 = Q_{BA} + Q_{CB}$ car $Q_{BA} > 0$ et $Q_{CB} > 0$

$\eta = \left|\frac{W}{Q_1}\right| = \left|\frac{-(Q_1 + Q_2)}{Q_1}\right| = \left|1 + \frac{Q_1}{Q_2}\right|$

$\eta = \left|1 + \frac{Q_{CA}}{Q_{BA} + Q_{CB}}\right| = \left|1 + \frac{\frac{-P_0 V_0 (\gamma + 5)}{2(\gamma - 1)}}{\gamma - 1}\right|$

$\eta = \left|1 - \frac{\gamma + 5}{2(\gamma + 2)}\right|$

AN : $\eta = \left|1 - \frac{1,4+5}{2(1,4+2)}\right|$

$\eta = 0,0588$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Correction de Thermodynamique session 1

Exercice 1

1) Recherchons l'équation d'Etat liant V, P et T de ce liquide sous la forme $V = F(P,T)$.

Alors $\partial V = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT$

Or d'après le cours, $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ et $\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$

$dV = V\alpha dT - V\chi_T dP$

$\frac{dV}{V} = \alpha dT - \chi_T dP$

Par intégration :

$\int_{V_0}^{V} \frac{dV_1}{V_1} = \alpha \int_{T_0}^{T} dT - \chi_T \int_{P_0}^{P} dP$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = \alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0)$

2) D'après 1), $\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = \alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0)$

$\Rightarrow \ln(V) - \ln(V_0) = \alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0)$

$\Rightarrow \ln(V) = \alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0) + \ln(V_0)$

$\Rightarrow V = e^{\alpha(T-T_0)-\chi_T(P-P_0)+\ln(V_0)}$

$\Rightarrow V = e^{\alpha(T-T_0)-\chi_T(P-P_0)}.e^{\ln(V_0)}$

Donc $V = V_0 e^{\alpha(T-T_0)-\chi_T(P-P_0)}$

A.N : $V = 10^{-3}.e^{10^{-4}(293-293)-5.10^{-10}(1000-1)}$

3) En utilisant la question précédente à volume constant, on a :

$V = V_0 \Rightarrow e^{\alpha(T-T_0)-\chi_T(P-P_0)} = 1$

$\Rightarrow \alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0) = 0$

$\Rightarrow \alpha(T - T_0) = \chi_T(P - P_0)$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{\chi_T}(T - T_0) = (P - P_0)$

$\Rightarrow P = \frac{\alpha}{\chi_T}(T - T_0) + P_0$

Exercice 2

1) On a : $\delta Q = C_P dT + ldV = C_P dT + hdP = \lambda dP + \mu dV$

Posons $T = F(P,V)$

$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV + \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP$

$$\text{donc} \begin{cases} \delta Q = C_v dT + ldV = C_v\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV + C_v\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP + ldV \ (1) \\ \delta Q = C_p\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV + C_p\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP + hdP \quad (2) \\ \delta Q = \lambda dP + \mu dV \ (3) \end{cases}$$

Par identification, en utilisant (1) et (3), on a : $\lambda dP = C_v\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = C_v\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V}$

Scanné avec CamScanner

par identification, en utilisant ② *et* ③, on a :

$$\mu dV = C_P\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = C_P\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P}$$

2) a. La relation de Mayer est :

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1} \; ; \; C_P = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}$$

L'équation d'état pour ce gaz (parfait) est : $PV = nRT$ avec $n = 1$ car $(1\ mole)$

$$PV = RT \Rightarrow T = \frac{PV}{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = \frac{P}{R} \text{ et } \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \frac{V}{R}$$

D'après 1) $\lambda = C_v\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$

$$\Rightarrow \lambda = C_v\frac{V}{R}$$

$$\lambda = C_v\frac{V}{R} = \frac{R}{\gamma - 1} \times \frac{V}{R} = \frac{V}{\gamma - 1}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{V}{\gamma - 1}}$$

De même,

$$\Rightarrow \mu = C_P\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \times \frac{P}{R} = \frac{\gamma P}{\gamma - 1}$$

$$\boxed{\mu = \frac{\gamma P}{\gamma - 1}}$$

b. D'après le cours, $U = nC_v(T - T_0)$ dans ce cas, $n = 1$, $U = C_v(T - T_0)$ avec T_0 la température initiale.

$\frac{dU}{dT} = C_v$ or $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$(formule de Mayer)

$\frac{dU}{dT} = C_v = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{R}{(aT + b) - 1}$ car $\gamma = aT + b$

$$\frac{dU}{dT} = \frac{R}{(aT + b) - 1}$$

$$dU = \frac{R}{(aT + b) - 1}dT$$

Par intégration, on a :

$$U = \int \frac{R}{(aT + b) - 1}dT = \frac{1}{a}\int \frac{aR}{(aT + b) - 1}dT$$

$$U = U(T) = \frac{R}{a}\int \frac{a}{(aT + b) - 1}dT$$

$$U(T) = \frac{R}{a}\ln(aT + b - 1) + cste$$

On pose $cste = U_0$

$$\boxed{U(T) = \frac{R}{a}\ln(aT + b - 1) + U_0}$$

Scanné avec CamScanner

c. La transformation étant isentropique, $\delta Q = 0$, ce qui donne ici

$$C_v dT = -ldV = -PdV = -RT\frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow C_v dT = -RT\frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{C_v}{R}\frac{dT}{T} = -\frac{R}{(\gamma-1)R}\frac{dT}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{1}{(\gamma-1)}\frac{dT}{T} = -\frac{1}{(aT+b-1)}\frac{dT}{T}$$

En posant $z = \frac{1}{T}$,on a :

$$dz = -\frac{dT}{T^2}$$

$$dz = -\frac{dT}{T^2} \Rightarrow -Tdz = \frac{dT}{T}$$

$\Rightarrow -\frac{dz}{z} = \frac{dT}{T}$ Ainsi

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{a\left(\frac{1}{z}\right)+b-1} \times \left(-\frac{dz}{z}\right)$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dz}{a+z(b-1)}$$

En intégrant, on a : $lnV = \int \frac{dz}{a+z(b-1)}$

$$lnV = \frac{1}{b-1}\ln(a+z(b-1)) + cste$$

$$\Rightarrow lnV - \frac{1}{b-1}\ln(a+z(b-1)) = cste$$

$$\Rightarrow lnV - \ln(a+z(b-1))^{\frac{1}{b-1}} = cste$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{V}{(a+z(b-1))^{\frac{1}{b-1}}}\right) = cste$$

$$\Rightarrow \frac{V}{(a+z(b-1))^{\frac{1}{b-1}}} = e^{cste} = cste$$

$$\Rightarrow \frac{V^{b-1}}{\left[(a+z(b-1))^{\frac{1}{b-1}}\right]^{b-1}} = cste$$

$$\Rightarrow \frac{V^{b-1}}{a+\frac{1}{T}(b-1)} = cste$$

$$\Rightarrow \frac{V^{b-1}}{\frac{aT+b-1}{T}} = cste$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{TV^{b-1}}{aT+b-1} = cste}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 3

1) Il s'agit d'une machine thermique ditherme irréversible, car les deux transformations BC et CD au cours desquelles le gaz est en contact soit avec l'une, soit avec l'autre des deux sources de chaleur sont isochores et ne sont pas isothermes. La machine est motrice car dans le plan (P, V), le cycle est parcouru en sens inverse du sens trigonométrique.

2)

- AB : $\Delta_{AB}U = 0$ (Transformation isotherme)

$-Q_{AB} = W_{AB} = \int_{V_1}^{V_2} -PdV = \int_{V_1}^{V_2} -RT_1\frac{dV}{V}$

$Q_{AB} = W_{AB} = RT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) > 0$

$\Rightarrow Q_{AB} < 0$

- $W_{BC} = 0$ (Transformation isochore)

Donc $Q_{BC} = \Delta_{BC}U = \int_{T_1}^{T_2} C_v dT$

$Q_{BC} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{R}{\gamma - 1} dT = \int_{T_1}^{T_2} \frac{R}{aT + b - 1} dT$

$Q_{BC} = \frac{R}{a} \ln\left(\frac{aT_2 + b - 1}{aT_1 + b - 1}\right) > 0 \ (T_2 > T_1)$

- $\Delta_{CD}U = 0, W_{CD} = -Q_{CD} = -\int_{V_2}^{V_1} RT_2\frac{dV}{V}$

$W_{CD} = -Q_{CD} = -RT_2 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) < 0$

- $W_{DA} = 0$, donc $Q_{DA} = \Delta_{DA}U = -\frac{R}{a}\ln\left(\frac{aT_2+b-1}{aT_1+b-1}\right) < 0$

$Q_F = Q_{AB} + Q_{DA}$ et $Q_C = Q_{BC} + Q_{CD}$

Q_F reçoit donc $Q_F < 0$ et $Q_C > 0$.

D'après le cours, $\eta = -\frac{W}{Q_C} = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)X$.

Avec $X = \frac{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) + \frac{R}{a}\ln\left(\frac{aT_2+b-1}{aT_1+b-1}\right)}$

VALIDE SUR LMD

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

Examen de Thermodynamique (Licence 2-MI, Deuxième session)

Exercice 1

A-3

B-5

C-3

D-3

Exercice 2

1. En se rappelant de la partie du cours de Topologie qui cherche le minimum d'une fonction, on dérive :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = V_0[2a(T-T_0)+b(P-P_0)] = 0$$

T_m est la solution de cette équation.

$$V_0[2a(T_m-T_0)+b(P-P_0)] = 0$$

$$\Leftrightarrow T_m = T_0 - \frac{b}{2a}(P-P_0)$$ qui est bien un minimum car $\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right)_P = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_P = 2aV_0 > 0$

Pour $P = P_0$, on a : $T_m = T_0 = 277K$.

2. Calcul du coefficient thermoélastique α et χ.

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \\ \chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_P \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} \alpha = \frac{2a(T-T_0)+b(P-P_0)}{1+a(T-T_0)^2-(k-bT)(P-P_0)} \\ \chi = \frac{k-bT}{1+a(T-T_0)^2-(k-bT)(P-P_0)} \end{cases}$

On a : $P = 1bar = P_0$

$$\begin{cases} \alpha_{(P=P)} = \frac{2a(T-T_0)}{1+a(T-T_0)^2} \\ \chi_{(P=P_0)} = \frac{k-bT}{1+a(T-T_0)^2} \end{cases}$$

A.N

$$\begin{cases} \alpha = 9{,}9.10^{-5}K^{-1} \\ \chi = 4{,}96.10^{-10}P_a^{-1} \end{cases}$$

3. On prend désormais pour l'eau au voisinage de $277K$ et $1bar$ un modèle incompressible et indilatable.
   a. D'après l'énoncé, α et χ sont très faibles (voir nuls)

$$\begin{cases} \alpha \approx 0 \\ \chi \approx 0 \end{cases} \Rightarrow k \approx bT \text{ et } T \approx T_0 \Rightarrow V = V_0 = cste$$

Scanné avec CamScanner

b. $\Delta U = n \times c \times \Delta T$ or $n = \frac{m}{M_{H_2O}}$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{m}{M_{H_2O}} \times c \times \Delta T = \frac{m}{2M_H + M_O} \times c \times \Delta T$$

$$\text{A.N} : \Delta U = \frac{1}{2\times1+16} \times 4{,}18 \times (283 - 273) = 2{,}322J$$

$$\Delta U = 2{,}322J$$

Exercice 3

1.

- $k = 0$ donne $P = cte$:Transformation isobare ;
- $k = 1$ donne $PV = nRT = cte \Rightarrow T = cte$:car le système est fermé : Transformation isotherme ;
- $k = +\infty$ donne $V = cte$ (car $PV = cte$ serait une hypothèse fausse) : $Transformation\ isochore$;

2. Par définition, on a tout au long de la transformation $PV^k = P_0V_0^k$ donc $P = P_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^k$.

Comme la transformation est quasi-statique, l'équilibre mécanique est atteint tout au long de la transformation et on a : $P = P_{ext}$.

Le travail entre les états $A\ (P_0, V_0, T_0)$ et $B\ (P_1, V_1, T_1)$ en fonction des pressions et des volumes est :

$$W = -\int_A^B -PdV = -\int_A^B P_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^k dV = -P_0V_0^k\int_{V_0}^{V_1}\frac{dV}{V^k}$$

$$W = -P_0V_0^k\left(\frac{V_1^{1-k} - V_0^{1-k}}{1-k}\right)$$

$$W = P_0V_0^k\left(\frac{V_1^{1-k} - V_0^{1-k}}{k-1}\right)$$

3. Le travail entre A et B en fonction des températures uniquement. En utilisant la propriété polytropique ($P_0V_0^k = P_1V_1^k$) puis celle des gaz parfaits, on obtient :

$$W = \frac{1}{k-1}(P_1V_1 - P_0V_0) = \frac{nR}{k-1}(T_1 - T_0)$$

4. D'après le premier principe appliqué au gaz parfait, $\Delta U = W + Q$

Comme le système est un gaz parfait,

$\Delta U = C_V\Delta T = C_V(T_1 - T_0)$

Ainsi $W + Q = C_V(T_1 - T_0) \Rightarrow Q = C_V(T_1 - T_0) - W$

$$\Rightarrow Q = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0) - \frac{nR}{k-1}(T_1 - T_0)$$

$$\Rightarrow Q = nR\left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{k-1}\right)(T_1 - T_0)$$

5.

- Pour $k = 0$, on a identifié une transformation isobare (voir question 1, le cas $k = 0$). On a dans ce cas (en utilisant le résultat de la question 4) :

$$Q = nR\left(\frac{1}{\gamma-1} - 1\right)(T_1 - T_0) = \frac{\gamma nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0) = C_p\Delta T.$$

- Pour $k = +\infty, Q = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0) = C_V(T_1 - T_0)$. Il s'agit donc d'une transformation isochore.
- Pour $k = \gamma, Q = nR\left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{\gamma-1}\right)(T_1 - T_0) = 0$: la transformation est adiabatique.

Scanné avec CamScanner

Université Félix H. Boigny, UFR MI, Licence 2
UE: Probabiité Statistique 2
ECUE: Probabilité 2

Année Universitaire
2015/2016

EXAMEN

(Durée: 1h20)

NB: Ce examen est composé de trois (3) exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat. La clarté de la rédaction sera fortement prise en compte dans la correction des copies

Exercice 1 Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès, qui dessert 5000 abonnés. A un instant donné, chaque abonné a 20% de chance d'être connecté. D'autre part leurs connexions sont supposés indépendantes les unes de autres.

(1) On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connecté à un instant t. Avec une justification rigoureuse, quelle est la loi de X.

(2) On pose $Y = \dfrac{X - 1000}{\sqrt{800}}$. Justifier clairement qu'on peut approcher la loi de Y par la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Comment appelle-t-on le théorème utilisé. Enoncer le clairement dans le cas général.

(3) Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simltanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieur à $2,5\%$. En utilsant l'approximation précédente, proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions. (On remarquera que le quantile d'ordre $97,5\%$ de la $\mathcal{N}(0,1)$ est $1,96$).

Exercice 2 Soit (X,Y) un couple de variables à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ admettant une densité

$$f(x,y) = \begin{cases} C & si \quad |x|^2 + |y|^2 \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

(1) Déterminer C.

(2) Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantss.

(3) Calculer $\mathbb{P}(X + Y \leq 0)$ et $\mathbb{P}(X \geq 0, Y \geq 0)$.

(4) Soit (R,Θ) tel que $R \geq 0$ et $\Theta \in [0,2\pi]$ et $X = R\cos(\Theta)$, $Y = R\sin(\Theta)$.

(a) Déterminer la loi conjointe de (R,Θ).

(b) Trouver les lois de R et Θ. En déduire que les variables aléatoires R et Θ sont indépendantes.

Exercice 3 Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3: les bons risques, les risques moyens et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes representent 20% de la population totale pour la classe R_1, 50% pour la classe R_2 et 30% pour la classe R_3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne issue de l'une de ces trois classes sont respectivement de $0,05$, $0,15$ et $0,30$.

(1) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année?

(2) Si Mr Proba n'a pas eu accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque?

(3) Les évènements "ne pas avoir un accident" et "être un risque moyen" sont t-ils indépendants?

BON COURAGE

Scanné avec CamScanner

Université Félix H. Boigny, Licence 2,
UE: Probabilité et Statitique

Année Académique
2015/2016

Examen (session 2)
(Semestre 2)

Probabilité (20 pts) - 01h 20

NB: Tous documents sont strictements interdits. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte dans la l'attribution des points.

Exercice 1 (6 pts)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et toutes de loi uniforme sur $[0;1]$. On pose $Z_n =$ [illegible] $2n\, min(X_1, \ldots, X_n)$.

(1) Rappeler la définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires,

(2) Déterminer F_n la fonction de repartition de Z_n.

(3) Montrer que Z_n converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.

Exercice 2 (7 pts)

Un "jeu?" de suicide par empoisonnement consiste à tirer au hasard dans une urne contenant n fruits dont un seul est mortel, les autres étant comestibles (propre à la consommation).

(1) Donner la loi de probabilité du nombre N d'essais nécessaires si le candidat au suicide essaie les fruits l'un après l'autre sans le remettre dans l'urne. Déterminer le nombre d'essais moyen pour qu'il atteigne son objectif, puis sa dispersion.

(2) Pour faire durer le suspense, il remet le fruit consommé dans l'urne quand celui-ci ne le tue pas. Donner dans ce cas la loi de N. Rappeler son espérance et sa variance.

(3) Les candidats décident de faire durer le suspense deux fois sur cinq. On sait qu'un jour un candidat au suicide est mort après n tentatives. Quelle est la probabilité p_n que le l'homme ait décidé de faire durer le suspense.

(4) Etudier le comportement assymptotique de p_n.

Exercice 3 (7 pts)

On rappelle que la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ pour densité

$$f_X(t) = e^{-t}1_{]0,+\infty[}(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

X suit la loi exponentielle de paramètre 1 et $Y = [X]$ la variable partie entière supérieure de X ($[x] = k \Leftrightarrow k-1 < x \leq k$).

(1) Calculer la fonctions de repartition F_X de X

(2) Demontrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

(3) Calculer $\mathbb{P}(Y = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

(4) Soit $Z = X - Y$. Dans quel intervalle Z prend-t-elle ses valeurs? Déterminer sa fonction de repartition F_Z. (ind: Si $x > 0$, alors $x \leq [x] < x+1$ et $\{Y - X \leq t\} = \bigcup_{n\geq 1} \{n - t \leq X \leq n\}$).

Scanné avec CamScanner

Université Félix H. Boigny, UFR MI, Licence 2 — Année Universitaire
UE: Probabilité Statistique 2 — 2016/2017
ECUE: Probabilité 2

EXAMEN (Durée: 1h20)

NB: Ce examen est composé de trois (3) exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat. La clarté de la rédaction sera fortement prise en compte dans la correction des copies

Exercice 1 (5 pts)

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

(1) Démontrer que la probabilité de tomber malade est égale à $\frac{5}{48}$
(2) Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné?
(3) Le vaccin est-il efficace?

Exercice 2 (7 pts)

(X, Y) est un couple de variables aléatoires de densité:

$$f(x,y) = \begin{cases} k\exp(-\frac{x^2+y^2}{2}) \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_- \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(1) Calculer k.
(2) Déterminer les loi marginale X et Y.
(3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
(4) Calculer $Cov(X, Y)$.
(5) Déterminer la loi du couple (Z, U) avec $Z = X + Y$ et $U = X - Y$.
(6) En déduire la loi de Z en fonction de $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2})du$.

Exercice 3 (8 pts)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \geq 1$

$$X_n(\Omega) = \{1, 2, \cdots, n\} \text{ et } \mathbb{P}(X_n \leq k) = \frac{k^2(3n-2k)}{n^3}, \ \forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ désigne la partie entière de x.

(1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{[nt]}{n}$.
(2) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\mathbb{P}(Y_n \leq t) = \frac{[nt]^2}{n^3}(3n - 2[nt]).$$

(3) En déduire, pour $t \in \mathbb{R}$, l'existence et la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n \leq t)$. (On sait que si $t \geq 1$ alors $\frac{1}{t} \in [0, 1]$ et si $t \leq 0$ alors $-t \geq 0$.
(4) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi, et donner la loi limite.

Scanné avec CamScanner

Université Félix H. Boigny, UFR MI, Licence 2
UE: Probabiité Statistique 2
ECUE: Probabilité 2

Année Universitaire
2016/2017

EXAMEN DE RATTRAPAGE (Durée: 1h20)

NB: Ce examen est composé de trois (3) exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat. La clarté de la rédaction sera fortement prise en compte dans la correction des copies

Exercice 1 (5 pts)

Une banque révise sa politique de carte de crédit avec un rappel d'une partie de celles-ci. Par le passé, environ 5% des détenteurs d'une carte de crédit ont été insolvables et la banque a été incapable de recouvrer les soldes impayés. Par conséquent, la direction a estimé égale à $0,05$ la probabilité qu'un détenteur de carte de crédit soit insolvable. La banque a également découvert que la probabilité de ne pas honorer un paiement mensuel est de $0,2$ pour les clients solvables. Bien entendu, la probabilité de ne pas honorer un paiement mensuel pour les clients insolvables est de 1.

(a) Sachant qu'un client n'a pas honoré un paiement mensuel, calculer la probabilité a posteriori que le client soit insolvable.

(b) La banque voudrait reprendre sa carte de crédit si la probabilité qu'un client soit insolvable est supérieure à $0,20$. La banque devrait-elle reprendre sa carte de crédit si le client n'honore pas un paiement mensuel ? Pourquoi ?

Exercice 2 (8 pts)

(X, Y) est un couple de variables aléatoires de densité:

$$f(x,y) = \begin{cases} K\exp(-(x+y)) \text{ si } 0 \leq x \leq y \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(1) Calculer K.

(2) Déterminer les loi marginale X et Y.

(3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

(4) Calculer $Cov(X, Y)$.

(5) On considère le couple (Z, U) défini $Z = X + Y$ et $U = Y$.

(a) Montrer que le support de $(Z.U)$ est

$$\Delta = \{(z,u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ / \ u \leq z \leq 2u\}$$

(b) Déterminer la loi de (Z, U).

(c) En déduire la loi de Z.

Exercice 3 (7 pts)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \geq 1$

$$X_n(\Omega) = \{1, 2, \cdots, n\} \text{ et } \mathbb{P}(X_n \leq k) = \frac{k^2(3n-2k)}{n^3}, \ \forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

VALIDE UM

Scanné avec CamScanner

On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ désigne la partie entière de x.

(1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{[nt]}{n}$.

(2) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$,

$$\mathbb{P}(Y_n \leq t) = \frac{[nt]^2}{n^3}(3n - 2[nt]).$$

(3) En déduire, pour $t \in \mathbb{R}$, l'existence et la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n \leq t)$. (On sait que si $t \geq 1$ alors $\frac{1}{t} \in [0,1]$ et si $t \leq 0$ alors $-t \geq 0$.

(4) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi, et donner la loi limite.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UE Probabilités-Statistique, L2 2017/2018

Examen final de Probabilité: Durée: 1h30

NB La clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction.

Exercice 1

(1) Donner la définition d'une mesure de probabilité.

(2) Donner la définition de l'espérance d'une variable aléatoire X discrète à valeur dans $\{4, 5, \cdots, n\}$.

(3) Soit Y une variable aléatoire à densité f et h un difféomorphisme. On pose Z une variable aléatoire définie par $Z = h(Y)$. Z est-elle à densité? si oui déterminer sa fonction de densité ϕ.

(4) Soit $\{A, B, C\}$ un système complet d'évènements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Que signifie $\{A, B, C\}$ est un système complet d'évènements

(b) Soit E un évènement

(i) Que signifie E est un évènement non impossible.

(ii) On suppose que E est non impossible. Donner la formule des probabilités totales associée à E dans le système complet $\{A, B, C\}$. En déduire la formule de Bayes reliant E et B.

(5) Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$.

(a) Donner les conditions pour que la probabilité sur Ω notée $\mathbb{P}_0$ soit la probabilité uniforme.

(b) Soit A un évènement issue de cette expérience. Donner l'expression de $\mathbb{P}_0(A)$.

Exercice 2

On considère une urne contenant 6 boules noires et n boules blanches. Mr. Big vous propose le jeu suivant: vous tirez deux boules simultanément, si elles sont de même couleur vous gagnez 1000 Fcfa, si elles sont de couleurs différentes vous perdez 1000 Fcfa

(1) On suppose pour l'instant que $n = 3$

(a) Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient de la même couleur?

(b) Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient de couleur différente?

(2) On suppose à présent que $n \geq 3$ et on note G la variable aléatoire représentant votre gain en milliers de francs cfa.

(a) Quelle est la loi de G?

(b) Montrer que $\mathbb{E}[G] = \dfrac{n^2 - 13n + 30}{(n-6)(n+5)}$

(c) A partir de combien de boules blanches le jeu vous est-il favorable?

Scanné avec CamScanner

NB : Le jeu vous est favorable si l'espérance de votre gain est positive.

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de densité:

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-x} \text{ pour } x > 0$$

Soit Y une autre variable aléatoire. On suppose que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ une loi normale de paramètres $m = 0$ et $\sigma^2 = \frac{1}{2x}$.

(1) Donner p la fonction de densité de la loi normal $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. En déduire que la fonction densité conditionnelle de Y sachant $X = x$ est

$$g(y|x) = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\, e^{-xy^2} 1_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*}(y|x) \quad .$$

(2) Montrer que la loi conjointe du couple (Y, X) est f définie par

$$f(y, x) = \frac{1}{\pi}\, e^{-x(1+y^2)} 1_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*}(y, x).$$

(3) En déduire la fonction de densité de probabilité de Y qu'on notera u.

(4) Montrer que la loi conditionnelle de X sachant Y est

$$h(x|y) = \frac{1}{\pi^2(1+y^2)}\, e^{-x(1+y^2)} 1_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}}(x|y).$$

(5) Montrer que l'espérance conditionnelle de X sachant que $\{Y = y\}$ est

$$w(y) = \frac{1}{\pi^2(1+y^2)^3}.$$

(6) En déduire $\mathrm{E}(X|Y)$

VALIDUM

Scanné avec CamScanner

UE : Probabilites-Statistique, L2 2017/2018

Examen rattrapage de Probabilité: Durée: 1h30

NB: la clarté de la redaction sera prise en compte dans la correction. Les documents sont formellement interdits

Exercice 1 Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. On note

$$M_n = \max(U_1, \cdots, U_n) \text{ et } X_n = n(1 - M_n)$$

(1) Déterminer la fonction de repartition de la loi uniforme.

(2) Montrer que $\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(U_1 \leq x, \cdots, U_n \leq x)$. En déduire la fonction de repartition de M_n en fonction de la fonction de repartition des U_i.

(3) Déterminer la fonction de répartition de X_n

(4) Etudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$

Exercice 2

Dans une entreprise deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier 1 fabrique en une journée deux fois plus de pièces que l'atelier 2. Le pourcentage de pièces défectueuses est 3% pour l'atelier 1 et 4% pour l'atelier 2. On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée.

(1) Déterminer la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1

(2) Déterminer la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 et est défectueuse.

(3) Déterminer a probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 sachant qu'elle est défectueuse.

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de densité:

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-x} \text{ pour } x > 0$$

Soit Y une autre variable aléatoire. On suppose que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est une loi normale de paramètres $m = 0$ et $\sigma^2 = \frac{1}{2x}$.

(1) Donner p la fonction de densité de la loi normal $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. En déduire que la fonction de densité conditionnelle de Y sachant $X = x$.

(2) Déterminer f la loi conjointe du couple (Y, X). En déduire la fonction de densité de probabilité de Y qu'on notera u.

(3) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant Y.

(4) Déterminer l'espérance conditionnelle de X sachant que $\{Y = y\}$

(5) En déduire $\mathbb{E}(X|Y)$

Scanné avec CamScanner

Université Félix H. Boigny
UFR Maths Info, filière classique
UE: Probabilités-Statistique, L2

Année Universitaire
2018/2019

Examen de Probabilité: Durée: 1h20

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction.

Exercice 1 Soit n un entier naturel non-nul et soit a un réel. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{an}{\pi(1+n^2x^2)}.$$

(1) Déterminer a pour que f_n soit une densité de variable aléatoire.
(2) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que chaque X_n admet pour densité f_n.
   (a) Étudier l'existence de moments d'ordre 1 pour X_n
   (b) Montrer que la la suite (X_n) converge en loi vers la variable nulle.
   (c) Étudier la convergence en probabilité de la suite (X_n) vers la variable nulle.

Exercice 2

En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires: Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés. Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés

(1) Quel est le taux global de personnes soulagées?
(2) Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé?

NOTA BENE: On posera clairement les événements et les formules de calcul de leur probabilité.

Exercice 3 Le couple de variables aléatoires (X,Y) prend ses valeurs dans le domaine D suivant

$$D = \{(x,y),\ x>0,\ y>0,\ x+y<1\}$$

avec la densité de probabilité f définie par $f(x,y) = K(x+y)$.

(1) Déterminer la constante K.
(2) Déterminer les lois marginales de X et YX.
(3) les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
(4) On pose $U = X+Y$ et $V = X-Y$.
   (a) Déterminer la fonction de densité de (U,V)
   (b) En déduire la fonction de densité de U.
   (c) Calculer $\mathbf{E}(V|U)$.

Scanné avec CamScanner

Université Félix H. Boigny, Cocody
UFR Maths Info
UE: Probabilité 2

Année Universitaire 2018/2019

Examen ratrappage de Probabilité: Durée: 1h20

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction. Les documents sont formellement interdits

Exercice 1

(1) Rappeler la définition d'une probabilité

(2) Soit $\{A, B, C\}$ une système complet d'évènements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Que signifie $\{A, B, C\}$ une système complet d'évènements

(b) Soit E un évènement tel que E est un évènement non impossible.

(i) Que signifie E est un évènement non impossible.

(ii) Ecrire la formule des probabilités totales associée à E dans le système complet $\{A, B, C\}$. En déduire la formule de Bayes reliant E et B.

(3) Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$.

(a) Donner les conditions pour que la probabilité sur Ω noté $\mathbb{P}_0$ soit la probabilité uniforme.

(b) Soit A un évènement issue de cette expérience. Donner l'expression de $\mathbb{P}_0(A)$.

Exercice 2

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches. On tire 5 boules au hasard et on note X le nombre de boules rouges parmi les 5 tirées.

(1) On suppose que le tirage se fait simultanément et sans remise.

(a) Déterminer la loi de X

(b) Calculer son moment centré d'ordre 2.

(2) On suppose que le tirage se successivement fait avec replacement.

(a) Déterminer la loi de X

(b) Calculer le moment d'ordre 1 de X

Exercice 3

Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ une suite de variable aléatoire iid à une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

(1) Déterminer par recurrence que S_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$.

(2) Déterminer $\mathbb{P}(S_n \leq n)$.

(3) En appliquant le théorème central limite à S_n, démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \right) = \frac{1}{2}.$$

1

Scanné avec CamScanner

Université Félix H. Boigny
UFR Maths Info, Filière classique
UE: Probabilités-Statistique, L2
ECUE: Probabilités

Année Universitaire
2019/2020

Examen final: Durée: 2h

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction.

VALIDUR LMD

Exercice 1

On dit qu'une variable aléatoire Y suit une loi de Gumbel si elle admet pour densité

$$f(x) = e^{-x-e^{-x}} 1_{\mathbb{R}}(x).$$

(1) Montrer qu'il existe une fonction u telle que $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

(2) En déduire que la fonction f est réellement une fonction de densité.

(3) Montrer que la fonction de repartition de Y est

$$F_Y(x) = e^{-e^{-x}}.$$

(4) Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On note

$$M_n = \max(U_1, \cdots, U_n) \text{ et } X_n = M_n - \ln(n)$$

(a) Déterminer la fonction de densité de la loi exponentielle de paramètre 1

(b) Montrer que la fonction de répartition des U_i est

$$F_i(x) = (1 - e^{-x}) 1_{]0,+\infty[}.$$

(c) En déduire G_n, la fonction de repartition de M_n.

(d) On note H_n, la fonction de repartition de X_n

(i) Montrer que $H_n(x) = G_n(x + \ln(n))$.

(ii) Déterminer H_n.

(e) Montrer que X_n converge en loi vers Y.

Exercice 2

Dans une entreprise deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier 1 fabrique en une journée deux fois plus de pièces que l'atelier 2. Le pourcentage de pièces défectueuses est 3% pour l'atelier 1 et 4% pour l'atelier 2. On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée.

(1) Déterminer la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1

(2) Déterminer la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 et est défectueuse.

Scanné avec CamScanner

(3) Déterminer la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 sachant qu'elle est défectueuse.

Exercice 3

Un étudiant s'ennuie durant son cours de probabilités et passe son temps à regarder par la fenêtre les feuilles tomber d'un arbre. On admet que le nombre de feuilles tombées à la fin du cours est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Cela signifie que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

(1) (a) Expliquer pourquoi les hypothèses de l'énoncé permettent de dire que pour tout $\lambda > 0$,

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

(b) Déterminer l'espérance et la variance de X.

(2) A chaque fois qu'une feuille tombe par terre, l'étudiant lance une pièce qui donne pile avec une probabilité p et face avec probabilité $q = 1 - p$, $p \in]0, 1[$. On note F et P le nombre de faces et de piles obtenus respectivement.

(a) Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, expliquer de manière simple pourquoi la loi de F sachant $X = k$, est une loi binomiale dont on précisera les paramètres. En déduire l'expression de $\mathbb{P}(F = a|X = k)$.

(b) Pour $(k, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, calculer la quantité $\mathbb{P}(X = k, F = a)$.

(c) En déduire la loi de F, ainsi que son espérance.

(d) Donner, sans calculs, la loi de P.

(3) Montrer que P et F sont indépendantes

(4) Calculer $\mathbb{E}[PF]$ et $Var[P + F]$.

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

VALIDER LMD

Université Félix H.Boigny
UFR Maths Info, Filière
UE:Probabilité-Statistique, L2
ECUE: Probabilité

Année Universitaire
2020/2021

EXAMEN FINAL: Durée: 1*h*30

Exercice 1 (Question de cours) (7 points)

(1) Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire ε. Soit $\mathcal{F}$ une famille de sous ensemble de Ω

(a) Comment appelle t-on le couple $(\Omega, \mathcal{F})$?

(b) Donner la définition d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω.

(c) Comment appelle t-on le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

(d) Donner la définition d'une expérience équiprobable.

(e) On suppose que Ω est fini et ε est équiprobable. Donner l'expression dans ce cas de $\mathcal{P}(A)$ pour tout événement A, comment l'appelle cette probabilité.

(2) Soit X une variable aléatoire discrète à valeur dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tel que

$$\forall\, k \in E,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{k}$$

(a) Déterminer a. En déduire la loi de X, son espérance et sa variance.

(b) Déterminer la fonction de répartition X.

(3) Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire réelle à densité f d'ensemble de définition $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; 0 \leq x \leq y\}$

Scanné avec CamScanner

(a) Déterminer les lois de X et de Y. Comment les appelle t-on ?

(b) Donner la relation entre la loi conjointe et les loi marginales pour que X et Y soient deux variables indépendantes.

(c) Donner la procédure et l'expression de l'espérance du couple (X, Y).

Exercice 2 (6 points)

Une souris cherche un fromage. On suppose que le fromage se trouve dans une chambre d'une maison de 4 chambres.

(1) Donner la loi de probabilité du nombre Y de visites nécessaires dans les nombres pour découvrir le fromage s'il entre une seule fois dans une chambre. Calculer le moment d'ordre 1 de Y. Comment l'appelle t-on ?

(2) On suppose que la souris n'a pas de mémoire: il peut rentrer plusieur fois dans la même chambre. Trouver dans ce cas la loi de Y, son moment centré d'ordre 2. Comment l'appelle t-on ?

Exercice 3 (7 points)

Pour tout $n \geq 1$, on considère $(X_i)_{1 \leq n \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(1) Montrer par recurrence que S_n suit une loi de Poisson de n.

(2) Déterminer $\mathbb{P}(S_n \leq n)$.

(3) En utilisant le théorème central limit, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(e^{-n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{k!} \right) = \frac{1}{2}$$

VALIDE UMD

Scanné avec CamScanner

PROBABILITE 2 EXAMEN SESSION 1 : CORRIGE + BAREME (20pts)

NB : Cet examen est composé de trois (3) exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat. La clarté de la rédaction sera fortement prise en compte dans la correction des copies.

EXERCICE 1(5pts)

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

1. Démontrer que la probabilité de tomber malade est égale à $\frac{5}{48}$.
   Soit M l'évènement " être malade ", V l'évènement "être vacciné" alors d'après les données du problème on a :
   $\mathbb{P}(V) = \frac{1}{4}$ $(0.25pts), \mathbb{P}(V|M) = \frac{1}{5}$ $(0.25pts), \mathbb{P}(M|V) = \frac{1}{12}$ $(0.25pts)$
   On sait que :$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(M \cap V) + \mathbb{P}(M \cap \overline{V}) = \mathbb{P}(M|V)\mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(\overline{V}|M)\mathbb{P}(M)(1pts)$
   Or $\mathbb{P}(\overline{V}|M) = 1 - \mathbb{P}(V|M)(0.25pts)$
   Donc $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(M|V)\mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(M) - \mathbb{P}(M)\mathbb{P}(V|M)$
   $$\Rightarrow \mathbb{P}(M) = \frac{\mathbb{P}(M|V)\mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(V|M)} = \frac{\frac{1}{12} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{48}.(0.5pts)$$
2. Déterminons la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné.
   Cela revient à calculer $\mathbb{P}(M|\overline{V})$. Ainsi on a :
   $$\mathbb{P}(M|\overline{V}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{V}|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(\overline{V})} = \frac{(1 - \mathbb{P}(V|M))\mathbb{P}(M)}{1 - \mathbb{P}(V)} = \frac{1}{9}(1.5pts)$$
3. Vérifions si le vaccin est efficace.
   On voit que $\mathbb{P}(M|\overline{V}) > \mathbb{P}(M|V)$
   Cela signifie qu'on a plus de chance de tomber malade quand on n'est pas vacciné que si on est vacciné. Par conséquent le vaccin est efficace. $(1pts)$

EXERCICE 2(7pts)

(X, Y) est un couple de variables aléatoire de densité :

$$f(x,y) = \begin{cases} k \exp(-\frac{x^2+y^2}{2}) & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_- \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

VALIDE

Scanné avec CamScanner

1. Calculons k.
   f étant une fonction de densité alors $f \geq 0$ et

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1.(0.5pts)$$

   Cela équivaut à $k \geq 0$ et $2k\pi = 1$ i.e $k = \frac{1}{2\pi}$. $(0.5pts)$
   NB : Il faut savoir que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
2. Déterminons les lois marginales X et Y.
   On sait que $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont $= \mathbb{R}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\{\exp(-\frac{x^2}{2})(\int_{-\infty}^0 \exp(-\frac{y^2}{2})dy)1_{\mathbb{R}_-}(x) \\ &+ \exp(-\frac{x^2}{2})(\int_0^{+\infty} \exp(-\frac{y^2}{2})dy)1_{\mathbb{R}_+}(x)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})1_{\mathbb{R}}(x) \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\{\exp(-\frac{y^2}{2})(\int_{-\infty}^0 \exp(-\frac{x^2}{2})dx)1_{\mathbb{R}_-}(y) \\ &+ \exp(-\frac{y^2}{2})(\int_0^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2})dx)1_{\mathbb{R}_+}(y)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{y^2}{2})1_{\mathbb{R}}(y). \quad (0.75pts) \end{aligned}$$

3. Vérifions si les v.a. X et Y sont indépendantes.
   on a

$$\begin{aligned} f_X(x) \times f_Y(y) &= \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{x^2+y^2}{2})1_{\mathbb{R}^2}(x,y) \\ &\neq \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{x^2+y^2}{2})(1_{\mathbb{R}_-^2}(x,y) + 1_{\mathbb{R}_+^2}(x,y)) = f(x,y). \end{aligned}$$

   Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

VALIDER LMD

Scanné avec CamScanner

4. Calculons $Cov(X,Y)$.
On sait que

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y).(0.5pts)$$

Or $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(Y) = 0$ (car des $N(0,1)$). Donc

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) &= \int_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)dxdy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}_-^2} xy\exp(-\frac{x^2+y^2}{2})dxdy + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+^2} xy\exp(-\frac{x^2+y^2}{2})dxdy \\ &= \frac{2}{\pi}.(1pts) \end{aligned}$$

5. Déterminons la loi du couple (Z,U) avec $Z = X+Y$ et $U = X-Y$.
Soit g la fonction de densité conjointe du couple (Z,U). Alors on a

$$g(z,u) = f(\frac{z+u}{2}, \frac{z-u}{2})|J_\phi^{-1}(\frac{z+u}{2}, \frac{z-u}{2})|$$

où $\phi(x,y) = (x+y, x-y)$ et J_ϕ^{-1} est le déterminant de la matrice Jacobienne de ϕ. Donc tout calcul fait, on obtient

$$g(z,u) = \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{z^2+u^2}{4})1_\Delta(z,u)$$

avec $\Delta = \{(z,u) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R} / z \leq u\} \cup \{(z,u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} / z \geq u\}$. $(1.5pts)$

6. Déterminons la loi de Z en fonction de $\phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{u^2}{2})du$.
On sait que

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} g(z,u)du \\ &= \frac{1}{2\pi}(\int_z^{+\infty} \exp(-\frac{z^2+u^2}{4})du)1_{\mathbb{R}_-}(z) + \frac{1}{2\pi}(\int_{-\infty}^{z} \exp(-\frac{z^2+u^2}{4})du)1_{\mathbb{R}_+}(z) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-\frac{1}{4}z^2)[(1-\phi(\frac{z}{\sqrt{2}}))1_{\mathbb{R}_-}(z) + \phi(\frac{z}{\sqrt{2}})1_{\mathbb{R}_+}(z)]. \quad (1.5pts) \end{aligned}$$

EXERCICE 3(8 pts)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \geq 1$
$X_n(\Omega) = \{1,2,...,n\}$ et $\mathbb{P}(X_n \leq k) = \frac{k^2(3n-2k)}{n^3}$, $\forall k \in \{1,2,...,n\}$
On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ désigne la partie entière de z.

Scanné avec CamScanner

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculons $\lim_{n\to+\infty} \frac{[nt]}{n}$.
On sait que si $t \geq 0, nt - 1 \leq [nt] \leq nt$ et si $t \leq 0, nt \leq [nt] \leq nt + 1$.
Donc par l'utilisation du théorème du gendarme, on montre que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{[nt]}{n} = t. \quad (0.5pts)$$

2. Montrons que pour tout $t \in [0,1]$, $\mathbb{P}(Y_n \leq t) = \frac{[nt]^2}{n^3}(3n - 2[nt])$.
On sait que
$$\mathbb{P}(Y_n \leq t) = \mathbb{P}(X_n \leq nt) = \mathbb{P}(X_n \leq [nt]) + \mathbb{P}([nt] < X_n \leq nt). \quad (0.5pts)$$
Or X_n est une v.a. à valeur dans $\{1, ..., n\}$. Donc
$$\mathbb{P}([nt] < X_n \leq nt) = 0. \quad (0.5pts)$$
et par suite
$$\mathbb{P}(Y_n \leq t) = \mathbb{P}(X_n \leq nt) = \mathbb{P}(X_n \leq [nt]) = \frac{[nt]^2}{n^3}(3n - 2[nt]). \quad (1pts)$$

3. Déduisons, pour $t \in \mathbb{R}$, l'existence et la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n \leq t)$.
Si $t \leq 0$, alors l'évènement $\{Y_n \leq t\}$ est impossible car Y_n est une variable aléatoire positive.
Par conséquent
$$\mathbb{P}(Y_n \leq t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n \leq t) = 0. \quad (1pts)$$
Si $0 < t \leq 1$, d'après la question précédente
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n \leq t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{[nt]^2}{n^3}(3n - 2[nt]) = t^2(3 - 2t). \quad (1pts)$$
Enfin si $t > 1$, alors l'évènement $\{Y_n \leq t\}$ est presque sure car Y_n est une variable aléatoire à valeur dans $[0,1)$. Donc
$$\mathbb{P}(Y_n \leq t) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n \leq t) = 1. \quad (1pts)$$

4. Montrons que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi, et donnons la loi limite.
Posons $F_n(t) = \mathbb{P}(Y_n \leq t)$ alors F_n est la fonction de répartition de Y_n qui converge simplement, d'après ce qui précède. Donc Y_n converge en loi vers une v.a. Y dont la fonction de densité est
$$f(t) = 6t(1-t)1_{[0,1]}(t). \quad (1pts)$$

VALIDUM

Scanné avec CamScanner

UE Probabilités-Statistique, L2 2017/2018

Examen rattrapage de Probabilité: Durée: 1h30

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction. Il tenir compte du barème dans esprit. Si l'étudiant n'a pas suit la démarche du barème et son résultat est est cohérent et juste il faut lui donner la totalité des points requis.

Exercice 1 (8 pts)

Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. On note

$$M_n = \max(U_1, \cdots, U_n) \text{ et } X_n = n(1 - M_n)$$

(1) Déterminer la fonction de repartition de la loi uniforme.
Soit F la fonction de repartition de la loi uniforme sur $[0,1]$. On a

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad (0,5\text{ pt})$$

(2) Montrer que $\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(U_1 \leq x, \cdots, U_n \leq x)$.
On sait que $M_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$ alors $\{M_n \leq x\} = \{U_1 \leq x, \cdots, U_n \leq x\}$ (0,5 pt).
Par conséquent

$$P(M_n \leq x) = \mathbb{P}(U_1 \leq x, \cdots, U_n \leq x). \quad (1\text{ pt})$$

(3) En déduire la fonction de repartition de M_n en fonction de la fonction de repartition des U_i.
Soit F_n la fonction de repartition de M_n. Alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \mathbb{P}(M_n \leq x)$ (0,5 pt) et par suite

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbb{P}(U_1 \leq x, \cdots, U_n \leq x) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(U_i \leq c) \quad (0,5\text{ pt}) \\ &= (\mathbb{P}(U_1 \leq x))^n \\ &= (F(x))^n \quad (1\text{ pt}) \end{aligned}$$

VALIDUR LMD

Scanné avec CamScanner

(4) Déterminer la fonction de répartition de X_n

Soit G_n la fonction de répartition de X_n. Alors

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \mathbb{P}(X_n \leq x) \quad (0,5\text{ pt}) \\ &= \mathbb{P}(n(1-M_n) \leq x) \\ &= \mathbb{P}\left(M_n \geq 1 - \frac{x}{n}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(M_n \leq 1 - \frac{x}{n}\right) \\ &= 1 - F_n\left(1 - \frac{x}{n}\right) \\ &= 1 - \left(F\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right)^n \quad (0,5\text{ pt}) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } n \leq x \end{cases} \quad (1\text{ pt}) \end{aligned}$$

(5) Etudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$

De par sa définition, on vérifie que G_n converge simplement vers la fonction G définie par

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{si } 0 \leq x < +\infty. \end{cases} \quad (1\text{ pt})$$

Or G est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(1)$. Donc

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(1) \quad (1\text{ pt})$$

Exercice 2 (4 pts)

Dans une entreprise deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier 1 fabrique en une journée deux fois plus de pièces que l'atelier 2. Le pourcentage de pièces défectueuses est 3% pour l'atelier 1 et 4% pour l'atelier 2. On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée.

(1) Déterminer la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1

Soit A l'évènement la pièce provient de l'atelier alors $\bar{A}$ l'évènement la pièce provient de l'atelier 2. D'après la description, $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$ (1 pt)

(2) Déterminer la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 et est défectueuse.

Soit D l'évènement la pièce est défectueuse. Alors cela revient à déterminer $\mathbb{P}(A \cap D)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap D) &= \mathbb{P}(D|A).\mathbb{P}(A) \quad (0,5\text{ pt}) \\ &= 0,03 \times \frac{2}{3} \\ &= 0,02 \quad (1\text{ pt}) \end{aligned}$$

(3) Déterminer la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 sachant qu'elle est défectueuse.

Scanné avec CamScanner

Cela revient à déterminer $\mathbb{P}(A|D)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|D) &= \frac{\mathbb{P}(A\cap D}{\mathbb{P}(D)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A\cap D}{\mathbb{P}(D|A)\times\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(D|\bar{A})\times\mathbb{P}(\bar{A})} \quad (0,5\,\text{pt}) \\ &= \frac{3}{5}. \quad (1\,\text{pt})\end{aligned}$$

Exercice 3 (8 pts)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de densité:

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}e^{-x} \text{ pour } x > 0$$

Soit Y une autre variable aléatoire. On suppose que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est une loi normale de paramètres $m = 0$ et $\sigma^2 = \frac{1}{2x}$.

(1) Donner p la fonction de densité de la loi normal $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right)1_{\mathbb{R}}(x). \quad (0,5\,\text{pt})$$

(2) En déduire que la fonction de densité conditionnelle de Y sachant $X = x$.
Soit g la fonction de densité conditionnelle de Y sachant x. Alors on a

$$g(y|x) = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\exp\left(-xy^2\right)1_{\mathbb{R}}(y) \quad (0,5\,\text{pt})$$

(3) Déterminer f la loi conjointe du couple (Y, X).
On sait que

$$\begin{aligned}f(y,x) &= g(y|x)\times v(x) \quad (0,5\,\text{pt}) \\ &= \frac{1}{\pi}\exp(-x(y^2+1))1_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}(y,x) \quad (1\,\text{pt})\end{aligned}$$

(4) En déduire la fonction de densité de probabilité de Y qu'on notera u.
Par définition on a

$$\begin{aligned}u(y) &= \int_{\mathbb{R}_+} f(y,x)dx \quad (0,5\,\text{pt}) \\ &= \frac{1}{\pi(y^2+1)}1_{\mathbb{R}}(y) \quad (1\,\text{pt})\end{aligned}$$

(5) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant Y.
Soit h la fonction de densité conditionnelle de X sachant Y. On a

$$\begin{aligned}h(x|y) &= \frac{f(y,x)}{u(y)} \quad (0,5\,\text{pt}) \\ &= (y^2+1)\exp(-x(y^2+1))1_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}(x,y) \quad (1\,\text{pt})\end{aligned}$$

Scanné avec CamScanner

(6) Déterminer l'espérance conditionnelle de X sachant que $\{Y = y\}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X|Y=y) &= \int_{\mathbb{R}_+} x\, h(x|y)dx \quad (0,5\,\text{pt}) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} (y^2+1)\exp(-x(y^2+1))1_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}(x|y)dx \\ &= \frac{1}{y^2+1}. \quad (1\,\text{pt})\end{aligned}$$

(7) En déduire $\mathbb{E}(X|Y)$

On a $\mathbb{E}(X|Y=y) = \frac{1}{y^2+1}$. Donc, $\mathbb{E}(X|Y) = \frac{1}{Y^2+1}$ (1 pt)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

CORRECTION DE L'EXAMEN DE PROBABILITE SESSION 1 2018-2019

Exercice 1 :

$$f_n(x) = \frac{an}{\pi(1+n^2x^2)}$$

1)

f_n est une fonction continue et positive.

Posons $A = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{(1+n^2x^2)}dx$

$$A = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n \times \frac{1}{n}}{(1+X^2)}dX = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+X^2)}dX = \frac{a}{\pi}[\arctan(X)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{a}{\pi}(\pi) = a$$

$A = 1 \Longrightarrow a = 1$ **NB :** pour le calcul de l'intégral on a posé $X = nx$

D'où $f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$

2) a)

$$\mathbb{E}(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xn}{\pi(1+n^2x^2)}dx = \frac{1}{\pi n}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xn^2}{(1+n^2x^2)}dx$$

Posons $X = n^2x^2$, $dX = 2n^2xdx$, $dx = \frac{dX}{2xn^2}$

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+X)}dX = \frac{1}{2\pi n}[\ln(1+X)]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty$$

Le moment d'ordre 1 pour cette fonction n'existe pas.

b)

Par définition la fonction caractéristique $\emptyset_n(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f_n(x)dx$

$\emptyset_n(t) = \emptyset_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right)$, avec (X_n) une variable aléatoire de Cauchy de paramètre 0.

Par suite $\emptyset_n$ converge vers sa fonction $\emptyset \equiv 1$ qui la fonction caractéristique de la variable aléatoire congru en 0.

Donc (X_n) converge en loi vers la variable nulle.

c)

(X_n) Converge en loi vers la v.a. nulle donc converge aussi en probabilité vers la v.a. nulle.

Exercice 2

Soit les évènements suivants :

M : "les patients prenant un medicament" ; A : "les patients prenant l'aspirine"

S : "*les patients sont soulagés*"

Données $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{5}, \mathbb{P}(M) = \frac{2}{5}, \mathbb{P}_A(S) = \frac{75}{100}, \mathbb{P}_M(S) = \frac{90}{100}$

1) Taux global des patients soulagés

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A \cap S) + \mathbb{P}(M \cap S)$$

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(S) + \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(S) = \frac{3}{5} \times \frac{75}{100} + \frac{2}{5} \times \frac{90}{100} = \frac{81}{100}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Le taux global des patients soulagés est : 81%

2) La probabilité demandé est $\mathbb{P}_S(A)$, d'après la formule de bayes on a ;

$$\mathbb{P}_S(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{75}{100}}{\frac{81}{100}} = \frac{5}{9} \simeq 0.55$$

Donc ≃55% sont soulagés après avoir pris l'aspirine.

Exercice 3

$D = \{(x,y), x > 0, y > 0, x + y < 1\}$
avec la densité de probabilité f définie par $f(x,y) = K(x+y)$.

1) **Déterminons la constante K.**
f est une fonction positive et continue, donc on a :
Posons $A = \int_0^1 (\int_0^{1-x} f(x,y)dy)dx = K\int_0^1 (\int_0^{1-x} (x+y)dy)dx$

$$A = K\int_0^1 \left(\left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x}\right)dx = \frac{K}{2}\int_0^1 (1-x^2)dx$$

$$A = \frac{K}{2}\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{K}{3} = 1 \Longrightarrow K = 3$$

D'où $f(x,y) = 3(x+y)$

2) **Déterminons les lois marginales**
-Loi marginale X

Soit $x\epsilon]0,1[$; $f_X(x) = \int_{Y(\Omega)} f(x,y)dy = 3\int_0^{1-x}(x+y)dy = 3\left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x}$

$$f_X(x) = \frac{3}{2}(1-x^2)\mathbb{1}_{]0,1[}(x)$$

Loi marginale Y

Soit $y\epsilon]0,1[$; $f_Y(y) = \int_{X(\Omega)} f(x,y)dx = 3\int_0^{1-y}(x+y)dx = 3\left[xy + \frac{1}{2}x^2\right]_0^{1-y}$

$$f_Y(y) = \frac{3}{2}(1-y^2)\mathbb{1}_{]0,1[}(y)$$

3) On a $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$, alors il n'y a pas d'indépendance entre X et Y.

4) a) déterminons

$$g(U,V) = f(x,y) \times |J_\emptyset(X,Y)|^{-1}\mathbb{1}_{\Delta(u,v)}$$

On a $\begin{cases} X + Y = U & (1) \\ X - Y = V & (2) \end{cases}$

(1)+(2)$\Rightarrow 2X = U + V \Rightarrow X = \frac{1}{2}(U+V)$

$(1) - (2) \Rightarrow 2Y = U - V \Rightarrow Y = \frac{1}{2}(U-V)$

$$J_\emptyset(X,Y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow |J_\emptyset(X,Y)| = 2 \Rightarrow |J_\emptyset(X,Y)|^{-1} = \frac{1}{2}$$

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

On a : $g(U,V) = \frac{3}{2}(U+V+U-V) \times \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\Delta(u,v)}$

$$g(U,V) = \frac{3}{4} \times 2U \, \mathbb{1}_{\Delta(u,v)} = \frac{3}{2} U \, \mathbb{1}_{\Delta(u,v)}$$

Avec $\Delta = \{(U,V) \in \mathbb{R}^2 | V > 0, 0 < U < 1 \text{ et } 0 < V < U\}$

5) Déduisons la fonction de densité de U

$$g_u(u) = \int_0^u g(u,v)dv = \int_0^u \frac{3}{2} u dv = \frac{3}{2}u^2$$

$$g_u(u) = \frac{3}{2}u^2 \mathbb{1}_{]0,1[}(u)$$

Calculons $\mathbb{E}(V|U)$

$$\mathbb{E}(V|U) = \int_\Delta v g(v|u)\, dv$$

$$g(v|u) = \frac{g(u,v)}{g_u(u)} = \frac{\frac{3}{2}u}{\left(\frac{3}{2}\right)u^2} = \frac{1}{u}$$

$$\int_\Delta v g(v|u)\, dv = \int_0^u \frac{v}{u} dv = \frac{1}{u}[\frac{1}{2}v^2]_0^u = \frac{1}{u} \times \frac{1}{2}u^2 = \frac{u}{2} \mathbb{1}_{]0,1[}(u)$$

$$\mathbb{E}(V|U) = \frac{U}{2} \mathbb{1}_{]0,1[}(U)$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

CORRECTION EXAMEN RATTRAPAGE 2020/2021ROBABOLITE L2

Exercice 1

(1) Soit (Ω, f) un espace probabilisable. On appelle probabilité sur Ω l'application

$$\mathbb{P} : f \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longrightarrow \mathbb{P}(A)$$

telle que

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Pour toute famille $(A_n)_{n\geq 1}$ d'élément de f deux à deux disjoints, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)$$

(2) On considère un jeu de tir sur une cible comportant trois zone 1, 2 et 3.

(a) Pour cette expérience, déterminer Ω et f.

- $\Omega = \{1,2,3\}$
- $f = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \Omega\}$

(b) Déterminons α pour que P soit une probabilité.

Les événements $\{1\}, \{2\}$ et $\{3\}$ forment une partition de Ω. Alors P est une probabilité sur Ω si

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}) = \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\})$$

$$\Leftrightarrow 1 = 3\alpha + 2\alpha + \alpha = 6\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{6}$$

(3)

$\mathbb{P}(A \cap B) = 0,08$

$\mathbb{P}(A \cup B) = 0,52$

$\mathbb{P}(A) = 2$

(a) On pose $\mathbb{P}(A) = a$ et $\mathbb{P}(B) = b$. Montrer que le couple (a, b) est solution du système d'équation linéaire

$$\begin{cases} a + b = 0,6 \\ a - 2b = 0 \end{cases}$$

En utilisant les données on a :

$$0,52 = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \Leftrightarrow 0,5 = a + b - 0,08$$

$$\Leftrightarrow a + b = 0,6 \quad (1)$$

On a aussi $\mathbb{P}(A) = 2\mathbb{P}(B) \Leftrightarrow a = 2b \Leftrightarrow a - 2b = 0$ (2)

Scanné avec CamScanner

D'après (1) et (2), on a le système

$\begin{cases} a+b=0,6 \\ a-2b=0 \end{cases}$ dont (a,b) est solution.

(b) Déterminer les probabilités des évènements A et B.

D'après (a), $\begin{cases} a+b=0,6 \\ a-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ 2b+b=0,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ 3b=0,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ b=0,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0,4 \\ b=0,2 \end{cases}$

Ainsi, $\mathbb{P}(A)=a=0,4$ et $\mathbb{P}(B)=b=0,2$

(c) Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

On a $\mathbb{P}(A\cap B)=0,08$ et $\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)=0,2\times 0,4=0,08$

$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$. Alors A et B sont indépendants.

Exercice 2

Soit f définie par :

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<-1 \text{ ou } x>1 \\ x+a \text{ si } -1\le x\le 0 \\ \alpha x+1 \text{ si } 0\le x\le 1 \end{cases}$$

(1) Déterminer les réels a et α pour que f soit une fonction de densité.

Note : f est une densité de probabilité si et seulement si :

- f est positive
- f est continue
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1$

Supposons f est une densité. Alors f est continue et donc continue en 0.

f est continue en $0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$$\Rightarrow a=\lim_{x\to 0^-}(x+a)=\lim_{x\to 0^+}(\alpha x+1)=1\Rightarrow a=1 \qquad (1)$$

On a aussi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt+\int_{-1}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{1} f(t)dt+\int_{1}^{+\infty} f(t)dt=1$$

$$\Leftrightarrow 1=\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_{0}^{1}(\alpha x+1)dx=\int_{-1}^{0} xdx+\int_{-1}^{0} dx+\alpha\int_{0}^{1} xdx+\int_{0}^{1} dx$$

$$\Leftrightarrow 1=\frac{1}{2}[x^2]_{-1}^{0}+[x]_{-1}^{0}+\frac{\alpha}{2}[x^2]_{0}^{1}+[x^2]_{0}^{1}$$

$$\Leftrightarrow 1=-\frac{1}{2}+1+\frac{\alpha}{2}+1\Leftrightarrow -\frac{1}{2}=\frac{\alpha}{2}\Rightarrow \alpha=-1$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Ainsi $(a, a) = (-1, 1)$

(2) Soit X une variable aléatoire de densité f.

(a) Déterminer la fonction de répartition de X.

Notons F la fonction de répartition de X.

On a : $\overset{\circ}{F} : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$x \longrightarrow \mathbb{P}(X < x)$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

- $x \in]-\infty, -1[$

Alors $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$, car $\forall x \in]-\infty, -1[$ et $t \in]-\infty, x[$,

On a : $t \leq x \leq -1 \Longrightarrow t < -1 \Longrightarrow f(t) = 0$

- $x \in [-1,\ 0]$

Alors $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{x} f(t)dt$

$F(x) = 0 + \int_{-1}^{x} (t+1)dt + \int_{-1}^{x} t\, dt + \int_{-1}^{x} dt$

$$F(x) = \frac{1}{2}[t^2]_{-1}^{x} + [t]_{-1}^{x}$$

$F(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + x + 1 = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

- $x \in [0,\ 1]$

Alors $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$

$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$

$F(x) = F(0) - F(-1) + \int_{0}^{x} (-t+1)dt$

$F(0) = \frac{1}{2}(0^2 - 1) + 0 + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

$F(-1) = \frac{1}{2}((-1)^2 - 1) + (-1) + 1 = 0$

$\Longrightarrow F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[t^2]_{0}^{x} + \int_{0}^{x} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x^2 - 0) + x$

$F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

- $x \in [1, +\infty]$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt$

$F(x) = \int_{-1}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt = F(1) - F(-1) + \int_{1}^{x} 0\, f(t)dt$

Scanné avec CamScanner

$F(x) = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 0 = 1$

$F(x) = 1$

Conclusion :

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 \; si \; x \in]-1,-1[\\ \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \; si \; x \in [-1,0] \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} \; si \; x \in [0,1] \\ 1 \; si \; x > 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right) \underset{[-1,0]}{\chi}(x) + \left(-\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right) \underset{[0,1]}{\chi}(x) + \underset{[1,+\infty[}{\chi}(x)$$

(b)

* Calcul du moment d'ordre 1 $(\mathbb{E}(X))$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{-1} x\, f(x)dx + \int_{-1}^{0} x\, f(x)dx + \int_{0}^{1} x\, f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-1}^{0} x^2\, dx + \int_{-1}^{0} x\, dx + \int_{0}^{1} -x^2\, dx + \int_{1}^{+\infty} x\, dx$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}[x^2]_{-1}^{0} - \frac{1}{3}[x^3]_{0}^{1} + \frac{1}{2}[x^2]_{0}^{1}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 0$$

* Le moment centré d'ordre 2 (Variance de X)

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{-1} x^2 f(x)dx + \int_{-1}^{0} x^2 f(x)dx + \int_{0}^{1} x^2 f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

$$Var(X) = \int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{-1}^{0} x^2 dx + \int_{0}^{1} -x^3 dx + \int_{0}^{1} x^2 dx$$

Scanné avec CamScanner

$$Var(X) = \frac{1}{4}[x^4]_{-1}^{0} + \frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{0} - \frac{1}{4}[x^4]_{0}^{1} + \frac{1}{2}[x^3]_{0}^{1}$$

$$Var(X) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Donc $\boxed{Var(X) = \frac{1}{6}}$

(c)

$$\mathbb{P}(|x| > 0{,}5) = 1 - \mathbb{P}(|x| \leq 0{,}5)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5)$$

$$\mathbb{P}(|x| > 0{,}5) = 1 - \big(F(0{,}5) - F(-0{,}5)\big)$$

$$\mathbb{P}(|x| > 0{,}5) = 1 - \left[\left(-\frac{(0{,}5)^2}{2} + 0{,}5 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{(-0{,}5)^2}{2} - 0{,}5 + 0{,}5\right)\right]$$

$$\mathbb{P}(|x| > 0{,}5) = 1 - (0{,}875 - 0{,}125) = 0{,}25$$

$$\mathbb{P}(|x| > 0{,}5) = 0{,}25$$

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs entières telle que pour tout $n \geq 1$, X_n suit la loi :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\alpha}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{k-1}, \quad k \geq 1$$

où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n > \alpha, \forall n \geq 1$. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

(1) Montrer que pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(Y_n \leq t) = \mathbb{P}(Y_n \leq [nt])$ où $[u]$ désigne la partie entière de u.

Soit $t > 0$. $\mathbb{P}(Y_n \leq t) = \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq t\right) = \mathbb{P}(X_n \leq nt)$

$[nt]$ est le plus grand nombre entier vérifiant, $[nt] \leq nt < [nt] + 1$. Alors X_n est une variable entière.

(2) Montrer que :

$$\mathbb{P}(X_n \leq [nt]) = \sum_{k=1}^{[nt]} \frac{\alpha}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{k-1} = 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{[nt]}$$

Soit $t > 0$. $\forall n \geq 1$, on a :

Scanné avec CamScanner

$$\mathbb{P}(X_n \leq [nt]) = \sum_{k=1}^{[nt]} \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{[nt]} \frac{\alpha}{n}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{k-1}$$

$$\mathbb{P}(X_n \leq [nt]) = \sum_{k=1}^{[nt]} \frac{\alpha}{n}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{k-1}$$

$$\mathbb{P}(X_n \leq [nt]) = \frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{[nt]}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{k-1} = \frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{[nt]} q^{k-1} \text{ avec } q = 1-\frac{\alpha}{n}$$

On a : $q \in]0,1[$

$$\mathbb{P}(X_n \leq [nt]) = \frac{\alpha}{n}\left(\frac{1-q^{[nt]-1+1}}{1-q}\right) = \frac{\alpha}{n}\left(\frac{1-q^{[nt]}}{1-q}\right) = \frac{\alpha}{n}\left(\frac{1-\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt]}}{1-\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)}\right)$$

$$\mathbb{P}(X_n \leq [nt]) = \frac{\alpha}{n}\left(\frac{1}{\frac{\alpha}{n}}\left(1-\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt]}\right)\right) = 1-\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt]}$$

(3) Soit F_n la fonction de répartition de X_n

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_n(t) = \mathbb{P}(Y_n \leq t) = \begin{cases} 1-\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt]} & \text{si } t > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt]}$

On a :

$$\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt]} = e^{[nt]\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e^{-\frac{\alpha[nt]}{n}}$$

On a : $nt-1 < [nt] \leq nt \Rightarrow t-\frac{1}{n} < \frac{[nt]}{n} \leq t$

$$\Rightarrow \alpha\left(t-\frac{1}{n}\right) < \frac{\alpha[nt]}{n} \leq \alpha t \quad \text{car } \alpha > 0$$

$$\Rightarrow -\alpha t \leq -\frac{\alpha[nt]}{n} < -\alpha\left(t-\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-\alpha t} \leq e^{-\frac{\alpha[nt]}{n}} < e^{-\alpha\left(t-\frac{1}{n}\right)}$$

car la fonction exponentielle est croissante.

Par passage à la limite, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\alpha t} \leq \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\alpha[nt]}{n}} \leq \lim_{n\to+\infty} e^{-\alpha\left(t-\frac{1}{n}\right)} = e^{-\alpha t}$$

Scanné avec CamScanner

$$e^{-\alpha t} \leq \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\alpha[nt]}{n}} \leq e^{-\alpha t}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\alpha[nt]}{n}} = e^{-\alpha t}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} F_n(t) = 1 - e^{-\alpha t} = F(t)$ qui est fonction répartie d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre α.

$$Y_n \overset{loi}{\rightarrow} X$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFHB-UFRMI
UE : Probabilité Statistique 2 session 1 2015-2016
ECUE : Statistique inférentielle
Durée : 1 heure 45 mn

Questions de cours. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_\theta$.

1. Donner la définition d'un échantillon de X.
2. Qu'appelle-t-on estimateur de θ ?
3. Quelles peuvent être ses propriétés ?

Exercice 1 : On souhaite estimer la proportion p de personnes au chômage à Yopougon. Pour cela, on prévoit de sonder n personnes. On note K la variable aléatoire donnant le nombre de personnes au chômage parmi les n sondées ($n \geq 100$).

1. En expliquant votre raisonnement, déterminer la loi de K.
2. En déduire que la proportion F de personnes au chômage parmi les n sondées suit approximativement une loi normale dont on précisera les paramètres.
3. Sur $n = 121$ personnes sondées, 25 déclarent être au chômage. Donner un intervalle de confiance pour p au niveau $1 - \alpha = 95\%$
4. Combien de personnes faudrait-il interroger afin d'obtenir un intervalle à 95% de longueur inférieure à 10% ?

Exercice 2 : Une entreprise souhaite estimer la durée moyenne μ du trajet "domicile-travail" de ses salariés. Pour cela, elle prévoit d'effectuer une enquête sur une partie de ses salariés. Dans la suite, on note X la durée (en minutes) du trajet, et on suppose que X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Avant d'effectuer l'enquête, on souhaite déterminer le nombre de personnes à interroger. On note n la taille de l'échantillon (pour le moment inconnue).

1. Déterminer un estimateur de μ par la méthode du maximum de vraisemblance. Préciser ses propriétés.
2. Donner un intervalle confiance pour μ à 95%, en supposant σ^2 connue.
3. Quelle doit être, en fonction de σ, la taille de l'échantillon pour pouvoir estimer à 5 min près (avec un niveau de confiance de 95%) ?
5. En supposant $\sigma = 15$ min, donner la taille de l'échantillon.

L'enquête est finalement effectuée auprès de 40 salariés de l'entreprise choisis au hasard. Elle donne les résultats suivants :

$$\overline{X}_n = 25.95 \qquad s = 13.99$$

où s est la racine carrée de la variance empirique modifiée.
Un expert affirme que la durée moyenne nationale des trajets "domicile-travail" est de 29 minutes. On souhaite déterminer si la durée moyenne des trajets des salariés de l'entreprise est significativement plus petite que la moyenne nationale.

6. Poser les hypothèses du test.
7. Effectuer le test en prenant un risque de $\alpha = 5\%$.
8. Quel est la conclusion ? Quel est le risque de deuxième espèce ?
9. Calculer la p-value associée au test. Conclusion ?

Scanné avec CamScanner

UFHB-UFRMI
UE : Probabilité Statistique 2
ECUE : Statistique inférentielle session 1 2016-2017
Durée : 1 heure 20

Un fournisseur d'accès à internet veut mettre en place un point local d'accès qui va desservir les abonnés de la Riviera 2. On suppose qu'à un instant donné, chaque abonné a une probabilité p inconnu d'être connecté. D'autre part, leurs connections sont supposées indépendantes les unes des autres. On prévoit de desservir n abonnés.
Pour $1 \leq i \leq n$, on considère la variable aléatoire réelle définie par

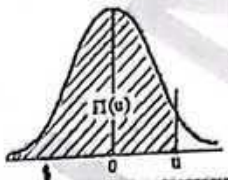
$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le ième abonné est connecté} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Proposer un modèle statistique associé à cette expérience (population, loi, échantillon).
2. **Estimation Ponctuelle**
   (a) Déterminer un estimateur $\hat{p}_n$ de p par la méthode du maximum de vraisemblance.
   (b) $\hat{p}_n$ est-il un estimateur efficace ? Justifier votre réponse.
   (c) $\hat{p}_n$ est-il un estimateur convergent ? Justifier votre réponse.
3. **Estimation par intervalle de confiance**
   On pose $F_n^* = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
   (a) Rappeler le Théorème central limite.
   (b) Justifier clairement que F_n^* est une fonction asymptotiquement pivot pour p.
   (c) Déterminer $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(-t \leq F_n^* \leq t) = 0.95$.
   (d) On désire un intervalle de confiance pour p de niveau asymptotique 0.95 avec une incertitude de $\pm 3\%$. Quel est le nombre minimal d'abonnés.
4. **Test d'hypothèses** Sur 5000 abonnés, 998 sont connectés. On désire tester au niveau 0.05 l'hypothèse $H_0 : p = 0.02$ contre l'alternative $H_1 : p < 0.02$.
   (a) Donner la région critique du test.
   (b) Quelle est la décision ? Interpréter.
   (c) Calculer la puissance du test.

Scanné avec CamScanner

Fonction de répartition Π de la loi normale centrée réduite.

Probabilité de trouver une valeur inférieure à u.



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91824	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.95407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99306	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965

Scanné avec CamScanner

UFHB/UFRMI : Licence 2 2017-2018
Statistique 2
Session 1
Durée : 1 heure

Une entreprise souhaite estimer la durée moyenne μ du trajet "domicile-travail" de ses salariés. Pour cela, elle prévoit d'effectuer une enquête sur une partie de ses salariés. Dans la suite, on note X la durée (en minutes) du trajet, et on suppose que X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Avant d'effectuer l'enquête, on souhaite déterminer le nombre de personnes à interroger. On note n la taille (pour le moment inconnue) de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Déterminer un estimateur $\widehat{\mu}_n$ de μ par la méthode du maximum de vraisemblance.
2. Montrer que l'estimateur $\widehat{\mu}_n$ est convergent.
3. Montrer que l'estimateur $\widehat{\mu}_n$ est efficace.
4. Donner un intervalle confiance pour μ à 95%, en supposant σ^2 connue.
5. Quelle doit être, en fonction de σ, la taille de l'échantillon pour pouvoir estimer à 5 min près (avec un niveau de confiance de 95%) ? En supposant $\sigma = 15$ min, donner la taille de l'échantillon.
6. L'enquête est finalement effectuée auprès de 40 salariés de l'entreprise choisis au hasard. Elle donne les résultats suivants :

$$\overline{X}_n = 25.95 \qquad s = 13.99$$

où s est la racine carrée de la variance empirique modifiée.
Un expert affirme que la durée moyenne nationale des trajets "domicile-travail" est de 29 minutes. On souhaite déterminer si la durée moyenne des trajets des salariés de l'entreprise est significativement plus petite que la moyenne nationale.

(a) Poser les hypothèses du test.
(b) Effectuer le test en prenant un risque de $\alpha = 5\%$.
(c) Quel est la conclusion ?
(d) Quel est le risque de deuxième espèce ?

Remarque 0.1. Lorsque $n \to +\infty$, on approxime la loi de Student $T(n)$ par la loi normale centrée réduite. L'approximation normale est généralement satisfaisante lorsque le nombre degré de liberté $n > 30$.

Scanné avec CamScanner

UFHB/UFRMI : Licence 2 2017-2018
Statistique 2
Session 2
Durée : 1 heure

Suite à des plaintes de consommateurs, un constructeur automobile souhaite étudier statistiquement le taux de panne grave dans les 2 ans suivant l'achat d'un de ses modèles de véhicule. On note p la proportion d'acheteurs de ce modèle de véhicule ayant subi une panne grave dans les 2 ans suivant l'achat. Pour étudier cette proportion, le constructeur prévoit de contacter n acheteurs.

1. Définir le modèle statistique (variable, paramètre, échantillon) associé au problème.
2. Déteminer un estimateur de p par la methode du maximum de vraisemblance et préciser ses propriétés.
3. **Détermination de la taille de l'échantillon.**
   (a) Donner un intervalle de confiance (aléatoire) pour p à 95%.
   (b) En déduire la taille n de l'échantillon nécessaire pour obtenir une estimation de p à 3% près (avec un niveau de confiance de 95%).
4. **Applications numériques.** Le constructeur effectue son enquête sur 1000 acheteurs. Les résultats de l'enquête se trouvent dans le tableau ci-dessous :

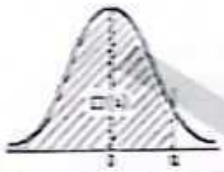
Réponse	Effectif
Une panne grave est survenue dans les deux ans	131
Aucune panne grave dans les deux ans	769
Pas de réponse (véhicule revendu avant 2 ans	100

   (a) Donner une estimation de p, proportion de véhicule ayant eu une panne grave.
   (b) Donner un intervalle de confiance pour p à 95%
5. **Test sur le taux de panne.** Le constructeur considère qu'un taux de panne grave dans les deux ans inférieur ou égal à 10% est acceptable. Que peut-il conclure des résultats de l'enquête donnés dans la partie précédente ?
   (a) Enoncer clairement, et en les justifiant, les hypothèses du test.
   (b) Quelle est la variable de décision ? Quelle est la région critique en prenant un risque de 5% ?
   (c) Quelle est votre conclusion ?

Scanné avec CamScanner

Fonction de répartition Π de la loi normale centrée réduite.

Probabilité de trouver une valeur inférieure à u.



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

UFHB,UFRMI, Licence 2
UE: Statistique inférentielle

Année Universitaire
2018/2019

ECUE: Statistique inférentielle

Durée: 1 h 20 mn

Exercice 1 On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une loi de densité

$$f(x,\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} x^2 e^{-x^2/\theta}$$

où $\theta > 0$.

(1) Vérifier que f est une densité de probabilité.

(2) Déterminer un estimateur $\hat{\theta}_n$ du paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

(3) Examiner les qualités suivantes de $\hat{\theta}_n$: biais, efficacité, convergence.

Exercice 2 QCM

Dans cet exercice, une bonne réponse est notée 1 point, une mauvaise réponse enlève 0.5 point.

(1) Dans un problème de test de l'hypothèse nulle H_0 contre l'hypothèse alternative H_1, le risque de deuxième espèce est

A la probabilité de rejeter H_0 alors que H_1 est vraie

B la probabilité d'accepter H_0 alors que H_0 est fausse.

C la probabilité de rejeter H_1 alors que H_1 est vraie.

D Aucune des réponses n'est correcte.

(2) On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu de la loi de Bernouilli $\mathcal{B}(1,p)$. Le risque quadratique de la moyenne empirique est

A $\frac{p(1-p)}{n}$

B $\frac{p(1-p)}{n^2}$

C $\frac{p}{n}$

D $\frac{p^2(1-p)}{n^2}$

(3) On interroge 100 personnes salariées dans une entreprise et on note $X_1, \ldots, X_{100}$ les salaires supposés issus de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de moyenne μ et de variance σ^2, paramètres inconnus. Le salire moyen pour ces 100 personnes est noté $\overline{X}$. Un intervalle de confiance pour μ au niveau de confiance $1-\alpha$ est

A $\left[\overline{X} - t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ où $t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

B Aucune des autres réponses n'est correcte.

C $\left[\overline{X} - t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right]$ où $t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

D $\left[\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ où $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite.

(4) Qu'est ce que le risque quadratique d'un estimateur $\widehat{\theta}$ d'un paramètre θ?

A La somme de la variance de $\widehat{\theta}$ au carré et de son biais au carré.

Scanné avec CamScanner

B La somme de l'écart-type de $\widehat{\theta}$ au carré et de son biais au carré

C La somme de la variance de $\widehat{\theta}$ et de son biais

D La somme de l'écart-type de $\widehat{\theta}$ et de son biais.

(5) Si un estimateur $\widehat{\theta}$ est sans biais pour estimer un paramètre θ et que sa variance tend vers 0 quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini, on peut dire que:

A L'estimateur $\widehat{\theta}$ n'est pas un estimateur convergent de θ.

B Le paramètre θ converge en loi vers $\widehat{\theta}$.

C L'estimateur $\widehat{\theta}$ converge en probabilité vers θ.

D Aucune des autres réponses n'est correcte.

(6) On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où la moyenne m et la variance sont inconnues. La borne de Cramer-Rao pour l'estimation sans biais de la moyenne m est:

A $\frac{n}{S_n^2}$ où $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$.

B $\frac{n}{\sigma^2}$

C Aucune des réponses n'est correcte.

D $\frac{\sigma^2}{n}$

(7) On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où la moyenne m et la variance sont inconnues. Un intervalle de confiance bilatéral de niveau $1-2\alpha$ pour la moyenne m est:

A $\left[\overline{X} - t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$ où $t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

B $\left[\overline{X} - t^*_{1-\alpha}\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t^*_{1-\alpha}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$ où $t^*_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

C Aucune des réponses n'est correcte.

D $\left[\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ où $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite.

(8) On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où la moyenne m et la variance sont inconnues. On considère le problème de test de $H_0 : m \leq m_0$ contre $H_1 : m > m_0$ au niveau α. La région critique est:

A $]-\infty, t^*_{1-\alpha}[$ où $t^*_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

B $]-\infty, -t^*_{\alpha}[$ où t^*_{α} est le quantile d'ordre α de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

C Aucune des réponses n'est correcte.

D $]t^*_{1-\alpha}, +\infty[$ où $t^*_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté

Exercice 3

(1) Définir et interpréter la borne de Cramer-Rao.

(2) Définir et interpréter un estimateur efficace.

(3) Définir et interpréter un estimateur asymptotiquemnt normal.

Scanné avec CamScanner

UFHB,UFRMI, Licence 2
UE: Statistique inférentielle

Année Universitaire
2018/2019

ECUE: Statistique inférentielle

Durée: 1 h 20 mn

Exercice 1 On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$ avec $\theta > 0$.

(1) Déterminer un estimateur $\hat{\theta}_n$ du paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

(2) Examiner les qualités suivantes de $\hat{\theta}_n$: biais, efficacité, convergence.

Exercice 2 QCM

Dans cet exercice, une bonne réponse est notée 1 point, une mauvaise réponse enlève 0.5 point.

(1) Dans un problème de test de l'hypothèse nulle H_0 contre l'hypothèse alternative H_1, le risque de première espèce est

A la probabilité de rejeter H_1 alors que H_0 est vraie

B la probabilité d'accepter H_1 alors que H_1 est fausse.

C la probabilité de rejeter H_0 alors que H_0 est vraie.

D Aucune des réponses n'est correcte.

(2) On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Le risque quadratique de la moyenne empirique est

A $\frac{\sigma^2}{n}$,

B $\frac{\sigma^2}{n^2}$

C $\frac{\sigma^2}{n}$

D $\frac{n}{\sigma^2}$,

(3) On interroge 100 personnes salariées dans une entreprise et on note $X_1, \ldots, X_{100}$ les salaires supposés issus de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de moyenne μ et de variance σ^2, paramètres inconnus. Le salaire moyen pour ces 100 personnes est noté $\overline{X}$. Un intervalle de confiance pour μ au niveau de confiance $1-\alpha$ est

A $\left[\overline{X} - t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{10}, \overline{X} + t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{10}\right]$ où $t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

B Aucune des autres réponses n'est correcte.

C $\left[\overline{X} - t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma^2}{10}, \overline{X} + t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma^2}{10}\right]$ où $t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

D $\left[\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{10}, \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{10}\right]$ où $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite.

(4) Qu'est ce que le risque quadratique d'un estimateur $\widehat{\theta}$ d'un paramètre θ?

A La somme de la variance de $\widehat{\theta}$ au carré et de son biais au carré.

B La somme de l'écart-type de $\widehat{\theta}$ au carré et de son biais au carré

C La somme de la variance de $\widehat{\theta}$ et de son biais

D La somme de l'écart-type de $\widehat{\theta}$ et de son biais.

Scanné avec CamScanner

(5) Si un estimateur $\widehat{\theta}$ est sans biais pour estimer un paramètre θ et que sa variance tend vers 0 quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini, on peut dire que:

A L'estimateur $\widehat{\theta}$ n'est pas un estimateur convergent de θ.

B Le paramètre θ converge en loi vers $\widehat{\theta}$.

C L'estimateur $\widehat{\theta}$ converge en probabilité vers θ.

D Aucune des autres réponses n'est correcte.

(6) On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où la moyenne m et la variance sont inconnues. La borne de Cramer-Rao pour l'estimation sans biais de la moyenne m est:

A $\frac{n}{S_n^2}$ où $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$.

B $\frac{n}{\sigma^2}$

C Aucune des réponses n'est correcte.

D $\frac{\sigma^2}{n}$

(7) On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où la moyenne m et la variance sont inconnues. Un intervalle de confiance bilatéral de niveau $1-2\alpha$ pour la moyenne m est:

A $\left[\overline{X} - t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$ où $t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

B $\left[\overline{X} - t^*_{1-\alpha}\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t^*_{1-\alpha}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$ où $t^*_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

C Aucune des réponses n'est correcte.

D $\left[\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ où $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite.

(8) On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où la moyenne m et la variance sont inconnues. On considère le problème de test de $H_0 : m \geq m_0$ contre $H_1 : m < m_0$ au niveau α. La région critique est:

A $]-\infty, t^*_\alpha[$ où t^*_α est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

B $]-\infty, -t^*_\alpha[$ où t^*_α est le quantile d'ordre α de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

C Aucune des réponses n'est correcte.

D $]t^*_{1-\alpha}, +\infty[$ où $t^*_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté

Exercice 3

(1) Qu'est ce qu'un estimateur efficace?

(2) Qu'est ce qu'un estimateur convergent?

(3) Qu'est ce qu'un estimateur asymptotiquement normal?

Scanné avec CamScanner

Année Universitaire 2019/2020

Licence 2

Examen: Statistique inférentielle

Durée: 1 heures 20

Documents non autorisés

Exercice 1. On dipsose d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon issu d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\lambda}_n$ de λ.
2. Montrer $\widehat{\lambda}_n$ est une statistique exhaustive.
3. Montrer $\widehat{\lambda}_n$ est efficace.
4. Montrer $\widehat{\lambda}_n$ est un estimateur convergent de λ.
5. Montrer $\widehat{\lambda}_n$ est un estimateur asymptotiquement normal de λ.

6. On désire estimer $e^{-\lambda}$.
   (a) Interprèter comme la probabilité d'un évènement.
   (b) Montrer que $e^{-\widehat{\lambda}_n}$ est un estimateur convergent de $e^{-\lambda}$.
   (c) Montrer que $e^{-\widehat{\lambda}_n}$ est un estimateur asymptotiquement normal de $e^{-\lambda}$.

Exercice 2. On a observé un échantillon de 200 étudiants adolescents de 15 ans, dans lequel 40 présentent un surpoids.

1. Donner un intervalle de confiance pour la proportion d'adolescents présentant un surpoids au niveau 0.95
2. Combien d'adolescents de 15 ans devrait-on réaliser pour connaître la proportion d'adolescents de 15 ans qui présentent un surpoids avec une précision de plus ou moins 1%, au niveau 0.95

Exercice 3. Le staff meédical estime que plus de 25% des employés de l'entreprise ont un taux de cholestérol supérieur à 260 cg. On tire un échantillon aléatoire simple de 200 employés. On constate que 60 d'entre eux ont un taux de cholestérol supérieur à 260 cg. Au vu de cet échantillon, peut-on conclure, au seuil de signification 5%, que le staff médical a raison.

EXTRAIT TABLE DE LA LOI NORMALE REDUITE

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	08621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	08830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	090147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169

Scanné avec CamScanner

Année Universitaire
2020/2021
UFHB-UFRMI:Licence 2
Examen: Statistique inférentielle
Durée: 1 heure 30

Exercice 1 **Questions de cours**

(1) Donner la définition d,un échantillon de taille n.
(2) Qu'est ce qu'un modèle identifiable ?
(3) Donner et expliquer le théorème de factorisation.
(4) Donner les deux formules de l'information de Fisher. Que représente l'information de Fisher ?
(5) Qu'appelle t-on borne de Cramer-Rao pour l'estimation sans biais d'un paramètre inconnu θ ?
(6) Qu'est ce qu'un estimateur efficace ?
(7) Qu'appelle t-on estimateur convergeant ?
(8) Un individu se présente à un laboratoire pour un test de COVID19. Il subit le test suivant: H_0 : le test en positif contre H_1 : le test est négatif. Donner les risques de première et de deuxième espèce et leurs conséquences respectives.
(9) Expliquer la méthode du maximum de vraisemblance.
(10) Quelles sont les différentes étapes d'un test d'hypothèses ?

Exercice 2 On souhaite estimer la proposition p de personnes au chômage dans un quartier. Pour cela, on prévoit de sonder n personnes. On note K la variable aléatoire donnant le nombre de personnes au chômage parmi les n sondées ($n \geq 100$)

(1) En expliquant votre raisonnement, déterminer la loi de K.
(2) Sur $n = 121$ personnes sondées, 25 déclarent être au chômage. Donner un intervalle de confiance pour p au niveau 95%.
(3) Combien de personnes faudrait-il interroger afin d'obtenir un intervalle à 95% de longueur inférieure à 10% ?

Exercice 3 On considère un échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ issu d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, 2)$.
(1) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\mu}$ de μ.
(2) Déterminer les propriétés non asymptotiques et asymptotiques de $\hat{\mu}$.
(3) On considère le test d'hypothèse suivant: $H_0 : \mu = 20$ contre $H_1 : \mu < 20$. Un échantillon de taille $n = 50$ fournit une moyenne de 19.4
   (a) Quelle est la statistique de décision ? Quelle est sa loi sous H_0.
   (b) Au niveau $\alpha \in (0, 1)$, donner la région critique.
   (c) Si $\alpha = 0.05$, quelle est votre conclusion ?

VALIDER LMD

Scanné avec CamScanner

- Le quantile d'odre 0.975 est 1.96
- Le quantile d'ordre 0.95 est 1.645
- Le quantile d'ordre 0.99 est 2.33

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Année Universitaire
2020/2021
Licence 2
Statistique inférentielle
Durée: 1 heure 30

Exercice 1

1. Donner les deux formules de l'information de Fisher. Que représente l'information de Fisher ?
2. Qu'appelle-t-on risque quadratique d'un estimateur $\hat{\theta}$?
3. Qu'appelle-t-on borne de Cramer-Rao ?
4. Qu'appelle-t-on puissance d'un test? Comment compare-t-on deux tests?
5. Quelles sont les différentes étapes d'un test d'hypothèses ?

Exercice 2. On considère un échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ issu de la loi uniforme sur $[0, \theta]$ avec $\theta > 0$.

1. Déterminer un estimateur $\hat{\theta_n}$ par la méthode du maximum de vraisemblance.
2. $\hat{\theta_n}$ est-il sans biais? $\hat{\theta_n}$ est-il sans efficace?
3. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$. En déduire un estimateur $\hat{\theta}$ de θ par la méthode des moments.
4. Déterminer les propriétés de $\hat{\theta}$ par méthode des moments.

Exercice 3. on a pesé 10 palettes de briques de la même fabrication et on a obtenu les résultats suivants (en kg): 759, 750, 755, 756, 761, 765, 770, 752, 760, 767. On suppose que les résultats ci-dessus sont issus d'une loi normale de moyenne m et de variance σ^2 inconnues.

1. Déterminer l'intervalle de confiance de m de niveau 0.95
2. Au niveau $\alpha = 0.05$, tester $H_0 : \theta = 760$ contre $H_1 : \theta < 760$.

le quantile d'ordre 0.975 de la loi de Student à 9 degrés de liberté est 2.26
le quantile d'ordre 0.95 de la loi de Student à 9 degrés de liberté est 1.83

Bonne chance
Eviter de tricher car la reputation est préférable à de grandes richesses

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

UFHB-UFRMI
UE : Probabilité Statistique 2
ECUE : Statistique inférentielle
Durée : 1 heure 45 mn

Questions de cours. (4 points)

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_\theta$.

1. Donner la définition d'un échantillon de X.
   Réponse : *On appelle échantillon de X tout n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X* **1 point**
2. Qu'appelle-t-on estimateur de θ ?
   Réponse : *On appelle estimateur toute fonction ne dépendant que $(X_1, \ldots, X_n)$ à valeurs dans un domaine acceptable pour θ* **1 point**
3. Quelles peuvent être ses propriétés ?
   Réponse : *Soit $\widehat{\theta}_n$ un estimateur de θ.*
   - *Efficacité : $\widehat{\theta}_n$ est sans biais et sa variance est égale à la borne de Cramer-Rao.* **0.5 point**
   - *Consistance : $\widehat{\theta}_n$ converge en probabilité vers θ : $\widehat{\theta}_n \longrightarrow \theta$* **0.5 point.**
   - *Normalité asymptotique : $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_\theta^2)$.* **0.5 point**
   - *Efficacité asymptotique : $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{I(\theta)}\right)$* **0.5 point.**

Exercice 1 : (8 points)

On souhaite estimer la proportion p de personnes au chômage à Yopougon. Pour cela, on prévoit de sonder n personnes. On note K la variable aléatoire donnant le nombre de personnes au chômage parmi les n sondées ($n \geq 100$).

1. En expliquant votre raisonnement, déterminer la loi de K.
   Réponse : *On note X_i la variable aléatoire définie par :*

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la ième sondée est au chômage} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$ **1point**

   Les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes. De plus, pour tout $i = 1, \ldots, n$, X_i suit la loi de Bernouilli $\mathcal{B}(1, p)$ où p est la proportion de chômeurs dans la commune de Yopougon. **1point.**
   Ainsi,

$$K = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{suit une loi binomiale de paramètre } \mathcal{B}(n, p)$$ **1point**

2. En déduire que la proportion F de personnes au chômage parmi les n sondées suit approximativement une loi normale dont on précisera les paramètres.

Scanné avec CamScanner

Réponse : *La proportion de F de chômeurs parmi les n sondées est donnée par :*

$$F = \frac{K}{n}$$

D'après le Théorème Central Limite, on a :

$$\frac{\sqrt{n}(F-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1). \qquad \textbf{1point}$$

Par suite, F suit approximativement une loi normale de moyenne p et de variance $\frac{p(1-p)}{n}$

3. Sur $n = 121$ personnes sondées, 25 déclarent être au chômage. Donner un intervalle de confiance pour p au niveau $1-\alpha = 95\%$

Réponse : *la taille de l'échantillon étant suffisamment grande $n > 30$, l'intervalle de confiance pour p de niveau $1-\alpha = 0.95$ est donné par :*

$$\left[F - q_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{F(1-F)}{n}}, F + q_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{F(1-F)}{n}}\right]$$

où $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. **1point**
Nous avons $q_{1-\frac{\alpha}{2}} = q_{0.975} = 1.96$ et l'intervalle de confiance de niveau 0.95% est :

$$\left[0.14, 0.28\right] \qquad \textbf{1point}$$

4. Combien de personnes faudrait-il interroger afin d'obtenir un intervalle à 95% de longueur inférieure à 10% ?

Réponse : *La longueur de l'intervalle*

$$\left[F - q_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, F + q_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

est $2q_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$. Comme $\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}$ pour tout $p \in]0,1[$, nous allons choisir n tel que :

$$2q_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0.1 \Rightarrow n \geq \left(\frac{1.96}{0.1}\right)^2 = 384.16. \qquad \textbf{1point}$$

Il faudra interroger au moins 385 personnes. **1point**

Exercice 2 : (8 points)

Une entreprise souhaite estimer la durée moyenne μ du trajet "domicile-travail" de ses salariés. Pour cela, elle prévoit d'effectuer une enquête sur une partie de ses salariés. Dans la suite, on note X la durée (en minutes) du trajet, et on suppose que X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Avant d'effectuer l'enquête, on souhaite déterminer le nombre de personnes à interroger. On note n la taille de l'échantillon (pour le moment inconnue).

Scanné avec CamScanner

1. Déterminer un estimateur de μ par la méthode du maximum de vraisemblance. Préciser ses propriétés.

Réponse : *La vraisemblance du modèle est :*

$$L_n(x_1,\dots,x_n,\mu) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\mu)$$
$$= \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\Big)^n \exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\Big) \qquad \textbf{(0.5 point)}$$

La log-vraisemblance du modèle est :

$$\ln(L_n(x_1,\dots,x_n,\mu)) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \qquad \textbf{(0.5 point)}$$

Condition du 1er ordre :

$$\frac{\partial \ln(L_n(x_1,\dots,x_n,\mu))}{\partial\mu} = 0 \Rightarrow \mu = \overline{X}_n \qquad \textbf{(0.5 point)}$$

Condition du 2ième ordre :

$$\frac{\partial^2 \ln(L_n(x_1,\dots,x_n,\mu))}{\partial\mu^2} = -\frac{-n}{\sigma^2} < 0 \qquad \textbf{(0.5 point)}$$

Par suite, l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ est : $\widehat{\mu}_n = \overline{X}_n$.

- *D'après la loi des grands nombres, $\widehat{\mu}_n$ est convergent.* **(0.5 point)**
- *D'après le théorème de la limite central, $\widehat{\mu}_n$ est asymptotiquement normal.* **(0.5 point)**
- *$\widehat{\mu}_n$ est efficace : $\mathbb{E}(\widehat{\mu}_n) = \mu$ et $var(\widehat{\mu}_n) = \frac{\sigma^2}{n} = BCR(\mu)$* **(0.5 point)**

2. Donner un intervalle confiance pour μ à 95%, en supposant σ^2 connue.

Réponse : *L'intervalle de confiance de niveau 95% pour μ quand σ^2 est connue est :*

$$\Big[\widehat{\mu}_n - q_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \widehat{\mu}_n - q_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big]$$

où $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ **(0.5 point)**

3. Quelle doit être, en fonction de σ, la taille de l'échantillon pour pouvoir estimer à 5 min près (avec un niveau de confiance de 95%) ?

Réponse : *Pour déterminer n, on pose :*

$$q_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 5 \Longrightarrow n \ge \Big(\frac{1.96\sigma}{5}\Big)^2 \qquad \textbf{(0.5 point)}$$

Par suite :

$$n = \lfloor\Big(\frac{1.96\sigma}{5}\Big)^2\rfloor + 1. \qquad \textbf{(0.5 point)}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

5. En supposant $\sigma = 15$ min, donner la taille de l'échantillon.
Réponse :

$$\left(\frac{1.96\sigma}{5}\right)^2 = 34.57$$

Par suite $n = 35$ ***(0.5 point).***

L'enquête est finalement effectuée auprès de 40 salariés de l'entreprise choisis au hasard. Elle donne les résultats suivants :

$$\overline{X}_n = 25.95 \qquad s = 13.99$$

où s est la racine carrée de la variance empirique modifiée.
Un expert affirme que la durée moyenne nationale des trajets "domicile-travail" est de 29 minutes. On souhaite déterminer si la durée moyenne des trajets des salariés de l'entreprise est significativement plus petite que la moyenne nationale.

6. Poser les hypothèses du test.
Réponse :

$$H_0 : \mu = 29 \qquad H_1 : \mu < 29. \qquad \textbf{(0.5 point)}$$

7. Effectuer le test en prenant un risque de $\alpha = 5\%$.
Réponse : *La région critique est :*

$$W = \left\{ \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - 29)}{S} < K \right\} \qquad \textbf{(0.5 point)}$$

où S est la variance empirique modifiée et K est le quantile d'ordre 0.05 de la loi de Student à 39 degrés de liberté : $K = -1645$

8. Quel est la conclusion ? Quel est le risque de deuxième espèce ?
Réponse :

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n - 29)}{s} = -1.47 > -1.645$$

La durée moyenne des trajets des salariés de l'entreprise n'est pas significativement plus petite que la moyenne nationale. ***(0.5 point)***

9. Calculer la p-value associée au test. Conclusion ?
Réponse : *La p-value est :*

$$p-value = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - 29)}{S} < -1.47\right) = F(-1.47) = 0.07. \qquad \textbf{(0.5 point)}$$

Comme $0.05 < 0.07$, *la p-value confirme la conclusion à la question précédente.* ***(0.5 poi***

La deuxième question de 8. a été supprimée.

Scanné avec CamScanner

UFHB/UFRMI : Licence 2
Statistique 2
Session 2
Durée : 1 heure

Suite à des plaintes de consommateurs, un constructeur automobile souhaite étudier statistiquement le taux de panne grave dans les 2 ans suivant l'achat d'un de ses modèles de véhicule. On note p la proportion d'acheteurs de ce modèle de véhicule ayant subi une panne grave dans les 2 ans suivant l'achat. Pour étudier cette proportion, le constructeur prévoit de contacter n acheteurs.

1. Définir le modèle statistique (variable, paramètre, échantillon) associé au problème.
Réponse : Notons

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si une panne est survenue dans les 2 ans suivant l'achat du } i\text{ème véhicule} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \textbf{1 point}$$

- X_i suit une loi de Bernouilli $\mathcal{B}(1,p)$ où $p \in]0,1[$. **0.5 point**
- On dispose d'un échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$ issu de la loi de Bernouilli $\mathcal{B}(1,p)$. **0.5 point**

2. Déteminer un estimateur de p par la methode du maximum de vraisemblance et préciser ses propriétés.
Réponse : La vraisemblance de l'échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$ au point p est :

$$\begin{aligned} L(p,X_1,\ldots,X_n) &= \prod_{i=1}^{n} p^{X_i}(1-p)^{1-X_i}1_{\{0,1\}}(X_i) \\ &= (1-p)^n\Big(\frac{p}{1-p}\Big)^{\sum_{i=1}^n X_i}1_{\{0,1\}^n}(X_1,\ldots,X_n). \end{aligned} \quad \textbf{1 point}$$

Pour tout $(X_1,\ldots,X_n) \in \{0,1\}^n$, la log-vraisemblance est

$$\ln\Big(L(p,X_1,\ldots,X_n)\Big) = n\ln(1-p) + \ln\Big(\frac{p}{1-p}\Big)\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Condition du 1er ordre :

$$\frac{\partial \ln\Big(L(p,X_1,\ldots,X_n)\Big)}{\partial p} = -\frac{n}{1-p} + \frac{\sum_{i=1}^n Xi}{p(1-p)} = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}_n. \quad \textbf{1 point}$$

Condition du 2nd ordre :

$$\frac{\partial^2 \ln\Big(L(p,X_1,\ldots,X_n)\Big)}{\partial p^2} = -\frac{n}{(1-p)^2} + \frac{2p-1}{p^2(1-p)^2}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Scanné avec CamScanner

Ainsi, nous avons :

$$\left.\frac{\partial^2 \ln\Big(L(p, X_1, \ldots, X_n)\Big)}{\partial p^2}\right|_{p=\overline{X}_n} = -\frac{n}{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)} < 0. \qquad \textbf{1 point}$$

Par suite l'estimateur du maximum est

$$\widehat{p}_n = \overline{X}_n.$$

Les propriétés de $\widehat{p}_n$

- $\widehat{p}_n$ est un estimateur efficace de p. En effet,
  — $\widehat{p}_n$ est un estimateur sans biais de p

$$\mathbb{E}(\widehat{p}_n) = p. \qquad \textbf{0.5 point}$$

  — L'information de Fisher apportée par l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ est :

$$I_n(p) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln\Big(L(p, X_1, \ldots, X_n)\Big)}{\partial p^2}\right) = \frac{n}{p(1-p)}. \qquad \textbf{1 point}$$

  — La borne de Cramer-Rao est :

$$BCR(p) = \frac{1}{I_n(p)} = \frac{p(1-p)}{n}. \qquad \textbf{1 point}$$

  — Nous avons :

$$Var(\overline{X}_n) = \frac{p(1-p)}{n} = BCR(p). \qquad \textbf{1 point}$$

- $\widehat{p}_n$ est un estimateur convergent de p. **1 point**
  On peut le montrer :
  — soit en utilisant la loi des grands nombres

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} p$$

  — soit en remarquant que $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = p$ et $Var(\overline{X}_n) \longrightarrow 0$.
- $\widehat{p}_n$ est un estimateur asymptotiquement normal de p. En effet, d'après le théorème central limite, nous obtenons :

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - p) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1-p)). \qquad \textbf{1 point}$$

3. Détermination de la taille de l'échantillon.

Scanné avec CamScanner

(a) Donner un intervalle de confiance (aléatoire) pour p à 95%.
Réponse : Un intervalle de confiance pour p de niveau 95% est :

$$\left[\overline{X}_n - 1.96\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}, \overline{X}_n + 1.96\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}\right]. \qquad \textbf{1 point}$$

(b) En déduire la taille n de l'échantillon nécessaire pour obtenir une estimation de p à 3% près (avec un niveau de confiance de 95%).
Réponse : La marge d'erreur est

$$ME = 1.96\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}. \qquad \textbf{1 point}$$

Comme pour tout $x \in [0,1]$, $\sqrt{x(1-x)} \leq \frac{1}{2}$ alors nous avons :

$$ME = 1.96\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}} \leq 1.96 \times \frac{1}{2\sqrt{n}}. \qquad \textbf{0.5 point}$$

Nous allons déteminer n tel que :

$$1.96 \times \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq 0.03 \qquad \textbf{0.5 point}$$

On obtient alors

$$n \geq \left(\frac{1.96}{0.06}\right)^2 = 1067.11 \qquad \textbf{0.5 point}$$

La taille minimale n de l'échantillon nécessaire pour obtenir une estimation de p à 3% près est $n = 1068$ **1 point.**

4. **Applications numériques.** Le constructeur effectue son enquête sur 1000 acheteurs. Les résultats de l'enquête se trouvent dans le tableau ci-dessous :

Réponse	Effectif
Une panne grave est survenue dans les deux ans	131
Aucune panne grave dans les deux ans	769
Pas de réponse (véhicule revendu avant 2 ans)	100

(a) Donner une estimation de p, proportion de véhicules ayant eu une panne grave.
Réponse : La taille de l'échantillon est $n = 1000 - 100 = 900$. Une estimation de p est

$$\overline{x}_{900} = \frac{131}{900} = 0.14. \qquad \textbf{0.5 point}$$

Scanné avec CamScanner

(b) Donner un intervalle de confiance pour p à 95%

Réponse : un intervalle de confiance de niveau 95% est :

$$\left[\overline{x}_{900} - 1.96\sqrt{\frac{\overline{x}_{900}(1-\overline{x}_{900})}{900}}, \overline{x}_{900} + 1.96\sqrt{\frac{\overline{x}_{900}(1-\overline{x}_{900})}{900}}\right] = \left[0.12, 0.16\right]. \quad \textbf{0.5 point}$$

5. **Test sur le taux de panne.** Le constructeur considère qu'un taux de panne grave dans les deux ans inférieur ou égal à 10% est acceptable. Que peut-il conclure des résultats de l'enquête donnés dans la partie précédente ?

(a) Enoncer clairement, et en les justifiant, les hypothèses du test.

Réponse :

- Hypothèse nulle : $H_0 : p \leq 0.1$; le taux de panne acceptable est 0.1 en dessous duquel le construction ne prendra pas de nouvelles dispositions **1 point.**
- Hypothèse alternative : $H_1 : p > 0.1$ (taux de panne inacceptable) **1 point**

(b) Quelle est la variable de décision ? Quelle est la région critique en prenant un risque de 5% ?

Réponse : La variable de décision est

$$T = \frac{\sqrt{900}(\overline{X}_{900} - 0.1)}{\sqrt{0.1 \times 0.9}} = 100(\overline{X}_{900} - 0.1) \quad \textbf{1 point}$$

La région critique au risque de 5% est :

$$W = \left\{100(\overline{X}_{900} - 0.1) > q_{0.95}\right\} = \left\{100(\overline{X}_{900} - 0.1) > 1.64\right\}. \quad \textbf{1 point}$$

où $q_{0.95} = 1.64$ est le quantile d'ordre 0.95 de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

(c) Quelle est votre conclusion ?

Réponse : Nous avons $100(\overline{x}_{900} - 0.1) = 4.55 > 1.64$. Au risque de 5%, le taux de panne est strictement supérieur à 0.1, c'est à dire inacceptable. **1 point**

VALIDUM

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

Correction de l'examen de statistique inférentielle session 1 2018-2019

Exercice 1

$$f(x,\theta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}x^2e^{-\frac{x^2}{\theta}}$$

1) f est une fonction positive et continue.

Posons $A=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\theta)dx$

$A=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}x^2e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$

Posons $U=x, U'=1$ et $V'=xe^{-\frac{x^2}{\theta}}, V=-\frac{\theta}{2}e^{-\frac{x^2}{\theta}}$.

$A=\frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}\left(\left[-\frac{x\theta}{2}e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{\theta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}\left(\left[-\frac{x\theta}{2}e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{\theta}{2}\sqrt{\pi}\theta\right.\right.$

$A=\frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}\times\frac{\theta}{2}\sqrt{\pi\theta}=1\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\theta)dx=1.$

Par conséquent f est une densité de probabilité.

2) Déterminons $\widehat{\theta_n}$ par la méthode du maximum de vraisemblance.

$$L(X_1,\dots,X_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}x_i^2e^{-\frac{x_i^2}{\theta}}$$

$$L(X_1,\dots,X_n,\theta)=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}\right)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^2\,e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

Logarithme de la vraisemblance

$$\ln\left(L(X_1,\dots,X_n,\theta)\right)=\ln\left(\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}\right)^n\right)+\ln\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$\ln\left(L(X_1,\dots,X_n,\theta)\right)=n\ln(2)-nln(\sqrt{\pi}\,\theta^{\frac{3}{2}})+\ln\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$\ln\left(L(X_1,\dots,X_n,\theta)\right)=n\ln(2)-nln(\sqrt{\pi})-nln(\,\theta^{\frac{3}{2}})+\ln\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$\ln\left(L(X_1,\dots,X_n,\theta)\right)=n\ln\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)-\left(\frac{3n}{2}\right)ln(\theta)+\ln\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

Condition du premier ordre

$$\frac{\partial\ln\left(L(X_1,\dots,X_n,\theta)\right)}{\partial\theta}=0\Leftrightarrow-\frac{3n}{2\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$$

$$-\frac{3n}{2\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0\Leftrightarrow\frac{-3n\theta+2\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta^2}=0\Leftrightarrow-3n\theta+2\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0\Leftrightarrow\theta=\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

Condition du second ordre

$$\frac{\partial^2\ln\left(L(X_1,\dots,X_n,\theta)\right)}{\partial\theta^2}=\frac{3n}{2\theta^2}-\frac{2\theta}{\theta^4}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\frac{3n}{2\theta^2}-\frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\frac{3n\theta-4\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta^3}=\frac{3n\theta-6n\theta}{\theta^3}$$

$$\frac{\partial^2\ln\left(L(X_1,\dots,X_n,\theta)\right)}{\partial\theta^2}=\frac{-3n}{2\theta^3}<0.$$ **Par conséquent** $\widehat{\theta_n}=\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$.

3) Le biais

Scanné avec CamScanner

$\mathbb{E}(\widehat{\theta_n}) = \mathbb{E}(\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2) = \frac{2}{3n}\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) = \frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{3}\mathbb{E}(X^2)$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,\theta)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}} x^4 e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 x e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx.$$

Posons $B = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 x e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx.$

Soit $U = x^3, U' = 3x^2$ et $V' = xe^{-\frac{x^2}{\theta}}, V = \left(-\frac{\theta}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{\theta}}$

$$B = \left[\left(-\frac{\theta x^3}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{3\theta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$B = \frac{3\theta}{2} \times \frac{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}{2} A = \frac{3\theta}{2} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}} \times \frac{3\theta}{2} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta^{\frac{3}{2}} = \frac{3\theta}{2}$$

Ainsi $\mathbb{E}(\widehat{\theta_n}) = \frac{2}{3}\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{3}\frac{3\theta}{2} = \theta$

Donc $\widehat{\theta_n}$ est sans biais.

Efficacité de $\widehat{\theta_n}$

$Var(\widehat{\theta_n}) = Var(\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2) = \frac{4}{9n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X^2) = \frac{4}{9n}Var(X^2)$.

$Var(X^2) = \mathbb{E}((X^2)^2) - (\mathbb{E}(X^2))^2$

$$\mathbb{E}(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x,\theta)dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^6 e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx.$$

Posons $C = \int_{-\infty}^{+\infty} x^6 e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x x^5 e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx.$

Soit $U = x^5, U' = 5x^4$ et $V' = xe^{-\frac{x^2}{\theta}}, V = \left(-\frac{\theta}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{\theta}}$

$$C = \left[\left(-\frac{\theta x^5}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{5\theta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx = \frac{5\theta}{2}B = \frac{5\theta}{2} \times \frac{3\theta}{2} \times \sqrt{\pi}\,\theta^{\frac{3}{2}}$$

Donc $\mathbb{E}(X^4) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}} \times \frac{5\theta}{2} \times \frac{3\theta}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta^{\frac{3}{2}} = \frac{15\theta^2}{4} \Rightarrow Var(X^2) = \frac{15\theta^2}{4} - \frac{9\theta^2}{4} = \frac{6\theta^2}{4} = \frac{3}{2}\theta^2$

$Var(\widehat{\theta_n}) = \frac{4}{9n} \times \frac{3}{2}\theta^2 = \frac{2}{3n}\theta^2$.

$BRC(\widehat{\theta_n}) = \frac{1}{I_n(\theta)}$ On a $I_n(\theta) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln(L(X_1,\dots,X_n,\theta))}{\partial\theta^2}\right) = -\mathbb{E}\left(-\frac{3n}{2\theta^2}\right) = \frac{3n}{2\theta^2}$

$$\Rightarrow BRC(\widehat{\theta_n}) = \left(\frac{1}{\frac{3n}{2\theta^2}}\right) = \frac{2}{3n}\theta^2 = Var(\widehat{\theta_n})$$

Donc $\widehat{\theta_n}$ est un estimateur efficace.

Convergence de $\widehat{\theta_n}$

$\lim_{n\to+\infty} Var(\widehat{\theta_n}) = \frac{2}{3n}\theta^2 = 0$ et $\mathbb{E}(\widehat{\theta_n}) = \theta$ Donc $\widehat{\theta_n} \longrightarrow \theta$. **D'où la convergence de $\widehat{\theta_n}$.**

Exercice 2

1. B, C ; 2. A ; 3. A,D ; 4. B ; 5. C ; 6. D ; 7. B ; 8. C .

Exercice 3 (Voir cours)

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny Abidjan Cocody
UFRMI

Année 2016-2017

Licence 2
UE : Fonctions de plusieurs variables réelles
ECUE : Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
Première Session. Décembre 2017
Durée : 2 Heures
(Sujet sur deux pages)

Exercice 1
Soient N et ν définies par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$N(x,y) = \sup_{t\in[0,2\pi]} |x\cos t + y\sin t|$$
$$\nu(x,y) = \sup_{t\in[0,1]} |(1-t)x + ty|$$

1) a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que ν est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2) a) Montrer que $N = \|\|_2$ où $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.
(On pourra utiliser les coordonnées polaires).

b) Montrer que $\nu = \|\|_\infty$ où $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\|_\infty = \sup(|x|,|y|)$.

c) Dessiner la boule ouverte de centre $(0,0)$ et de rayon 1 pour la distance d associée à la norme ν.

d) Démontrer que N et ν sont équivalentes.

3) Soit $a \in \mathbb{R}^2$.
a) Soit $X \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|X-a\|_2 = r$. Montrer que $\forall \epsilon > 0$, $B(X,\epsilon) \not\subseteq B_f(a,r)$.
Pour cela déterminer un point $Y \in B(X,\epsilon)$ tel que $Y \notin B_f(a,r)$ en calculant $\|X-Y\|_2$ et $\|Y-a\|_2$.

b) En déduire que $\overset{\circ}{\overbrace{B_f(a,r)}} = B(a,r)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\|_2)$.

VALIDE UFR LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 2

1) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

c) f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

d) Calculer les dérivées partielles secondes de f au point $(0,0)$.
f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

2) On veut déterminer les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que :

$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2g(x,y). \quad (E)$$

a) Montrer que la fonction f définie au 1) est une solution de l'équation (E).

b) On effectue le changement de variables

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = x + y \end{cases}$$

On pose $\varphi(x,y) = (u,v)$ et $g(x,y) = G(u,v)$.

Exprimer $J_g(x,y)$ en fonction de $J_G(u,v)$ et $J_\varphi(x,y)$.

Que devient alors l'équation (E) par le changement de variables ?

c) Résoudre l'équation (E_1) obtenue et en déduire les solutions de l'équation (E).

d) Montrer que la fonction f définie au 1) a bien la forme, que vous avez obtenue, des solutions de l'équation (E).

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny Abidjan Cocody Année 2016-2017
UFRMI

Licence 2
UE : Fonctions de plusieurs variables réelles
ECUE : Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
2ème Session. Février 2018
Durée : 2 Heures. (Sujet sur une page)

Exercice 1 (10 points)
Soit (E,d) un espace métrique. Pour toute partie A de E, on pose

$$\alpha(A) = \overline{\overset{\circ}{A}} \text{ et } \beta(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$$

Soient A et B deux parties de E.
1) Montrer que si $A \subset B$ alors $\alpha(A) \subset \alpha(B)$ et $\beta(A) \subset \beta(B)$.

2) Montrer que $\overset{\circ}{A} \subset \alpha(A) \subset \overline{A}$ et $\overset{\circ}{A} \subset \beta(A) \subset \overline{A}$.

3) Montrer que
a) si A est ouvert alors $A \subset \alpha(A)$

b) si A est fermé alors $\beta(A) \subset A$.

4) Montrer qu'on toujours $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ et $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.

5) a) Montrer que si A est ouvert alors $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

b) Montrer que si A et B sont ouverts alors $\alpha(A \cap B) = \alpha(A) \cap \alpha(B)$.

Exercice 2 (10 points)
Soit $(p,q,r) \in (\mathbb{R}_+)^3$ tels que $p+q+r > 1$ et soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
1) Soit f l'application définie par $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \setminus (0,0,0)$

$$f(x,y,z) = \frac{x^p y^q z^r}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Calculer $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$.

2) Soit g l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$g(x,y,z) = ax + by + cz + |x|^p |y|^q |z|^r$$

Montrer que g est différentiable en $(0,0,0)$ et calculer $dg(0,0,0).(h_1,h_2,h_3)$ pour tout $(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$.

3) Soit h l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$h(x,y,z) = x^2y^2 + (x^2-y^2)z - 4z$$

Déterminer les points critiques de h et préciser l'existence d'extrema en ces points, ainsi que le type d'extrema.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny Abidjan Cocody Année 2017-2018
UFR Mathématiques et Informatique

Licence 2
UE : Fonctions de plusieurs variables réelles
ECUE : Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
2ème Session. Mars 2019
Durée : 2 Heures. (Sujet sur une page)

Exercice 1 (10 points)
1) Dans $\mathbb{R}^2$ muni de l'une de ses distances usuelles, on pose

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x+2| + |y-2| \leq 9\}, \ B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy = 1\}$$

et

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x-3| > 4 \text{ ou } |y-5| > 4\}$$

La partie A, B respectivement C est-elle ouverte, fermée, compacte ? Justifier votre réponse.

(On admettra que dans $\mathbb{R}^2$ muni de l'une de ses distances usuelles, une partie non vide et distincte de $\mathbb{R}^2$ ne peut être à la fois ouverte et fermée).

2) Soit D une partie de $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses distances usuelles. On note $Fr(D)$ la frontière de D.

a) Montrer que $\overset{\circ}{D} \cap Fr(D) = \emptyset$.

b) Montrer que si D est fermée, alors $D = \overset{\circ}{D} \cup Fr(D)$.

c) Montrer que si D est ouverte ou fermée, alors $\overset{\circ}{\overbrace{Fr(D)}} = \emptyset$.

3) Soient E et G deux parties de $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses distances usuelles.
Montrer que $Fr(E \cup G) \subset Fr(E) \cup Fr(G)$.

Exercice 2 (10 points)
1) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2 \ln(1+y)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

a) Calculer l'ensemble de définition U de f.
b) Etudier la continuité de f sur U.
c) Etudier la différentiablité de f sur U.
d) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
e) La différentielle seconde de f existe-elle au point $(0,0)$?

2) Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$g(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 + 6x^2 - 6y^2$$

Déterminer les points critiques de g et préciser l'existence d'extrema en ces points, ainsi que le type d'extrema.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny Abidjan Cocody
UFR Mathématiques et Informatique
Actuariat

Année 2017-2018

Licence 2
UE : Fonctions de plusieurs variables réelles
EC : Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
Première Session . Juin 2018
Durée : 2 Heures.

Exercice 1

1) Dans $\mathbb{R}^2$ muni de l'une de ses distances usuelles, on pose

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x-1| + |y+2| \leq 9\}, \ B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > x\}$$

et

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x-1| \geq 2 \text{ ou } |y-1| \geq 2\}$$

La partie A, B respectivement C est-elle ouverte, fermée, compacte ? Justifier votre réponse.

(On admettra que dans $\mathbb{R}^2$ muni de l'une de ses distances usuelles, une partie non vide et distincte de $\mathbb{R}^2$ ne peut être à la fois ouverte et fermée).

2) Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}^2$. On note $\delta(D)$ le diamètre de D.
Montrer que si D est bornée alors $\overline{D}$ est bornée et $\delta(\overline{D}) = \delta(D)$.

3) Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses distances usuelles.

a) Montrer que si $E \subset F$ alors $\mathring{E} \subset \mathring{F}$.

b) Montrer que $\mathring{E} \cap \mathring{F} = \overbrace{E \cap F}^{\circ}$.

c) En déduire que $\overline{E} \cup \overline{F} = \overline{E \cup F}$ par passage au complémentaire.

Exercice 2

1) Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$g(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } g(0,0) = 0$$

a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b) g est-elle dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur ?
c) g est-elle différentiable en $(0,0)$?
d) Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0)$.

2) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

Déterminer les points critiques de f et préciser l'existence d'extrema en ces points, ainsi que le type d'extrema.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny Abidjan Cocody
UFR Mathématiques et Informatique
Actuariat

Année 2017-2018

Licence 2
UE : Fonctions de plusieurs variables réelles
EC : Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
Deuxième Session . Septembre 2018
Durée : 2 Heures.

Exercice 1

1) Dans $\mathbb{R}^2$ muni de l'une de ses distances usuelles, on pose

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x+2| + |y-2| < 4\}, \ B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq y\}$$

et

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x-3| > 2 \text{ ou } |y-5| > 2\}$$

La partie A, B respectivement C est-elle ouverte, fermée, compacte ? Justifier votre réponse.

(On admettra que dans $\mathbb{R}^2$ muni de l'une de ses distances usuelles, une partie non vide et distincte de $\mathbb{R}^2$ ne peut être à la fois ouverte et fermée).

2) Soit D une partie de $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses distances usuelles. On note $Fr(D)$ la frontière de D.

a) Montrer que $\overset{\circ}{D} \cap Fr(D) = \emptyset$.

b) Montrer que si D est fermée, alors $D = \overset{\circ}{D} \cup Fr(D)$.

c) Montrer que si D est ouverte ou fermée, alors $\overset{\circ}{\overbrace{Fr(D)}} = \emptyset$.

3) Soient E et G deux parties de $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses distances usuelles.
Montrer que $Fr(E \cup G) \subset Fr(E) \cup Fr(G)$.

Exercice 2

1) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \frac{x(\sin y - y)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Etudier la différentiablité de f sur $\mathbb{R}^2$.

c) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

d) La différentielle seconde de f existe-elle au point $(0,0)$?

2) Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$g(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

Déterminer les points critiques de g et préciser l'existence d'extrema en ces points, ainsi que le type d'extrema.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny Abidjan Cocody
UFR Mathématiques et Informatique

Année 2018-2019

Licence 2
UE : Fonctions de plusieurs variables réelles
ECUE : Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
2ème Session. Mars 2019
Durée : 2 Heures. (Sujet sur deux pages)

Exercice 1 (10 points)

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses distances usuelles. On note $Fr(A)$ la frontière de A.

1) a) Montrer que $\overset{\circ}{A} \cap Fr(A) = \emptyset$.

b) Montrer que si A est fermée, alors $A = \overset{\circ}{A} \cup Fr(A)$.

c) Montrer que si A est ouverte ou fermée, alors $\overset{\circ}{Fr(A)} = \emptyset$.

d) Montrer que $Fr\left(\complement_{\mathbb{R}^n}^{A}\right) = Fr(A)$.

e) Dans cette question e) on considère $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle, et on pose $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Déterminer $\overset{\circ}{A}$ et $Fr(A)$.

2) a) Montrer que si A est ouverte, alors $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

b) Montrer que si $Fr(A) \cap Fr(B) = \emptyset$, alors

i) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

ii) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$.

Exercice 2 (10 points)

1) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

c) f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

d) Calculer les dérivées partielles secondes de f au point $(0,0)$.
f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Scanné avec CamScanner

2) On veut déterminer les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que :

$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2g(x,y). \qquad (E)$$

a) Montrer que la fonction f définie au 1) est une solution de l'équation (E).

b) On effectue le changement de variables

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = x + y \end{cases}$$

On pose $\varphi(x,y) = (u,v)$ et $g(x,y) = G(u,v)$.

Exprimer $J_g(x,y)$ en fonction de $J_G(u,v)$ et $J_\varphi(x,y)$.

Que devient alors l'équation (E) par le changement de variables ?

c) Résoudre l'équation (E_1) obtenue et en déduire les solutions de l'équation (E).

d) Montrer que la fonction f définie au 1) a bien la forme, que vous avez obtenue, des solutions de l'équation (E).

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny Abidjan Cocody Année 2019-2020
UFRMI

Licence 2
UE : Fonctions de plusieurs variables réelles
ECUE : Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
Session Unique. Décembre 2020
Durée : 2 Heures. (Sujet sur une page)

Exercice 1
Soit (E,d) un espace métrique. Pour toute partie A de E, on pose

$$\alpha(A) = \overset{\circ}{A} \text{ et } \beta(A) = \overline{A}$$

Soient A et B deux parties de E.
1) Montrer que si $A \subset B$ alors $\alpha(A) \subset \alpha(B)$ et $\beta(A) \subset \beta(B)$.

2) Montrer que $\overset{\circ}{A} \subset \alpha(A) \subset \overline{A}$ et $\overset{\circ}{A} \subset \beta(A) \subset \overline{A}$.

3) Montrer que
a) si A est un ouvert alors $A \subset \alpha(A)$

b) si A est un fermé alors $\beta(A) \subset A$.

4) Montrer qu'on toujours $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ et $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.

5) a) Montrer que si A est un ouvert alors $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

b) Montrer que si A et B sont des ouverts alors $\alpha(A \cap B) = \alpha(A) \cap \alpha(B)$.

Exercice 2
1) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^\lambda} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0$$

où λ est un paramètre réel.

a) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

c) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

d) Montrer que si $\lambda = 1$, alors f est dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur sans être différentiable en ce point.

2) Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$g(x,y) = (x^2 - y^2)\, e^{(-x^2-y^2)}.$$

Déterminer les points critiques de g et préciser l'existence d'extrema en ces points, ainsi que le type d'extrema.

VALIDUR LMD

Scanné avec CamScanner

VALIDE LMD

Université Félix Houphouet-Boigny Abidjan Cocody 2020 – 2021
UFR Mathématiques et Informatique

Licence 2
UE: Fonctions de plusieurs variables réelles
ECUE: Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
Première Session. Août 2021
Durée: 2 Heures. (Sujet sur une page)

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses normes usuelles, on considère une partie A. On note $\delta(A)$ le diamètre de A de $Fr(A)$ la frontière de A. On note $\|\ \|$ la norme de d la distance associée.

1)a) Montrer que si A est bornée, alors $\overline{A}$ est bornée et $\delta(\overline{A}) = \delta(A)$.

b) Montrer que si A est bornée, alors $\overset{\circ}{A}$ est bornée et $\delta(\overset{\circ}{A}) \leq \delta(A)$. A-t-on l'égalité ? justifier votre réponse.

2)a) Montrer que $Fr\left(\overset{\circ}{A}\right) \subset Fr(A)$. A-t-on l'égalité ? Justifier votre réponse.

b)Montrer que $Fr(\overline{A}) \subset Fr(A)$. A-t-on l'égalité ? Justifier votre réponse.

3) On rappelle que
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, [x,y] = \{z \in \mathbb{R}^n / \exists t \in [0,1] : z = (1-t)x + ty\}$.
On dit que A est convexe si $\forall x, y \in A, [x,y] \subset A$.

a) Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Montrer que $B(a,r)$ est convexe.

b) Montrer que si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

c) Montrer que si A est convexe, alors $\overset{\circ}{A}$ est convexe.

Exercice 2

1) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par
$f(x,y) = xy \sin[\frac{\pi}{2}(\frac{y-x}{x+y})]$ si $x+y \neq 0$ et $f(x,y) = 0$ si $x+y = 0$.

a) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
b) Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.
c) Calculer les dérivées partielles secondes de f en $(0,0)$.

2) Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$g(x,y) = 2x^2 - 2x(e^y - y + 1) + e^{2y} + (y-1)^2$.
Déterminer les points critiques de g et préciser l'existence d'extrema en ces points, ainsi que le type d'extrema.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny Abidjan Cocody 2020 – 2021
UFR Mathématiques et Informatique

Licence 2
UE: Fonctions de plusieurs variables réelles
ECUE: Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
Deuxième Session. Octobre 2021
Durée: 2 Heures. (Sujet sur une page)

Exercice 1

1) On considère $\mathbb{R}^2$ muni de l'une de ses distances usuelles. On pose $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 4\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \text{ et } y > 0\}$ et $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x+1| > 5 \text{ ou } |y-2| > 5\}$.

La partie A, B respectivement C est-elle ouverte, fermée, compacte ? Justifier votre réponse.
(On admettra que dans $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses distances usuelles, une partie non vide et distincte de $\mathbb{R}^n$ ne peut être ouverte et fermée).

2) Soit D une partie de $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses distances usuelles. Montrer que $Fr(\overline{D}) \subset Fr(D)$ et $Fr\left(\overset{\circ}{D}\right) \subset Fr(D)$.
Donner un exemple où les inclusions réciproques sont fausses.

3) Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses distances usuelles.
   a) Montrer que si $E \subset F$ alors $\overset{\circ}{E} \subset \overset{\circ}{F}$.
   b) Montrer que $\overset{\circ}{E} \cap \overset{\circ}{F} = \overset{\circ}{\overbrace{E \cap F}}$.
   c) En déduire que $\overline{E} \cup \overline{F} = \overline{E \cup F}$ par passage au complémentaire.

Exercice 2

1) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy \sin[\frac{\pi}{2}(\frac{y-x}{x+y})]$ si $x+y \neq 0$ et $f(x,y) = 0$ si $x+y = 0$.

a) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
b) Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.
c) Calculer les dérivées partielles secondes de f en $(0,0)$.

2) Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $g(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$.
Déterminer les points critiques de g et préciser l'existence d'extrema en ces points, ainsi que le type d'extrema.

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

EXAMEN DE TOPOLOGIE ET CALCUL DIFFERENTIEL SESSION 1
2016-2017

Exercice 1

Soient N et ν définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} N(x,y) &= sup_{t\in[0,2\pi]} \mid x\cos t + y\sin t \mid \\ \nu(x,y) &= sup_{t\in[0,1]} \mid (1-t)x + ty \mid \end{aligned}$$

1. (a) Montrons que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, N(x,y) = sup_{t\in[0,2\pi]} \mid x\cos t + y\sin t \mid$

- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
$\forall t \in [0,2\pi], \mid x\cos t + y\sin t \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid$
Alors l'ensemble $\{x\cos t + y\sin t \ / \ t \in [0,2\pi]\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieur dans $\mathbb{R}$. De plus $0 \leq \mid x\cos t' + y\sin t' \mid \leq sup_{t\in[0,2\pi]} \mid x\cos t + y\sin t \mid$
Par conséquent $N(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, N(x,y) = 0 \Leftrightarrow \mid x\cos t + y\sin t \mid = 0, \forall t \in [0,2\pi]$
$t = 0 \Rightarrow x = 0$. $t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0$.
Alors $N(x,y) = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$
Réciproquement $(x,y) = (0,0) \Rightarrow N(x,y) = 0$.
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda(x,y)) = \mid \lambda \mid \ N(x,y)$.
- $\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$. $\forall t \in [0,2\pi]$,

$$\begin{aligned} \mid (x+x')\cos t + (y+y')\sin t \mid &\leq \mid x\cos t + y\sin t \mid + \mid x'\cos t + y'\sin t \mid \\ \mid x\cos t + y\sin t \mid + \mid x'\cos t + y'\sin t \mid &\leq sup_{t\in[0,2\pi]} \mid x\cos t + y\sin t \mid \\ &\quad + sup_{t\in[0,2\pi]} \mid x'\cos t + y'\sin t \mid \\ sup_{t\in[0,2\pi]} \mid (x+x')\cos t + (y+y')\sin t \mid &\leq sup_{t\in[0,2\pi]} \mid x\cos t + y\sin t \mid \\ &\quad + sup_{t\in[0,2\pi]} \mid x'\cos t + y'\sin t \mid \end{aligned}$$

Donc $N[(x,y) + (x'y')] \leq N(x,y) + N(x'y')$.
Finalement N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrons que ν est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Même résolution que la question précédente

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

2. (a) Montrons que $N = ||\ ||_2 o\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, ||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2}$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, N(x,y) = sup_{t\in[0,2\pi]} \mid x\cos t + y\sin t \mid$

$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$ $avec r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0,2\pi]$.

Alors $\mid x\cos t + y\sin t \mid = r \mid \cos(\theta - t) \mid \leq r$, $\forall t \in [0,2\pi]$.

Si t $= \theta$ alors $\mid x\cos t + y\sin t \mid = r = \sqrt{x^2+y^2}$

Donc $sup_{t\in[0,2\pi]} \mid x\cos t + y\sin t \mid = \sqrt{x^2+y^2}$

Ainsi $N(x,y) = ||(x,y)||_2$

(b) Montrons que $\nu = ||\ ||_\infty o\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, ||(x,y)||_\infty = sup(\mid x \mid, \mid y \mid)$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \nu(x,y) = sup_{t\in[0,1]} \mid (1-t)x + ty \mid$

Soit $f(t) = (1-t)x + ty, \forall t \in [0,1]$.

$f'(t) = y - x$ qui a un signe constant.

Alors f est croissante et ou décroissante.

Donc $\nu(x,y) = sup(\mid f(0) \mid, \mid f(1) \mid) = sup(\mid x \mid, \mid y \mid)$.

Ainsi $\nu(x,y) = ||(x,y)||_\infty$

(c) Déssinons la boule ouverte de centre $(0,0)$ et de rayon 1 pour la distance d associée à la norme ν

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \nu(x,y) = ||\ ||_\infty$

$Alors (x,y) \in B^d((0,0),1) \Leftrightarrow sup(\mid x \mid, \mid y \mid) \leq 1$

$\Leftrightarrow \mid x \mid + \mid y \mid$

(d) Demontrons que N et ν sont équivalentes

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow \mid x \mid \leq \sqrt{x^2+y^2}$.
  De même $\mid y \mid \leq \sqrt{x^2+y^2}$
  Alors $sup(\mid x \mid, \mid y \mid) \leq \sqrt{x^2+y^2}$.
  Donc $\nu(x,y) \leq N(x,y)$.
- Si $sup(\mid x \mid, \mid y \mid) = \mid x \mid$ $alors$ $\mid y \mid \leq \mid x \mid$ $donc\ y^2 \leq x^2$.
  $\Rightarrow x^2 + y^2 \leq 2x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \sqrt{2} \mid x \mid = \sqrt{2}\ sup(\mid x \mid, \mid y \mid)$
  De même si $sup(\mid x \mid, \mid y \mid) = \mid y \mid$ alors
  $\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2}\ sup(\mid x \mid, \mid y \mid)$
  . Donc N et ν sont équivalentes.

3. (a) Montrons que $\forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \not\subseteq B_f(a,r)$.

Scanné avec CamScanner

Soit $Y = X + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{X-a}{r}$; $Y - X = \frac{\varepsilon}{2} \frac{X-a}{r}$

- $||X - Y||_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow Y \in B(X, \varepsilon)$
- $||Y - a||_2 = r + \frac{\varepsilon}{2} > r \Rightarrow Y \notin B_f(a, r)$

(b) Deduisons-en que $\overset{\circ}{\overbrace{B_f(a,r)}} = B(a,r)$ dans $(\mathbb{R}^2, ||\ ||_2)$. Soit $X \in \overset{\circ}{\overbrace{B_f(a,r)}}$. Alors $X \in B_f(a,r)$ donc $||X - a||_2 \leq r$.

- Si $||X - a||_2 < r$ alors $X \in B(a,r)$

  Or $B(a,r) \subset B_f(a,r) \Rightarrow B(a,r) \subset \overset{\circ}{\overbrace{B_f(a,r)}}$ car $B(a,r)$ est un ouvert.

  Alors $X \in \overset{\circ}{\overbrace{B_f(a,r)}}$.
- $||X - a||_2 = r$ alors $\forall, \varepsilon > 0, B(X, \varepsilon) \not\subset B_f(a,r)$ d'après a).

  Donc $X \notin \overset{\circ}{\overbrace{B_f(a,r)}}$. Finalement $\overset{\circ}{\overbrace{B_f(a,r)}} = B(a,r)$.

Exercice 2

$$\begin{cases} f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si(x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ car son dénominateur ne s'annule pas en $(0,0)$.

Etude en (0,0)

$$Posons \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

Quand $(x,y) \to (0,0), r \to 0$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= lim_{r\to 0}\, r^2(\cos\theta\sin\theta)\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\\ &= \lim_{r\to 0} r^2(\cos\theta\sin\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\ &= f(0,0)\end{aligned}$$

Par conséquent f est continue en $(0,0)$.
Conclusion: f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrons que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
$P_1 = xy(x^2-y^2)$ est une fonction polynôme différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
$P_2 = x^2+y^2$ est une fonction polynôme différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

donc $g = \dfrac{P_1}{P_2}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

Etude en (0,0)

f est différentiable en $(0,0)$ si $lim_{H\to(0,0)}\varepsilon(H) = 0$

$\varepsilon(H) = \dfrac{f(x_0+H)-f(x_0)-L(H)}{||H||}$ avec $H=(h,k)$ et $x_0=(0,0)$.

$L(H) = h\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} + k\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$

$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$

$\Rightarrow L(H) = 0$ et $f(x_0) = f(0,0) = 0$

$\varepsilon(H) = \dfrac{f(H)}{||H||}$

$\dfrac{hk(h^2-k^2)}{(h^2+k^2)} \times \dfrac{1}{(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{hk(h^2-k^2)}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$

Calculons $\lim\limits_{H\to(0,0)} \varepsilon(H)$

$$Posons \begin{cases} h = r\cos\theta \\ k = r\sin\theta \end{cases} \qquad quand (h,k)\to(0,0), r\to 0 \quad \theta\in\mathbb{R}.$$

VALIDE

Scanné avec CamScanner

$$\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(H) &= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta(r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta))}{(r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}})} \\
&= \frac{r^4}{r^3}\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \\
&= \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \\
&= 0 = f(0,0) \qquad \text{donc f est différentiable en } (0,0)
\end{aligned}$$

Conclusion: f est différentiable en sur $\mathbb{R}^2$

(c) f est-elle de classe C^1sur $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \\
&= y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) + xy\left(\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + x\left(\frac{4xy^2}{x^2+y^2}\right)\right] \\
&= y\left[\frac{(x^2-y^2)(x+y)^2+x(4xy^2)}{(x^2+y^2)^2}\right] \\
&= y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \\
&= x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \left(\frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)(2y)\times xy}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \left(xy\frac{(-4x^2y)}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles de f par rapport à x et y sont des fonctions continues de $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$.

Etude en $(0,0)$

Calculons $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

$$Posons \begin{cases} x = r\cos\theta & \theta\in\mathbb{R} \\ y = r\sin\theta & \text{Quand}(x,y)\to(0,0), r\to 0. \end{cases}$$

VALIDUM

Scanné avec CamScanner

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \lim_{r\to 0} r\sin\theta\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}+4\frac{r^5(\cos^2\theta\sin^3\theta)}{(r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2)^2}\\ &= \lim_{r\to 0} r\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+4r\ \cos^2\theta\sin^3\theta.\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 0 = f(0,0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \lim_{r\to 0} r\cos\theta\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2}-4\frac{r^5\sin^2\theta\cos^3\theta}{r^4}\\ &= \lim_{r\to 0}\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 0 = f(0,0)\end{aligned}$$

Les dérivées partielles premieres sont continues en $(0,0)$. Par conséquent g est de classe C^1.

(d) • Calculons les dérivées secondes de f au point $(0,0)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}-\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x}}{x} = 0\\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} &= \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f(0,y)}{\partial y}-\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y}}{y} = 0\\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}-\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{x} = \frac{x}{x} = 1\\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x} &= \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f(0,y)}{\partial x}-\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}}{y} = \frac{-y}{y} = -1\end{aligned}$$

• f est-elle de classe C^2

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y} = 1 \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x} = -1$$

Alors f n'est pas de classe C^2. Sinon on aurait l'égalité d'après le théoreme de Shawrz.

2. $(E) : x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2g(x,y)$

VALIDER

Scanné avec CamScanner

(a) Montrons que f est une solution de l'équation (E)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + 4\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 4\frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + 4\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} + xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 4\frac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^2} \\
x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 2xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 2f(x,y)
\end{aligned}$$

donc f est soluton de l'équation (E).

(b) On effectue le changement de variable suivant:

$$\begin{cases} X &= \dfrac{y}{x} \\ y &= x+y \end{cases}$$

On pose $\phi(x,y) = (X,Y)$ et $g(x,y) = G(X,Y)$

Exprimer $J_{g(x,y)}$ en fonction de $J_{G(X,Y)}$ et $J_{\phi}(x,y)$

On sait que $g(x,y) = G(X,Y) = Go\phi(x,y)$ où $\phi(x,y) = (X,Y)$
Alors $J_{g(x,y)} = J_{G(X,Y)} \times J_{\phi(x,y)}$

Déduisons-en $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$ et $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G(X,Y)}{\partial X} & \dfrac{\partial g(X,Y)}{\partial Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{x} & \dfrac{\partial X}{y} \\ \frac{\partial Y}{x} & \dfrac{\partial Y}{y} \end{pmatrix}$$

Tansformons l'équation (E) en une équation (E_1) n'utilisant que les dérivées partielles.
On a donc:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= \dfrac{\partial G(X,Y)}{X} \times \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial G(X,Y)}{Y} \times \dfrac{\partial Y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} &= \dfrac{\partial G(X,Y)}{X} \times \dfrac{\partial X}{\partial y} + \dfrac{\partial G(X,Y)}{Y} \times \dfrac{\partial Y}{\partial y} \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2}\frac{\partial G(X,Y)}{\partial X} + \frac{\partial G(X,Y)}{\partial Y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= \frac{1}{x}\frac{\partial G(X,Y)}{\partial X} + \frac{\partial G(X,Y)}{\partial Y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= -\frac{y}{x}\frac{\partial G(X,Y)}{\partial X} + x\frac{\partial G(X,Y)}{\partial Y} \\ y\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} &= \frac{y}{x}\frac{\partial G(X,Y)}{\partial X} + y\frac{\partial G(X,Y)}{\partial Y} \end{aligned}$$

Finalement, on a:

$$x\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = (x+y)\frac{\partial G(X,Y)}{\partial Y}$$

$$\Rightarrow x\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 2g(x,y)$$

$$\Rightarrow (x+y)\frac{\partial G(X,Y)}{\partial Y} = 2g(x,y)$$

$$\Rightarrow \boxed{Y\frac{\partial G(X,Y)}{\partial Y} = 2g(x,y) \qquad (E_1)}$$

(c) Résolvons l'équation (E_1) obtenue et déduisons-en les solutions de l'équation $(E$

$$Y\frac{\partial G}{\partial Y} = 2G \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial Y} = \frac{2}{Y} \times G \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial Y} \times \frac{1}{G} = \frac{2}{Y}$$

$$\frac{\frac{\partial G}{\partial Y}}{G} = \frac{2}{Y} \Rightarrow \frac{\partial G}{G} = \frac{2}{Y}\partial Y \Rightarrow \ln|G| = 2\ln|Y|$$

$\Rightarrow \ln|G| = \ln|Y^2| \Rightarrow |G| = Y^2.k(X) \Rightarrow G = k(\frac{x}{y})(x+y)^2$

Alors $G(x,y) = k(\frac{x}{y})(x+y)^2$

(d) Montrons que f a bien la forme

Comme f est solution de E alors: $f(x,y) = k(\frac{x}{y})(x+y)^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow k(\frac{x}{y}) &= f(x,y) \\ &= xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \times \frac{1}{(x+y)^2} \\ &= xy\frac{x^2(1-\frac{y^2}{x^2})}{x^2(1+\frac{y^2}{x^2})} \times \frac{1}{(x(1+\frac{y}{x}))^2} \\ &= \frac{y}{x}\frac{1-\frac{y^2}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \times \frac{1}{(1+\frac{y}{x})^2} \\ k(X) &= \frac{X}{(1+X)^2} \times \frac{1-X^2}{1+X^2} \end{aligned}$$

On en deduit que $\boxed{F(X,Y) = k(X).Y^2}$

VALIDMID

Scanné avec CamScanner

UFR-MI Année 2016-2017

TOPOLOGIE ET CALCUL DIFFERENTIEL
SESSION 2 LICENCE 2

Exercice 1

$\alpha(A) = \overline{\mathring{A}}$ et $\beta(A) = \mathring{\overline{A}}$
Soient A et B deux parties de E.

1. Montrons que si $A \subset B$ alors $\alpha(A) \subset \alpha(B)$ et $\beta(A) \subset \beta(B)$.
   Supposons que $A \subset B$

   . $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B} \Rightarrow \mathring{\overline{A}} \subset \mathring{\overline{B}} \Rightarrow \alpha(A) \subset \alpha(B)$

   . $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B} \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset \overline{\mathring{B}} \Rightarrow \beta(A) \subset \beta(B)$

2. Montrons que $\mathring{\overline{A}} \subset \alpha(A) \subset \overline{A}$ et $\mathring{\overline{A}} \subset \beta(A) \subset \overline{A}$, on a :

   $\begin{cases} A \subset \overline{A} \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}} \quad (1) \\ A \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A} \Rightarrow \mathring{\overline{A}} \subset \overline{A} \quad (2) \end{cases}$

   De (1) et (2), on a : $\mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}} \subset \overline{A} \Rightarrow \mathring{A} \subset \alpha(A) \subset \overline{A}$

   Donc $\mathring{A} \subset \alpha(A) \subset \overline{A}$

   On a aussi : $\mathring{A} \subset \mathring{A} \Rightarrow \mathring{A} \subset \overline{\mathring{A}} \Rightarrow \mathring{A} \subset \beta(A) \quad (1)$

   $\mathring{A} \subset A \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset \overline{A} \Rightarrow \beta(A) \subset \overline{A} \quad (2)$

   De (1) et (2), on a : $\mathring{A} \subset \beta(A) \subset \overline{A}$

3. Montrons que :

VALIDEUR LMD :Conseils-Sujets d'examens-Corrections

Scanné avec CamScanner

a) Si A est ouvert alors $A \subset \alpha(A)$
A ouvert alors $A = \overset{o}{A}$, or $A \subset \overline{A} \Rightarrow \overset{o}{A} \subset \overline{A} \Rightarrow \overset{o}{A} \subset \overset{o}{\overline{A}} \Rightarrow \overset{o}{A} \subset \alpha(A)$

b) si $A = \overline{A}$ alors $\beta(A) \subset A$
$\overset{o}{A} \subset A \Rightarrow \overline{\overset{o}{A}} \subset \overline{A} \Rightarrow \beta(A) \subset \overline{A}$ or $\overline{A} = A$ Donc $\beta(A) \subset A$

On pourrait aussi faire une déduction à partir du 2). On sait que $\overset{o}{A} \subset \alpha(A) \subset \overline{A}$

Comme $A = \overset{o}{A}$, en utilisant la prémière inclusion, on a : $\overset{o}{A} = A \subset \alpha(A)$.
De même $\overset{o}{A} \subset \beta(A) \subset \overline{A}$ uniforme $\beta(A) \subset \overline{A} = A$ donc $\beta(A) \subset A$ car A est un fermé.

4. Montrons qu'on a toujours $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ et $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$
D'une part $\alpha(A)$ est ouvert donc d'après 3 a) $\alpha(A) \subset \alpha(\alpha(A))$ (1)
D'autre part, $\overline{A} \subset \overline{A} \Rightarrow \alpha(A) \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{\alpha(A)} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A}$
$\Rightarrow \overline{\overset{o}{\alpha(A)}} \subset \overset{o}{\overline{A}} \Rightarrow \alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$ (2)
Aussi (1) et (2) nous donne $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$
D'une part $\beta(A)$ est fermé donc d'après 3.b), on a :
$\beta(A) \subset A \Rightarrow \beta(\beta(A)) \subset \beta(A)$ (1)
D'autre part, On a : $\overset{o}{A} \subset \beta(A)$ d'après 2, on a :
$\Rightarrow \overset{o}{A} = \overset{oo}{A} \subset \overset{o}{\beta}(A)$
$\Rightarrow \overline{\overset{o}{A}} \subset \overline{\overset{o}{\beta}}(A) \Rightarrow \beta(A) \subset \beta(\beta(A))$ (2)
Donc de (1) et (2) $\Rightarrow \beta(\beta(A)) = \beta(A)$

5. a) Montrons que si $A = \overset{o}{A}$ alors $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$
Soit $x \in A \cap \overline{B}$.
$x \in A \cap \overline{B} \Rightarrow x \in A$ et $x \in \overline{B}$. $\exists$ donc r_0 tel que $B(x, x_0) \subset A$ (car A est un ouvert) et alors $B \cap B(x, r_0) \neq \varnothing$ car $x \in \overline{B}$. D'où,

Scanné avec CamScanner

$$B(x,r_0)\cap(A\cap B)=(B(x,r_0)\cap A)\cap B$$
$$=B(x,r_0)\cap B\neq\varnothing$$

Soit $r>0$ quelconque.
. Si $r_0\leq r$, $B(x,r_0)\subset B(x,r)$; alors , on a : $B(x,r)\cap(A\cap B)\neq\varnothing$
. Si $r<r_0$; $B(x,r_0)\subset B(x,r)$; alors, on a : $B(x,r)\cap A=B(x,r)$; donc $B(x,r)\cap(A\cap B)=B(x,r)\cap B\neq\varnothing$ (car x$\in\overline{B}$)
$Ainsi\forall r>0\, B(x,r)\cap(A\cap B)\neq\varnothing$ d'où $x\in\overline{A\cap B}$.
En resumé $\forall x,\ x\in A\cap\overline{B}\Rightarrow x\in\overline{A\cap B}$; D'où $A\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$
On peut même donner un exemple dans $\mathbb{R}$ où cette inclusion n'est pas vérifiée lorsque A n'est pas un ouvert.
Dans $\mathbb{R}$ soit 3 réels $a<b<c$.
Prenons $A=]a,b]$ non ouvert et $B=]b,c]$.
On a : $A\cap\overline{B}=]a;b]\cap[b;c]=\{b\}$.
$\overline{A\cap B}=\overline{\varnothing}=\varnothing$ et il n'ya pas inclusion

b) Montrons que si A et B sont des ouverts alors $\alpha(A\cap B)=\alpha(A)\cap\alpha(B)$

Soit $x\in\alpha(A\cap B)$
$x\in\alpha(A\cap B)\Rightarrow x\in\alpha(A)$ et $x\in\alpha(B)\Rightarrow\alpha\in\alpha(A)\cap\alpha(B)$ (1)
Soit $x\in\alpha(A)\cap\alpha(B)$.

Exercice 2

$$f(x,y,z)=\frac{x^py^qz^r}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\text{ et }p+q+r>1$$

1. Calculons $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}f(x,y,z)$

Posons $\begin{cases}x=R\cos\theta\cos\varphi\\ y=R\sin\theta\cos\varphi\\ z=R\sin\varphi\end{cases}$ $\theta,\varphi,R\in\mathbb{R}.Si(x,y,z)\to(0,0,0),R\to0.$
$x^2+y2+z^2=R^2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2}=R$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{R\to 0} \frac{R^{p+q+r}}{R}\left((\cos\theta\cos\varphi)^p(\sin\theta\cos\varphi)^q(\sin\varphi)^r\right)$$
$$= \lim_{R\to 0} R^{p+q+r-1}\left((\cos\theta\cos\varphi)^p(\sin\theta\cos\varphi)^q(\sin\varphi)^r\right)$$
$$= R^{\alpha}\left((\cos\theta\cos\varphi)^p(\sin\theta\cos\varphi)^q(\sin\varphi)^r\right) \text{ avec } \alpha = p+q+r-1 >$$
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$$

2. Soit $g(x,y,z) = ax + by + cz + |x|^p|y|^q|z|^r$
Montrons que g est différentiable en $(0,0,0)$
$\varepsilon(H) = \dfrac{g(x_0+H) - g(x_0) - L(H)}{||H||}$ avec $H = (h_1,h_2,h_3)$ et
$x_0 = (0,0,0)$
$$L(H) = L(h_1,h_2,h_3) = h_1\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial x} + h_2\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial y} + h_3\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial z}$$
$$\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x,0,0) - g(0,0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{ax}{x} = a$$
$$\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\frac{g(0,y,0) - g(0,0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{by}{y} = b$$
$$\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial z} = \lim_{z\to 0}\frac{g(0,0,z) - g(0,0,0)}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{cz}{z} = c$$
$\Leftrightarrow L(H) = a\,h_1 + b\,h_2 + c\,h_3$ et $g(0,0,0) = 0$
$$\varepsilon(H) = \frac{g(H) - L(H)}{||H||} = \frac{ah_1 + bh_2 + c_3 + |h_1|^p|h_2|^q|h_3|^r - (ah_1 + bh_2 + c\,h_3)}{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2 + (h_3)^2}}$$
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \varepsilon(H) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{|h_1|^p|h_2|^q|h_3|^r}{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2 + (h_3)^2}} = 0 \text{ d'après la}$$
question 1. Par conséquent g est différentiable en $(0,0,0)$.

3. Soit $h(x,y,z) = x^2y^2 + (x^2 - y^2)z - 4z$
Déterminons les points critiques de h
$$\frac{\partial h(x,y,z)}{\partial x} = 2xy^2 + 2xz$$
$$\frac{\partial h(x,y,z)}{\partial y} = 2yx^2 - 2yz$$
$$\frac{\partial h(x,y,z)}{\partial z} = x^2 - y^2 - 4$$
$$\begin{cases} 2xy^2 + 2xz = 0 \\ 2yx^2 - 2yz = 0 \\ x^2 - y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = -z \\ x^2 = z \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$$

VALIDEUR LMD
Scanné avec CamScanner

Les points critiques sont : $A(2,0,0)$ et $B(-2,0,0)$

Soit H la matrice de h telle que :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial z^2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow H = \begin{pmatrix} 2y^2+2y & 4xy & 2x \\ 4xy & 2x^2-2z & -2y \\ 2x & -2y & 0 \end{pmatrix}$$

* Pour $A(2,0,0)$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les mineurs principaux diagonaux sont :$M_1 = |0| = 0$ et $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} =$

0 et $M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -128 < 0$

Par suite, on en déduit que le point A est un point col.

* Pour $B(-2,0,0)$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les mineurs principaux diagonaux sont :$M_1 = |0| = 0$ et $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} =$

0 et $M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -128 < 0$

Par suite, on en déduit que le point B est un point col.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 2

$f(x,y,z) = \frac{x^p y^q z^r}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ et p+q+r > 1

1- Calculons $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$

Posons $\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\cos\varphi \\ z = R\sin\varphi \end{cases}$ θ, φ , R $\in \mathbb{R}$. si $(x,y,z) \to (0,0,0), R \to 0$.

$x^2+y^2+z^2 = R^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} = R$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{R\to 0} \frac{R^{p+q+r}}{R}((\cos\theta\cos\varphi)^p(\sin\theta\cos\varphi)^q(\sin\varphi)^r)$$
$$= \lim_{R\to 0} R^{p+q+r-1}((\cos\theta\cos\varphi)^p(\sin\theta\cos\varphi)^q(\sin\varphi)^r)$$
$$= R^{\alpha}((\cos\theta\cos\varphi)^p(\sin\theta\cos\varphi)^q(\sin\varphi)^r) \text{ avec } \alpha = p+q+r-1 > 0$$

$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0.$

2- Soit $g(x,y,z) = ax + by + cz + |x|^p|y|^q|z|^r$

Montrons que g est différentiable en (0,0,0)

$\varepsilon(H) = \frac{g(x_0+H)-g(x_0)-L(H)}{\|H\|}$ avec $H = (h_1,h_2,h_3)$ et $x_0 = (0,0,0)$

$L(H) = L(h_1,h_2,h_3) = h_1\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial x} + h_2\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial y} + h_3\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial z}$

$\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x,0,0)-g(0,0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{ax}{x} = a$

$\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\frac{g(0,y,0)-g(0,0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{by}{y} = b$

$\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial z} = \lim_{z\to 0}\frac{g(0,0,z)-g(0,0,0)}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{cz}{z} = c$

$\Leftrightarrow L(H) = ah_1 + bh_2 + ch_3$ et $g(0,0,0) = 0$

VALIDER LMD

Scanné avec CamScanner

$\varepsilon(H) = \frac{g(H)-L(H)}{\|H\|} = \frac{ah_1+bh_2+ch_3+|h_1|^p|h_2|^q|h_3|^r-(ah_1+bh_2+ch_3)}{\sqrt{(h_1)^2+(h_2)^2+(h_3)^2}}$

$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \varepsilon(H) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{|h_1|^p|h_2|^q|h_3|^r}{\sqrt{(h_1)^2+(h_2)^2+(h_3)^2}} = 0$ d'après la question 1. Par conséquent g est différentiable en (0,0,0).

3- Soit $h(x,y,z) = x^2y^2 + (x^2-y^2)z - 4z$

Déterminons les points critiques de h

$\frac{\partial h(x,y,z)}{\partial x} = 2xy^2 + 2xz$

$\frac{\partial h(x,y,z)}{\partial y} = 2yx^2 - 2yz$

$\frac{\partial h(x,y,z)}{\partial x} = x^2 - y^2 - 4$

$$\begin{cases} 2xy^2+2xz=0 \\ 2yx^2-2yz=0 \\ x^2-y^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=-z \\ x^2=z \\ x^2-y^2=4 \end{cases}$$

Les points critiques sont A(2,0,0) et B(-2,0,0)

Soit H la matrice de h telle que :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial z^2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow H = \begin{pmatrix} 2y^2+2y & 4xy & 2x \\ 4xy & 2x^2-2z & -2y \\ 2x & -2y & 0 \end{pmatrix}$$

* Pour A(2,0,0)

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les mineurs principaux diagonaux sont : $M_1 = |0| = 0$ et $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 0$

et $M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -128 < 0.$

Par suite , on en déduit que le point A est un point col.

* Pour B(-2,0,0)

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Les mineurs principaux diagonaux sont : $M_1 = |0| = 0$ et $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 0$

et $M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -128 < 0$

Par suite , on en déduit que le point B est un point col.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE L'EXAMEN DE TOPOLOGIE 2018-2019_SESSION 1

Exercice 1

On pose $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, N(x,y) = \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}}$

1)

a) Montrons que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

- Montrons que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ N(x,y) \in \mathbb{R}^+$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \text{ et } y^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}} \geq 0$

$\Rightarrow N(x,y) \geq 0$

Donc $N(x,y) \in \mathbb{R}^+$

- Montrons que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, N(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$
- Supposons que $N(x,y) = 0$ et montrons que $(x,y) = (0,0)$

$N(x,y) = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}} = 0$

$\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{3}x = 0 \text{ et } \frac{1}{2}y = 0$

$\Rightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \text{ car } \frac{1}{3} \neq 0 \text{ et } \frac{1}{2} \neq 0$

d'ou $N(x,y) = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

- Supposons que $(x,y) = (0,0)$ et montrons que $N(x,y) = 0$

$(x,y) = (0,0) \Rightarrow x = 0 \text{ et } y = 0$

$\Rightarrow x^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{3}x = 0 \text{ et } \frac{1}{2}y = 0$

$\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}} = 0$

Finalement $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, N(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

- Montrez que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}^2, N[\lambda(x,y)] = |\lambda| N(x,y)$

On a : $N[\lambda(x,y)] = N(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{\frac{(x\lambda)^2}{9} + \frac{(\lambda y)^2}{4}} = |\lambda| \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}}$

Donc $N[\lambda(x,y)] = |\lambda| N(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}^2$

- Montrez que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2, N[(x,y) + (x',y')] \leq N(x,y) + N(x',y')$

On a : $N(x,y) + N(x',y') = N[(x+x'),(y+y')]$

$= \sqrt{\frac{1}{9}(x+x')^2 + \frac{1}{4}(y+y')^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x'\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y'\right)^2}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

D'après l'inégalité de Minkowski, on a :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{h}(a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

Pour n=2, l'inégalité de Minkowski devient :

$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}$. Donc

$$N[(x,y)+(x',y')] = \sqrt{\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x'\right)^2+\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y'\right)^2} \leq \sqrt{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}}+\sqrt{\frac{(x')^2}{9}+\frac{(y')^2}{4}}$$
$$= N(x,y)+N(x',y')$$

- Donc $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ et\ \forall(x',y')\in\mathbb{R}^2, N[(x,y)+(x',y')] \leq N(x,y)+N(x',y')$

Conclusion : *N*est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrons que N est équivalente à la norme équivalente,
N équivalent à N_2 si et seulement si, on a :
$\alpha N_2 \leq N \leq \beta N_2$

- On a $\frac{1}{9} \leq \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)$ donc $\frac{x^2}{9} \leq \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)x^2$ ①
- On a $\frac{1}{4} \leq \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)$ donc $\frac{y^2}{4} \leq \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)y^2$ ②

$$①+② \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \leq \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)x^2+\max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)y^2$$
$$\leq \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)(x^2+y^2)$$
$$\leq \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)N_2(x+y)\ (**)$$

- On a aussi $\frac{1}{9} \geq \min\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)$ donc $\frac{x^2}{9} \geq \min\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)x^2$ ③

- On a $\frac{1}{4} \geq \min\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)$ donc $\frac{y^2}{4} \geq \min\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)y^2$ ④

$$③+④ \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \geq \min\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)N_2(x+y)\ \ (***)$$

D'après (**) et (***) on en déduit que

$$\min\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)N_2(x+y) \leq N(x,y) \leq \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)N_2(x+y)$$

Conclusion : N et N_2 sont équivalente avec $\alpha = \min\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)$ et $\beta = \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)$

c) Désignons $B_f(0,1)$ par la boule unité associée

On a : $(x,y)\in B_f(0,1) \Leftrightarrow N(x,y) \leq 1$

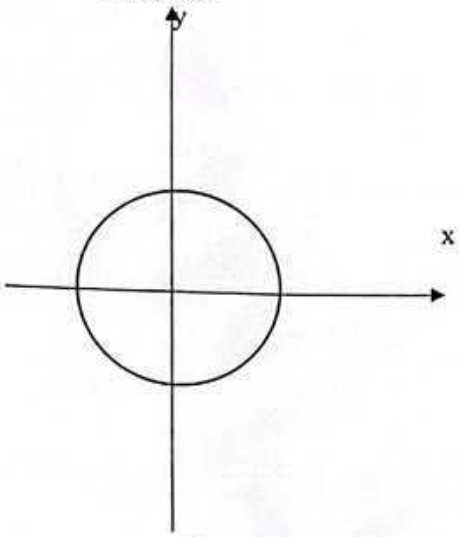
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}} \leq 1$$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \leq 1$ est une équation d'une Helipse de centre (0,0) et de rayon 1.

$$x=0 \Rightarrow \frac{1}{4}y^2=1 \Rightarrow y=2\ ou\ y=-2$$
$$y=0 \Rightarrow \frac{1}{9}x^2=1 \Rightarrow x=3\ ou\ x=-3$$

Représentation

Scanné avec CamScanner



2)

a) montrons que $B_f(0,1) = \overline{B(0,1)}$

- Montrons que $\overline{B(0,1)} \subset B_f(0,1)$

$\forall x \in B(0,1), \|x-0\| < 1$

On sait que $B(0,1) \subset B_f(0,1) \Rightarrow \overline{B(0,1)} \subset \overline{B_f(0,1)}$

Comme la boule $B_f(0,1)$ est un fermé alors

$\overline{B(0,1)} \subset B_f(0,1)$

- Montrons que $B_f(0,1) \subset \overline{B(0,1)}$

Soit $x \in B_f(0,1)$. Ainsi on a $\|x-0\| \leq 1$

Si $\|x-0\| < 1 \Rightarrow x \in B(0,1)$

$\Rightarrow x \in \overline{B(0,1)}$

Si $\|x-0\| = 1$ alors posons $X_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)x$

Montrons que $X_n \in \overline{B(0,1)}$

$\|X_n - 0\| = \left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)x - 0\right\|$ or $\left(1-\frac{1}{n}\right) < 1$ et $\|x-0\| = 1$

$\|X_n - 0\| < 1 \Rightarrow X_n \in B(0,1) \subset \overline{B(0,1)}$

$\Rightarrow X_n \in \overline{B(0,1)}$

Montrons que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

$$\lim_{n\to+\infty} \|X_n - x\| = \lim_{n\to+\infty} \left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)x - x\right\|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\|x\| \text{ or } \|x\| = 1$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \|X_n - x\| = 0$$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x d'où $x \in \overline{B(0,1)}$. *Donc* $B_f(0,1) \subset \overline{B(0,1)}$

Conclusion : De tout ce qui précède $B_f(0,1) = \overline{B_f(0,1)}$ et la distance, on a N équivalent à d alors d'après le cours $(\mathbb{R}^2, d)$ est un espace complet.

Exercice 2

$f(x,y) = \frac{x^3 e^{xy}}{x^2+y^2}$ Si $(x,y) \neq (0,0)$ *et* $f(0,0) = 0$

a) $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} e^{xy}$

Scanné avec CamScanner

- Déterminons l'ensemble de définition
  $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
  Etudions la continuité sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
  En (0,0)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x;y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 e^{xy}}{x^2+y^2} \text{ avec } e^{(xy)} \approx 1$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

Posons $x = rcos(\theta)\ et\ y = rsin(\theta)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{(rcos(\theta))^3}{(rcos(\theta))^2 + (rsin(\theta))^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} rcos^3(\theta)$$

On a $|rcos^3(\theta)| \leq r$ or $\lim_{r\to 0} r = 0$

Donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$, f est continue en (0,0).

Posons $f_1(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ et $f_2(x,y) = e^{xy}$, f_1 est une fonction rationnelle donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

f_2 est une fonction exponentielle continue sur $\mathbb{R}^2$.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.De tout ce qui précède on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Etudions la dérivabilité en (0,0).

f est dérivable en (0,0) suivant tout vecteur v si et seulement si : $\lim_{t\to 0}\left(\frac{f((0,0)+tv)-f((0,0)}{t}\right)$

Soit $v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f((0,0)+tv)-f((0,0)}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t^3 v_1^3 e^{t^2 v_1 v_2}}{t^2(v_1^2+v_2^2)}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t v_1^3 e^{t^2 v_1 v_2}}{(v_1^2+v_2^2)}\right) = 0$$

$$\lim_{t\to(0,0)}\left(\frac{f((0,0)+tv)-f((0,0)}{t}\right) = 0$$

$soit\ v = (v_1, v_2) = (0,0)$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f((0,0)+t(0,0))-f((0,0)}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{0}{t}\right) = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

Conclusion : f est dérivable suivant tout vecteur.

c) Différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$f(x,y) = \frac{x^3 e^{xy}}{x^2+y^2}$ avec $f_1(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ et $f_2(x,y) = e^{xy}$
f_1 est une fonction rationnelle donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
f_2 est une fonction exponentielle différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
Conclusion : f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Scanné avec CamScanner

En $(0,0)$

$$\varepsilon(h)=\frac{1}{\|h\|}[f(a+h)-f(a)-h_1\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-h_2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)]$$

$$f(x,y)=\frac{x^3e^{xy}}{x^2+y^2}\ si\ (x,y)=(0,0) et\ f(0,0)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{x^3}{x^2}-0}{x}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to0}\left(\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}\right)=\lim_{y\to0}\left(\frac{\frac{0}{y^2}-0}{y-0}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

$$\varepsilon(h)=\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}[\frac{h_1^3e^{h_1h_2}}{h_1^2+h_2^2}-h_1]\ \text{avec}\quad e^{h_1h_2}\approx1$$

$$\varepsilon(h)=\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}[\frac{h_1^3-h_1^3-h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2}]$$

$$\varepsilon(h)=\frac{-1}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}(h_1h_2^2)$$

Posons $h_1=h_2\Rightarrow\ \varepsilon(h)=\frac{-1}{(2h_1^2)^{\frac{3}{2}}}(h_1^3)=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Ainsi $\lim_{h\to0}\varepsilon(h)\neq0$

Alors f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

2) Dérivée partielle seconde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^4e^{xy}(x^2+y^2)-2yx^7e^{xy}}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x^2.\ \text{Donc}\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right)=\lim_{y\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{(3x^2e^{xy}+yx^3e^{xy})(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=0.\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\lim_{y\to0}\frac{0}{y}=0$$

On a $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ alors d'après l'égalité de Schwartz les différentielles seconde existe.

Scanné avec CamScanner

$g(x,y) = (x^2 + y^2) - 8xy$

- Déterminons les points critiques

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x(x^2 + y^2) - 8y$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4y(x^2 + y^2) - 8x$$

Résolvons le système donné par ses dérivées

$$\begin{cases} 4x(x^2 + y^2) - 8y = 0 \ ① \\ 4y(x^2 + y^2) - 8x = 0 \ ② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x^2 + y^2) = 2y \ ① \\ y(x^2 + y^2) = 2x \ ② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2) = \frac{2}{x}y \ ① \\ (x^2 + y^2) = \frac{2}{y}x \ ② \end{cases}$$

$① = ② \Rightarrow \frac{2y}{x} = \frac{2x}{y}$

$\Rightarrow y^2 - x^2 = 0$

$\Rightarrow (y - x)(y + x) = 0$

$\Rightarrow x = y \ ou \ x = -y$

$1^{er} \ cas \ x = y$

$① \Rightarrow x \times 2x^2 = 2x$

$\Rightarrow 2x^3 - 2x = 0$

$\Rightarrow 2x(x^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \ ou \ x = 1 \ ou \ x = -1$

Les points critiques correspondant sont :

$A(1,1), B(-1,-1) \ et \ C(0,0)$

$2^{eme} \ cas$

$② \Rightarrow y \times 2y^2 = -2y$

$\Rightarrow 2y^3 + 2y = 0$

$\Rightarrow 2y(y^2 + 1) = 0$

$\Rightarrow y = 0 \ ou \ y^2 + 1 = 0$ est impossible.

Le point critique est : $D(0,0)$.

Conclusion : Les points critique sont : $A(1,1), B(-1,-1) \ et \ C(0,0)$.

- Existence d'extrema

g est une fonction polynôme donc elle est de classe C^∞. En particulier, g est de classe C^2.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 + 4y^2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 + 4x^2$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) = 8xy - 8$

- Le type d'extrema
- Au point $A(1,1)$

$$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1) = 16 \\ t = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,1) = 16 \\ s = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,1) = 0 \end{cases}$$

On a : $s^2 - rt = -256 < 0, g$ présente un extremum relatif strict en $(1,1)$.

- Au point $B(-1,-1)$

$$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(-1,-1) = 16 \\ t = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(-1,-1) = 16 \\ s = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(-1,-1) = 0 \end{cases}$$

On a : $s^2 - rt = -256 < 0, g$ présente un extremum relatif strict en $(-1,-1)$.

- Au point $C(0,0)$

$$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) = 0 \\ t = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0) = 0 \\ s = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) = -8 \end{cases}$$

On a : $s^2 - rt = 64 > 0, g$ ne présente pas d'extremum en $(0,0)$. Mais il existe un point col.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB - Cocody Année Universitaire 2018-2019
UFR Mathématique-Informatique

LICENCE 2
UE : Fonction de plusieurs variables réelles
ECUE : Topologie et Cacul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
Examen Seconde Session

Exercice 1 (10 points)

1. a) $\mathring{A} \cap F_r(A) = \mathring{A} \cap (\overline{A} \cap C_{\mathbb{R}^n}^{\mathring{A}}) = \overline{A} \cap (\mathring{A} \cap C_{\mathbb{R}^n}^{\mathring{A}}) = \overline{A} \cap \emptyset = \emptyset$

   b) $\mathring{A} \cup F_r(A) = \mathring{A} \cup (\overline{A} \cap C_{\mathbb{R}^n}^{\mathring{A}}) = (\mathring{A} \cup \overline{A}) \cap (\mathring{A} \cup C_{\mathbb{R}^n}^{\mathring{A}}) = (\mathring{A} \cup \overline{A}) \cap \mathbb{R}^n =$
   $= \mathring{A} \cup \overline{A} = \overline{A}$ car $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$
   Si A est fermée, alors $\overline{A} = A$. Donc $\mathring{A} \cup F_r(A) = A$

   c) $F_r(\mathring{A}) = \overline{A} \cap \overline{C_{\mathbb{R}^n}^{A}} = \mathring{\overline{A}} \cap \overline{C_{\mathbb{R}^n}^{A}}$.
   ⋆ Supposons A ouverte. Alors $C_{\mathbb{R}^n}^{A}$ est fermé.
   Donc $F_r(\mathring{A}) = \mathring{\overline{A}} \cap C_{\mathbb{R}^n}^{\mathring{A}} = \mathring{\overline{A}} \cap C_{\mathbb{R}^n}^{\overline{A}}$.
   Or $\mathring{\overline{A}} \subset \overline{A} \Rightarrow F_r(\mathring{A}) \subset \overline{A} \cap C_{\mathbb{R}^n}^{\overline{A}} = \emptyset \Rightarrow F_r(\mathring{A}) = \emptyset$.
   ⋆ Supposons A fermée. Alors, $\overline{A} = A$
   Donc $F_r(\mathring{A}) = \mathring{A} \cap \overline{C_{\mathbb{R}^n}^{A}} = \mathring{A} \cap C_{\mathbb{R}^n}^{A}$. Or $C_{\mathbb{R}^n}^{A} \subset C_{\mathbb{R}^n}^{\mathring{A}}$.
   Alors $F_r(\mathring{A}) \subset \mathring{A} \cap C_{\mathbb{R}^n}^{\mathring{A}} = \emptyset \Rightarrow F_r(\mathring{A}) = \emptyset$.

   d) $F_r(C_{\mathbb{R}^n}^{A}) = \overline{C_{\mathbb{R}^n}^{A}} \cap \overline{A} = \overline{A} \cap \overline{C_{\mathbb{R}^n}^{A}} = F_r(A)$

   e) $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$
   $\star \mathring{A} = \mathring{[0,1]} \cap \mathring{\mathbb{Q}} =]0,1[\cap \mathring{\mathbb{Q}}$.
   Or $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall r > 0,]x - r, x + r[\not\subset \mathbb{Q}$ car contient des irrationnels.
   Donc $\mathring{Q} = \emptyset$.
   Alors $\boxed{\mathring{A} = \emptyset.}$
   $\star F_r(A) = \overline{A} \cap C_{\mathbb{R}}^{\mathring{A}} = \overline{A} \cap \mathbb{R} = \overline{A}$
   $\overline{A} = \overline{[0,1] \cap \mathbb{Q}} \subset \overline{[0,1]} \cap \overline{\mathbb{Q}} = [0,1] \cap \mathbb{R} = [0,1]$; et $\forall x \in [0,1], \forall r > 0,]x - r, x + r[\cap ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \neq \emptyset$ car contient des rationnels éléments de $[0,1]$. Alors $x \in \overline{A}$. Donc $[0,1] \subset \overline{A}$.
   Finalement $\overline{A} = [0,1]$ et $\boxed{F_r(A) = [0,1]}$

2. a) Soit $x \in A \cap \overline{B}$.
   $\forall V \in \mathcal{V}(x), A \cap V \in \mathcal{V}(x)$ car A ouvert contenant x est aussi un voisinage de x.
   Comme $x \in \overline{B}$, alors $(A \cap V) \cap B \neq \emptyset$. Donc $(A \cap B) \cap V \neq \emptyset$.
   Ainsi $x \in \overline{A \cap B}$. Donc $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

   b) (i) $A \cap B \subset A \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A}$
   $A \cap B \subset B \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{B}$

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

Donc $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$ (1)
$F_r(A)\cap F_r(B)=\emptyset\Leftrightarrow(\overline{A}\cap\overline{C^A_{\mathbb{R}^n}})\cap(\overline{B}\cap\overline{C^B_{\mathbb{R}^n}})=\emptyset\Leftrightarrow(\overline{A}\cap\overline{B})\cap(\overline{C^A_{\mathbb{R}^n}}\cap\overline{C^B_{\mathbb{R}^n}})=\emptyset$
Soit $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$.
Alors $x\notin\overline{C^A_{\mathbb{R}^n}}\cap\overline{C^B_{\mathbb{R}^n}}=C^{\mathring{A}}_{\mathbb{R}^n}\cap C^{\mathring{B}}_{\mathbb{R}^n}=C^{\mathring{A}\cup\mathring{B}}_{\mathbb{R}^n}$. Donc $x\in\mathring{A}\cup\mathring{B}$.
* Si $x\in\mathring{A}$, comme $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$, alors $x\in\mathring{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}\subset\overline{A\cap B}$
* Si $x\in\mathring{B}$, alors $x\in\mathring{B}\cap\overline{A}\subset\overline{B\cap A}\subset\overline{B\cap A}$.
Donc $x\in\overline{A\cap B}$.
Ainsi $\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$ (2)
(1) et (2) $\Rightarrow\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cap B}$ si $F_r(A)\cap F_r(B)=\emptyset$.

(ii) $F_r(A)\cap F_r(B)=\emptyset\Rightarrow F_r(C^A_{\mathbb{R}^n})\cap F_r(C^B_{\mathbb{R}^n})=\emptyset$
$\Rightarrow\overline{C^A_{\mathbb{R}^n}}\cap\overline{C^B_{\mathbb{R}^n}}=\overline{C^A_{\mathbb{R}^n}\cap C^B_{\mathbb{R}^n}}\Rightarrow C^{\mathring{A}}_{\mathbb{R}^n}\cap C^{\mathring{B}}_{\mathbb{R}^n}=\overline{C^{A\mathring{\cup}B}_{\mathbb{R}^n}}$
$\Rightarrow C^{\mathring{A}\cup\mathring{B}}_{\mathbb{R}^n}=C^{A\mathring{\cup}B}_{\mathbb{R}^n}\Rightarrow A\mathring{\cup}B=\mathring{A}\cup\mathring{B}$.

Exercice 2 (10 points)

1) $f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$
a) * Sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ f est continue car est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas **(0.5 points)**
* Au point $(0,0)$
En coordonnées polaires $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$
$f(x,y)=r^2\cos\theta\sin\theta\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=F(r,\theta)$
$|F(r,\theta)|\leq 2r^2\Rightarrow\lim_{r\to0}F(r,\theta)=0$
Alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$
Donc f est continue au point $(0,0)$ **(0.5 points)**
Finalement f est continue sur $\mathbb{R}^2$
b) * Sur $\mathbb{R}\{(0,0)\}$ f est différentiable car fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas **(0.5 points)**
*Au point $(0,0)$
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$ **(0.25 points)**
$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$ **(0.25 points)**
Soit $\varepsilon(h)=\frac{f(0+h)-f(0,0)-h_1\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-h_2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\|h\|}$ où $h=(h_1,h_2)$
$\varepsilon(h)=\frac{f(h)}{\|h\|}=h_1h_2\frac{h_1^2-h_2^2}{h_1^2+h_2^2}\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ avec $\|h\|=\sqrt{h_1^2+h_2^2}$
En coordonnées polaires $\begin{cases}h_1=r\cos\theta\\h_2=r\sin\theta\end{cases}$
$\varepsilon(h)=r\cos\theta\sin\theta\left(\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\right.$
$|\varepsilon(h)|\leq 2r$ et $\lim_{r\to0}2r=0$
Alors $\lim_{h\to0}\varepsilon(h)=0$. Donc f est différentiable en $(0,0)$ **(0.5 points)**
Finalement f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$

VALIDUR LMD

Scanné avec CamScanner

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + 4\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$ **(0.25 points)**

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2} = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 4\frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$ **(0.25 points)**

* Sur $\mathbb{R}^2\{(0,0)\}$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues car fonctions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas. **(0.5 points)**

* En $(0,0)$. En coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = r\sin\theta(\cos^4\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta - \sin^4\theta)$

$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 6r$ et $\lim_{r\to 0} 6r = 0$

Alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue au point $(0,0)$ **(0.25 points)**

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -r\cos\theta(\sin^4\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta - \cos^4\theta)$

$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq 6r$ et $\lim_{r\to 0} 6r = 0$

Alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue au point $(0,0)$ **(0.25 points)**

Finalement $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

d)

$\frac{\partial f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x} = 0$ **(0.5 points)**

$\frac{\partial f}{\partial y^2}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = 0$ **(0.5 points)**

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = -1$ **(0.5 points)**

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 1$ **(0.5 points)**

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ donc f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ d'après le **théorème de schwarz (0.5 points)**

2) a)

$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}(2x^4 - 2y^4) = 2\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}(x^2+y^2)(x^2-y^2) = 2\frac{xy}{x^2+y^2}(x^2-y^2) = 2f(x,y)$

Donc f est une solution de (E) **(0.25 points)**

b) $\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = x + y \end{cases}$

$g(x,y) = G(u,v) = (G\circ\varphi)(x,y)$ où $\varphi(x,y) = (u,v)$

Donc $J_g(x,y) = J_G(\varphi(x,y)) \times J_\varphi(x,y) = J_G(u,v) \times J_\varphi(x,y)$ **(0.25 points)**

Alors $\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{x}\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial v} \end{cases}$

En remplaçant dans l'équation (E), on obtient :

$\boxed{v\frac{\partial G}{\partial v}(u,v) = 2G(u,v)}$ (E_1) **(1.5 points)**

VALIDER LMD

Scanné avec CamScanner

c) $(E_1) \Leftrightarrow \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{2}{v} \Rightarrow \ln|G| = \ln(v^2) \Rightarrow \boxed{G(u,v) = k(u) \times v^2}$ **(0.5 points)**

Donc $\boxed{g(u,v) = k(\frac{y}{x}) \times (x+y)^2}$ **(0.5 points)**

d) $f(x;y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \left(\frac{y}{x}\right)\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \times x^2$

$f(x,y) = k\left(\frac{y}{x}\right) \times (x+y)^2$ où $\boxed{k(u) = u \times \frac{1-u^2}{1+u^2} \times \frac{1}{(1+u)^2}}$ **(0.5 points)**

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$: 2019 – 2020

Exercice 2

1) a) Déterminons les valeurs de λ pour lesquelles f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Les fonctions $x \to f(x,y)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Etude en $x_0 = (0,0)$.

f est continue x_0 si et seulement si :

$\lim_{(x,y)\to x_0} f(x,y) = f(0,0) = 0.$

Posons $\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsin(\theta) \end{cases}$ .Alors quand $(x,y) \to x_0, r \to 0$ alors,

$\lim_{(x,y)\to x_0} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r,\theta)$

$\lim_{(x,y)\to x_0} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{(rcos\theta)(r^2 \sin^2\theta)}{(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^\lambda}$

$\lim_{(x,y)\to x_0} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r^{3-2\lambda} cos\theta \sin^2\theta.$

car $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Et $\lim_{r\to 0} r^{3-2\lambda} cos\theta \sin^2\theta = 0$ si :

$3 - 2\lambda > 0 \Rightarrow \frac{3}{2} > \lambda \Rightarrow \lambda \in]-\infty; \frac{3}{2}[$

Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si $\lambda \in]-\infty; \frac{3}{2}[$

b) La fonction $x \to f(x,y)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Etude en $x_0 = (0,0)$

f est différentiable en x_0 s'il existe une application linéaire continue L de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Telle que $\forall\, h \in \mathbb{R}^2, f(x_0 + h) - f(x_0) = L(h) + \|h\| e(h)$ avec $\lim_{h\to 0} e(h) = 0.$

C'est-à-dire :

$$\lim_{h\to(0,0)} e(h) = \lim_{h\to(0,0)} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{\|h\|} \right) = 0$$

Posons $h = (l,k)$ alors

$f(x_0 + h) = f(l,k)$ et $f(x_0) = 0$

Ainsi pour que : f soit différentiable, il faut que :

$$\lim_{h\to(0,0)} \left(\frac{f(l+h) - L(h)}{\|h\|} \right) = 0$$

Déterminons $L(h)$

$L(h) = J_f h$ avec $J_f = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \quad \frac{\partial f(x_0)}{\partial y}\right)$

Où J_f est la matrice jacobienne de f en x_0.

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)}{x} = 0$$

Scanné avec CamScanner

$\frac{\partial f(x_0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y} = 0$

d'où $L(h) = 0$.

Alors : $\lim_{(l,k)\to x_0} e(l,k) = \lim_{(l,k)\to x_0}\left(\frac{f(l,k)}{\sqrt{l^2+k^2}}\right)$

Posons $\begin{cases} l = r\cos(\theta) \\ k = r\sin(\theta) \end{cases}$

Quand $(l,k)\to x_0, r\to 0$

Donc $\lim_{(l,k)\to x_0}\left(\frac{f(l,k)}{\sqrt{l^2+k^2}}\right) = \lim_{r\to 0}\left(\frac{lk^2}{(l^2+k^2)\sqrt{l^2+k^2}}\right)$

$$\lim_{(l,k)\to x_0}\left(\frac{f(l,k)}{\sqrt{l^2+k^2}}\right) = \lim_{r\to 0}\left(\frac{r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{r^{2\lambda+1}}\right)$$

$$\lim_{(l,k)\to x_0}\left(\frac{f(l,k)}{\sqrt{l^2+k^2}}\right) = \lim_{r\to 0}\cos(\theta)\sin^2(\theta)\ r^{2-2\lambda}$$

Pour que : $\lim_{r\to 0}\cos(\theta)\sin^2(\theta)\ r^{2-2\lambda} = 0$, il faut que :

$$2-2\lambda > 0 \Rightarrow 2 > 2\lambda \Rightarrow \lambda \in]-\infty, 1[$$

Conclusion : f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Si $\lambda \in]-\infty; 1[$

c) Déterminons les valeurs de λ pour lesquelles f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

On a :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y^2(x^2+y^2)^\lambda - 2\lambda x^2y^2(x^2+y^2)^{\lambda-1}}{(x^2+y^2)^{2\lambda}}$$

Après calcul on a :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x^2y^2+y^4-2\lambda x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\lambda+1}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2x^3y+2xy^3-2\lambda xy^3}{(x^2+y^2)^{\lambda+1}}$$

Les dérivées partielles de f par rapport à x et y sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0,0\}$

Etude en (0,0)

Calculons $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

Posons $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}\ \theta \in \mathbb{R}$

Quand $(x,y)\to(0,0)$, $\quad r\to 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{r\to 0}\left(\frac{r^4(\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta-2\lambda\cos^2\theta\sin^2\theta)}{r^{2\lambda+2}}\right)$$

Scanné avec CamScanner

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{r\to 0}\left(r^{1-\lambda}(\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta - 2\lambda\cos^2\theta\sin^2\theta)\right)$$

Pour que :

$$\lim_{r\to 0}\left(r^{1-\lambda}(\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta - 2\lambda\cos^2\theta\sin^2\theta)\right) = 0$$

Il faut que :

$1-\lambda > 0 \Rightarrow 1 > \lambda \quad (1)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{r\to 0}\left(r^{1-\lambda}(2\cos^3\theta\sin\theta + 2\cos\theta\sin^3\theta - 2\lambda\cos\theta\sin^3\theta)\right)$$

Pour que $\lim_{r\to 0}\left(r^{1-\lambda}(2\cos^3\theta\sin\theta + 2\cos\theta\sin^3\theta - 2\lambda\cos\theta\sin^3\theta)\right) = 0$

Il faut que : $1-\lambda > 0 \Rightarrow 1 > \lambda \quad (2)$

De (1) et (2), on déduit que :

f est de classe C^1 si $\lambda \in]-\infty; 1[$.

d) **Montrons que si $\lambda = 1$ alors f est dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur sans être différentiable en ce point.**

Pour $\lambda = 1$, $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

Soit $V = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^{*2}$

On a : $\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(0,0)+tv)-f(0,0)}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(tp_1,tp_2)}{t}\right)$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{t^3p_1p_2^2}{t(t^2(p_1^2+p_2^2))}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{p_1p_2^2}{(p_1^2+p_2^2)}\right) = \frac{p_1p_2^2}{(p_1^2+p_2^2)}$$

donc, f est dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur mais d'après 2) , $1 \notin]-\infty; 1[$. Alors f n'est pas différentiable.

Conclusion : f est dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur sans être différentiable en $(0,0)$.

VALEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny **Année 2015-2016**

UFR MI

Licence 2 de Mathématiques et Informatique

Examen de Mécanique Quantique

Durée : 2 heures

(Aucun document n'est autorisé)

Exercice 1 :

1- Définir l'effet photoélectrique et la longueur d'onde seuil.

La cathode d'une cellule photoélectrique reçoit un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde $\lambda_1 = 0{,}405\mu m$ et débite un courant d'intensité i que l'on peut annuler en portant l'anode de la cellule à un potentiel $-V_0 = -1{,}26V$.

2- Calculer l'énergie cinétique T des électrons émis et comparer leur vitesse à celle de la lumière.

3- Calculer l'énergie d'extraction W_e de la cathode et le potentiel d'extraction V_e défini par $W_e = |q_e|V_e$, où q_e est la charge d'un électron.

4- La cathode reçoit à présent un faisceau de rayons X de longueur d'onde $\lambda_2 = 0{,}1\text{Å}$. Observe-t-on encore le phénomène d'effet photoélectrique ? justifier votre réponse. Dans le cas d'une réponse affirmative, comparer la vitesse des électrons émis à celle de la lumière.

On donne : $h = 6{,}626.10^{-34}Js$; $e = 1{,}6.10^{-19}\text{C}$; $m_0c^2 = 0{,}511MeV$, $c = 3.10^8 m/s$

$$m_0 = m_e = 9{,}1.10^{-31}kg; 1eV = 1{,}6.10^{-19}J$$

Exercice 2 :

On considère dans un espace à une dimension la fonction d'onde d'une particule dont l'expression analytique est : $\varphi(x) = \alpha x e^{-\beta x^2}$.

1- Donner l'expression de la densité de probabilité de trouver la particule entre x et $x + dx$.

2- Donner les dimensions de α et de β.

3- Ecrire la condition de normalisation de la fonction d'onde et donner la relation que doivent satisfaire les constantes α et β pour que la fonction d'onde soit normée. Rappeler le sens physique de cette normalisation.

4- Calculer $\langle x \rangle$ et Δx, commenter le sens physique du résultat.

5- Calculer $\langle p \rangle$ et Δp.

6- La relation d'incertitude de Heisenberg est-elle satisfaite ?

7- Soit T l'opérateur associé à l'énergie cinétique. Déterminer son expression analytique.

8- Si l'énergie potentielle de la particule vaut $\frac{1}{2}kx^2$ où k est une constante positive, écrire l'expression de l'hamiltonien Het calculer $H\varphi$. Conclure.

On donne :

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ J_{n+2} = -\dfrac{dJ_n}{d\alpha} \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$$I_m(a) = \int_0^{+\infty} x^m e^{-ax^2} dx \; ; \; I_0(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}; \; I_1(a) = \frac{1}{2a} \; ; \; I_2(a) = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}; \; I_3(a) = \frac{1}{2a^2};$$

$$I_4(a) = \frac{3}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}; \; p = -i\hbar\frac{d}{dx}; \; \langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x) A \varphi(x) dx \; ; \Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

Exercice 3 :

Soit un système physique dont l'espace des états à trois dimensions est muni de la base orthonormée $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$. On définit dans cette base un opérateur linéaire A tel que :

$$A|v_1\rangle = a|v_1\rangle; A|v_2\rangle = ia|v_3\rangle; A|v_3\rangle = -ia|v_2\rangle \quad ; a \in \mathbb{R}$$

1- L'opérateur A est-il une observable ? Justifier votre réponse.

2- A l'instant initial $t = 0$, le système se trouve dans l'état $|\Psi(0)\rangle = |v_1\rangle$

   a- On mesure la grandeur physique associée à A à cet instant. Quels résultats peut-on obtenir et avec quelles probabilités?

   b- Dans quel état $|\Psi'\rangle$ est le système immédiatement après cette mesure. Justifier votre réponse sans faire de calculs.

3- On considère un vecteur quelconque $|\Phi\rangle$ et un scalaire complexe λ. Soit le vecteur $|\Phi_c\rangle = A|\Phi\rangle$. Quel est le conjugué hermitique du vecteur $|\Phi_c\rangle$. Déterminer le bra correspondant au ket $|\varphi\rangle = \lambda|\Phi_c\rangle$.

4- Soit J un opérateur linéaire. L'action de J sur $|v_1\rangle$ donne un ket colinéaire à $|v_2\rangle$ d'un facteur β ($\beta \in \mathbb{C}$). Ecrire l'équation correspondant à cette action.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Licence 2 de Mathématiques et Informatique
Examen de Mécanique Quantique (1ère session)
Durée : 1 heure 30 minutes
(Aucun document n'est autorisé)

Exercice 1 :

a- Un photon incident de longueur d'onde λ interagit avec un électron libre au repos par effet Compton. Le photon diffusé suivant une direction perpendiculaire à celle du photon incident a une longueur d'onde plus grande que celle du photon incident ($\Delta\lambda = 2{,}4\mu m$). Si un photon de longueur d'onde 3λ interagit de la même manière avec un électron en diffusant le photon dans une direction faisant un angle de 180° avec celle du photon incident, quel est l'écart de longueur d'onde entre les photons incident et diffusé. On donne: $\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$.

b- Les électrons éjectés d'un métal lorsque celui-ci est éclairé par une lumière de longueur d'onde $\lambda = 50nm$ dans le vide, ont une énergie cinétique maximale égale à 12,4eV. Calculer en nm la longueur d'onde maximale de la lumière notée λ_{max} qui peut éjecter des électrons de ce métal. On donne : $hc = 1{,}9878.10^{-25} J.m$, $1eV = 1{,}6.10^{-19} J$.

Exercice 2 :

L'état d'une particule libre de masse m dans un espace de dimension 1 est décrit par la fonction d'onde φ suivante :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x < -b \\ \beta & -b \le x \le 3b \\ 0 & x > 3b \end{cases} \quad où\ \beta\ est\ une\ constante\ positive\ réelle$$

1- Représenter la fonction d'onde φ.
2- Déterminer la constante β.
3- Quelle est la probabilité qu'une mesure de la position de la particule révèle qu'elle se situe dans la région $[0, b]$?
4- Calculer $\langle x \rangle$ *et* $\langle x^2 \rangle$.
5- Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour cette particule.

Exercice 3

On considère un système physique dont l'espace bidimensionnel des états est rapporté dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$. Dans cet espace, les vecteurs propres de l'hamiltonien H sont :

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|u_1\rangle + 2|u_2\rangle) \text{ et } |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2|u_1\rangle + |u_2\rangle)$$

Ces vecteurs propres sont respectivement associés aux valeurs propres $E_1 = a$ *et* $E_2 = b$ $(avec\ a < b)$

1- Déterminer la matrice de H dans la base de ses vecteurs propres $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$.
2- Trouver la matrice de H dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$.
3- Pour ce système, on définit une observable F telle que : $F = |u_1\rangle\langle u_1| + \varepsilon|u_2\rangle\langle u_2|$.

a- Exprimer les vecteurs $F|u_1\rangle$ et $F|u_2\rangle$ en fonction des vecteurs de base $|u_1\rangle$ et $|u_2\rangle$.

b- Donner la matrice de F, puis déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres associés.

4) On mesure l'observable F et on obtient la valeur ε.

a- Dans quel état se trouve le système immédiatement après la mesure? Justifier la réponse.

b- On mesure ensuite l'énergie. Quelles valeurs peut-on obtenir et avec quelles probabilités?

5) A présent, on mesure d'abord l'énergie et on obtient la valeur la plus élevée. Immédiatement après, on mesure la grandeur physique associée à l'observable F.

a- Quelles sont les résultats possibles?

b- Calculer les probabilités associées à chacun de ces résultats?

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny Année académique 2017-2018
UFR MI

Examen de mécanique quantique – Licence 2 MI (1ère session)
02 heures (aucun document n'est autorisé)

Exercice 1

A- Calculer les commutateurs suivants : $\left[z^n \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial^n}{\partial z^n}\right]\left[z - \frac{\partial}{\partial z}, z^n\right]$

B- La fonction d'onde $\varphi(z) = \beta e^{-az^2}$ décrit l'état fondamental d'un oscillateur harmonique unidimensionnel. β et a sont de constantes réelles.

a- A partir d'une démonstration claire et concise, trouver l' unité de la constante a.

b- Rappeler la raison physique de la normalisation des fonctions d'onde.

c- Déterminer l'expression de la constante β et en déduire son unité.

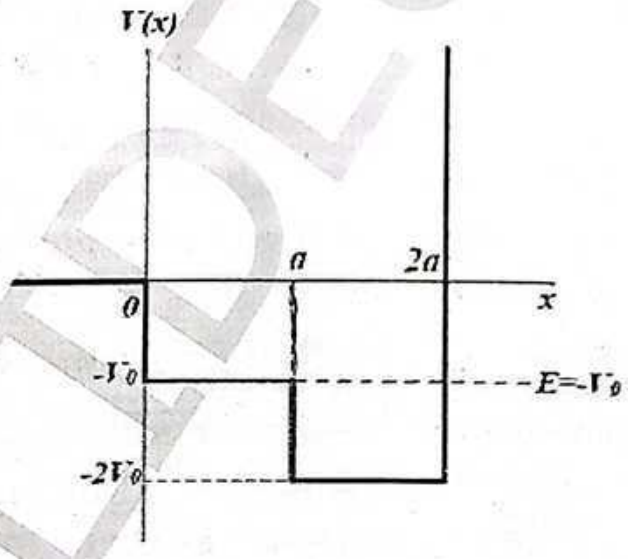
d- Quelle est l'énergie correspondant à la fonction d'onde $\varphi(z)$. Justifier votre réponse.

On donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-bk^2)\,dk = \sqrt{\pi/b} \quad et \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-k^2)\,dk = \sqrt{\pi}$$

Exercice 2

Une particule de masse m est placée dans un potentiel unidimensionnel $V(x)$ décrit par la représentation graphique ci-dessous où $V_0 > 0$.



L'objectif principal dans cet exercice est la détermination de la valeur minimale V_{0min} de V_0 pour laquelle un état propre lié se produit à une énergie $E = -V_0$.

a- Déterminer l'expression du potentiel $V(x)$ dans chaque région de l'espace définie suivant les valeurs de x.

b- On considère que la particule se trouve dans un état propre d'énergie $E = -V_0$. Ecrire les solutions (**ayant un sens physique**) de l'équation de Schrödinger notées $\phi_n(x)$ dans toutes les régions de l'espace (n désigne le numéro de la région de l'espace et on posera

NB : le non-respect des notations de l'énoncé annule la réponse

Scanné avec CamScanner

$k^2 = 2mV_0/\hbar^2$, la numérotation des régions se fera de la gauche vers la droite avec les chiffres romains (I, II, ...)).

c- Ecrire les conditions de raccordement ou conditions de continuité et montrer que : $\tan(ka) = -1 - ka$.

d- A partir du tableau ci-dessous, trouver la solution de l'équation : $\tan(y) + y + 1 = 0$. En déduire V_{0min} en fonction de m, a et $\hbar$.

$y\ (rad)$)	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3
$\tan(y)$	-34,2	-7,7	-4,3	-2,9	-2,2	-1,7	-1,4	-1,1

Exercice 3

On considère un système physique dont l'espace des états à trois dimensions est rapporté à la base orthonormée $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$. L'hamiltonien du système est donné par la relation $H = \varepsilon_0(J^2 + K^2)$ où les opérateurs J et K sont tels que :

$$\begin{cases} J|e_1\rangle = |e_1\rangle \\ J|e_2\rangle = 0 \\ J|e_3\rangle = -|e_3\rangle \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} K|e_1\rangle = |e_2\rangle \\ K|e_2\rangle = -|e_1\rangle + |e_3\rangle \\ K|e_3\rangle = -|e_2\rangle \end{cases} \quad avec\ \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$$

A-

a- Déterminer la matrice associée à l'opérateur H

b- En déduire l'action de l'opérateur H sur les vecteurs de la base $\{|e_l\rangle\}_{l=1,2,3}$

c- Déterminer les valeurs propres $\{E_l\}$ et les états propres normés $\{|\psi_l\rangle\}$ de H. $(E_l < E_{l+1})$

B-

On considère à présent l'opérateur B représenté dans la base $\{|e_l\rangle\}$ par la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a- Déterminer la matrice associée à l'opérateur B dans la base de ses vecteurs propres que l'on notera $\{|\Lambda_i\rangle\}_{i=1,2,3}$ associés respectivement aux valeurs propres $\{\lambda_l\}_{l=1,2,3}$ $(\lambda_l < \lambda_{l+1})$.

b- Montrer que l'opérateur B est une observable.

c- On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le système se trouve dans l'état normé $|\phi(0)\rangle$ tel que :

$$|\phi(0)\rangle = 1/\sqrt{2}\,(|e_1\rangle - |e_3\rangle)$$

On mesure à cet instant la grandeur physique $\mathcal{B}$ représentée par l'opérateur B. Quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités. Sans effectuer de calculs, déterminer par simple raisonnement l'état du système immédiatement après la masure.

d- Quel est l'état $|\phi(t)\rangle$ système à un instant ultérieur $t > 0$? les états $|\phi(t)\rangle$ et $|\phi(0)\rangle$ décrivent-ils des états physiquement indiscernables ? justifier votre réponse.

e- Calculer les probabilités des différents résultats de mesure de la grandeur physique $\mathcal{B}$ à l'instant $t > 0$.

f- Calculer la valeur moyenne de l'opérateur B à l'instant $t > 0$

NB : le non-respect des notations de l'énoncé annule la réponse

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR MI

Année académique 2017-2018

Examen de mécanique quantique – Licence 2 MI (2ème session)
02 heures (aucun document n'est autorisé)

Exercice 1 : Effet photoélectrique

On considère une lampe (K_a) , munie de plusieurs filtres. Celle-ci éclaire une cathode en césium d'une cellule photoélectrique dont l'énergie d'extraction des électrons est $W_e = 2{,}15\ eV$. Pour chacune des longueurs d'onde, on mesure l'énergie cinétique maximale E_c des électrons émis (voir tableau ci-dessous).

λ (nm)	895	715	578	546	436	405
E_c (eV)	0	0	0	0,185	0,750	0,975

1- Définir les expressions suivantes : effet photo-électrique ; longueur d'onde seuil.

2- A partir de l'équation de la conservation d'énergies, montrer que l'énergie cinétique E_c des électrons est une fonction de $\frac{1}{\lambda}$.

3- a) Représenter graphiquement la fonction $E_c = f(\frac{1}{\lambda})$ à partir des valeurs du tableau.
On utilisera l'échelle suivante : $0{,}5\ 10^6\ m^{-1} \rightarrow 2$ cm et $0{,}185$ eV $\rightarrow 1$ cm
b) Déduire la valeur de la constante de Planck expérimentale que l'on notera h_{exp}.
c) Calculer l'erreur relative entre cette valeur h_{exp} et la valeur théorique h_{theo}. Conclure.

4- a) Calculer la valeur de la longueur d'onde théorique (notée λ_α) à partir de laquelle l'éclairement de la cellule engendre extraction des électrons.
b) Interpréter la présence des valeurs nulles de l'énergie cinétique dans le tableau.

5- Pour augmenter le courant de saturation, deux de nos collègues proposent les solutions suivantes :
- Solution 1 : augmenter le flux de photons atteignant la cathode.
- Solution 2 : diminuer la longueur d'onde de la lumière éclairant la cathode.
Laquelle des solutions est correcte ? Justifiez votre réponse.

On donne : $h_{theo} = 6{,}626.10^{-34} js$, $c = 3.10^8 ms^{-1}$, $e = 1{,}602.10^{-19} C$, $1eV = 1{,}602.10^{-19} j$

Exercice 2 : Puits de potentiel

On considère une particule dans un puits d'énergie finie avec une énergie potentiel $V(x)$ dont l'expression est donnée ci-après :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ -2V_0 & -a \le x < 0 \\ -V_0 & 0 \le x < a \\ 0 & x \ge a \end{cases} \quad \text{où} \quad V_0 > 0$$

1- Représenter graphiquement le potentiel $V(x)$.

NB : le non-respect des notations de l'énoncé annule la réponse.

Scanné avec CamScanner

2- Quel est l'intervalle d'énergie E des états liés pour une particule dans ce potentiel ?

3- Pour une particule de masse m dans un état lié avec une énergie E, sa fonction d'onde, physiquement acceptable est de la forme $\phi_1(x) = Ae^{kx}$ pour la région 1 $(x < -a)$.

a- Donner l'expression de k en fonction de la masse m et de l'énergie E.

b- Déterminer l'expression de la fonction d'onde physiquement acceptable notée $\phi_4(x)$ dans la région 4 $(x \geq a)$.

c- Déterminer les expressions des fonctions d'onde dans les régions 2 $(-a \leq x < 0)$ et 3 $(0 \leq x < a)$ de l'espace. On étudiera uniquement le cas où la particule se trouve dans l'étage supérieur du puits c'est-à-dire $-V_0 < E < 0$.

Exercice 3 : Les commutateurs

On considère les opérateurs suivants : $T = x^n \frac{\partial}{\partial x}$, $K = \frac{\partial^n}{\partial x^n}$ et $U = x - \frac{\partial}{\partial x}$

Calculer les commutateurs suivants :

1. $[T, K]$
2. $[T, U]$

Exercice 4 : Les postulats

Soit un opérateur A représentant une observable dont les états propres sont $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ associés respectivement aux valeurs propres a_1 et a_2 $(a_2 > a_1)$. On considère un second opérateur B représentant une observable dans la base orthonormée $\{|k\rangle, |n\rangle\}$ tel que :

$$B = b_1|k\rangle\langle k| + b_2|n\rangle\langle n|$$

Les états propres de l'observable A dans la base $\{|k\rangle, |n\rangle\}$ sont tels que :

$$|\psi_1\rangle = \frac{(3|k\rangle + 4|n\rangle)}{5} \quad et \; |\psi_2\rangle = \frac{(4|k\rangle - 3|n\rangle)}{5}$$

1- Calculer $B|k\rangle$ et $B|n\rangle$.

2- Donner l'expression de la matrice de l'observable B notée B dans la base $\{|k\rangle, |n\rangle\}$.

3- Ecrire la matrice de l'observable A notée A dans la base $\{|k\rangle, |n\rangle\}$.

4- Peut-on mesurer simultanément les observables A et B ? Justifier la réponse.

5- Que se passerait-il si les valeurs propres de l'observable B sont dégénérées ?

6- On mesure l'observable A et on obtient la plus petite valeur parmi celles attendues.

a- Quel est l'état du système immédiatement après la mesure ? Justifier la réponse.

b- Si l'on mesure par la suite B, quels résultats peut-on trouver, et avec quelles probabilités ?

NB : le non-respect des notations de l'énoncé annule la réponse.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny **Année académique 2018-2019**
UFR MI

Examen de mécanique quantique – Licence 2 MI (2ème session)
02 heures (aucun document n'est autorisé)

Exercice 1

Une cellule photoélectrique de potentiel extraction $V_0 = 4{,}125 Volts$ est éclairée par une source lumineuse monochromatique de puissance 0,33kW et de fréquence $\nu = 10^{10} MHz$.

1- Déterminer la fréquence seuil de cette cellule et justifier s'il y a effet photoélectrique.
2- Calculer le nombre de photons émis par cette source pendant une seconde ?
3- On suppose à présent que le seuil en fréquence de cette cellule vaut $\nu_0 = 10^{15} Hz$. Calculer la puissance correspondante au seuil en fréquence pendant un intervalle de temps $\Delta t = 1s$. Cette valeur représente-t-elle un seuil en puissance ? Justifier votre réponse.
4- Calculer l'énergie et l'impulsion des électrons éjectes de la cellule. En déduire la longueur d'onde associée à ces électrons. Le comportement de ces électrons peut-il être révélé par la mécanique classique ? Justifier votre réponse.
5- La mesure de la position de ces électrons fournit une incertitude absolue égale à 1Å. Calculer l'incertitude absolue minimale sur la mesure de son impulsion. Conclure.

Exercice 2

On considère une particule décrite par la fonction d'onde $\psi(x)$ définie par :

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}} \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right)$$

où A, p *et* ε sont des constantes réelles.

1- Quelle propriété la fonction $\psi(x)$ doit-elle vérifier ? Déterminer A.
2- Donner l'expression de la fonction densité de présence et représenter son allure
3- On mesure la position de cette particule, quelle est la probabilité pour qu'elle soit trouvée dans l'intervalle $\left[-\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}; \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right]$.

Exercice 3

Soit $|\varphi\rangle$ un ket défini dans l'espace des états d'un système physique de dimension trois rapporté à la base orthonormée $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ tel que :

$$|\varphi\rangle = |e_1\rangle + (1+i)|e_2\rangle + |e_3\rangle$$

1- Le ket $|\varphi\rangle$ est-il un vecteur d'état ? Justifier votre réponse.
2- Calculer dans la base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$, la matrice représentant l'opérateur projecteur P_φ sur le ket $|\varphi\rangle$. Ce projecteur est-il hermitique ? Justifier votre réponse.
3- On considère à présent l'hamiltonien H du système dont les vecteurs propres sont les vecteurs de la base associés tous à la même valeur propre $\mathcal{E}_0 = \hbar\omega_0$.

Scanné avec CamScanner

Sachant à $t = 0$, le système se trouve dans l'état normalisé $|\varphi\rangle$, déterminer l'état du système à l'instant t, noté $|\phi(t)\rangle$.

Les états du système aux instants $t = 0$ *et* $t > 0$ sont-ils physiquement discernables ? Justifier votre réponse.

4- Soit A une grandeur physique indépendante du temps associée au système.

a- Montrer que sa valeur moyenne n'évolue pas dans le temps.

b- A partir d'un théorème du cours que l'on précisera, justifier que les grandeurs A *et* H peuvent-être mesurées simultanément.

On donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} = \Big[\arctan z\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \pi;\ \arctan(-z) = -\arctan z \ \textit{et}\ \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Charge de l'électron : $-e = 1{,}6.10^{-19}\text{C}$; masse de l'électron : $m = 9{,}1.10^{-31}\text{kg}$; constante de Planck : $h = 6{,}626.10^{-34}\text{J.s.}$; vitesse de la lumière : $c = 3.10^{8}\text{m/s}$

On rappelle que le projecteur P_μ sur un ket $|\mu\rangle$ normé à l'unité est défini par :

$P_\mu = |\mu\rangle\langle\mu|$

NB : Le non-respect des notations de l'énoncé annule la réponse

VALIDE

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

Université Félix Houphouët Boigny
UFR MI

Année académique 2019-2020

Licence 2 de Mathématiques et Informatique
Examen de Mécanique Quantique
Durée : 02 heures (Aucun document n'est autorisé)

Exercice 1

A- Calculer les commutateurs suivants : $\left[\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial^n}{\partial y^n}\right], \left[\frac{\partial}{\partial y}, y^n\right]$

B- On considère un opérateur Q tel que :

$$Q = -i\hbar\frac{d}{dy}$$

1- Déterminer la fonction propre $\varphi(y)$ de Q associée à la valeur propre k.
2- La fonction $\varphi(y)$ est une fonction périodique de période p. Montrer que la valeur propre k de l'opérateur Q est quantifiée.

Exercice 2

Deux radiations électromagnétiques de longueur d'onde $\lambda_1 = 2537\text{Å}$ et $\lambda_2 = 5890\text{Å}$ illuminent une plaque métallique. Les énergies maximales des électrons éjectés pour chaque radiation ont respectivement pour valeurs $3{,}14eV$ et $0{,}36eV$.

1- Déterminer la valeur de la constante de Planck h
2- Calculer en joule l'énergie minimale susceptible d'extraire les électrons de la plaque métallique. En déduire la valeur de la longueur d'onde maximale notée λ_{max} qui permet de produire le phénomène de l'effet photoélectrique.
3- Définir la longueur d'onde.

Exercice 3

On considère un système quantique dont l'espace des états est rapporté à une base orthonormée $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$. Dans cet espace, l'hamiltonien H et un opérateur K sont définis comme suit :

$$H = \hbar\omega(|e_2\rangle\langle e_3| + |e_3\rangle\langle e_2|)$$
$$K|e_1\rangle = |e_1\rangle \;\; ; \;\; K|e_2\rangle = 0; \;\; K|e_3\rangle = |e_3\rangle$$

1- Déterminer la matrice associée à H (on calculera l'action de H sur les vecteurs de la base)
2- A l'instant $t = 0$, le système est dans l'état

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|e_1\rangle + |e_2\rangle + |e_3\rangle)$$

a- Quelles valeurs une mesure de l'énergie donnera-t-elle et avec quelles probabilités ? calculer la valeur moyenne de H.
b- On suppose que la mesure donne la valeur ayant la plus grande probabilité de présence. Quel est le résultat d'une nouvelle mesure de l'énergie immédiatement après. Justifier la réponse.
3- Ca[illegible]r l'état du système $|\psi(t)\rangle$ à l'instant $t > 0$.
4- Le système étant toujours dans l'état $|\psi(t)\rangle$, on mesure la grandeur physique K.
   a- Quelles sont les probabilités des différents résultats possibles ?
   b- On mesure la plus grande valeur, quel est son degré de dégénérescence ? déterminer l'état du système immédiatement après la mesure.
   c- Calculer la valeur moyenne de $\langle K\rangle(t)$ en fonction du temps. Quelle interprétation physique peut-on tirer pour la grandeur physique K.

On donne : $1\text{Å} = 10^{-10}m$; $1eV = 1{,}6.10^{-19}J$; $e = 1{,}6.10^{-19}C; c = 3.10^8 m/s$

NB : le non-respect des notations de l'énoncé annule la réponse.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR MI

Année académique 2020-2021

Examen de mécanique quantique-Licence 2 MI (1ère session)
02 heures (aucun document n'est autorisé)

Exercice 1

L'expression de la fonction d'onde d'une particule de masse m est :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \; si \; < 0 \\ Ae^{-x}(1-e^{-x}) \quad si \; x \geq 0 \end{cases} \; avec \; A \; une \; constante$$

1- Déterminer la valeur de A pour que la fonction $\varphi(x)$ soit normalisée.
2- a) Déterminer la densité de probabilité de présence de cette particule.
   b) Déduire la valeur de sa position pour laquelle cette densité de probabilité est maximale.
3- Calculer de la valeur moyenne de la position de cette particule notée $\langle x \rangle$.

Exercice 2

1- En quoi le phénomène de la diffusion d'un faisceau de rayons X par un électron cible est-elle différente du phénomène de l'effet photoélectrique ?
2- Au cours d'une expérience de diffusion Compton, le photon diffusé une énergie de 120 keV et l'électron de recul a reçu une énergie cinétique de 40 keV.
   a- Calculer l'énergie du photon incident et en déduire sa longueur d'onde.
   b- Quel est l'angle θ de diffusion du photon d'énergie 120 keV ?
3- Définir les termes suivants : Effet photoélectrique ; Fréquence seuil ; Energie seuil ; Potentiel d'arrêt.

Exercice 3

On considère un système physique dont l'espace des états est rapporté à la base orthonormée formée par les vecteurs propres $|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle$ de l'hamiltonien H. Les valeurs propres de H associées à ces vecteurs propres sont respectivement $E_1 = E_0 - h\omega, E_2 = E_0$ et $E_3 = E_0 + h\omega$.
On considère par ailleurs les opérateurs A, B et C tels que :

$$A|e_1\rangle = 0, \qquad A|e_2\rangle = \sqrt{2}|e_1\rangle, \qquad A|e_3\rangle = \sqrt{2}|e_2\rangle$$

1- Ecrire les matrices représentant C et H. Peut-on mesurer simultanément C et H? Justifier
2- On définit l'opérateur Q par la relation : $Q = \frac{1}{2}(A + B)$. Déterminer les états propres (valeurs et vecteurs propres) de Q.
3- Le système se trouve dans l'état où la valeur propre de C est égale à 1. Donner l'expression d'un vecteur correspondant à cet état. (on le notera $|\varphi\rangle$).

On mesure la grandeur physique associée à Q, quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ?

4- On suppose à présent (à l'instant $t = 0$) que le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle$) tel que :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|e_1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|e_2\rangle + \frac{1}{2}|e_3\rangle$$

Déterminer l'état $|\psi(t)\rangle$ du système à un instant t ultérieur. Calculer les valeurs moyennes $\langle Q\rangle(t)$ et $\langle C\rangle(t)$. Laquelle de ces observables est une constante du mouvement ? Justifier.
On donne: charge de l'électron: $-e = 1{,}6.10^{-19}C$; masse de l' électron : $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg: constante de Planck : $h = 6{,}626.10^{-34} j.s$; vitesse de la lumière : $c = 3.10^8 \; m/s$; $1eV = 1{,}6.10^{-19} j$

valeur moyenne d'un opérateur K: $\langle K\rangle_\varphi = \langle\varphi|K|\varphi\rangle = \int_\tau \varphi' K \varphi d\tau$

NB : Le non-respect des notations de l'énoncé annule la réponse

Scanné avec CamScanner

Correction de Mécanique Quantique
Exercice 1

1. Définir :
   - l'effet photoélectrique : c'est l'émmission des électrons
   - Longueur d'onde seuil : c'est la longueur maximale necessaire qu'il faut pour extraire des electrons à la cathode.
2. Calculons l'energie cinétique T

$$T = \frac{1}{2}mV^2 = qV_o = eV_o$$

avec $V_o = 1,26V$

$$T = eV_o$$

$AN : T = e \times 1,26V$ $T = 2,016 \times 10^{-19}$ J comparaison de V et c
de ce fait determinons V

$$T = \frac{1}{2}mV^2 \Longrightarrow V^2 = \frac{2T}{me}$$

$$V = \sqrt{\frac{2T}{me}}$$

AN :$V = 6,65 \times 10^5$

$$\frac{V}{c} = 0,0022 < 0,1$$

$$\frac{V}{c} < 0,1$$

D'où la mecanique classique(les electrons sont classiques)

Exercice2

1. l'expression de la densité de probabilité

$$dP = |\phi(x)|^2 dx$$

2. α et β sont des scalaires complexes
3. Condition de normalisation
   $\phi(x)$ est normée si $P = 1$
   or $dP = |\phi(x)|^2 dx \Longrightarrow P = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)^* \phi(x) dx$
   $\Longrightarrow P = |\alpha|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2\beta x^2} dx = |\alpha|^2 \times \frac{1}{8\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = 1$
   avec $2\beta = \alpha$
   $P = \frac{\alpha^2}{8}\sqrt{(\frac{\pi}{\beta^3})} = 1$
   $\Longrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^3} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi}}$
   $\Longrightarrow \frac{\alpha^4}{\beta^3} = \frac{64}{\pi} \Longrightarrow \alpha = \left(\beta^3 \frac{64}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$
4. Calculons $< x >$

$$< x >= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)^* x \phi(x) dx$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

5. calcul de$< p >$ et $< \Delta p >$

$$< p >= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)^* p \phi(x) dx$$

$$< p >= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)^* \times (-i\hbar \frac{d}{dx}\phi(x)) dx$$

avec $\frac{d}{dx}\phi(x) = \frac{d}{dx}(\alpha x e^{-\beta x^2}) = \alpha e^{-\beta x^2} - 2\alpha x^2 e^{-\beta x^2}$

d'où $< p >= i\hbar \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha x e^{-2\beta x^2} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} 2\alpha^2 \beta x^3 e^{-2\beta x^2} dx \right)$

$< p >= i\hbar \left(\alpha^2 \frac{1}{4\beta} - 2\alpha^2 \beta \times \frac{1}{8\beta^2} \right)$

$< p >= i\hbar \left(\frac{\alpha^2}{4\beta}(1-1) \right) = 0$

calculons $< p^2 >$

$< p^2 >= \int_0^{+\infty} \phi(x)^* p^2 \phi(x) dx = \int_0^{+\infty} \phi(x)^* (-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}\phi(x)) dx$

avec $\frac{d}{dx}\phi(x) = \frac{d}{dx}(\alpha x e^{-\beta x^2}) = \alpha e^{-\beta x^2} - 2\alpha x^2$

$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = -2\beta\alpha x e^{-\beta x^2} - \left(-4\beta^2 \alpha x^3 e^{-\beta x^2} + 4\beta \alpha x e^{-\beta x^2} \right)$

$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = -6\beta\alpha x e^{-\beta x^2} + 4\beta^2 \alpha x^3 e^{-\beta x^2}$

$< p^2 >= 6\hbar^2 \int_0^{+\infty} \beta \alpha x^2 e^{-\beta x^2} dx - 4\hbar^2 \int_0^{+\infty} \beta^2 \alpha x^4 e^{-\beta x^2} dx$

$< p^2 >= 6\hbar^2 \alpha\beta \times \frac{1}{8\beta} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} - 4\hbar^2 \alpha\beta^2 \times \frac{3}{32\beta^2} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}$

$< p^2 >= \frac{3}{8}\hbar^2 \alpha \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}$

$$< \Delta p >= \sqrt{< p^2 > - < p >^2} = \sqrt{< p^2 >} = \sqrt{\frac{3}{8}\hbar^2 \alpha \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}}$$

6. Le principe d'incertiude est satisfait.

7. L'expression de l'energie cinétique.

$$T = \frac{P^2}{2m}$$

8. L'expression de l'Hamiltonien si $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

$H = T + V \Longrightarrow H = \frac{P^2}{2m} + V(x)$

$H = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{P^2}{2m}$

9. Calculons $H\phi(x)$

$H\phi(x) = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + V(\phi(x))$

$$H\phi(x) = \frac{-\hbar^2}{2m}\left(-6\beta\alpha x e^{-\beta x^2} + 4\beta^2 \alpha x^3 e^{-\beta x^2} + \frac{1}{2}k x^3 e^{-\beta x^2} \right)$$

$$H\phi(x) = -\frac{\hbar^2}{m}\alpha\beta x \left[(2\beta x^2 - 3x) + \frac{1}{2}k x^3 e^{-\beta x^2} \right]$$

Exercice 3

1. A est -il une observable ?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ia \\ 0 & ia & 0 \end{pmatrix}$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

une observable est un opérateur linéaire et hermétique.
A est -il hermétique ?
De ce fait transposons A avec son conjugué

$$A^+ = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ia \\ 0 & ia & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow A^+ = A$ alors A est hermetique
donc observable

2. a) On mesure A,les valeurs possibles sont les valeurs propres de A

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -ia \\ 0 & ia & -\lambda \end{vmatrix}$$

$\det(A-\lambda I) = (a-\lambda)(\lambda^2 - a^2) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -a$ ou $\lambda_2 = a$
Calcul des probabilités
déterminons les valeurs propres pour $\lambda_1 = -a$

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & a & -ia \\ 0 & ia & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2ax = 0 \\ ay - iaz = 0 \\ iay + az = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = iz \end{cases}$$

$|\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x|v_1> + y|v_2> + z|v_3> |\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|v_2> + |v_3>)$
pour $\lambda_2 = a$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & -ia \\ 0 & ia & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x \in R \\ ay = -iaz \end{cases}$$

$|\phi_2 = |v_2>$
$|\phi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i|v_2> + |v_3>)$
les probabilités
$P(a) = |<\phi_2|\psi(0)>|^2 + |<\phi_3|\psi(0)>|^2$
$P(a) = 1$
$P(-a) = |<\phi_1|\psi(0)>|^2 = 0$
b)Le système immédiatement après la mesure est dans l'état $|v_1 >= |\phi_2 >$ car la probabilité la plus grande est pour la valeur $\lambda = a$

3. soit le vecteur $|\phi_c >= A|\phi >$ or $A|\phi >= \lambda|\phi >$ le conjugué hermetique de $|\phi_c >$ on a :
$(|\phi_c >= A|\phi >= \lambda|\phi >)^+$
$<\phi_c| = <\phi|A^+ = <\phi|\lambda^*$
Determinons le bras correspondant au ket $\phi >= \lambda|\phi_c >$
$<\phi| = <\phi_c|\lambda^* = <\phi_c|\lambda^*\lambda^*$
$<\phi| = <\phi_c|\lambda^2$

4. l'action de J sur $|v_1 >$
$J|v_1 >= \beta|v_2 >$

Scanné avec CamScanner

Correction mecanique quantique session 1 2016-2017

Exercice 1

a) On a : $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2,4\mu m$
$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c^2}(1-\cos\theta)$
Ici $\theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 1-\cos\theta = 1$
$\Longrightarrow \Delta\lambda = \frac{h}{m_0c^2} = 2,4\mu m$
$\Delta'\lambda = \lambda' - 3\lambda = \frac{h}{m_0c^2}(1-\cos\theta)$
$\theta = 180° \Longrightarrow \Delta'\lambda = 2\frac{h}{m_0c^2}$
$\Delta'\lambda = 2\Delta\lambda$

b) Si $h\nu \geq W_0$ or $\nu = \frac{c}{\lambda} \Longrightarrow \frac{hc}{\lambda} \geq W_0$
Alors il y a photoélectrique. $h\nu - W_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = E_{cmax}$
$\frac{hc}{\lambda} - W_0 = E_c \Longrightarrow W_0 = \frac{hc}{\lambda} - E_c$
$\frac{hc}{\lambda_{hc}} = W_0$
$\lambda_{max} \leq \frac{hc}{W_0}$
$\boxed{\lambda_{max} = \frac{hc}{W_0}}$
Attention : il faut convertir E_c en Joule et λ en m avant de faire AN.
On a : $h\nu - h\nu_0 = E_c$ d'apres le cours
Dans cet exercice, $\nu_0 = \nu_m \Longrightarrow h\nu - h\nu_m = E_{cmax}$
$\Longrightarrow \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_m} = E_{cmax}$
On trouve
$\boxed{\lambda_m = \frac{hc\lambda}{-E_c\lambda + hc}}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

VALIDEUR LMD

Exercice 2 :

1. Représentons la fonction d'onde

2. Déterminons la constante β

$\int\int\int_D |\varphi(x)^2|dx = 1$

$\int_{-\infty}^{-b} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{3b}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 0$

$\Rightarrow \int_{-b}^{3b} |\varphi(x)|^2 dx = 1$

$\int_{-b}^{3b} \beta^2 dx = 1 \Longrightarrow \beta^2 \int_{-b}^{3b} dx = 1$

$\Longrightarrow \beta^2 [x]_{b}^{3b} = 1$

$\Longrightarrow \beta^2(3b - (-b)) = 1$

$\Longrightarrow 4b\beta^2 = 1$

$\boxed{\beta = \frac{1}{2\sqrt{b}}}$ car $\beta > 0$

3. Déterminons la probalité qu'une mesure de la position de la particule révèle qu'elle se situe dans la région [a,b]

$\rho([0,b]) = \int_0^b |\varphi(x)|^2 dx = \int_0^b \beta^2 dx$

$\rho([0,b]) = \beta^2 \int_0^b dx = \beta^2 b$

$\boxed{\rho([0,b]) = \frac{1}{4b} \times b = \frac{1}{4}}$

4. Calculons$< x >$ et $< x^2 >$

$< x >= \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \int_{b}^{3b} x\varphi(x)dx$

$= \int_{b}^{3b} x\beta dx = \beta(\frac{1}{2}9b^2 - \frac{1}{2}b^2)$

$= \beta(4b^2) = \frac{4b^2}{2\sqrt{b}}$

$\boxed{< x >= 2b\sqrt{b}}$

$< x^2 >= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)dx = \int_{-b}^{3b} x^2\beta dx$

$= \frac{28}{3}\beta b^3$

$\boxed{< x^2 >= \frac{14}{3}b^2\sqrt{b}}$

Scanné avec CamScanner

Exercice 3

1. Déterminons la matrice H dans la base $\{|\Phi_1>,|\Phi_2>\}$
   On a : $H|\Phi_1>=E_1|\Phi_1> \Longrightarrow H|\Phi_1>=E_1|\Phi_1>+0|\Phi_2>$
   $H|\Phi_2>=E_2|\Phi_2> \Longrightarrow H|\Phi_2>=0|\Phi_1>+E_2|\Phi_2>$
   Donc la matrice H est : $\boxed{H=\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}}$

2. Déterminons la matrice H dans la base $\{|\mu_1>,|\mu_2>\}$
   On a : $H|\Phi_1>=E_1|\Phi_1> \Longrightarrow H\times\frac{1}{\sqrt{5}}(|\mu_1>+2|\mu_2>)$
   $\Longrightarrow \frac{H}{\sqrt{5}}|\mu_1>+\frac{2H}{\sqrt{5}}|\mu_2>=\frac{E_1}{\sqrt{5}}|\mu_1>+\frac{2E_1}{\sqrt{5}}|\mu_2>$
   $H|\Phi_2>=E_2|\Phi_2> \Longrightarrow H\times\frac{1}{\sqrt{5}}(-2|\mu_1>+|\mu_2>)$
   $\Longrightarrow \frac{-2H}{\sqrt{5}}|\mu_1>+\frac{H}{\sqrt{5}}|\mu_2>=\frac{-2E_2}{\sqrt{5}}|\mu_1>+\frac{E_2}{\sqrt{5}}|\mu_2>$
   Ces deux équations donnent le système suivant :

$$\begin{aligned} \{H|\mu_1>+2H|\mu_2> &= E_1|\mu_1>+2E_1|\mu_2> \\ -2H|\mu_1>+H|\mu_2> &= -2E_2|\mu_1>+E_2|\mu_2> \end{aligned}$$

   Par des combinaisons linéaires on obtient :
   $\Longrightarrow 5H|\mu_2>=(2E_1-2E_2)|\mu_1>+(4E_1+E_2)|\mu_2>$
   $\Longrightarrow H|\mu_2>=\frac{2E_1-2E_2}{5}|\mu_1>+\frac{4E_1+E_2}{5}|\mu_2>$
   Et $\Longrightarrow 5H|\mu_1>=(E_1+4E_2)|\mu_1>+(2E_1-2E_2)|\mu_2>$
   $\Longrightarrow H|\mu_1>=\frac{E_1+4E_2}{5}|\mu_1>+\frac{2E_1-2E_2}{5}|\mu_2>$
   Ainsi la matrice H devient :
   $H=\begin{pmatrix} \frac{E_1+4E_2}{5} & \frac{2E_1-2E_2}{5} \\ \frac{2E_1-2E_2}{5} & \frac{4E_1+E_2}{5} \end{pmatrix}$
   Or $E_1=a$ et $E_2=b$ d'où :
   $H=\begin{pmatrix} \frac{a+4b}{5} & \frac{2a-2b}{5} \\ \frac{2a-2b}{5} & \frac{4a+b}{5} \end{pmatrix}$
   $H=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} a+4b & 2(a-b) \\ 2(a-b) & 4a+b \end{pmatrix}$
   Mettons $(***)$dans$(*)$ on obtient :
   $|\mu_1>=\sqrt{5}|\Phi_1>-2(\frac{2}{\sqrt{5}}|\Phi_1>+\frac{1}{\sqrt{5}}|\Phi_2>)$
   $|\mu_1>=\frac{1}{\sqrt{5}}|\Phi_1>-\frac{2}{\sqrt{5}}|\Phi_2>$
   Donc la matrice H dans la base $\{|\mu_1>,|\mu_2>\}$ est :

$$\boxed{H=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

VALIDÉ LMD

Scanné avec CamScanner

3. On définit une observable F telle que :
$F = |\mu_1 >< \mu_1| + \varepsilon|\mu_2 >< \mu_2|$

a- Exprimons les vecteurs $F|\mu_1 >$ et $F|\mu_2 >$ en fonction de ses vecteurs de base $\{|\mu_1 >\}$ et $\{|\mu_2 >\}$
$F|\mu_1 >= |\mu_1 > \underbrace{< \mu_1|\mu_1 >}_{1} + \varepsilon|\mu_2 > \underbrace{< \mu_2|\mu_1 >}_{0}$

$\boxed{F|\mu_1 >= |\mu_1 >}$
$F|\mu_2 >= |\mu_1 > \underbrace{< \mu_1|\mu_2 >}_{0} + \varepsilon|\mu_2 > \underbrace{< |\mu_2|\mu_2 >}_{1}$

$\boxed{F|\mu_2 >= \varepsilon|\mu_2 >}$

b- Donnons la matrice de F,puis déterminons ses valeurs propres et vecteurs propres
$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$

F étant une matrice diagonale,alors ses valeurs propres sont les éléments de la diagonale d'où :
$E_1 = 1$ et $E_4 = \varepsilon$
Et les vecteurs propres sont respectivements $|\mu_1 >$ et $|\mu_2 >$.

4. On mesure l'observable F et on obtient la valeur ε.

a- L'état dans laquelle se trouve le système immédiatement après la mésure :
Soit $|\psi' >= \frac{\rho_\varepsilon(|\psi>)}{\sqrt{<\psi|\rho_\varepsilon|\psi>}}$
D'après le postulat 5,comme le sytème n'est pas dégénéré alors $|\psi' >= |\mu_2 >$.

b- On mesure ensuite l'énergie.Valeurs qu'on peut obtenir et probabilité avec :

Les valeurs qu'on peut obtenir sont les valeurs propres de F que sont 1 et ε.
Déterminons les probabilités :

Scanné avec CamScanner

$P(\varepsilon) = |<\Phi_1|\psi>|^2$
$P(\varepsilon) = |(|\mu_1> \frac{1}{\sqrt{5}} + <\mu_2|\frac{2}{\sqrt{5}})|\mu_2>|^2$
$P(\varepsilon) = |\frac{2}{\sqrt{5}}|^2$
$\boxed{P(\varepsilon) = \frac{4}{5}}$
$P(1) = |<\phi_2|\psi>|^2$
$P(1) = |(<\mu_1|\frac{-2}{\sqrt{5}} + <\mu_2|\frac{1}{\sqrt{5}})|\mu_2>|^2$
$\boxed{P(1) = \frac{1}{5}}$

5. A présent, on mésure d'abord l'énergie, et on obtient la valeur la plus élevée. Immédiatement après,on mesure la grandeur physique associée à l'observable F

a- Déterminons les résultats possibles
Les résultats possibles sont les valeurs propres de F que sont $E_3 = 1$ et $E_4 = \varepsilon$.

b- Calculons les probabilités associées

$P(1) = |<\mu_1|\Phi_2>|^2$
$P(1) = |<\mu_1|(\frac{-2}{\sqrt{5}}|\mu_1> + \frac{1}{\sqrt{5}}|\mu_2>)|^2$
$P(1) = |\frac{-2}{\sqrt{5}}|^2$
$\boxed{P(1) = \frac{4}{5}}$
$P(\varepsilon) = |<\mu_2|\Phi_2>|^2$
$P(\varepsilon) = |<\mu_2|(\frac{-2}{\sqrt{5}}|\mu_1> + \frac{1}{\sqrt{5}}|\mu_2>)|^2$
$P(\varepsilon) = |\frac{1}{\sqrt{5}}|^2$
$\boxed{P(\varepsilon) = \frac{1}{5}}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI Année 2017-2018

EXAMEN DE MECANIQUE QUANTIQUE
SESSION 1

EXERCICE 1

A Calcul des commutateurs

1. $[z^n \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial^n}{\partial z^n}]$
Associons une fonction f au commutateur.

$[z^n \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial^n}{\partial z^n}]f(z) = (z^n[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial^n}{\partial z^n}] + [z^n, \frac{\partial^n}{\partial z^n}]\frac{\partial}{\partial z})f(z)$

Le commutateur $[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial^n}{\partial z^n}]$ est sous la forme $[A, f(A)]$

$\Rightarrow [\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial^n}{\partial z^n}] = 0$ d'où $[z^n \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial^n}{\partial z^n}]f(z) = ([z^n, \frac{\partial^n}{\partial z^n}]\frac{\partial}{\partial z})f(z)$ or ;

$$\begin{aligned} f(z) &= z^n \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(z) - \frac{\partial^n}{\partial z^n} z^n f(z) \\ &= z^n \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(z) - n! f(z) - z^n \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(z) \\ &= -n! f(z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{[z^n \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial^n}{\partial z^n}] = -n! \frac{\partial}{\partial z}}$$

2. $[z - \frac{\partial}{\partial z}, z^n]$

$$\begin{aligned} [z - \frac{\partial}{\partial z}, z^n] &= [z, z^n] - [\frac{\partial}{\partial z}, z^n] \\ &= -[\frac{\partial}{\partial z}, z^n] \qquad \text{Car } [z - z^n] = 0 \\ &= [z^n, \frac{\partial}{\partial z}] \end{aligned}$$

Associons une fonction f à ce commutateur,

VALIDEUR LMD :Conseils-Sujets d'examens-Corrections

Scanné avec CamScanner

$$[z^n, \frac{\partial}{\partial z}]f(z) = z^n \frac{\partial}{\partial z}(f(z)) - \frac{\partial}{\partial z}(z^n f(z))$$
$$= z^n \frac{\partial}{\partial z}(f(z)) - nz^{n-1} f(z) - z^n \frac{\partial}{\partial z} f(z)$$
$$= -nz^{n-1} f(z)$$

Donc $\boxed{[z - \frac{\partial}{\partial z}, z^n] = -nz^{n-1}}$

B. La fonction d'onde $\varphi(z) = \beta e^{-\alpha z^2}$ décrit l'état fondamental d'un oscillateur harmonique unidimensionel.

a) Trouvons l'unité de α

Considérons la répresentation $\{|z>\}$.
Considérons l'opérateur annitiation 'a'. Dans cette représentation, cet opérateur a pour expression :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{z} + i\hat{p})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{z}{\sqrt{\hbar/m\omega}} + i\frac{p}{\sqrt{\hbar m\omega}})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, z + \sqrt{\frac{1}{\hbar m\omega}}\, k\frac{d}{dz})$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, z + \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\, \frac{d}{dz})$$

La fonction d'onde φ de l'état fondamental s'obient à partir de l'équation "a" $\varphi(x) = 0$ dans la représentation $|z>$. On obtient :

$$\Rightarrow (\frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dz} + \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, z)\varphi(z) = 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{d}{dz}\varphi(z) + \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, z\varphi(z) = 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\varphi'(z) + \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, z\varphi(z) = 0$$

C'est une équation différentielle du premier ordre dont la solution générale est donnée par :

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$\varphi(z) = k\ \exp(\int -\frac{m\omega}{\hbar}\, z\, dz)$, avec $k \in \mathbb{R}$

$\varphi(z) = k\ \exp(-\frac{m\omega}{2\hbar}\, z^2)$, $k \in \mathbb{R}$

Par identification, on a :

$$\alpha = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

En dimension, on a :

$$[\alpha] = \frac{Kg.rad.S^{-1}}{J.S} = \frac{Kg\,S^{-2}rad}{J}$$

b. Raison physique

La raison physique de la condition de normalisation est que la particule est dans un état lié, elle reste confinée dans une région finie de l'espace.

c. Expression et unité de β

φ étant une fonction, elle obéit la condition normalisation, à savoir :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(z)|^2\, dz = 1$$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |\beta|^2\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar} z^2}\, dz = 1$

$\Rightarrow |\beta|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar} z^2}\, dz = 1$

$\Rightarrow |\beta|^2 (\sqrt{\frac{\hbar\pi}{m\omega}}) = 1$

$\Rightarrow |\beta|^2 = (\frac{m\omega}{\hbar\pi})^{\frac{1}{2}}$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \beta = (\frac{m\omega}{\hbar\pi})^{\frac{1}{4}}$$

En dimension, on obtient :

$$[\beta] = \left(\frac{Kg.rad.S^{-1}}{J.S}\right)^{\frac{1}{4}}$$

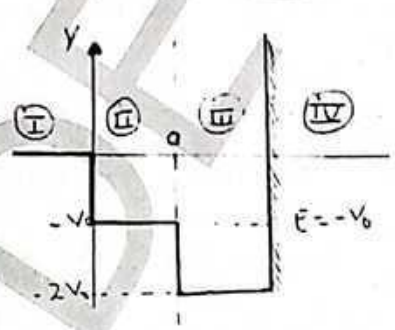
$$[\beta] = \left(\frac{Kg.rad}{J.S^2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

d. L'énergie correspondante à φ

L'énergie correspondant à φ est l'énergie fondamentale E_0 où $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, qui est l'énergie fondamentale d'un oscillateur harmonique.

EXERCICE 2

Une particule de masse m est placée dans un potentiel unidimensionnel $V(x)$ décrit par la répresentation graphique ci-dessous où $V_0 > 0$



a. Expression du potentiel $V(x)$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ -V_0 & ; 0 < x < a \\ -2V_0 & 0 < x < 2a \\ \infty & ; x > 2a \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

b. Solutions de l'équation de Scrhödinger

En général, l'équation de Scrhödinger est donnée par :

$$\phi"_n(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\phi_n(x) = 0$$

* Dans la région (I) l'équation dévient $\phi"_I(x) + \frac{2m}{\hbar^2} E\ \phi_I(x) = 0$

$\Rightarrow \phi"_I(x) - \frac{2m}{\hbar^2} V_0\ \phi_I(x) = 0$

$\Rightarrow \phi"_I(x) - R^2\ \phi_I(x) = 0$

La solution de cette équation est donc $\phi_I(x) = A\,e^{kx} + B\,e^{-kx}$

Le terme Be^{-kx} qui tend vers l'infini quand $x \longrightarrow -\infty$ ne peut pas être une solution physiquement acceptable, donc pour cela il faut prendre $B = 0$ et on obtient donc $\boxed{\phi_I(x) = Ae^{kx}}$

* Dans la région (II) l'équation devient :

$\phi"_{II}(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)\,\phi_{II}(x) = 0$ or $E = -V_0$

$\Rightarrow \phi"_{II}(x) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\phi"_{II}(x) = D\,x + C}$

* Dans la région (III) l'équation devient : $\phi"_{III}(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\,\phi_{II}(x) = 0$

$\Rightarrow \phi"_{III}(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(-V_0 + 2\,V_0)\phi_{III}(x) = 0$

$\Rightarrow \phi"_{III}(x) + \frac{2m}{\hbar^2} V_0\ \phi_{III}(x) = 0$

$\Rightarrow \phi"_{III}(x) + \hbar^2\,\phi_{III}(x) = 0$

La solution de cette équation est donc $\boxed{\phi_{III}(x) = G\,\sin(kx + \theta)}$

* Dans l région (IV) le potentiel est infini donc la fonction d'onde est nulle $\boxed{\phi_{IV}(x) = 0}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

c. Condition de raccordement et montrons que $\tan(k\,a) = -1 - k\,a$

. En 0

$$\begin{cases} \phi_I(0) = \phi_{II}(0) \\ \phi'_I(0) = \phi'_{II}(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = C \\ k\,A = D \end{cases}$$

. En a

$$\begin{cases} \phi_{II}(a) = \phi_{III}(a) \\ \phi'_{II}(0) = \phi'_{III}(a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D\,a + C = G\,\sin(k\,a + \theta) \\ D = k\,G\,\cos(k\,a + \theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\,k\,a + C = G\,\sin(k\,a + \theta) \\ k\,A = k\,G\,\cos(k\,a + \theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A(k\,a + 1) = G\,\sin(k\,a + \theta) \\ A = G\,\cos(k\,a + \theta) \end{cases}$$

En faisant le rapport, on obtient : $k\,a + 1 = \tan(k\,a + \theta)$ (1)

. En $2a$

$\phi_{III}(2\,a) = 0$
$\Rightarrow G\,\sin(2\,k\,a + \theta) = 0$
$\Rightarrow \sin(2\,k\,a + \theta) = 0$
$\Rightarrow 2\,k\,a + \theta = 0$
$\Rightarrow \theta = -2\,k\,a$ (2)

En remplçant (2) dans (1),on obtient :
$k\,a + 1 = \tan(k\,a - 2\,k\,a)$
$\Rightarrow k\,a + 1 = \tan(-k\,a)$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \tan(k\,a) = -1 - k\,a$ car $x \mapsto \tan x$ est impaire.

d. Trouvons la solution de $\tan(y) + y + 1 = 0$

D'après le tableau, la solution de cette équation est $y = 1,9$. On a : $\tan(k\,a) = -1 - k\,a$. En posant $y = k\,a \Rightarrow k = \frac{y}{a}$,or

$$k^2 = \frac{2\,m\,V_0}{\hbar^2} \Rightarrow k^2 = \frac{y^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{a^2} = \frac{2\,m\,V_{0\,min}}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow V_{0\,min} = \frac{\hbar^2\,y^2}{2\,m\,a^2}$$

or $y = 1,9 \Rightarrow y^2 = 3,61$ donc $\boxed{V_{0\,min} = 1,805\frac{\hbar^2}{m\,a^2}}$

EXERCICE 3

A.

a. Déterminer la matrice de l'opérateur H

Soit H la matrice de cet opérateur. Cette matrice est de la forme $H = \varepsilon_0(J^2 + K^2)$ où J et K sont les matrices des opérateurs J et K respectives.
Dans la base $\{\ |e_1>, |e_2>, |e_3>\ \}$;On a les matrices suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, K^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On obtient donc,

Scanné avec CamScanner

$$H = \varepsilon_0 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$H = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Déduisons l'action de H sur $\{|e_1>\}_{i=1,2,3}$

Selon l'expression de la matrice de H, on a :

$H|e_1> = \varepsilon_0 |e_3>$

$H|e_2> = -2\varepsilon_0 |e_2>$

$H|e_3> = |e_1>$

c) Déterminons les valeurs propres $\{E_i\}$ et les états propres normés

Resolvons l'équation caractéristique $det(H - X\,I) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -X & 0 & \varepsilon_0 \\ 0 & -2\varepsilon - X & 0 \\ \varepsilon_0 & 0 & -X \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -X \begin{vmatrix} -2\varepsilon_0 - X & 0 \\ 0 & -X \end{vmatrix} + \varepsilon_0 \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_0 \\ -2\varepsilon_0 - X & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow -X^2(2\varepsilon_0 + X) + \varepsilon_0^2(2\varepsilon_0 + X) = 0$$

$$\Rightarrow (2\varepsilon_0 + X)(-X^2 + \varepsilon_0^2) = 0$$

$$\Rightarrow (\varepsilon_0 + X)(\varepsilon_0 - X)(2\varepsilon_0 + X) = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 + X = 0 \text{ ou } \varepsilon_0 - X = 0 \text{ ou } 2\varepsilon_0 + X = 0$$

$$\Rightarrow X = -\varepsilon_0 \text{ ou } X = \varepsilon_0 \text{ ou } X = -2\varepsilon_0$$

Les valeurs propres sont donc $E_1 = -2\varepsilon_0$, $E_2 = -\varepsilon_0$ et $E_3 = \varepsilon_0$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Trouvons à présent les kets propres de H :

. Soit $|\psi_1>= x\,|e_1> +y\,|e_2> +z\,|e_3>$
$H\,|\psi_1>= E_1\,|\psi_1>$

$$\varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2\,\varepsilon_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_0\, z = -2\varepsilon_0\, x \\ -2\varepsilon_0\, y = -2\varepsilon_0\, y \\ \varepsilon_0\, x = -2\varepsilon_0\, z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = z = 0 \\ y = z \end{cases}$$

d'où $|\psi_1>= y\,|e_2>$; or $<\psi_1\backslash\psi_1>= 1$

$$\Rightarrow |y|^2 \,(0\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$\Rightarrow y = 1$ donc $\underline{|\psi_1>= |e_2>}$

. $|\psi_2>= x\,|e_1> +y\,|e_2> +z\,|e_3>$.
Le ket propre associé à E_2, on a :

$$H\,|\psi_2>= E_2\,|\psi_2>$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\varepsilon_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

D'où $|\psi_2>= -z\,|e_1> +z\,|e_3>$; or $<\psi_2|\psi_2>= 1$

$$\Rightarrow |\psi_2>= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|e_1> +|e_3>)$$

. Soit $|\psi_3>= x\,|e_1> +y\,|e_2> +z\,|e_3>$ le ket propre associé à E_3
On a : $H\,|\psi_3>= E_3\,|\psi_3>$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Par un raisonnement analogue, on obtient $|\psi_3> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1> + |e_3>)$

B.

a) Matrice de B dans la base $\{|\Lambda_i>\}_{i=1,2,3}$.

Notons B' cette matrice.
Trouvons d'abord les valeurs propres $\{\lambda_i\}$ de B. L'équation caractéristique est donnée par : $det(B - XI) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 1 & -X & 1 \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow -X(X^2 - 1) + X = 0$
$\Rightarrow X(2 - X^2) = 0$
$\Rightarrow X = 0$, $X = \sqrt{2}$ ou $X = -\sqrt{2}$, donc $\lambda_1 = -\sqrt{2}, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \sqrt{2}$

. Soit $|\Lambda_1> = x|e_1> + y|e_2> + z|e_3>$ le vecteur propre associé à λ_1.
On a : $B|\Lambda_1> = -\sqrt{2}|\Lambda_1>$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -\sqrt{2}z \end{cases}$$

D'où $|\Lambda_1> = z(|e_1> - \sqrt{2}|e_2> + |e_3>)$ or $<\Lambda_1|\Lambda_1> = 1$

$\Rightarrow z = \frac{1}{2}$, donc $|\Lambda_1> = \frac{1}{2}(|e_1> - \sqrt{2}|e_2> + |e_3>)$

Par raisonnement analogue , on obtient :$|\Lambda_1> = \frac{1}{2}(-|e_1> + |e_3>)$

$|\Lambda_3> = \frac{1}{2}(|e_1> + \sqrt{2}|e_2> + |e_3>)$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Dans la base $\{|\Lambda_i>\}_{i=1,2,3}$ la matrice est donc $\boxed{B' = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}$

b) Montrons que B est une observable.

B est une observable si et seulement si B est un opérateur linéaire hermitique dont les vecteurs propres obéïssent à la relation des fermettures.

$$\sum |\Lambda_i><\Lambda_i| = 1$$

$$B^+ = (B^{tr})^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

B est donc hermitique. On vérifie aisement que $\sum |\Lambda_i><\Lambda_i| = 1$

c) Résultat possibles et probabilité

D'après le postulat (3), lors de la mésure de l'opérateur B. On peut obtenir comme resultat l'une des valeurs propres de B, à savoir λ_1 ou λ_2 ou λ_3.

. Calculons leur probabilité

$P(\lambda_1) = |<\Lambda_1|\psi(0)>|^2$

$<\Lambda_1|\psi(0)> = \frac{1}{\sqrt{8}}(1 \; -\sqrt{2} \; 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$P(\lambda_1) = 0$

$P(\lambda_2) = |<\Lambda_2|\psi(0)>|^2$

$<\Lambda_2|\psi(0)> = \frac{1}{2}(-1 \; 0 \; 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$P(\lambda_2) = 1$

$P(\lambda_3) = | < \Lambda_3 | \psi(0) > |^2 = 0$

.D'après le postulat (5), immédiatement après la mesure, la particule se trouve dans l'état $|\Lambda_2 >$ car la probabilité de trouver la particule dans cet état est égale à l'unité.

d) Etat du système à un instant $t > 0$ ultérieur.

Par définition, $|\phi(t) >= \sum_{n=1}^{3} C_n(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar} Ent} |\psi_n >$ où $C_n(0) =< \psi_n | \phi(0) >$

$$C_1(0) =< \psi_1 | \phi(0) >= \frac{1}{\sqrt{2}} (0\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'où $C_1 = (0) = 0$

$$C_2(0) =< \psi_2 | \phi(0) >= \frac{1}{2} (-1\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'où $C_2(0) = -1$

$$C_3(0) =< \psi_3 | \phi(0) >= \frac{1}{\sqrt{2}} (1\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'où $C_3(0) = 0$

Par conséquent, on obtient :

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$|\phi(t)> = -e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|\psi_2>$$
$$= -e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon_0 t}|\psi_2>$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\varepsilon_0}{\hbar}t}(|e_1> - |e_3>)$$
$$|\phi(t)> = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\varepsilon_0}{\hbar}t}|\phi(0)>$$

e) Calcul des probabilité des différents résultats de la grandeur physique β

On a : $P(\lambda_1) = |<\Lambda_1|\phi(t)>|^2$

On a : $|\phi(t)> = e^{i\frac{\varepsilon_0}{\hbar}t}|\phi(0)>$

$\Rightarrow <\Lambda_1|\phi(t)> = e^{i\frac{\varepsilon_0}{\hbar}t} <\Lambda_1|\phi(0)>$ or d'après c) $<\Lambda_1|\phi(0)> = 0$
d'où $\underline{P(\lambda_1) = 0}$

On a : $P(\lambda_2) = |<\Lambda_2|\phi(t)>|^2$

On a : $|\phi(t)> = e^{i\frac{\varepsilon_0}{\hbar}t}|\phi(0)>$

$\Rightarrow <\Lambda_2|\phi(t)> = e^{i\frac{\varepsilon_0}{\hbar}t} <\Lambda_2|\phi(0)>$ or d'après c) $<\Lambda_2|\phi(0)> = 1$

et $|e^{i\frac{\varepsilon_0}{\hbar}t}| = 1$

donc $\underline{P(\lambda_2) = 1}$

On a : $P(\lambda_3) = |<\Lambda_3|\phi(t)>|^2$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

On a : $|\phi(t)> = e^{i\frac{\varepsilon_0}{\hbar}t}|\phi(0)>$

$\Rightarrow < \Lambda_3|\phi(t)> = e^{i\frac{\varepsilon_0}{\hbar}t} < \Lambda_3|\phi(0)>$ or d'après c) $< \Lambda_3|\phi(0)> = 0$

donc $\underline{P(\lambda_3) = 0}$

e) Valeur moyenne M

On a : $\underline{M = < \phi(t)|\, B\, |\phi(t)>}$

On a : $B|\phi(t)> = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i\frac{\varepsilon_0}{\hbar}t}\\ 0\\ -e^{i\frac{\varepsilon_0}{\hbar}t}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0$

$\underline{< \phi(t)|\ B\ |\phi(t)> = 0}$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UFR-MI : L2 Année 2018-2019

CORRECTION : MECANIQUE QUANTIQUE SESSION 2 et 1

EXERCICE 1 (session 1 et 2)

Données : $V = 4,125 Volts$, $P = 0,33 KW$ et $\nu = 10^{10} MHz$

1. Déterminons la fréquence seuil.
   $W_0 = h\nu_0 = eV_0 \Rightarrow \boxed{\nu_0 = \frac{eV_0}{h}}$
   AN : $\nu_0 = \frac{1,6.10^{-19} \times 4.125}{6,626.10^{-34}} = 10^{14} Hz$
   Justification : On a $\nu = 10^{16} Hz$ et $\nu_0 = 10^{14} Hz$ donc $\nu > \nu_0$
   La fréquence seuil est inférieur à la fréquence des photons donc il y a effet photoélectrique.
2. Le nombre de photons
   On sait que $P = \frac{E_T}{\Delta T}$ et $E_T = nh\nu$ donc $P = \frac{nh\nu}{\Delta T}$
   Soit $N = \frac{n}{\Delta T}$. Ainsi $P = Nh\nu \Rightarrow \boxed{N = \frac{P}{h\nu}}$
   AN : $N = \frac{0,33.10^3}{6,626.10^{-34} \times 10^{16}} = 5.10^{19}$.
   Il y a 5.10^{19} photons émis par seconde.
3. $\nu_0 = 10^{15} Hz$
   $P = \frac{n}{\Delta T} h\nu_0 = Nh\nu_0$ AN : $P = 5.10^{19} \times 6,626.10^{-34} \times 10^{15}$
   $\boxed{P = 33,13W}$
   Il n'y a pas de puissance seuil en mécanique quantique.
4. Énergie et l'impulsion des électrons éjectés de la cellule.
   $h\nu = W_0 + E_c \Rightarrow E_c = h\nu - W_0 = h\nu - h\nu_0 = h(\nu - \nu_0)$.
   AN : $E_c = 6,626.10^{-34}(10^{16} - 10^{15}) = 5,96.10^{-18} J$.
   $E_c = \frac{P^2}{2m} \Rightarrow P = \sqrt{2mE_c}$
   AN : $P = \sqrt{2 \times 9,1.10^{-31} \times 5,96.10^{-18}} = 3,89.10^{-24} Kg.ms^{-1}$
   $P = \frac{h\nu}{c}$ avec $\nu = \frac{h}{\lambda}$ d'où $P = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{P}$
   AN : $\lambda = \frac{6,626.10^{-34}}{3,89.10^{-24}} = 2.10^{-10} m$
   Le comportement des électrons ne peut être relevé par la mécanique classique car λ est très faible.
5. Calculons l'incertitude absolue minimale.
   Cela revient à calculer $\Delta X \Delta P = \frac{h}{2} \Rightarrow \Delta P = \frac{h}{2\Delta X}$ avec $\Delta X = 1\mathring{A}$.
   AN : $\Delta P = \frac{6,626.10^{-34}}{2.10^{-10}} = 3,89.10^{-24} Kg.ms^{-1}$
   Conclusion : Les deux valeurs ΔP et P sont identiques.

VALIDE

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2 (session 1 et 2)

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}} \exp(\frac{ipx}{h})$$

1. La fonction d'onde ψ doit être continue et de carré sommable,c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

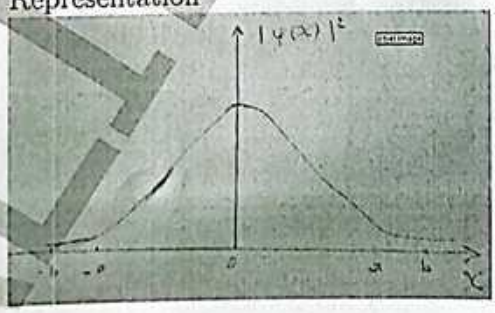
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx &= A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+\varepsilon^2} dx \quad \text{car} \quad |\exp(\frac{ipx}{h})| = 1 \\
&= A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} (\frac{1}{1+(\frac{x}{\varepsilon})^2}) dx \\
&= \frac{A^2}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} \quad \text{en fesant le changement de variable } u = \frac{x}{\varepsilon} \\
&= \frac{A^2}{\varepsilon} \times \pi = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}.
\end{aligned}$$

2. $\psi(x) = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}} \exp(\frac{ipx}{h})$

- Densité de présence

$$|\psi(x)| = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$$

- Représentation



3. La probabilité que la particule soit trouvée dans l'intervalle $[-\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}; \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}]$

VALIDE LMD

Scanné avec CamScanner

$$\mathbb{P}(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}) = \int_{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}} |\psi(x)|dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon\pi} \int_{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{1+(\frac{x}{\varepsilon})^2} \quad \text{posons } u = \frac{x}{\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \times 2\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{\pi} \times 2 \times \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

EXERCICE 3 (Session 1)

Soit

$$|\varphi\rangle = \sqrt{2}|e_1\rangle + i|e_2\rangle + |e_3\rangle$$

1. On a $\langle\varphi|\varphi\rangle = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ i\\ 1\end{pmatrix} = 4 \neq 1$

   Donc le ket $|\varphi\rangle$ n'est pas un vecteur d'état.

   Nommons alors $|\varphi\rangle$: $|\varphi\rangle = \frac{1}{|\langle\varphi|\varphi\rangle|}|\varphi\rangle = \frac{1}{2}|\varphi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|e_1\rangle + \frac{i}{2}|e_2\rangle + \frac{1}{2}|e_3\rangle$

2. Déterminons la matrice associée

   $P_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$

   - $P_\varphi|e_1\rangle = |\varphi\rangle\langle\varphi|e_1\rangle = (\frac{\sqrt{2}}{2}|e_1\rangle + \frac{i}{2}|e_2\rangle + \frac{1}{2}|e_3\rangle)(\frac{\sqrt{2}}{2})$
     $P_\varphi|e_1\rangle = \frac{1}{2}|e_1\rangle + \frac{i\sqrt{2}}{4}|e_2\rangle + \frac{\sqrt{2}}{4}|e_3\rangle$
   - $P_\varphi|e_2\rangle = |\varphi\rangle\langle\varphi|e_2\rangle = (\frac{\sqrt{2}}{2}|e_1\rangle + \frac{i}{2}|e_2\rangle + \frac{1}{2}|e_3\rangle)(\frac{-i}{2})$
     $P_\varphi|e_2\rangle = \frac{-i\sqrt{2}}{4}|e_1\rangle + \frac{1}{4}|e_2\rangle - \frac{i}{4}|e_3\rangle$
   - $P_\varphi|e_3\rangle = |\varphi\rangle\langle\varphi|e_3\rangle = (\frac{\sqrt{2}}{2}|e_1\rangle + \frac{i}{2}|e_2\rangle + \frac{1}{2}|e_3\rangle)(\frac{1}{2})$
     $P_\varphi|e_3\rangle = \frac{\sqrt{2}}{4}|e_1\rangle + \frac{i}{4}|e_2\rangle + \frac{1}{4}|e_3\rangle$

   Ainsi $P_\varphi = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -i\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ i\sqrt{2} & 1 & i\\ \sqrt{2} & -i & 1\end{pmatrix}$ $\quad {}^tP_\varphi = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & i\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ -i\sqrt{2} & 1 & -i\\ \sqrt{2} & i & 1\end{pmatrix}$

   $\Rightarrow P_\varphi^+ = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -i\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ i\sqrt{2} & 1 & i\\ \sqrt{2} & -i & 1\end{pmatrix} = P_\varphi$ d'où ce projecteur est hermétique.

Scanné avec CamScanner

3. $M = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix}$

Équation au valeur propre :
$H|e_1\rangle = \varepsilon_0|e_1\rangle$; $H|e_2\rangle = \varepsilon_0|e_2\rangle$; $H|e_3\rangle = \varepsilon_0|e_3\rangle$
On a $|\phi(t)\rangle = \sum_{n\geq 1}^{3} c_n(t)\exp(-\frac{i}{\hbar}E_n t)|e_n\rangle$ avec $c_n(t_0) = \langle e_n|\varphi'\rangle$.
$c_1(t_0) = \langle e_1|\varphi'\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$c_2(t_0) = \langle e_2|\varphi'\rangle = \frac{i}{2}$
$c_3(t_0) = \langle e_3|\varphi'\rangle = \frac{1}{2}$
On obtient alors

$$|\phi(t)\rangle = \exp(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_0 t)(\frac{\sqrt{2}}{2}|e_1\rangle + \frac{i}{2}|e_2\rangle + \frac{1}{2}|e_3\rangle)$$

à une phase près $|\phi(t)\rangle = |\varphi'\rangle$
D'où les états $|\phi(t)\rangle$ et $|\varphi'\rangle$ sont physiquement indiscernable

4.

$\langle A\rangle(t) = \langle\phi(t)|A|\phi(t)\rangle = \langle\varphi'|A|\varphi'\rangle = \langle A\rangle(t=0)$

- $\frac{d\langle A\rangle(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle[H,A]\rangle + \langle\frac{\partial A}{\partial t}\rangle$
Or $\langle\frac{\partial A}{\partial t}\rangle = 0$, de plus $\frac{d\langle A\rangle(t)}{dt} = 0$
Donc

$$\frac{1}{\hbar}\langle[H,A]\rangle = 0 \Rightarrow [H,A] = 0$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

VALIDE LMD

Université FHB
MATHS-INFO L2

Année 2020-2021

CORRECTION MECANIQUE QUANTIQUE
Session 1

Exercice 1

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ Ae^{-x}(1-e^{-x}) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Déterminons la valeur de A pour que la fonction φ soit normalisée.

Condition de normalisation $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1$, on a:

$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{0} |\varphi(x)|^2\, dx + \int_{0}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\, dx$ car $\varphi(x) = 0$ si $x \in]-\infty, 0[$

$\int_{0}^{+\infty} A^2 e^{-2x}(1-e^{-x})\, dx = \frac{A^2}{12}$. D'après la condition de normalisation

$\frac{A^2}{12} = 1 \Rightarrow \underline{A = 2\sqrt{3}}$

2)a- Déterminons la densité de probabilité de présence de cette particule.
La densité de probabilité de présence par unité de longueur est égale au carré du module de la fonction d'onde.
Il vient alors $\frac{dp}{dx} = |\psi(x)|^2 = 12e^{-2x}(1-e^{-x})^2$

b- Déduisons-en la valeur de sa position pour laquelle elle est maximale.
Etude de $12e^{-2x}(1-e^{-x})^2 \Rightarrow$ le maximum de cette fonction est atteinte en $x = \ln 2$ alors la valeur de sa position pour laquelle cette densité de probabilité est maximale est $x = \ln 2$

3) Calculons la valeur moyenne

$$< x >= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, x\, \varphi(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} x\, \varphi^2(x)\, dx$$

$$< x >= \int_{0}^{+\infty} 12x\,(e^{-2x} - 2e^{-3x} + e^{-4x})\, dx$$

$< x >= -12\left[\frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{2}{9}e^{-3x} + \frac{1}{16}e^{-4x}\right]_{x=0}^{x=+\infty}$ à l'aide d'une intégration par partie

$$< x >= \frac{13}{12}$$

Exercice 2

1) L'effet photoélectrique et l'effet Compton sont deux types d'interactions entre la lumière et la matière.

Scanné avec CamScanner

En effet, photoélectrique, toute l'énergie du photon incident est acquise par un seul électron, mais dans l'effet Compton, le photon incident ne transfère qu'une partie de son énergie à un électron.
L'effet photoélectrique est un phénomène de faible énergie et les photons en intéraction disparaissent juste après avoir fourni leur énergie aux électrons.
L'effet Compton, en revanche est un phénomène de moyenne énergie et les photons en intéraction sont dispersés par les électrons. C'est la différence principale entre l'effet photoélectrique et l'effet Compton.

2)a- Calculons l'énergie du photon incident et sa longueur d'onde.
Etat initial:
Energie du photon incident: $E_1 = h\upsilon = hc/2$
Energie de l'électron: $E_2 = mc^2$

Etat final:
Energie du photon diffusé: $E_1' = h\upsilon' = hc/\lambda'$
Energie de l'électron diffusé: $E_2' = Xmc^2$

Conservation de l'énergie:

$$\boxed{E_1 + E_2 = E_1' + E_2'}$$

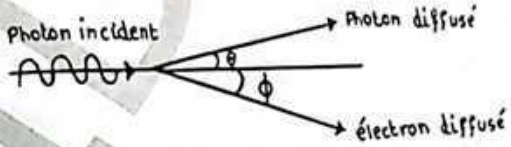
$$E_1 = E_1' + E_2' - E_2 \begin{cases} E_2' = 40\,k\,2\,V \\ E_2 = mc^2 \\ E_1' = 120\,k\,2V \end{cases}$$

$$\boxed{E_1 = E_2' = 40\,k\,2\,V - mc^2 + 120\,k\,2V}$$

Or $E_1 = \dfrac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \dfrac{hc}{E_1}$

$$\boxed{\lambda = \frac{\lambda c}{180\,k\,2\,V - mc^2}}$$

b) L'angle θ de diffusion du photon.



θ : angle de diffusion du photon
ϕ : angle de diffusion de l'électron

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

λ' : longueur d'onde du photon diffusé
λ : longueur d'onde du photon incident

Scanné avec CamScanner

$$\boxed{\theta = Arc\cos(1 - \frac{mc}{h}(\lambda' - \lambda))}$$

3) Effet photoélectrique (question 1)

Fréquence seuil: C'est la fréquence minimale que doit posseder un photon incident pour extraire un électron du métal.

Energie seuil: valeur limite au dela de laquelle un phénomène physique, chimique ou biologique peut provoquer un effet donné.

Potentiel d'arrêt: la valeur au dessous de laquelle on n'observe pas l'effet photoélectrique (l'énergie cinétique des électrons n'est pas suffisante).

Exercice 3

1) Ecrivons les matrices C et H

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} E_0 - \hbar\omega & 0 & 0 \\ 0 & E_0 & 0 \\ 0 & 0 & E_0 + \hbar\omega \end{pmatrix}$$

On peut mésurer simultanement C et H car $CH = HC$

2) Déterminons $Q = \frac{1}{2}(A + B)$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminons les états propres.
- Les valeurs propres

Soit $P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\lambda & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1 - \lambda)(1 + \lambda)$

Alors les valeurs propres de Q sont : $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 1$

-Déterminons les vecteurs propres associés aux valeurs propres.

Soit $\{|\phi_n>_{n=1,2,3}\}$ les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\{\lambda_n\}_{n=1,2,3}$ de façon respectivement, tels que $\{|\phi_n> = a_n|e_1> + b_n|e_2> + c_n|e_3>\}_{n=1,2,3}$ avec $\{a_n, b_n, c_n\}$ des réels

pour $n = 1$

$|\phi_1> = a_1|e_1> + b_1|e_2> + c_1|e_3>$; $\lambda_1 = -1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} b_1 = 0 & (1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} a_1 + b_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} c_1 = 0 & (2) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} b_1 + c_1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

L'objectif n'est pas de trouver les valeurs des inconnus a_1, b_1 et c_1 mais trouver une combinaison entre ces inconnus, ces inconnus servirons à normer les vecteurs propres.

(1) $\Rightarrow b_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}a_1$

(2) $\Rightarrow b_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}c_1$

de (1) et (2), on a:$a_1 = c_1$ d'où $|\phi_1> = a_1\,|e_1> -\frac{\sqrt{2}}{2}a_1\,|e_2> + a_1\,|e_3>$

$<\phi_1| = a_1\,<e_1| - \frac{\sqrt{2}}{2}a_1\,<e_2| + a_1\,<e_3|$

$<\phi_1|\phi_1> = a_1^2 + 2a_1^2 + a_1^2 = 4a_1^2$ or $<\phi_1|\phi_1> = 1 \Rightarrow 4a_1^2 = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$

$|\phi_1> = \frac{1}{2}\,|e_1> - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|e_2> + \frac{1}{2}\,|e_3>$

Pour $n = 2$

$|\phi_2> = a_2|e_1> + b_2\,|e_2> + c_2\,|e_3>$; $\lambda_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = 0 \\ a_2 = -c_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow |\phi_2> = c_2\,|e_1> - c_2\,|e_3>$

$|\phi_2> = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|e_1> - \frac{1}{2}\,|e_3>$

Pour $n = 3$

$|\phi_3> = \frac{1}{2}\,|e_1> + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|e_2> + \frac{1}{2}\,|e_3>$

3) Le système se trouve dans l'état où la valeur prpopre de c est égale 1

$|\varphi> = |e_1>$ (Car $|e_1>$ est le vecteur propre de l'opérateur c associé à la valeur propre qui est 1)

D'après le postulat 3, on obtient l'une des valeurs propres de la matrice Q.

Soit $\lambda_1 = -1$ avec pour probabilité.

D'après le postulat 4

$$P(\lambda_1) = P(-1) = |<\phi_1|\varphi>|^2 = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{4}$$

Soit $\lambda_2 = 0$ avec $P(\lambda_2) = P(0) = |<\phi_2|\varphi>|^2 = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}$

Soit $\lambda_3 = 1$ avec $P(\lambda_3) = P(1) = |<\phi_3|\varphi>|^2 = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{4}$

4) On suppose à présent (à l'instant $t = 0$) que le système est dans l'état $|\varphi(0)>$ tel que $|\psi(0)> = \frac{1}{2}\,|e_1> + \frac{\sqrt{2}}{2}\,|e_2> + \frac{1}{2}\,|e_3>$

Déterminons $|\psi(t)>$ à $t \neq 0$

D'après le postulat 6, on a: $|\psi(t)> = \sum_n C_n(t_0)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)}\,|e_n>$ avec

Scanné avec CamScanner

$$C_n(0) =< e_n|\psi(0) >$$
$$C_1(0) =< e_1|\psi(0) >= \frac{1}{2}$$
$$C_2(0) =< e_2|\psi(0) >= \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$C_3(0) =< e_3|\psi(0) >= \frac{1}{2}$$
$$|\psi(t) >= C_1(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_1(t)}\,|e_1 > + C_2(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2(t)}\,|e_2 > + C_3(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_3(t)}\,|e_2 >$$
$$|\psi(t) >= \frac{1}{2}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_0(t)}\left[e^{iwt}\,|e_1 > + \sqrt{2}\,|e_2 > + e^{-iwt}\,|e_3 >\right]$$

* Les valeurs moyennes

$$< Q >_{(t)} =< \psi(t)|\, Q\, |\psi(t) >$$

$$Q\,|\psi(t) >= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-\hbar w)t} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-\hbar w)t} \\ \frac{1}{2}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-\hbar w)t} \end{pmatrix}$$

$$< \psi(t)| = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-\hbar w)t}\, < e_1| + \frac{1}{2}\, e^{\frac{i}{\hbar}(E_0+\hbar w)t}$$
$$< Q >_{(t)} = \frac{1}{4}e^{-iwt} + \frac{1}{2}e^{iwt} + \frac{1}{2}e^{-iwt} + \frac{1}{4}e^{iwt}$$
$$< C >_{(t)} =< \psi(t)|\, C\, |\psi(t) >= 0$$

On a: $[C, H] = 0$ et C ne dépend pas explicitement du temps donc $\frac{\partial C}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} < C >_{(t)} \Rightarrow C$ est une constante de mouvement. (Théorème d'Ehrenfest)

$\frac{d}{dt} < C >_{(t)} = -\frac{iw}{4}e^{-iwt} + \frac{iw}{2}e^{iwt} + \frac{iw}{4}e^{iwt} \neq 0$ alors Q n'est pas une constante du mouvement.

VALIDE PAR LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny d'Abidjan Année universitaire 2018-2019

UFR de Mathématiques et Informatique Niveau : Licence 2 Session : 1

Examen : Statistique avec R Durée : 01 heure

EXERCICE 1 : Questions à choix multiples (10 points)

NB : Vous écrirez le numéro de la question suivi du numéro de la bonne réponse(exemple 1 a)

1. Pour télécharger le logiciel R, il faut se rendre sur le site :
   a) *http ://www.r.com* ; b) *http ://www.r-project.org* ; c) *http ://www.r-project.com.*
2. Une interface graphique de R est :
   a) *spyder* ; b) *Rgraphic* ; c) *Rcmdr.*
3. Le code R permettant de créer la variable "age" contenant la valeur 17 et d'afficher son contenu est :
   a) *(age<-17)* ; b) *print(age)* ; c) *print(age(17)).*
4. Pour afficher le type d'un objet, on utilise la fonction :
   a) *mode()* ; b) *type()* ; c) *Mod().*
5. On considère la variable "poids" définie par : poids<-c(18, 20, 47, NA, 19, 57, 18).
   Quel est le résultat de l'instruction : which(is.na(poids)) ?
   a) *TRUE* ; b) 4 ; c) *NA.*
6. Pour connaitre la structure d'un objet, on peut utiliser la fonction :
   a) *class()* ; b) *str()* ; c) *factor().*
7. Soit A une matrice. L'instruction : A[1 : 2,] donne
   a) *les deux premières lignes de A* ;
   b) *l'élément de la première ligne et la deuxième colonne de A* ;
   c) *les deux premières colonnes de A.*
8. On considère la liste "y" définie par
   y<-list(taille=c(188, 168), etudiant=c("Pierre", "Paul"), new=c("TRUE", "FALSE")).
   Quel est le résultat du code : length(y)
   a) 3 ; b) 6 ; c) 9.
9. Soit la variable "profession" définie par
   profession<-factor(c("cadre", "ouvrier", "artisan", "cadre", "paysan", "ouvrier", "artisan", "cadre")). Quel est le résultat du code : nlevels(profession) ?
   a) *"artisan" "cadre" "ouvrier" "paysan"* ; b) 4 ; c) 2 3 2 1.
10. On veut importer un fichier situé sur le disque D nommé "plan" au format csv dont le séparateur de champ est le point-virgule. On utilise l'instruction suivante :
    a) *read.csv("D :/plan.csv");*
    b) *read.csv2("D :/plan.csv")*
    c) *write.csv("D :/plan.csv").*

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2 : (10 points)

NB : Vous écrirez des codes en langage R permettant de répondre aux questions posées.

1. Créer les vecteurs suivants :
   a) x est constitué de la suite des entiers de 1 à 30;
   b) y contient trois fois la valeur 5, quatre fois la valeur 8 puis sept fois valeur 12.
   c) z contient 11 chiffres compris entre 1 et 30 avec un intervalle constant.
2. On considère la variable "poids" définie par : poids<-c(18, 20, 47, NA, 19, 57, 18, NA, 35). Créer le vecteur nommé "poidsNA" contenant les valeurs de la variable "poids" sauf les valeurs manquantes à l'aide d'une seule commande.
3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix}$.
   a) A l'aide du vecteur "vec" définie par vec<-c(3,-1,0,-1,3,-1,0,-1,3), créer la matrice A.
   b) Pour chaque ligne et chaque colonne de la matrice A, calculer la moyenne de leurs éléments à l'aide des fonctions apply et mean.
   c) Calculer la trace, le déterminant puis l'inverse de la matrice A.
   d) Créer le vecteur b.
   e) Résoudre le système linéaire : AX=b.
4. On considère le data frame nommé "etudiant" dont les lignes et les colonnes sont données dans le tableau ci-dessous.

Nom	sexe	Analyse Numérique	Scilab
Mariam	F	12	8
TIA	M	5	13
DIGBEU	M	7	4
KOUASSI	M	15	18
AYA	F	2	18
YAPO	M	14	14
VANESSA	F	10	11
ZAMBLE	M	10	6

   a) Créer une variable nommée "genre" contenant les valeurs de la colonne "sexe" et une variable nommée "ananum" contenant les valeurs de la colonne "Analyse Numérique".
   b) Construire le tableau des effectifs puis le tableau des fréquences de la variable "genre".
   c) Calculer le mode de la variable "ananum".
   d) Déterminer les valeurs des principaux paramètres de position de la variable "ananum" à l'aide d'une seule commande.
   e) On souhaite comparer les notes des filles et des garçons. Construire un data frame nommé "hom" contenant uniquement les étudiants de sexe masculin et un data frame nommé "fem" contenant uniquement les étudiants de sexe féminin.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny d'Abidjan Année universitaire 2018-2019

UFR de Mathématiques et Informatique Niveau : Licence 2 Session : 2

Examen : Statistique avec R Durée : 01 heure

EXERCICE 1 : Questions à choix multiples (10 points)

NB : Vous écrirez le numéro de la question suivi du numéro de la bonne réponse(exemple 1 *a*)

1. Pour consulter l'aide en ligne de la fonction sum, on utilise l'instruction :
   a) *help("sum")*; *b*) ?sum; *c*) *help(sum).start*
2. Pour supprimer la variable b, on peut utiliser la commande :
   a) *supprim(b)*; *b*) *NULL(b)*; *c*) *rm(b)*.
3. Pour convertir une variable d du type double en une variable du type integer, j'utilise l'instruction :
   a) *is.integer(d)*; *b*) *integer(d)*; *c*) *as.integer(d)*.
4. On pose v<-5; w<--6. Quel est le résultat du code $v == w$? :
   a) *FALSE*; *b*) *TRUE*; *c*) -6.
5. On pose h<-c("maman", "papa"). Quel est le résultat du code : class(h) ?
   a) *"maman" "papa"*; *b*) "character"; *c*) 9.
6. On donne le vecteur z<-c("bleu", "blanc", "vert"). Quel est le résultat du code : sort(z, decreasing=TRUE) ?
   a) *"bleu" "blanc" "vert"*; *b*) *"vert" "blanc" "bleu"*; *c*) *"blanc" "bleu" "vert"*.
7. On pose $x < -c(12, -5, 7, 8.30)$. Quel est le résultat de l'instruction : which(x>7) ?
   a) *1 4 5*; *b*) *12 8 30*; *c*) *FALSE*.
8. On considère la liste "y" définie par
   y<-list(taille=c(174, 165, 195), classe=c("L1", "L2", "L3"), UFR=c("CBG", "SSMT", "STRM")).
   Quel est le résultat du code : y[[3]] ?
   a) 195; *b*) "L3"; *c*) "CBG" "SSMT" "STRM".
9. Soit la variable z définie par z<-list(poids=c(75, 90), profession=c("artisan", "enseignant")).
   Le code suivant : z[[2]]<-NULL
   a) *ajoute l'élément NULL à la liste z*
   b) *supprime le deuxième élément de la liste z*
   c) *remplace le deuxième élément de la liste z par NULL*.
10. On considère un data frame nommé dafr. Le code suivant : dimnames(dafr) donne
    a) *le nom des lignes et des colonnes du data frame*
    b) *le nom des colonnes du data frame*
    c) *les dimensions du data frame*.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2 : (10 points)

NB : Vous écrirez des codes en langage R permettant de répondre aux questions posées.

1. Soit vec un vecteur de nombres réels contenant éventuellement des valeurs manquantes.
   a) Ecrire un code permettant de tester la présence de valeurs manquantes dans ce vecteur. Commenter le résultat de ce test.
   b) On suppose que vec contient des valeurs manquantes. Ecrire un code permettant de donner la position des ces valeurs manquantes.
   c) Ecrire un code permettant d'afficher le nombre de valeurs manquantes du vecteur vec.
   d) On suppose que vec contient des valeurs manquantes. Ecrire un code permettant de calculer la valeur moyenne du vecteur.
2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 10 \\ -12 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   A l'aide du vecteur "mat" définie par mat<-c(3,-1,10,-12,3,-7,0,-1,3), créer la matrice A.
3. On considère le data frame nommé satishop contenant les résultats d'un sondage portant sur les prestations d'un hôpital.
   a) Ecrire un code permettant d'obtenir la structure générale des colonnes de ce data frame.
   b) La colonne nommée profession contient assez de valeurs manquantes. Ecrire un code permettant de supprimer cette colonne.
   c) La structure chargée d'analyser ces données souhaite ajouter une colonne nommée IMC portant sur l'indice de masse corporelle. Ecrire un code permettant de réaliser ce voeu.
   d) Cette structure souhaite partager ce data frame en plusieurs groupes en fonction de l'âge. Ecrire un code permettant de créer un data frame nommé satishop40 contenant uniquement les personnes de 40 ans ou plus.
   e) On souhaite déterminer le nombre de patients possédant une assurance. La colonne nommée assurance, prenant deux valeurs, permet de savoir si un patient possède une assurance(1 : personne assurée ou 0 : personne non assurée). Cette colonne ne contient pas de valeurs manquantes. Ecrire un code permettant d'extraire cette colonne que vous nommerez assur puis calculer le nombre de personnes possédant une assurance.

Scanné avec CamScanner

UFR de Mathématiques et Informatique

u : Licence 2 **Durée : 01h15min**

7 ; 1 ; 10 ; -5 ; 11,8 ; 3 ; 9 ; NA.

eur **vec** contenant les valeurs précédentes.

750 ; 2100), y=(1450 ; 1870 ; 1690 ; 0) et

es éléments respectifs de x, y et z.
ec les noms suivants : conjoint1, conjoint2,

présentent respectivement les revenus des
nes de quatre ménages. Ecrire un code

ents sont nommés : **nom**, **taille** et **new** et
Paul), (188, 168) et (FALSE, TRUE).
e.
LSE) ?
e **LSE** l'élément nommé **poids** et prenant
n" ?

Scanné avec CamScanner

Exercice 2 : (10 points)

On considère le fichier **tele.csv** situé sur le disque E de votre ordinateur et contenant des informations d'un sondage réalisée à Abidjan auprès des individus regardant quotidiennement la télévision. C'est un fichier au format **csv** dont le séparateur de champ est une virgule et contenant les variables : **genre** (prenant les valeurs homme et femme), **niveau** (niveau d'étude), **temps** (durée moyenne quotidienne devant la télévision en minutes), etc.

Ecrire un code permettant :

1) d'importer ce fichier dans votre session de travail sous le nom **TV**.
2) de vérifier que le fichier est du type data frame.
3) de donner la structure générale des variables de ce data frame.
4) d'obtenir uniquement les noms des lignes et des colonnes.
5) de transformer la variable **genre** en facteur grâce à la fonction **factor**.
6) d'obtenir le résumé numérique des variables du data frame.
7) de construire le tableau des effectifs puis des fréquences de la variable **niveau**.
8) de construire un data frame nommé **TVF** constitué uniquement des données concernant les femmes à partir du data frame **TV**.
9) de supprimer la colonne **genre** du data frame **TVF**.
10) de déterminer le temps moyen passé devant la télévision par les femmes.

VALIDER LMD

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny **UFR de Mathématiques et Informatiques**

Examen de statistique avec R **Niveau : Licence 2** **Durée : 01h15 min**

Première session **Année 2020/2021**

Exercice 1 : (10 points)

1) Soit **note** = (7 ; 9 ; 13 ; 8 , *NA* ; 2 ; 16 ; 1 : 6; 19 ; 15; *NA* ; 19 ; 14 ; 8 ; 2 ; 19 ; 11 ; 18 ; 7).
   a) Ecrire un code permettant de créer le vecteur **note**.
   b) Donner les résultats des codes suivants :
      - $length(note)$;
      - $which(is.na(note))$;
      - $note[c(5, 11,13)]$;
      - $sum(note)$;
   c) Que font les codes suivants :
      - $note[note > 10]$;
      - $note \leftarrow na.omit\ (note)$;
      - $sort(note,\ decreasing = TRUE)$?

2) Soit **EL** $\leftarrow list\ (nom = c\ ('Aya', 'Florent', 'Paul'), tail = c(174,180,168), niv = c\ ('L3', 'L1', 'L2'))$
   a) Quel type de structure de données représente **EL** ?
   b) Que fait le code suivant : **EL[3]** ?
   c) Quel est le résultat du code suivant : **length(EL)** ?
   d) Ecrire un code qui permet d'ajouter à **EL** un élément nommé **age** et prenant les valeurs 20, 24 et 40.
   e) Ecrire un code permettant de remplacer la valeur **Paul** par **Emilie** dans **EL**.
   f) Ecrire un code permettant de supprimer l'élément **tail** de **EL** .

3) On donne le vecteur **b**= (7 ; 9 ; 13 ; 8 ; 2 ; 16 ; 1 ; 6 ; 19 ; 15 ; 19 ; 14 ; 8 ; 2 ; 19 ; 11 ; 18 ; 7)
   a) Ecrire un code permettant de créer une matrice **B** de trois lignes dont la première ligne contient les six premiers éléments de b, la deuxième ligne contient les six éléments suivants et la troisième ligne contient les six derniers éléments de **b**.
   b) Ecrire un code qui permet de nommer respectivement les lignes de **B** par L1, L2 et L3 et les colonnes C1, C2, C3, C4, C5, C6.
   c) Ecrire un code qui permet de créer un vecteur nommé **LIGNE** contenant la somme des éléments de chaque ligne de **B**.
   d) Ecrire un code permettant d'extraire les deux premières colonnes de la matrice **B**.
   e) Remplacer la valeur 14 de la matrice **B** par 17.

Exercice 2 : (10 points)

On considère le fichier **habitat.csv** situé sur le disque F de votre ordinateur et contenant des informations sur les caractéristiques des habitations à Abidjan. C'est un fichier au format csv dont le séparateur de champ est une virgule.

1) Ecrire un code R permettant d'importer ce fichier dans votre session de travail sous le nom **maison**.
2) On souhaite obtenir la structure générale des variables de ce data frame.
   a) Quel est le code à saisir pour obtenir ces informations ?
   b) Quel est le code à saisir pour obtenir le nom des variables ?
3) Un aperçu de ce fichier est donné ci - dessous après transformation des variables **natmaison** et **model**.

Scanné avec CamScanner

nbpieces	*: int 2 5 2 3 4 3 3 7 1 2 5 5.....*
superficie	*: num 150 225 125.78 289.8 964 548.8 NA 300.25....*
natmaison	*: Factor w / 3 levels " bas ", " dup ", " dup ", " bas " " tpx " : 1 2 2 1 3 1.....*
model	*: Factor w / 2 levels " A", "A ", " B ", "A " NA, "B" : 1 1 2 1 NA 2.....*

a) Quelle est la nature de la variable **natmaison** ? Quelles sont ses modalités ?
b) Quel est le code qui a permis de transformer la variable **natmaison** en facteur ?
c) Ecrire un code permettant d'obtenir le tableau des effectifs de la variable **natmaison**.
d) Ecrire un code permettant de vérifier la présence de valeurs manquantes dans la variable **natmaison** puis un code permettant d'obtenir son nombre de valeurs manquantes.

4) On considère la variable **superficie**.
a) On souhaite calculer la valeur moyenne de cette variable. Un étudiant a saisi le code suivant : ***mean(maison$superficie)*** Quel est le résultat de ce code ? comment contourner cette difficulté ?
b) Ecrire un code permettant d'obtenir le résume numérique de cette variable.
c) On regroupe les données de cette variable en classes de même amplitude. Ecrire un code permettant d'obtenir l'histogramme de cette variable.
d) Ecrire un code permettant de déterminer la variance et l'écart type de cette variable.

5) On s'intéresse aux variables **model** et **superficie**.
a) Ecrire un code permettant d'obtenir, à partir du data frame **maison.csv**, un data frame nommé **modelA** contenant uniquement le modèle " A " et un data frame nommé **modelB** contenant uniquement le modèle " B ".
b) Ecrire un code permettant de calculer la moyenne de la variable **superficie** dans le data frame **modelA** et dans le data frame **modelB**.
c) Ecrire un code permettant d'obtenir la boîte à moustaches de la variable **superficie** en fonction des modalités de la variable **model**.

VALIDE URMD

Scanné avec CamScanner

Université FHB
MATHS-INFO.

Année: 2020-2021

EXAMEN DE STATISTIQUE AVEC R
Session 2 ;L2; durée:1H15

Exercice 1:(10 points)

1) On donne les valeurs:7; 9; 13; 8; NA; 2; 16; NA; 6; 19; 15; NA; 19; 14; 8; 19; 11; 18.
a) Ecrire un code permettant de créer le vecteur **dev** contenant les valeurs précédentes.
b) Donner les résultats des codes suivants:
- *length(which(is.na(dev)))*;
- *all(dev> 10)*;

c) Que font les codes suivants:
- *dev<-na.omit(dev)*;
- *which.max(dev)*.

2) On donne $x = (45; 21; 23; 32)$, $y = (450; 870; 690; 580)$ et $z = (187; 180; 170; 190)$.
a) Créer la matrice B dont les colonnes sont les éléments respectifs de x, y et z.
b) Nommer les lignes de B avec les noms: paul, jeanne, Marc, Marie.
c) Nommer les colonnes de B avec les noms: age, revenu, taille.
d) Que font les codes suivants:
- *mean (B[, 2])*;
- *apply (B,MARGIN= 2,max)*;

3) On considère les vecteurs suivants:
nom prenant les valeurs Konan, Kassi, Soro,
prenom dont les valeurs sont Paul, Romeo, Emilie,
annee_naissance dont les valeurs sont 2000, 2002, 1998.
a) Créer une liste nommée **MOI** dont les éléments sont **nom, prenom** et **annee_naissance**
b) Extraire le prenom de la liste **MOI** de deux manières différentes en utilisant:
- l'indice;
- le nommage.

c) On suppose qu'il existe une liste nommée **TOI** et présentant la même structure que celle de la liste **MOI**. Créer la liste nommée **personnes** qui contient les listes **TOI** et **MOI** dans cet ordre.

Exercice 2 (10 points)

On considère le fichier **etudiant.csv** situé sur le disque **E** de votre ordinateur

VALIDUR LMD

Scanné avec CamScanner

et contenant les informations d'un sondage portant sur les sports pratiqués par les étudiants d'une université d'Abidjan. C'est un data frame au format **csv** dont le séparateur de champ est une virgule et contenant les variables: **genre** (prenant les valeurs homme et femme), **temps** (durée de pratique du sport chaque jour en minutes), **type** (football, basketball, tennis, natation, karaté...), **age** (âge en années des étudiants), etc. On suppose que les **variables age** et **temps** contiennent des valeurs manquantes.

Ecrire un code permettant:

1) d'importer ce fichier dans votre session de travail sous le nom **Sport**;
2) d'obtenir uniquement les noms des individus;
3) d'afficher les 6 premières lignes du fichier **sport**;
4) de transformer les variables **genre** et **type** en facteur;
5) d'obtenir le resumé numérique de toutes les variables du data frame;
6) de construire le diagramme en barres de la variable **type**;
7) de construire la boîte à moustaches de la variable **temps**;
8) de déterminer l'âge moyen des étudiants;
9) de renommer la variable **type** en **sport_prefere**;
10) de déterminer la durée minimale de temps passé au sport.

VALIDE UVCI

Scanné avec CamScanner

UFR-MI : L2 Année 2018-2019

CORRECTION : STATISTIQUE AVEC R SESSION 1

EXERCICE 1 : QCM

$1-b$; $2-c$; $3-a$; $4-a$; $5-b$; $6-b$; $7-a$; $8-a$; $9-b$; $10-b$

EXERCICE 2

1. a) $x = c(1:30)$
   b) $y = rep(c(5,8,12), c(3,4,7))$
   c) $z = seq(from = 1, to = 30, lenght = 11)$
2. $poidsNA = poids[-c(wich(is.na(poids)))]$
3. a) $A = matrix(vec, nrow = 3, ncol = 3)$ ou
   $A = matrix(vec, nrow = 3, byrow = TRUE)$
   b) $apply(A, MARGIN = 1, mean)$ et $apply(A, MARGIN = 2, mean)$
   c) La trace : $sum(diag(A))$; le déterminant : $det(A)$; inverse : $solve(A)$
   d) $b = matrix(c(100,0,200), nrow = 3)$
   e) $solve(A, b)$
4. a) $genre = etudiant\$sexe$ et $ananum = etudiant[[3]]$
   b) Les effectifs : $table(genre)$; les fréquences : $prop.table(table(genre))$
   c) $mode_ananum = names(table((ana))[which(table(ana) = max(table(ana)))]$
   d) $summary(ananum)$
   e)

VALIDE UR LMD

Scanné avec CamScanner

Correction Examen Statistique avec R session 2

21 mai 2020

EXERCICE 1 : Questions A choix multiples (10 points)

***NB** . Vous écrirez le numéro de la question suivi du numéro de la bonne réponse(cxemplc 1 a)*

1. Pour consulter l'aide en ligne de la fonction sum, on utilise l'instruction :

a) help("sum") ; b)?sum

```
help('sum')
```

```
## starting httpd help server ... done
```

```
?sum
```

2. Pour supprimer la variable b, on peut utiliser la commande :

c) rm(b)

```
b<-c(2,5,3)
rm(b)
```

3. Pour convertir une variable d du type double en une variable du type integer, j'utilise l'instruction :

c) as.integer(d)

```
d<-c(2.6,5.1,3.9)
as.integer(d)
```

```
## [1] 2 5 3
```

4. On pose v<-5 ; w<— 6. Quel est le résultat du code v == w ? :

a) FALSE

```
v<-5 ; w<-6.
v == w
```

```
## [1] FALSE
```

5. On pose h<-c("maman", "papa"). Quel est le résultat du code : class(h) ?

b) "character"

```
h<-c("maman", "papa")
class(h)
```


VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

```
## [1] "character"
```

6. On donne le vecteur z<-c("bleu", "blanc", "vert"). Quel est le résultat du code : sort(z, decreasing=FALSE) ?

c) "blanc" "bleu" "vert".

```
z<-c("bleu", "blanc", "vert")
sort(z, decreasing=FALSE)
```

```
## [1] "blanc" "bleu"  "vert"
```

7. On pose x < -c(12, — 5, 7, 8,30). Quel est le résultat de l'instruction : which(x>7) ?

a) 1 4 5

```
x <-c(12, -5, 7, 8,30)
which(x>7)
```

```
## [1] 1 4 5
```

8. On considère la liste "y" définie par y<-list(taille=c(174, 165, 195), classe=c("Ll", "L2", "L3"), UFR=c("CBG", "SSMT", "STRM")). Quel est le résultat du code : y[[f3]] ?

c) "CBG" "SSMT" "STRM"

```
y<-list(taille=c(174, 165, 195), classe=c("L1", "L2", "L3"), UFR=c("CBG", "SSMT","STRM"))
y[[3]]
```

```
## [1] "CBG"  "SSMT" "STRM"
```

9. Soit la variable z définie par z<-list(poids=c(75, 90), profession=c("artisan", "enseignant")).Le code suivant : z[[2]]<-NULL

c) remplace le deuxième élément de la liste z par NULL.

```
z<-list(poids=c(75, 90), profession=c("artisan", "enseignant"))
z
```

```
## $poids
## [1] 75 90
##
## $profession
## [1] "artisan"    "enseignant"
```

```
z[[2]]<-NULL
z
```

```
## $poids
## [1] 75 90
```


VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

10. On considère un data frame nommé dafr. Le code suivant : dimnames(ilafr) donne

a) le nom des lignes et des colonnes du data frame

```
dafr<-data.frame(taille=c(174, 165, 195), classe=c("L1", "L2", "L3"))
head(dafr)
```

```
##   taille classe
## 1    174     L1
## 2    165     L2
## 3    195     L3
```

```
dimnames(dafr)
```

```
## [[1]]
## [1] "1" "2" "3"
##
## [[2]]
## [1] "taille" "classe"
```

EXERCICE 2 : (10 points)

NB : Vous écrirez des codes en langage R permettant de répondre aux questions posées.

1-Soit vec un vecteur de nombres réels contenant éventuellement des valeurs manquantes.

a) Ecrire un code permettant de tester la présence de valeurs manquantes dans ce vecteur . Commenter le résultat de ce test.

```
vec<-c(3,-10 ,10,-12,3,-7,0,-1 ,3,NA,5,NA,7,NA,NA)
is.na(vec)
```

```
##  [1] FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE
## [12]  TRUE FALSE  TRUE  TRUE
```

Il s'agit d'un vecteur de boolean qui envoie False si le nombre n'es pas une valeur manquante et TRue si le nombre est une valeur manquante

b) On suppose que vec contient des valeurs manquantes. Ecrire un code permettant de donner la position des ces valeurs manquantes.

```
which(is.na(vec))
```

```
## [1] 10 12 14 15
```

c) Ecrire un code permettant d'afficher le nombre de valeurs manquantes du vecteur vec .

```
sum(is.na(vec))
```


VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

```
## [1] 4
```

IL y a bien 4 valeurs popres dans notre vecteur vec

d) On suppose que vec contient des valeurs manquantes. Ecrire un code permettant de calculer la valeur moyenne du vecteur.

```
mean(vec,na.rm = TRUE)
```

```
## [1] 0.09090909
```

l'argument $na.rm{=}TRUE$ perment de supprimer les valeurs manquantes et de faire le calcul de la moyenne.

2. Soit la matrice A

```
mat<-c(3,-1 ,10,-12,3,-7,0,-1 ,3)
A<-matrix(mat,ncol= 3,byrow =TRUE)
A
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    3   -1   10
## [2,]  -12    3   -7
## [3,]    0   -1    3
```

le remplissage de la matrice se fais par defaut par colonne il faut donc lui specifié que nous voulons faire le remplissage par ligne donc $byrow{=}{=}TRUE$

3. On considère le data frame nommé satishop contenant les résultats d'un sondage portant sur les prestations d'un hôpital.

a) Ecrire un code permettant d'obtenir la structure générale des colonnes de ce data frame.

```
satishop<-data.frame(genre=c('fille', 'garçon', 'fille'), maladie=c("Palu", "Covid19", "diabete"),a
satishop
```

```
##    genre maladie age profession assurance
## 1  fille    Palu  30 Professeur         1
## 2 garçon Covid19  50       <NA>         0
## 3  fille diabete  40       <NA>         0
```

```
#structure du dataframe
str(satishop)
```

```
## 'data.frame':    3 obs. of  5 variables:
##  $ genre     : Factor w/ 2 levels "fille","garçon": 1 2 1
##  $ maladie   : Factor w/ 3 levels "Covid19","diabete",..: 3 1 2
##  $ age       : num  30 50 40
##  $ profession: Factor w/ 1 level "Professeur": 1 NA NA
##  $ assurance : num  1 0 0
```

b) La colonne nommée profession contient assez de valeurs manquantes. Ecrire un code permettant de supprimer cette colonne.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

```
satishop<-satishop[,-4]
satishop
```

```
##    genre maladie age assurance
## 1  fille    Palu  30         1
## 2 garçon Covid19  50         0
## 3  fille diabete  40         0
```

-4 - plus la position du vecteur qu'on veut suppimer ici notre vecteur profession se trouve à la position 4.

c) La structure chargée d'analyser ces données souhaite ajouter une colonne nommée IMC portant sur l'indice de masse corporelle. Ecrire un code permettant de réaliser ce voeu.

```
IMC<-c(145,10,200)
satishop<-cbind(satishop,IMC)
satishop
```

```
##    genre maladie age assurance IMC
## 1  fille    Palu  30         1 145
## 2 garçon Covid19  50         0  10
## 3  fille diabete  40         0 200
```

d) Cette structure souhaite partager ce data frame en plusieurs groupes en fonction de l 'âge. Ecrire un code permettant de créer un data frame nomme satishop40 contenant uniquement les personnes de 40 ans ou plus.

```
satishop40<-satishop[satishop['age']>=40,]
satishop40
```

```
##    genre maladie age assurance IMC
## 2 garçon Covid19  50         0  10
## 3  fille diabete  40         0 200
```

e) On souhaite déterminer le nombre de patients possédant une assurance. La colonne nommée assurance, prenant deux valeurs, permet de savoir si un patient possède une assurance(1 : personne assurée ou 0 : personne non assurée) . Cette colonne ne contient pas de valeurs manquantes. Ecrire un code permettant d'extraire cette colonne que vous nommerez assur puis calculer le nombre de personnes possédant une assurance.

```
assur<-satishop['assurance']
sum(assur)
```

```
## [1] 1
```

Dans notre cas il n'y a un seul assurer

Scanné avec CamScanner

CORRECTION Examen de statistique avec R 2019-2020

Exercice 1 : (10 points)

1-a) **Réponse :** vec <- c(4 , NA , -7 , 1 , 10 , -5 , 11.8 , 3 , NA)

- **Réponse :** -7 1 10 # Affiche les éléments compris entre le troisième et cinquième éléments inclus du vecteur **vec**.
- **Réponse :** 4 1 # Affiche le premier et quatrième élément du vecteur **vec.**
- **Réponse :** 4.0 1.0 -5.0 11.8 3.0 NA # Affiche toutes les valeurs du vecteur sauf le deuxième, le troisième et le cinquième éléments.

b)

- **Réponse :** Remplace la valeur des éléments compris entre le premier et le troisième élément inclus par **6**.
- **Réponse :** Donne la position des éléments **NA** qui se trouve dans le vecteur **vec** et remplace la valeur de ses éléments par **0.**

2-a) **Réponse :** x <- c(1200, 1180, 1750, 2100)
y <- c(1450, 1870, 1690, 0)
z <- c(4, 2, 3, 2)

b) Réponse : **A** <- matrix(c(x, y, z), nrow=4, ncol=3)

c) Réponse : **colnames(A)** <- c("conjoint1", "conjoint2", "nb_personnes")

d) Que font les codes suivants :

- **Réponse :** Donne un vecteur contenant les dimensions de la matrice **A.** (exemple : 4 3)
- **Réponse :** Affiche la deuxième et la troisième ligne de la matrice **A.**

a) le revenu total de chaque ménage:

Réponse : apply(A[,1:2], **MARGIN**=1, **sum**) # la somme des revenus des deux conjoints par ménage.

b) le revenu par personne de chaque ménage.

Réponse : A[1:4, 1:2] #Affiche le revenu de chaque conjoint.

a) Écrire un code permettant de créer cette liste.

Réponse : LSE <-list(nom = c(188, 168), taille =c("Pierre", "Paul") , new = c(FALSE, TRUE))

b) Quel est le résultat du code suivant : length(**LSE**) ?

Scanné avec CamScanner

Réponse : 3 (qui est le nombre d'éléments qui composent la liste **LSE**).

c) Écrire un code permettant d'ajouter à la liste **LSE** l'élément nommé **poids** et prenant la valeur (75, 80).

Réponse : **LSE** <- c(**LSE**, z<- list(**poids** = c(75, 80))

d) Que fait le code suivant : **LSE**$nom[2]<- "Sam" ?

Réponse : Affecte "Sam" à la deuxième valeur de l'élément **nom** dans la liste **LSE**.

Exercice 2 : (10 points)

1) **Réponse** : TV <- **read.csv**("E:/tele.csv")
2) **Réponse** : **is.data.frame**(TV) #Renvoie TRUE si le fichier est du type data frame.
3) **Réponse** : **str**(TV)
4) **Réponse** : **dimnames**(TV)
5) **Réponse** : **factor**(TV$genre)
6) **Réponse** : **summary**(TV)
7) **Réponse** : Effectif : **table**(TV$niveau)
   Fréquence : **prop.table**(**table**(TV$niveau))
8) **Réponse** : **TVF** <- **subset**(**TV**, genre == "Femme")
9) **Réponse** : TVF$genre <- **NULL**.
10) **Réponse** : **mean**(TVt$temps, **na.rm**=TRUE).

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB COCODY	2017
UFRMI ***+1 reponse juste*** ***-0.5 reponse fzute***	Examen : Python Niveau : Licence 2 Session 1 Durée : 1H00min

Q1- Pour transformer un code lisible en code compréhensible par la machine, on utilise :

(a) Un compilateur
(b) Un exécuteur
(c) Un transformateur
(d) Un traducteur

Q2- 2. Python est un langage développée par

(a) Hewlett-Packard
(b) Sun Microsystems
(c) Microsoft
(d) Guido van Rossum
(e) Steve jobs

Q3 – Les extensions de fichiers associes a python sont :

a) Py
b) Pyc
c) Pys
d) pi

Q4 – Lequel n'est pas une expression valide?

(a) x + 4
(b) 3 * (Y - 2) + 1 % 1
(c) (27 + 2 / 3) <= 3 - 1
(d) (2 == x - 7 * 3) + 1

Q5 - Que va afficher à la console le programme ci- dessous ?

```
x = 0;
if x==0 :
x = x+2
print (x)
```

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

Q6- soit

```
def mafonct(b) :
    Return b>0
```

On qualifie b de paramètre

(a) **Local**
(b) Formel
(c) Effectif
(d) global

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

Q7 En python le constructeur d'une classe a pour entête :

a) def Constr-classe() :
b) def instance()
c) _init_()
d) Float()

Q8 Pour passer de la classe à l'objet on fait :

a) Une déclaration
b) Incrémentation
c) Une instanciation
d) Une création

EX01

a) Ecrire en python une fonction facto(x) qui, permet de calculer x !
b) En la réalité la bibliothèque math de python contient déjà une fonction
`math.factorial(x)`
Return x factorial. Raises `ValueError` *if x is not integral or is negative.*
Utliser la pour calculer et afficcher C(n,p)

EX02

class Point:

```
def __init__(self, x = 1, y = 1) :
    self.abscisse = x
    self.ordonne = y

def getAbscisse(self):
    return self.abscisse

def getOrdonne(self):
    return self.ordonne

def setAbscisse(self, x) :
    self.abscisse=x

def setOrdonne(self, y):
    self.ordonne=y

def deplace(self, dx ,dy):
    self.abscisse=self.abscisse+dx
    self.ordonne=self.ordonne+dy
```

a) P1=Point() # Instanciation de l'objet P1 avec deux attributs abscisse et ordonne Initiés par (1 , 1)
b) P1_y=P1.getOrdonne()
c) P2_x=P2.getAbscisse()
d) P2_y=P2.getOrdonne()
e) P1.deplace(20, 30)
f) print(P1.getAbscisse()," ",P1.getOrdonne())
Donner l'explication de chaque ligne et le résultat de l exécution

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB COCODY	2017
UFRMI *+1 reponse juste* *-0.5 reponse faute*	**Examen :** Python **Niveau :** Licence 2 **Session** 2 **Durée :** 1H00min

Q1- Python est un langage
- (a) Interprété
- (b) à commande
- (c) Compilé
- (d) d'exécution

Q2- 2. Python est un langage développée par
- (a) Hewlett-Packard
- (b) Sun Microsystems
- (c) Microsoft
- (d) Guido van Rossum
- (e) Steve jobs

Q3 – Les extensions de fichiers associes a python sont :
- a) Py
- b) Pyc
- c) Pys
- d) pi

Q4 – Lequel n'est pas une expression valide?
- (a) x + 4
- (b) 3 * (Y - 2) + 1 % 1
- (c) (27 + 2 / 3) +3 - 1
- (d) (2 <= x - 7 * 3) + 1

Q5 - Que va afficher à la console le programme ci- dessous ?

```
x = 1;
if x==0:
      x = x+2
else:
  x=2*x
print (x)
```

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

Q6- soit def mafonct(b) :
Return b>0
On qualifie b de paramètre
- (a) Local
- (b) Formel
- (c) Effectif
- (d) global

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

21: 41

Q7 En python le constructeur d'une classe a pour entête :

a) def Constr-classe() :
b) def instance()
c) _init_()
d) Float()

EX01

a) Ecrire en python une fonction facto(x) qui, permet de calculer x !
b) En la réalité la bibliothèque math de python contient déjà une fonction math.factorial(*x*)

Return x factorial. Raises ValueError if x is not integral or is negative.

Utliser la pour calculer et afficher le nombre d'euler

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

EX02

class Point:

```
def __init__(self, x = 1, y = 1) :
    self.abscisse = x
    self.ordonne = y

def getAbscisse(self):
    return self.abscisse

def getOrdonne(self):
    return self.ordonne

def setAbscisse(self, x) :
    self.abscisse=x

def setOrdonne(self, y):
    self.ordonne=y

def deplace(self, dx ,dy):
        self.abscisse=self.abscisse+dx
        self.ordonne=self.ordonne+dy
```

a) P1=Point()
b) P2=Point(2,1)
c) P1_y=P1.getOrdonne()
d) P2_x=P2.getAbscisse()
e) P2_y=P2.getOrdonne()
f) P1.deplace(20, 30)
g) print(P1.getAbscisse()," ",P1.getOrdonne())

Donner l'explication de chaque ligne et le résultat de l exécution

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Licence 2
Examen Algorithmique et Programmation Python
Semestre 1 Session 1 1h 30 2017 - 2018

Exercice 1 : Culture

1. Remplir le tableau ci-dessous

Instructions	Code Python	Instructions	Code Python
Comment accède-t-on à la 3è lettre d'une chaîne de caractères ?		Quelle instruction en Python permet d'obtenir la liste des entiers divisibles par 3 compris entre 5 et 111 compris ?	
Comment demande-t-on à l'utilisateur d'entrer une chaine de caractères ?		Comment accède-t-on en Python à l'avant dernier élément d'une liste (sans utiliser l'instruction len) ?	
Comment effectue-t-on la concaténation de deux chaînes de caractères ?		Quel opérateur en Python permet d'obtenir le reste de la division euclidienne ?	

2. Donner le rôle des modules Python : Numpy, SciPy
3. Donner un exemple de code Python correspondant aux structures de données suivantes : dictionnaires, ensembles, listes.

Exercice 2 :

1) Une année est bissextile si son millésime est divisible par 4 et non divisible par 100, sauf s'il est divisible par 400 : 1900 n'est pas bissextile, 2000 l'est, 2001 ne l'est pas, 2004 l'est. Ecrivez un code Python qui, étant donné le millésime d'une année, affiche si cette année est bissextile ou non.
2) Ecrire un code Python permettant de saisir le mot de passe **lic2mi** sachant que l'utilisateur n'a que trois essais.
3) Ecrire un code Python qui demande à l'utilisateur de saisir 5 notes puis il affiche leur moyenne ainsi la note minimale et la note maximale. Une note est comprise entre 0 et 20.

Exercice 3 : Python

```
ALGORITHME test ;
VAR b, i, N : ENTIER ;
cumul: REEL;
DEBÚT
ECRIRE(' Algorithme  tester licence 2 en info');
b←10; (* initialisation *)
cumul←20;
ECRIRE('Saisir un nombre entier N');
LIRE(N) ;
POUR i←1 JUSQUA N FAIRE
 DEBUT
 cumul←cumul+(b*i);
 b←b-1;
 FIN;
 ECRIRE(' cumul = ', cumul);
ECRIRE(' b= ', b);
FINPOUR
 ECRIRE('Fin du traitement');
FIN.
```

Soit l'algorithme ci-contre:
1. Si N=3, donner les résultats de l'exécution du programme tels qu'ils apparaissent exactement à l'écran.
2. Modifier cet algorithme en introduisant un test qui affiche une erreur si l'utilisateur saisi N négatif
3. Transformer la boucle pour en une boucle **tant que**
4. Traduire cet algorithme en python

Scanné avec CamScanner

Licence 2 Filière classique
Examen Programmation Python
Semestre 1 Session 2/1 h 45 min/2018 – 2019

```
Algorithme combinaison
Var
cnp, n, p : entier
fonction factoriel ( nbre : entier) :entier
fact, i, nbre : entier
debut
   si (nbre= 0) ou (nbre=1) alors
     fact ←1
   sinon
     fact← 1
     pour i<- 1 a nbre+1 faire
     fact← fact*I ;
   finsi
factoriel ← fact ;
finfonction
debut  (* debut programme principal *)
ecrire('calcul de la combinaison de n à
p ')
ecrire('donner une entier n')
lire( n)
ecrire('donner une entier p')
lire( p)
si ((n<0) ou (p<0) ou (n < p))
  alors ecrire ('erreur')
sinon
  cnp ← factoriel (n) / ( factoriel (p)*
factoriel (n-p))
  ecrire( 'la combinaison de ', n, ' a ', p,
'est', cnp)
 finsi
fin  (* fin programme principal *)
```

Exercice 1 : Culture

1.Donner le code python correspondant aux structures de données suivantes : tableau, enregistrement, une classe

2.Donner les bibliothèques nécessaires pour les utilisations suivantes : tracer de courbes, utiliser des formules mathématiques.

3. Donner un exemple de code pour tracer la courbe cosinus(x)

4. Donner un exemple de code pour faire le produit de 2 matrices carrées d'ordre 2

Exercice 2 :

Écrire un programme en python permettant d'afficher les 10 premiers nombres impairs.

Exercice 3 :

Écrire un programme en python permettant d'afficher combien de fois de suite un entier positif saisie par un utilisateur est divisible par 2.

Exemple :

Entrez un entier strictement positif : 24

24 est 3 fois divisible par 2.

Exercice 4

1.Traduire l'algorithme ci-contre en python

2.Dans la foncton factoriel modifier la boucle pour par tant que

Exercice 5

Un gardien de phare va aux toilettes cinq fois par jour. Or les WC sont au rez-de-chaussée...

Écrire une procédure (donc sans return) hauteurParcourue qui reçoit deux paramètres, le nombre de marches du phare et la hauteur de chaque marche (en cm), et qui affiche :

Sélectionnez : Pour x marches de y cm, il parcourt z.zz m par semaine.

On n'oubliera pas :

- qu'une semaine comporte 7 jours ;
- qu'une fois en bas, le gardien doit remonter ;
- que le résultat est à exprimer en m.

1- Faire l'analyse mathématique
2- Listez les objectifs
3- Listez les besoins
4- Écrire la procédure hauteurParcourue
5- Écrire le programme principal qui lit le nombre de marches, la hauteur d'une marche au clavier et affiche la hauteur parcourue.

Abidjan, le 19/02/2020

Scanné avec CamScanner

UFR MI Licence 2 2019-2020
Programmation Python
Examen session 1 durée : 1 h 30

Exercice 1 : culture générale

1. Compléter la phrase en choisissant un mot (compilé, interprété, machine, binaire). Python est un langage .....
2. Donner le rôle des modules Python : Numpy, SciPy
3. Donner un exemple de code Python correspondant aux structures de données suivantes : dictionnaires, ensembles, listes
4. Ecrire un code python permettant de calculer la puissance entière d'un réel.
5. Remplir le tableau ci-dessous

Instructions	Code Python	Instructions	Code Python
Comment accède-t-on à la 3è lettre d'une chaîne de caractères ?		Quelle instruction en Python permet d'obtenir la liste des entiers divisibles par 3 compris entre 5 et 111 compris ?	
Comment demande-t-on à l'utilisateur d'entrer une chaine de caractères ?		Comment accède-t-on en Python à l'avant dernier élément d'une liste (sans utiliser l'instruction len) ?	
Comment effectue-t-on la concaténation de deux chaînes de caractères ?		Quel opérateur en Python permet d'obtenir le reste de la division euclidienne ?	

Exercice 2 : Python

```
ALGORITHME test ;
VAR b, i, N : ENTIER ;
cumul: REEL;
DEBUT
ECRIRE(' Algorithme tester licence 2 en info');
b←10; (* initialisation *)
cumul←20;
ECRIRE('Saisir un nombre entier N');
LIRE(N) ;
POUR i←1 JUSQUA N FAIRE
 DE BUT
 cumul←cumul+(b*i);
 b←b-1;
 FIN;
 ECRIRE(' cumul = ', cumul);
ECRIRE(' b= ', b);
FINPOUR
 ECRIRE('Fin du traitement');
FIN.
```

1. Ecrire un programme qui permet de saisir un nombre puis déterminer s'il appartient à un intervalle donné, sachant que les extrémités de l'intervalle sont fixées par l'utilisateur.
2. Ecrire un programme qui demande deux nombres à l'utilisateur et l'informe ensuite si leur produit est négatif ou positif. Attention toutefois on ne doit pas calculer le produit des deux nombres.
3. Soit l'algorithme ci-contre. Si N=3, donner les résultats de l'exécution du programme tels qu'ils apparaissent exactement à l'écran.
4. Modifier cet algorithme en introduisant un test qui affiche une erreur si l'utilisateur saisi N négatif
5. Transformer la boucle pour en une boucle tant que
6. Traduire cet algorithme en python

Abidjan, le 08/12/2020

VALIDE

Scanné avec CamScanner

Exercice 1 :

Algorithme : Tribulle(T)

Données : un tableau T de nombres
Résultats : le tableau T trié en ordre croissant

```
Pour i=len(T)-1 à 1 décroissant faire
    Pour j=0 à i-1 faire
        Si T[j]>T[j+1] alors
            Echange (T,j,j+1) ;
```

Soit l'algorithme ci-contre.
1. Ecrire une fonction **TriBulle** en python.
2. Transformer la boucle **pour** en **tant que** en python dans **TriBulles.**
3. Echange dans l'algorithme est une fonction. Ecrire en python la fonction **Echange** qui permet de permuter deux éléments.
4. Dans un programme principal manipuler un tableau de 6 entiers.

Exercice 2

2.1

```
a=9
b=a-1
a=b-8
a=a*7
if (a < 8)
        print (« bonjour », a)
else
        print (« au revoir »,  b)
```

Un élève a écrit et exécuté le programme python ci-dessus :
Justifier avec soin la réponse obtenue en traçant ce code (cad donner le résultat obtenu après exécution.)

2.2

```
a ← 5
Saisir (a)      où n est entier
Saisir (x)      où x est flottant
Afficher (« Bonjour »)
Afficher ()
```

Traduire l'algorithme ci-dessus en python.
Modifier votre code pour que l'utilisateur puisse continuer ou no en répondant à la question voulez-vous continuez ?

Exercice 3

1. Donner le rôle des bibliothèques numpy, scipy et matplolib puis ecrire le code pour tracer la fonction **2x+1** sur l'intervalle [-3; +3].
2. Ecrire un module appeler ufrmi contenant une fonction somme, différence, division et multiplication de 2 réels. Utiliser le module ufrmi pour réaliser une calculette (+ ; * ; - ;/) en python.
3. Ecrire un code python permettant de saisir le mot de passe **lic2mi** sachant que l'utilisateur n'a que trois essais.
4. Ecrire un programme python permettant de calculer la **combinaison** d'un nombre p dans un nombre n en utilisant une fonction **factoriel** itérative.
5. Réécrire la fonction **factoriel** de façon récursive.
6. On suppose qu'un **contact** est décrit par **téléphone** et **nom**. Modéliser la structure de données contact en python puis écrire un code permettant de saisir 5 contacts et de les afficher.

Scanné avec CamScanner

Consignes générales : pas de documents, calculatrices, téléphone, et internet. Merci de bien numéroter les intercalaires.

Exercice 1 : Donner les valeurs des variables A, B, C et l'affichage à l'écran des algorithmes suivants :

```
Algorithme algo1 :
Variable A, B, C, D : entier
Début
  A ←10 ;
  B← 3 ;
  TantQue (A> B) Faire
    Si (A div B=B) Alors
      B← A mod B ;
      A ← A mod B ;
    Finsi
    Si (B-A=B+A) Alors
      C ← 10*B mod B+2 ;
      D ← C+(B-A) ;
    FinSi
  FinTantQue
  Ecrire(D+C-(B+A))
Fin.
```

```
Algorithme algo2 :
Variable A, B, C, D : entier
Début
  A ←5 ;
  B← 10 ;
  Pour B allant de 1 à 2 Faire
   -Si (D-A = D div 2) Alors
      A← A * 2-D /2 ;
      C ← D mod 3 div 2 ;
      D ← D /2 div A ;
    Sinon
      A ← A-D ;
      C ← A div 2 ;
      Ecrire(A-C-D*2) ;
    FinSi
  FinPour
Fin.
```

```
Algorithme algo3 :
Variable A, B, C, D : entier
Début
  A ←10 ;
  B← 1 ;
  C← 8 ;
  Répéter
    Si (B> 2) ou (A< 9) Alors
      C← (B+A) mod 5 ;
    Sinon
      D ← B+A div 3 ;
    Finsi
    A ← A-2 ;
    B ← B+1 ;
  Jusqu'à(A=C) et (B=D) ;
  Ecrire(A) ;
Fin.
```

Exercice2 :

```
Algorithme exo3 ;
Variable a, b, i, P : entier ;
Début
   Lire (a, b) ; i ←2 ; P←1 ;
   Tantque(i≤b) faire
      Si (a mod i = 0) et (b mod i = 0) alors
          P←i ;
       FinSi ;
        i← i+1 ;
   FinTantque
   Ecrire(P) ;
Fin
```

Utiliser l'algorithme ci-contre

1. Que fait cet algorithme ?
2. Tracer cet algorithme pour a =12 et b=8
3. Traduire cet algorithme en python.
4. Reprendre le code python obtenue et remplace r la boucle tant que par la boucle pour.
5. Modifier votre code python pour que l'utilisateur ne saisisse que des entiers positifs
6. Modifier votre code python pour que l'utilisateur réponde à la question voulez-vous continuez.
7. Modifier votre code sous forme de fonction.

Exercice 3 :

1. Ecrire un programme affichant les 10 premiers nombres pairs.
2. Donner le code python permettant de trier un tableau de réels par ordre croissant, d'afficher le plus grand élément et de rechercher un nombre donné.
3. Donner les bibliothèques nécessaires pour les utilisations suivantes : tracer de courbes, utiliser des formules mathématiques.
4. Donner un exemple de code pour tracer la courbe cosinus(x).
5. Donner un exemple de code pour faire le produit de 2 matrices carres d'ordre2.
6. Ecrire en python deux fonctions puissances (cad x ') l'une itérative et l'autre récursive. Tracer ces deux fonctions pour2^5 et dites celle qui semble plus rapide en termes d'exécution.
7. Soit un nom de longueur 10. Ecrire un algorithme permettant de renverser le nom (par exemple **abcdef** donne **fedcba**).

Scanné avec CamScanner

Proposition de l'examen de python de la 1ère session 2016-2017

Questions de cours

$Q_1 - a$
$Q_2 - d$
$Q_3 - a$ et b
$Q_4 - c$ et d
$Q_5 - c$
$Q_6 - d$
$Q_7 - c$
$Q_8 - c$

Exercice 1

a- $def\ facto(x)$
$if(x == 0||x == 1)$
$return(1)$
$else$
$return(x * fact(x-1))$
$a = int(input("Veuillez\ entrer\ une\ valeur"))$

b- $n = int(input("Entrer\ n"))$
$p = int(input("Entrer\ p"))$
$C(n,p) = facto(n)/(facto(p) * facto(n-p))$
$print('Combinaison\ de', n, p, 'est', C(n,p))$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE L EXO 2

Donnons l'explication de chaque ligne et le résultat de l'exécution.

a) P1=Point() #Instanciation de l'objet P1 avec deux attribut avec deux attributs abscisses et ordonne initié par (1,1)

Explication :

Ici nous créons d abord un objet P1 qui est en réalité une variable.

Celui-ci contient deux attributs c'est à dire deux(2) sous-variables (abscisse et ordonne) car par définition un objet est presenté comme une variable pouvant contenir d autres variables ou fonctions qu on appelle dans le langage informatique spécifiquement en python des méthodes.

À travers l instruction P1=Point(), nous faisons l Instanciation de l'objet P1 c'est à dire on passe de la Class à l objet P1.

En éffet Point a été défini comme étant une Class, or par définition une class est présentée comme un type de données qui servira à construire un objet.

Résultat :

Le Point P1 aura pour abscisse 1 et pour ordonne 1 car les attributs de la Class Point ont été initialisé toutes deux à 1.

En définitive nous aurons P1(1,1).

b) P1_y=P1.getOrdonne()

Explication :

Avant tout, il faut noter que nous avons créé une variable ayant pour identifiant P1_y (c'est le nom de la variable). À cette variable nous affections la fonction getOrdonne. Cette fonction a pour but de retourner la valeur de la méthode ordonne contenu dans la Class Point.

Résultat :

"P1_y=1" Nous aurons cette valeur stocker dans la mémoire de la variable P1_y.

c) P2_y=P2.getAbscisse()

Explication :

Encore une fois nous avons d abord la création de la variable P2_x.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

À cette variable nous affectons P1.getAbscisse() qui est une fonction dont le rôle est de renvoyer la valeur de la méthode abscisse contenu dans la Class Point.

Résultat :

"P2_x=1" Nous aurons cette valeur précieusement conserver dans la mémoire de la variable P2_x .

d) P2_y=P2.getOrdonne()

Explication :

Là aussi, nous avons la création d une variable P2_y.

À cette variable nous affectons P1.getOrdonne qui est une fonction dont le rôle est de renvoyer la valeur de la méthode ordonne contenu dans la Class Point. Notons que cette valeur a été fixée à 1 dès la construction de la Class Point.

Résultat :

"P2_x=1" Nous aurons cette valeur conservée dans la mémoire de la variable P2_x .

e) P1.deplace(20, 30)

Explication :

Avant d aborder cette instruction le rappel de la fonction def déplace(self,dx,dy) s impose à nous.

En éffet cette fonction a pour but d instancie (affecter) de nouvelle valeur aux attributs de Class Point.

Pour l instruction P1.deplace (20, 30) qui est en réalité les nouvelles valeurs que contiendra les méthodes de la Class Point. Ne perdons pas vue que ces nouvelles valeurs sont en réalité les anciennes valeurs contenues dans les méthodes abscisse et ordonne augmenté des valeurs de dx et dy.

Résultat :

Comme résultat nous aurons :

abscisse =20+1=21 et ordonne =30+1=31.

Nous rappelons aussi que ces valeurs seront précieusement gardées dans la mémoire des méthodes abscisse et ordonne.

Scanné avec CamScanner

f) print (P1.getAbsclsse(), " ",P1.getOrdonne())

Explication & résultat :

Cette instruction nous permet d afficher à l écran la valeur des coordonnées du Point P1.

À la fin nous aurons :

21 31

Comme coordonnées du Point P1.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

03/12/2021

CORRECTION Programmation Python

Semestre 1 session 1 durée 1h 30 2017-2018

Exercice 1 : culture

1. Remplir le tableau ci-dessous.

Instructions	Code Python	Instructions	Code Python

Comment accède-t-on à la 3e lettre d'une chaîne ?	chaine[2]	Quelle instruction en Python permet d'obtenir la liste des entiers divisibles par 3 compris entre 5 et 111 compris ?	for i in range(5, 112):
			if (i % 3 == 0):
			print(i)

Comment demande-t-on à l'utilisateur d'entrer une chaîne de caractère ?	chaine = input("Entrez une chaîne : ") ou chaine = string(input("Entrer une chaine : "))	Comment accède-t-on en python à l'avant dernier élément d'une liste (sans utiliser l'instruction len)	liste[-2]
Comment effectue-t-on la concaténation de deux chaînes de caractères ?	chaine = chaine1 + chaine2	Quel opérateur en Python permet d'obtenir le reste de la division euclidienne ?	% (le modulo)

2. **Réponse :** - Numpy : est un module Python qui est utilisé pour les calculs numériques sous Python.
   - SciPy : est un module Python utilisé pour les calculs scientifiques.

3. **Réponse :** - dictionnaire : nom_dictionnaire = {"voiture : 4", "vélo : 2"}
   - ensembles : dic = {1, 3, 5, 7}
   - listes : liste = [ ] #Une liste vide.

Exercice 2 : Python

1. **Réponse :**

```
#coding : utf-8
annee = int(input("Saisissez une année : "))
if annee % 400 == 0 or (annee % 4 == 0 and
annee % 100 != 0):
    print("L'année saisie est bissextile.")
else:
    print("L'année saisie n'est pas bissextile.")
```

2. **Réponse :**

```
#coding : utf-8
mot_passe = "lic2mi"
for i in range(3):
    mot = input("Entrer votre mot de
passe")
    j = 2
    if mot == mot_passe:
```


Scanné avec CamScanner

```
        print("Bienvenu dans votre
    section")
        break
      else:
        print("Mot de passe incorrect,
    veuillez ressayer, il vous reste", j - i,
    "essai")
        continue
    print("\n Revenez plus tard!")
```

3.

Réponse :

```
#coding : utf-8
notes = {}
nbreNotes = 5
somme = 0
for i in range(0, nbreNotes):
  notes[i, 'note'] = int(input("Note {} :
      ".format(i+1)))
  while (notes[i, 'note']<0 or notes[i,
      'note']>20):
    print("ATTENTION: ERREUR vous devez
    saisie une note comprise entre 0 et 20
    ")
    notes[i, 'note'] = int(input("Note {} :
    ".format(i + 1)))
  somme += notes[i, 'note']
moyenne = somme/nbreNotes  # Calcul de
    la moyenne
noteMax = notes[0, 'note']
noteMin = notes[0, 'note']
for i in range(1, nbreNotes):
 if(noteMax < notes[i, 'note']):
   noteMax = notes[i, 'note']
 else:
   noteMin = notes[i, 'note']
print("la moyenne est : {} , la note minimale
    est : {} et la note maximale est {} :
    ".format(moyenne,noteMin,noteMax)
```

Exercice 3 : Python

```
ALGORITHME test;
VAR b, i, N : ENTIER;
cumul: REEL;
DEBUT
ECRIRE('Algorithme tester licence 2 en info');
b← 10; (*initialisation*)
cumul← 20;
ECRIRE('Saisir un nombre entier N');
LIRE(N);
POUR i ← 1 JUSQUA N FAIRE
  DEBUT
  cumul← cumul+(b*i);
  b← b-1;
  FIN;
 ECRIRE('cumul =', cumul);
ECRIRE('b =', b);
FINPOUR
 ECRIRE('Fin du traitement');
FIN.
```

Soit l'algorithme ci-contre.

1. Si N=3, donner les résultats de l'exécution du programme tels qu'ils apparaissent exactement à l'écran.

Réponse :

Algorithme tester licence 2 en info
Saisir un nombre entier N
3
cumul = 30
b = 9
cumul = 48
b = 8
cumul = 72
b = 7
Fin du traitement

Scanné avec CamScanner

2. Modifier cet algorithme en introduisant un test qui affiche une erreur si l'utilisateur saisi **N négatif**

Réponse :

```
ALGORITHME test;
VAR b, i, N : ENTIER;
cumul: REEL;
DEBUT
ECRIRE('Algorithme tester licence 2 en info');
b← 10; (*initialisation*)
cumul← 20;
ECRIRE('Saisir un nombre entier N');
LIRE(N);
TANT QUE (N < 0) FAIRE
  ERCIRE("ATTENTION : ERREUR vous devez saisir un nombre positif");
  LIRE(N);
FINTANTQUE
POUR i ← 1 JUSQUA N FAIRE
  DEBUT
  cumul← cumul+(b*i);
  b← b-1;
  FIN;
 ECRIRE('cumul =', cumul);
 ECRIRE('b =', b);
FINPOUR
 ECRIRE('Fin du traitement');
FIN.
```

3. Transformer la boucle **POUR** en une boucle **TANT QUE**

Réponse :

```
ALGORITHME test;
VAR b, i, N : ENTIER;
cumul: REEL;
DEBUT
ECRIRE('Algorithme tester licence 2 en info');
b← 10; (*initialisation*)
cumul← 20;
ECRIRE('Saisir un nombre entier N');
LIRE(N);
i ← 1;
TANT QUE (i <= N) FAIRE
  DEBUT
  cumul← cumul+(b*i);
  b← b-1;
  i ← i + 1;
  FIN;
 ECRIRE('cumul =', cumul);
 ECRIRE('b =', b);
FINPOUR
 ECRIRE('Fin du traitement');
FIN.
```

4. Traduit cet algorithme en python.

Réponse :

```
#coding : utf-8
print('Algorithme tester licence 2 en info')
b = 10 #initialisation
cumul = 20
N = int(input('Saisir un nombre entier N'))
for i in range(1, N+1):
    cumul = cumul + ( b * i )
    b = b - 1
    print('cumul =', cumul')
    print('b =', b')
print('Fin du traitement')
```


Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB COCODY	2016-2017
UFRMI +1 réponse juste -0,5 réponse fausse	**Examen : Python** **Niveau : Licence 2** **Session 2 Durée: 1H00min**

Proposition de CORRECTION

Culture (Voir session 1)

EXO 1

a) Écrire en python une fonction **facto**(x) qui permet de calculer x !

Réponse :

```
#coding : utf-8
def facto(x):
    if (x < 2):
        fact = 1
    else:
        fact = 1
        for i in range(2, x+1):
            fact*=i
    return fact
```

b) En la réalité, la bibliothèque **math** de python contient déjà une fonction **math.factorial**(x).

Return x factorial. Raises valueError if x is not integral or is negative.

Utiliser la pour calculer et le nombre d'Euler.

Réponse :

```
#coding : utf-8
import math
n=int(input("Entrer la valeur de n : "))
for i in range(n):
    e = 1/math.factorial(n)
print("Le nombre d'Euler est : {} ".format(e))
```

EXO 2 (Voir session 1 exercice 2) .

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

CORRECTION Programmation Python Licence 2 2019 - 2020

Exercice 1 : culture générale

1. **Réponse :** Python est un langage **interprété.**
2. **Réponse :** - Numpy : est un module Python qui est utilisé pour les calculs numériques sous Python.
   - SciPy : est un module Python utilisé pour les calculs scientifiques.
3. **Réponse :** - dictionnaire : nom_dictionnaire = {"voiture : 4", "vélo : 2"}
   - ensembles : dic = {1, 3, 5, 7}
   - listes : liste = [ ] #Une liste vide.
4. **Réponse :**

```
#coding : utf-8
x = float(input("Entrez un nombre réel :"))
n = int(input("Entrez un nombre entier : "))
while (n < 0):
    n = int(input("ATTENTION : ERREUR vous devez entrer un nombre entier positif :"))
puiss = 1
i = 1
while (i <= n):
    puiss *= x
    i += 1
print("la valeur de ", x , " à la puissance ", n , " est : ", puiss)
```

5. Remplir le tableau ci-dessous.

Instructions	Code Python	Instructions	Code Python
Comment accède-t-on à la 3e lettre d'une chaîne ?	chaine[2]	Quelle instruction en Python permet d'obtenir la liste des entiers divisibles par 3 compris entre 5 et 111 compris ?	for i in range(5, 112) if (i % 3 == 0): print(i)

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Comment demande-t-on à l'utilisateur d'entrer une chaîne de caractère ?	chaine = input("Entrez une chaîne : ") ou chaine = string(input("Entrer une chaine : "))	Comment accède-t-on en python à l'avant dernier élément d'une liste (sans utiliser l'instruction len)	liste[-2]
Comment effectue-t-on la concaténation de deux chaînes de caractères ?	chaine = chaine1 + chaine2	Quel opérateur en Python permet d'obtenir le reste de la division euclidienne ?	% (le modulo)

Exercice 2 : Python

1. **Réponse :**

```
#coding : utf-8
inf = int(input("Entrer la borne inférieure de l'intervalle : "))
sup = int(input("Entrer la borne supérieure de l'intervalle : "))
nombre = int(input("Entrer un nombre pour vérifier s'il appartient à l'intervalle : "))
if ((nombre > inf) and (nombre < sup)):
    print("Le nombre ", nombre , "appartient à l'intervalle.")
else:
    print("Le nombre ", nombre , "n' appartient à l'intervalle.")
```

2. **Réponse :**

```
#coding : utf-8
a = int(input("Entrer le premier nombre : "))
b = int(input("Entrer le deuxième nombre : "))
if ((a < 0) or (b < 0)):
    print("Le produit est de ", a , " par ", b , " est négatif ")
else:
    print("Le produit est de ", a , " par ", b , " est positif ")
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

```
ALGORITHME test;
VAR b, i, N : ENTIER;
cumul: REEL;
DEBUT
ECRIRE('Algorithme tester licence 2 en info');
b- 10; (*initialisation*)
cumul- 20;
ECRIRE('Saisir un nombre entier N');
LIRE(N);
POUR i - 1 JUSQUA N FAIRE
  DEBUT
    cumul- cumul+(b*i);
    b- b-1;
  FIN;
 ECRIRE('cumul =', cumul);
ECRIRE('b =', b);
FINPOUR
 ECRIRE('Fin du traitement');
FIN.
```

3. Soit l'algorithme ci-contre. Si **N=3**, donner les résultats de l'exécution du programme tels qu'ils apparaissent exactement à l'écran.

Réponse :

Algorithme tester licence 2 en info

Saisir un nombre entier N

3

cumul = 30

b = 9

cumul = 48

b = 8

cumul = 72

b = 7

Fin du traitement

4. Réponse :

```
ALGORITHME test;
VAR b, i, N : ENTIER;
cumul: REEL;
DEBUT
ECRIRE('Algorithme tester
licence 2 en info');
b- 10; (*initialisation*)
cumul- 20;
ECRIRE('Saisir un nombre entier
N');
LIRE(N);
TANT QUE (N < 0) FAIRE
  ERCIRE("ATTENTION :
ERREUR vous devez saisir un
nombre positif");
  LIRE(N);
FINTANTQUE
POUR i - 1 JUSQUA N FAIRE
  DEBUT
    cumul- cumul+(b*i);
    b- b-1;
  FIN;
 ECRIRE('cumul =', cumul);
ECRIRE('b =', b);
FINPOUR
 ECRIRE('Fin du traitement');
FIN.
```

5. Transformer la boucle **POUR** en une boucle **TANT QUE**

Réponse :

```
ALGORITHME test;
VAR b, i, N : ENTIER;
cumul: REEL;
DEBUT
ECRIRE('Algorithme tester
licence 2 en info');
b- 10; (*initialisation*)
cumul- 20;
ECRIRE('Saisir un nombre entier
N');
LIRE(N);
i - 1;
TANT QUE (i <= N) FAIRE
  DEBUT
```


Scanné avec CamScanner

```
    cumul← cumul+(b*i);
    b← b-1;
  i ← i + 1;
  FIN;
  ECRIRE('cumul =', cumul);
 ECRIRE('b =', b);
FINPOUR
 ECRIRE('Fin du traitement');
FIN.
```

6. Traduit cet algorithme en python.

Réponse :

```
#coding : utf-8
print('Algorithme tester licence 2 en info')
b = 10 #initialisation
cumul = 20
N = int(input('Saisir un nombre entier N'))
for i in range(1, N+1):
    cumul = cumul + ( b * i )
    b = b - 1
    print('cumul =', cumul')
    print('b =', b')
print('Fin du traitement')
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

SUJET PYTHON SESSION 1 LICENCE 2

Exercice 1

1.Ecrivons la fonction triBulle en python

```
def  TriBulle (T) :

    for i in range(len(T)-1,1,-1) :
        for j in range(0,i-1):
            if T[j] > T[j+1] :
                Echan=T[j]    #represente l'implementation de la fonction
echange.
                T[j]=T[j+1]
                T[j+1]=Echan
    return(T)
```

2.Transformons la boucle pour en tant que

```
def  TriBulle (T) :
    i=len(T)-1
    j=0
    while (i >=1):
        while(j <= i-1):
            if  (T[j] > T[j+1]) :
                Echan=T[j]
                T[j]=T[j+1]
                T[j+1]=Echan
            j=j+1
        i=i-1

    return(T)
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

3.Ecriture de la fonction echange

```
def Echange(T,k,k+1):

    Echan=T[k]
    T[k]=T[k+1]
    T[k+1]=Echan
    return (T) # Ici le tableau retourné sera le tableau T avec les elements
d'indice k et k+1 permuter.
```

4.Dans un programme principale manipulons un tableau de 6 entiers:

```
# saisie des elements du tableau

S=[]
for i in range(0,6):
    a=int(input('veuillez entrer l'élément svp : '))
    S.append(a) #cette fonction permet d'ajouter un element dans un tableau

#Appel de la fonction tribulle ecrite a la question 1)
TriBulle(S)
```

Exercice 2

2.1 Le resultat de l'execution est :

```
au revoir 10
```

2.2 Traduisons l'algorithme en python:

```
a=5
n=int(input('saisir n :'))
x=float(input('saisir x' :))
print('bonjour ')
print(n)
```

VALIDE PAR LMD

Scanné avec CamScanner

-Modification de l'algorithme

```
choix=int(input('voulez vous continuer tapez 1 pour oui et 0 pour non : '))
while (choix!=0):

    a=5
    n=int(input('saisir n :'))
    x=float(input('saisir x' :))
    print('bonjour ')
    print(n)
    choix=int(input('voulez vous continuer tapez 1 pour oui et 0 pour non : '))
```

Exercice 3

1)Voir cours

2) calculatrice

```
print('Calculatrice version etudiant math info')
a=int(input('entrer le premier nombre :'))
b=int(input('entrer le deuxieme nombre :'))
print ('quelle operation voulez vous faire ')
print ('1.addition ')
print ('2.soustraction ')
print ('3.multiplication ')
print ('4.division')
choix=int(input('faites votre choix :'))

if (choix==1):
    resultat=a+b
    print('la somme de ',a,'et',b,'donne',resultat)

elif (choix==2):

    resultat=a-b
    print(«'la difference de ',a,'et',b,'donne',resultat)
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

```
elif (choix==3):

        resultat=a*b
        print(«'le produit de ',a,'et',b,'donne',resultat)

else:

        if (b==0):
                print('ERREUR DIVISION PAR 0')
        else:
                resultat=a / b
                print('le quotient de ',a,'par',b,'donne',resultat)
```

3.mot de passe

```
password= 'lic2mi'
reponse= input('veuillez entrer le mot de passe svp :')


for i in range(1,4):

        if(reponse= ='password'):
                print('Mot de passe accepté')

        else:
                print('Mot de passe invalide')
                reponse= input('veuillez entrer le mot de passe svp :')


        if(i==3):
                print('nombre de tentative écoulé')
```

4.Combinaison avec factoriel iterative

```
        def factoriel (m):
                facto=1
                for i in range(1,m+1):
                        facto=facto*i
                return (facto)
        def  combinaison(p,n):
                comb=factoriel(n) / (factoriel(p) * factoriel (n-p))

                return (comb)
```


Scanné avec CamScanner

5.factoriel recursive

```
def factorielrecursif (m):

    if(m==0):
        facto=1

    else :

        facto=m*factorielrecursif(m-1)

    return (facto)
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Licence 2 UFRMI
CORRECTION EXAMEN PROGRAMMATION PYTHON
Semestre 1 Session 1
2020 – 2021

Exercice 1 :

1. Ecrire une fonction **Tribulle** en python

```
def Tribulle (T) :
    n = len(T)
    # Parcourir tous les éléments du tableau
    for i in range(n) :
        for j in range(0, n-i-1) :
            # échanger si l'élément trouvé est plus grand que le suivant
            if T[j] > tab[ j+1] :
                T[j], T[ j+1] = T[ j+1], T[j]
```

2. Transformer la boucle **pour** en **tant que** en python dans **Tribulle**

```
def Tribulle (T) :
    n = len(T)
    # Parcourir tous les éléments du tableau
    i = 0
    while i < n :
        j = 0
        while j < n-i-1 :
            # échanger si l'élément trouvé est plus grand que le suivant
            if T[j] > tab[ j+1] :
                T[j], T[ j+1] = T[ j+1], T[j]
            j+=1
        i+=1
```

2. Echange dans l'algorithme est une fonction. Ecrire en python la fonction **Echange** qui permet de permuter deux éléments

```
def Echange (T, x, y) :
    T[x], T[ y] = T[ x], T[y]
```

3. Dans un programme principal manipuler un tableau de 6 entiers

```
# Programme principal
tab = [98, 22, 15, 32, 2, 63]
Tribulle(tab)
print("Le tableau trié est : ")
for i in range(len(tab)) :
    print(tab[i]
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Exercice 2 :

2.1

Après exécution on aura : bonjour 0

2.2

```
rep = "oui"
while rep != "non" :
    a = 5
    n = int(input("n :"))
    x = float(input("x :"))
    print("Bonjour")
    print(n)
    rep = input("Voulez-vous continuez ?")
```

Exercice 3 :

1. Donner le rôle des bibliothèques numpy, scipy et matplotlib puis écrire le code pour tracer la fonction 2x+1 sur l'intervalle [-3, +3]

- Rôle des bibliothèques

- Numpy : est un module Python qui est utilisé pour les calculs numériques sous Python.
- SciPy : est un module Python utilisé pour les calculs scientifiques.
- Matplotlib : est une bibliothèque Python utilisé pour représenter des graphiques en 2D et 3D

- Code pour tracer la fonction 2x+1 sur l'intervalle [-3, +3]

```
from pylab import *
x = linspace(-3, 3, 100)
y = 2x+1
plot(x, y)
show()
close()
```

2.

```
# Création du module nommée : ufrmi.py
# La fonction somme
```


VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

```
def somme(a, b) :
    som = a + b
    return som

# La fonction différence

def difference(a, b) :
    dif = a - b
    return dif

# La fonction division

def division(a, b) :
    divis = a / b
    return divis

# La fonction multiplication

def multiplication(a, b) :
    mul = a + b
    return mul

# Utilisation du module ufrmi

from ufrmi import *

# --- Menu Calculette –

print("--- Addition : a ---")

print("--- Soustraction : s ---")

print("--- Multiplication : m ---")

print("--- Division : d ---")

n1 = float(input("Entrer le nombre 1 :"))

n2 = float(input("Entrer le nombre 2 :"))

choix = input("Quel opération voulez-vous choisir ? :")

if (choix == "a") :
  print("La somme est : {}.format(somme(n1, n2)) ")

elif (choix == "s") :
  print("La soustraction est : {}.format(defference(n1, n2)) ")

elif (choix == "m") :
  print("La multiplication est : {}.format(multiplication(n1, n2)) ")

elif (choix == "d") :
  if (n2 == 0) :
    print("division impossible")
  else :
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

```
        print("La division est : { }.format(multiplication(n1, n2)) ")
else :
    print("Choix invalide")
```

3.

```
mot_passe = "lic2mi"
for i in range(3):
  mot = input("Entrer votre mot de passe")
  j = 2
  if mot == mot_passe:
    print("Bienvenu dans votre section")
    break
  else:
    print("Mot de passe incorrect, veuillez ressayer, il vous reste", j - i, "essai")
    continue
print("\n Revenez plus tard!")
```

4.

```
def factoriel(x):
    if (x < 2):
      fact = 1
    else:
      fact = 1
      for i in range(2, x+1):
          fact*=i
    return fact
# Programme principal
print("Programme combinaison de P éléments parmi n")
n=int(input("Entrer la valeur de n : "))
p=int(input(("Entrer la valeur de p : "))
if((p == 0) or (p == n)):
  cnp = 1
else:
    cnp = factoriel(n)/factoriel(p)*factoriel(n-p)
    print("Programme combinaison de" , P , "dans" , n , " est : " , cnp)
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

5. Réécrire la fonction **factoriel** de façon récursive

```
def factoriel(x):
    if (x < 2):
        return 1
    else :
        return x * factoriel(x-1)
```

6.

- La structure **contact**

```
def __init__(self, telephone, nom) :
    self.telephone = telephone
    self.nom = nom
```

- Code permettant de saisir 5 contact et les afficher

```
contact = { }
nbreCont = 5
# Saisie des contacts
for i in range(0, nbreCont) :
    print("Contact { } : ".format(i+1))
    contact[i, 'telephone'] = input("Téléphone : ")
    contact[i, 'nom'] = input("Nom :")
# Liste des contacts
print("La liste des contacts : ")
for i in  range(0, nbreCont) :
    print("Contact { } : { } { } ".format(i+1, contact[i, 'telephone'], contact[i, 'nom']))
```

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

Bibliography

[1] ENSEIGNANTS DE UFRMI, proposition de sujets d'examens et/ou proposition de corrections

[2] LE VALIDEUR LMD LICENCE 1 EDITION 2021, *sur les anciens sujets de licence 1 de mathématique et Application*

[3] mathematiques-statistiques-et-probabilites

[4] algebre *SALIOU TOURE*

[5] analyse *edmond fedida*

[6] http://www.les-mathematiques.net

[7] http://www.sesamath.net

[8] Algebre et Geometrie PC-PSI-PT

[9] les grandes classques de mathématique -algebre et geometrie

[10] Precis MP complet

[11] precis-mecanique

[12] Klub prepa

[13] H-prepa Analyse pc

[14] H-PREPAS mathematiques-1re-annee-mpsi-tout-en-un

[15] LA PHYSIQUE EN FAC

[16] jean marie monier les-m-thodes-et-exercices-de-math-matiques-mpsi

[17] EXO 7

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner