Fomesoutra.com
ça soutra!

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union-Discipline-Travail

LE VALIDEUR LMD 2023

UFR DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

ATSIN ACHI



LICENCE 2

SEMESTRE 1

- Série et Intégrales Généralisées
- Algèbre Lineaire et Bilinéaire
- Géometrie Plane et Espace
- Electromagnetisme
- Mécanique des Systèmes
- Programmation Python

SEMESTRE 2

- Thermodynamique
- Probabilité et Statistique inférentielle
- Topologie , Calcul Différentiel et intégrale Multiple
- Scilab , Latex et Statistique avec R
- Mécanique Quantique
- Calcul Numérique
- TP physique

Contact :
(+ 225) 05 75 05 70 52 / 07 58 93 60 37

Nouvelle édition à avoir absolument
Collection Succès

Scanné avec CamScanner

AVANT- PROPOS

Le VALIDEUR LMD est un recueil d'anciens sujets du système LMD, de propositions de corrections et des conseils absolument importants à savoir. Ce document a été confectionné dans le but d'aider les étudiants à valider efficacement leur crédit afin de passer en classe supérieur. L'avantage d'avoir ce document est qu'il vous servira de guide et qu'il vous permettra de rentrer dans la famille Valideur LMD.

La famille Valideur LMD prend en compte l'équipe Valideur et tous ceux qui ont acheté ce document. L'équipe Valideur est l'équipe qui est constituée d'aînés qui ont pour charge :

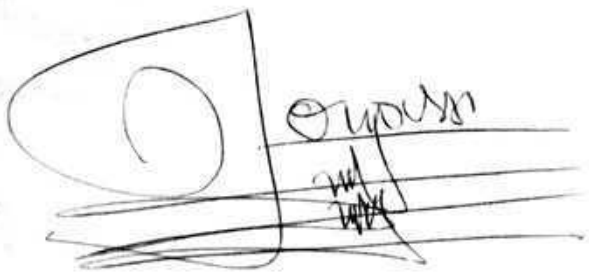
> De confectionner les documents (Valideur LMD) ;
> De coacher leurs cadets tant au niveau des stratégies de bosse que sur leurs projets professionnels ;
> La préparation de cours de renforcement pour améliorer davantage le niveau de chacun.

Sa mise à votre disposition vous permettra de vous imprégner du type de sujets auxquels vous pourriez être confrontés, des propositions de correction pour vous aider à avoir de très bonnes notes et d'un suivi de la part de vos ainés.

> La première partie de ce document présente quelques témoignages d'anciens et les opportunités qu'offre la filière.
> La seconde partie contient les sujets et propositions de corrections des années académiques antérieures.2018-2019-2020-2021-2022

Vous avez des questions au sujet du VALIDEUR LMD ? Un point de cours qui vous résiste ? Une erreur que vous avez croisée dans l'ouvrage ? Voulez-vous intégrer l'équipe ? Ou vous voulez juste nous laisser un petit mot gentil ? Et bien n'hésitez pas à nous contacter. Nous nous ferons un plaisir de vous répondre dans les meilleurs délais : support@gvivaservices.com

L'ÉQUIPE VALIDEUR.



Scanné avec CamScanner

Sommaire

AVANT PROPOS 2

Première partie

Témoignages des aînés 8

Vue globale des possibilités après des études en mathématiques informatique..... 9

Quelques précieux liens absolus pour mieux vous orienter.....10

Deuxième partie

Résumé d'algèbre linéaire ***13***

Examens d'algèbre linéaire ***Sujets*** ***Propositions de correction***

Examen session 1 2018-2019 17 26
Examen session 2 2018-2019 18 31
Examen session 1 2019-2020 20 35
Examen session 1 2020-2021 23 38
Examen session 2 2020-2021 22
Examen session 1 2021-2022 23
Examen session 2 2021-2022 25

Résumé d'algèbre bilinéaire ***43***

Examens d'algèbre bilinéaire ***Sujets*** ***Propositions de correction***

Examen session 1 2018-2019 45 53
Examen session 2 2018-2019 47
Examen session 1 2019-2020 48 56
Examen session 1 2020- 2021 49
Examen session 2 2020-2021 50
Examen session 1 2021-2022 51 58
Examen session 2 2021-2022 52

Examens de suite et serie de fonctions ***Sujets*** ***61*** ***70 Propositions de correction***

Examens d'éléments d'intégrale généralisé ***Sujets*** ***Propositions de correction***

Examen session 2 2018-2019 78 85
Examen session 1 2019-2020 80 90
Examen session 1 2020-2021 81
Examen session 2 2020-2021 83
Examen session 1 2021-2022 84

Examens de géométrie plane ***Sujets*** ***Propositions de correction***

Examen session 1 2018-2019 96 101
Examen session 2 2018-2019 97 105
Examen session 1 2019-2020 98 113
Examen session 1 2020-2021 99 115
Examen session 1 2021-2022 100 122

Examens de géométrie de l'espace ***Sujets*** ***Propositions de correction***

Examen session 1 2018-2019 125
Examen session 1 2019- 2020 126 130
Examen session 1 2020- 2021 127 132
Examen session 2 2020-2021 128
Examen session 1 2021-2022 229 136

Examens Electromagnétisme ***Sujets*** ***Propositions de correction***

Examen session 1 2018-2019 137 147

Scanné avec CamScanner

...men session 1 2019-2020	138	
...men session 1 2020-2021	141	151
...men session 1 2021-2022	143	158
...men session 2 2021-2022	145	

Examens de mécanisme des systèmes — ***Sujets*** — ***Propositions de correction***

...men session 1 2018-2019	161	173
...men session 1 2019-2020	163	
...men session 1 2020-2021	165	179
...men session 2 2020-2021	167	184
...men session 1 2021-2022	169	189
...men session 2 2021-2022	171	193

Examens de programmation python — ***Sujets*** — ***Propositions de correction***

...men session 2 2018-2019	203	
...men session 1 2019-2020	204	210
...men session 1 2020-2021	205	214
...men session 2 2020-2021	206	
...men session 1 2021-2022	207	219
...men session 2 2021-2022	208	222

Résumé de thermodynamique — ***225***

Examens de thermodynamique — ***Sujets*** — ***Propositions de correction***

...men session 1 2018-2019	227	236
...men session 2 2018-2019	228	239
...men session 1 2019-2020	229	242
...men session 1 2020-2021	230	244
...men session 2 2020-2021	231	248
...men session 1 2021-2022	233	250
...men session 2 2021-2022	234	254

Examens de probabilité — ***Sujets*** — ***Propositions de correction***

...men session 1 2018-2019	255	264
...men session 2 2018-2019	256	
...men session 1 2019-2020	257	
...men session 2 2020-2021	259	267
...men session 1 2021-2022	261	274
...men session 2 2021-2022	263	276

Examens de Statistique inférentielles — ***Sujets*** — ***Propositions de correction***

...men session 1 2018-2019	278	293
...men session 2 2018-2019	280	
...men session 1 2019-2020	282	
...men session 1 2020-2021	283	
...men session 2 2020-2021	285	
...men session 1 2021-2022	286	
...men session 2 2021-2022	291	295

Examens de Topologie et Calcul différentiel — ***Sujets*** — ***Propositions de correction***

...men session 1 2016-2017	299	312
...men session 2 2016-2017	301	320
...men session 2 2017-2018	302	
...men session 1 2017-2018 (ACTUARIAT)	303	
...men session 2 2017-2018 (ACTUARIAT)	304	

Scanné avec CamScanner

Examen session 2 2018-2019	305	335
Examen session 2019-2020	307	339
Examen session 1 2020-2021	308	
Examen session 2 2020-2021	309	
Examen session 1 2021-2022	310	
Examen session 2 2021-2022	311	

Examens de Calcul Integral — ***Sujets*** — ***Propositions de correction***

Examen session 2 2018-2019	342	348
Examen session 1 2019-2020	343	350
Examen session 1 2020-2021	344	
Examen session 2 2020-2021	345	
Examen session 1 2021-2022	346	
Examen session 2 2021-2022	347	

Examens de Mécanique quantique — ***Sujets*** — ***Propositions de correction***

Examen session 2 2018-2019	355	361
Examen session 1 2019-2020	357	
Examen session 1 2020-2021	358	365
Examen session 1 2021-2022	359	370
Examen session 2 2021-2022	360	370

Examens de scilab et Latex — ***Sujets*** — ***Propositions de correction***

Examen session 2 2018-2019	373
Examen session 1 2019-2020	376
Examen session 1 2021-2022	378
Examen session 2 2021-2022	381

Examens de statistique avec R — ***Sujets*** — ***Propositions de correction***

Examen session 1 2018-2019	384	398
Examen session 2 2018-2019	386	399
Examen session 1 2019-2020	388	404
Examen session 1 2020-2021	390	
Examen session 2 2020-2021	392	
Examen session 1 2021-2022	394	
Examen session 2 2021-2022	396	

Examens TP Physique — ***Sujets 406*** — ***Propositions de correction***

Examen session 1 2014-2015	406
Examen session 2 2026-2017	407

Bibliographie

EQUIPE VALIDEUR LMD

29/11/2022

Scanné avec CamScanner

L'Univers Math Info

L'équipe Valideur LMD vous souhaite la bienvenue en Licence 2 de mathématique. Toutes nos Félicitations !

Rien de ci agréable de se voir admis en Licence 2. Pour ceux qui sont autorisés, ce n'est pas grave. Comme on le dit souvent mieux vaut avoir un peu que de ne rien avoir (mieux vaut être autorisé que de reprendre l'année).

Bref ; la venue en Licence 2 est une chose, une autre est de pouvoir y faire face à ce deuxième niveau du premier cycle Universitaire. Nous pouvons vous dire qu'avec la Licence 2, beaucoup de portes s'ouvre à vous. Pour pouvoir avoir des informations sur le comportement à avoir, sur les opportunités, Nous allons plus ou moins répondre à quelques questions.

♦♦♦ Quel est le niveau de difficulté de la Licence 2 ?

Evidemment le niveau de difficulté augmente par rapport à celui de la Licence 1. Certains ont tendance à penser que plus tu avances plus c'est facile. Ce n'est pas vraiment le cas. Seulement il faut savoir que pour celui qui a acquis le niveau Licence 1 en toute honnêteté n'a pas à se préoccuper. A vrai dire les cours deviennent de plus en plus volumineux.

♦♦♦ Comment surmonter ces difficultés ?

En premier lieux, il faut avoir confiance en soi. Ah oui !! Et recommander le reste à DIEU.
En deuxième lieux, apprendre ses cours au jour le jour puis ses travaux dirigés (vraiment important) et voir les anciennes compositions qui se trouvent dans ce document.
Lors des compositions, svp faite bien les exercices que vous choisissez. Même lorsque vous rencontrez un exercice que vous avez déjà traité, faite bien attention à la rédaction.
En troisième lieux travailler quelques fois en groupe *très important*. Attention ! Apprendre ses cours avant le travail en groupe ; sinon c'est inutile.

L'équipe **VALIDEUR LMD 2023** se dit heureux de contribuer efficacement à la formation des futurs cadre de la nation.

L'équipe **VALIDEUR LMD** organise chaque année depuis 2015 des cours de soutien (autrement cours de renforcement de capacités) pour aider les étudiants de ladite UFR d'aborder sereinement l'année académique.

Scanné avec CamScanner

PREMIERE PARTIE

Scanné avec CamScanner

Bienvenu dans cette première partie innovante du document VALIDEUR LMD. Dans cette partie, il s'agira pour nous de vous donner cette propulsion à **votre projet professionnel**. Omniprésentes dans l'industrie – aérospatiale, imagerie, cryptographie..., ou dans les services-banques, assurances..., les mathématiques et l'informatique apparaissent aussi dans de nombreux autres secteurs : sondages, gestion des risques, protection des données...Elles interviennent dans notre vie quotidienne – télécommunication, transports, médecine, météorologie, musique...et contribuent à la résolution de problématiques actuelles : énergie, santé ; environnement, climatologie, développement durable...Pour renchérir de cette diversité des mathématiques informatiques auprès des étudiants de l'Université Félix Houphouët Boigny ; voici ci-après des témoignages d'anciens ayant effectués des études à l'UFR Math Info de ladite Université.

Bobet Goualo Victorien, Ingénieur de Conception en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication (STIC) de l'INP-HB de Yamoussoukro après une L2 de l'UFR Math Info de l'UFHB et titulaire d'un Exécutive Master of Engineering Big Data & Data Science de ISAE-ISM Paris. Actuellement Consultant Data auprès des entreprises et enseignant-chercheur à l'Ecole Supérieure Africaine des TIC (ESATIC).

Votre orientation en mathématiques et informatique est l'un des meilleurs choix de filières. Alors n'oubliez pas d'avoir une idée de votre projet professionnel puis murir cette idée. Beaucoup de courage, ce n'est pas facile mais c'est possible car plusieurs ont pu le faire.

N'oubliez pas de vous approprier le **VALIDEUR LMD**, un document qui aide pour la validation des examens à travers des aperçus de la façon dont les profs composent. Le document VALIDEUR LMD qui est depuis 2015, un manuel très utile à la compréhension du système de l'enseignement supérieur est beaucoup apprécié des étudiants.

Je suis **DOUKOURE DAOUDA**, ingénieur statisticien économiste (ISE) de l'école nationale de statistique et économie appliquée (ENSEA). Apres l'obtention du BAC D au lycée moderne de Tiassale ; j'opte pour la filière de mathématique informatique (MATH-INFO) à l'université Felix Houphouët Boigny, juste pour l'amour que je nourrissais pour les mathématiques.

Durant mon parcours en MATH-INFO ; je fus fasciné par l'utilisation qui pouvait être faites des mathématiques : tant en mécanique, économie, comptabilité ... Ainsi en licence de mathématique, je présente plusieurs concours d'entré dans des écoles ingénieurs, ou j'opte pour la formation ISE.

Comme message à tous ceux qui suivent le parcours mathématique, j'aimerais les rassurer de la diversité des débouchés que cette filière leurs offres.
Quant à ceux qui aimeraient embrasser le métier ingénieur, comme premier conseil : aillez confiance en vous, en votre potentiel et ensuite mettez-vous au travail. Faites votre possible pour comprendre les cours qui sont dispensés et de les approfondir.

Comme j'aime le dire « **Faire sa part des choses et implorer le tout puissant qu'il facilite** ».

Scanné avec CamScanner

Pour une vue globale des possibilités après des études en mathématiques informatique

Etant en licence 1 math info	• Procédure CAMPUS France • Concours AS de l'ENSEA, TS de l'EAMAC • Des bourses pour les étudiants de L1	CAMPUS FRANCE
Etant en licence 2 math info	• Cycle ingénieur EAMAC sous réserve • ISFA, EURIA, ISUP…(BECEAS)	ISFA
Etant en licence 3 math info	• Concours ENS • ISE de l'ENSEA sous réserve • Cycle ingénieur Centrale Casablanca	ENS
Une L3 math info validée	• Concours cycle ingénieur INPHB, ISE • Concours Master IFORD, IIA, Big Data, ESATIC, PSAV • Concours écoles de commerce HEC, ESSEC, ESCP…	HEC ENSEA

Qui peut le plus, peut le moins. Cela dit que si vous être de niveau sup vous avez la possibilité de postuler à tous les opportunités de niveaux inférieurs.

Scanné avec CamScanner

Allez sur un navigateur (google, Microsoft Edge) puis saisissez :

Campus France Côte d'Ivoire :

- https://www.ivoire.campusfrance.org (site d'informations)

Concours Centrale Casablanca :

- http://www.centrale-casablanca.ma/fr/ (site info et concours cycle ingénieur)

Concours INPHB Yamoussoukro (Bourse du gouvernement après admission) :

- http://www.inphb.ci/2/vues/accueil/ (site info)
- https://inphb.ci/ConCours_Ing-INPHB-2022/ (site concours Ingénieurs)

Concours ENSEA Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :

- http://ensea.ed.ci/ (site info)
- http://capesa.ensai.fr (site concours cycle AS/cycle ingénieur)

Concours HEC Paris (Bourse du gouvernement après admission) :

- https://www.hec.edu/fr
- https://www.hec.edu/fr/grande-ecole-masters/programme-grande-ecole/admissions

Concours ENS Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :

- http://www.ensabidjan.ci/ (site de l'école)
- https://ens.laatech.com/ (site concours)

Concours IIA Yaoundé :

- http://www.iiayaounde.com/ (site de l'école)
- http://www.iiayaounde.com/linstitut/conditions-dadmission/ (admission)

Concours X polytechnique de Paris (Bourse du gouvernement après admission) :

- https://www.polytechnique.edu/ (site de l'école)
- https://www.polytechnique.edu/admission-cycle-ingenieur/fr/voie-universitaire-univ-filière-universitaire-internationale-fui (page admission)

Concours ESATIC Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :

- https://esatic.ci/presentation/ (site de l'école)
- https://esatic.ci/admission/ (page admission)

Concours ISFA Lyon (Actuáriat) :

- https://isfa.univ-lyon1.fr/ (site de l'école)
- https://isfa.univ-lyon1.fr/formation/actuariat/admission-a-la-formation-d-actuaire-a-l-isfa-803812.kjsp (page admission)

Bourse Japon 2023 (Bourse du gouvernement Japonais après admission) :

- https://www.ci.emb-japan.go.jp/files/000475798.pdf (PDF d'information à télécharger)
- https://www.ci.emb-japan.go.jp/itpr_ja/11_000001_00848.html (site officiel de la bourse)
- https://www.studyinjapan.go.jp/en/planning/scholarship/application/examination/ (anciens sujets)

Bourse Russie (Bourse du gouvernement Russe après admission) :

- https://studyinrussia.ru/fr/study-in-russia/scholarships/

M2PSAV de l'UFR Math Info (Possibilité de Bourse du gouvernement après admission) :

- http://m2psav.master.edu-math.org/ (site officiel)
- http://m2psav.master.edu-math.org/?page_id=18 (page de candidature)

Concours IFORD Yaoundé (Bourse du gouvernement après admission) :

- http://www.iford-cm.org/
- http://www.iford-cm.org/index.php/formation/mpd

Concours EAMAC de Niamey (Bourse d'organisme Aéronautique(ANAC,SODEXAME ...) après admission) :

- http://www.eamac.ne/ (site officiel de l'EAMAC)

Scanné avec CamScanner

DEUXIEME PARTIE

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

SEMESTRE 1

www.gvivaservices.com

Scanné avec CamScanner

RESUME ALGEBRE LINEAIRE (Important pour les concours)

• Valeur propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

Soit $u \in L(E)$. L 'ensemble des application linéaires de E dans E . Un scalaire $\lambda \in K$ est une valeur propre de u lorsqu'il existe un vecteur $x \neq 0_E$ de E tel que $u(x) = \lambda x$. Ce vecteur x est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ .

NB : Le vecteur nul n'est pas un vecteur propre de u .

• L'ensemble des valeurs propres de *u* est appelé le **spectre** de *u*, on le note $Sp(u)$.
Pour tout $\lambda \in K$, on note $E_\lambda(u) = Ker(u - \lambda\, IdE)$. *Si* $\lambda \in Sp(u)$, *alors* $E_\lambda(u)$ est constitué du vecteur nul et des vecteurs propres de valeur propre λ. On l'appelle **sous-espace propre associé à** λ . Si $\lambda \notin Sp(u)$, alors $E_\lambda(u) = \{0_E\}$.

• Le scalaire λ appartient à $Sp(u)$ si et seulement si $u - \lambda\, IdE$ est non injectif. En particulier 0 est valeur propre de *u* si et seulement si *u* est non injectif.

• Les vecteurs propres et les valeurs propres sont souvent appelés les **éléments propres de** *u*.
• **Propriété importante** : si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont *p* valeurs propres distinctes de *u*, alors la somme $E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_p}$ est directe. Ainsi des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants. En particulier, dans un espace de dimension *n*, il ne peut y avoir plus de *n* valeurs propres distinctes.

• Elément propre d'une matrice

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$.
• On dit que $\lambda \in K$, est valeur propre de *M* lorsqu'il existe $X \in \mathcal{M}n, 1(\mathbb{R})$ non nul tel que $MX = \lambda X$. Ce vecteur *X* est appelé vecteur propre de *M* associé à la valeur propre λ.
• Soient *E* un *K*-espace vectoriel de dimension finie, B une base de E, u un endomorphisme de *E* et $M = Mat(u, B)$. Les valeurs propres de u et de *M* sont identiques, et x est vecteur propre de u pour la valeur propre I ssi $X = Mat(x, B)$ est vecteur propre de *M* pour la valeur propre λ. On peut donc appliquer à la matrice *M* les définitions et les proprietes concernant l'endomorphisme u.

• Polynôme caractéristique

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ et u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .
• La fonction $\chi_M : \begin{cases} K \to K \\ \lambda \mapsto \det(M - \lambda I_n) \end{cases}$, est polynomiale .Son polynôme associé , que l'on notera également χ_M , est appelé polynôme caractéristique de M .Il est de degré n et s'écrit :

$$\chi_M = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(tr\, M)X^{n-1} + \cdots + \det M$$

• Les racines dans *K* du polynôme caractéristique χ_M sont exactement les valeurs propres de *M*.

Scanné avec CamScanner

Lorsque le polynôme χ_M est scindé dans K[X], avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pour racines, on a $\det M = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $tr\ M = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.
On appelle **ordre de multiplicité** d'une valeur propre λ de M, et on note $m(\lambda)$, l'ordre de multiplicité de la racine λ du polynôme χ_M.
Une matrice à coefficients réels **d'ordre impair** admet au moins une valeur propre dans R. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. La réciproque est fausse.

- **Endomorphismes et matrices diagonalisables**

Soit E un K-espace vectoriel de **dimension finie** et u un endomorphisme de E. L'endomorphisme u est dit **diagonalisable** lorsque l'une des propositions équivalentes suivantes est vérifiée :
- il existe une base de E formée de vecteurs propres de u,
- On a $E = \oplus_{\lambda \in sp(u)} E_\lambda(u)$

Caractérisation des endomorphismes diagonalisables : l'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, il vérifie l'une des propositions équivalentes suivantes :
- $\sum_{\lambda \in sp(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$
- Le polynôme χ_M est scindé sur K et pour toute valeur propre λ, on a $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$

Cas particulier important : si χ_M est scindé sur K et à racines simples, alors l'endomorphisme u est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

Remarque pratique
Pour détermine $\dim E_\lambda(u)$, on étudie suivant les cas $Ker\ (u - \lambda IdE)$ (système linéaire) ou bien $rg(u - \lambda IdE)$ car, d'après le théorème du rang, on a :
$\dim E_\lambda(u) = \dim E - rg(u - \lambda IdE)$.

- **Exemples d'endomorphismes diagonalisables** : les **homothéties** sont les endomorphismes diagonalisables possédant une seule valeur propre, **les projecteurs** (resp. **les symétries**) sont les endomorphismes diagonalisables dont le spectre est inclus dans $\{0, 1\}$ $(resp.\ dans\ \{-1, 1\})$.

Remarque
- Lorsque u est diagonalisable, on a $tr\ u = \sum_{\lambda \in sp(u)} m(\lambda)\,\lambda$ et $detu = \prod_{\lambda \in sp(u)} \lambda^{m(\lambda)}$.
- On dit qu'une matrice M de $Mn(K)$ est **diagonalisable** lorsqu'elle est **semblable** à une matrice **diagonale**. Cela équivaut à l'existence d'une matrice P, inversible, dont les colonnes sont des vecteurs propres de M, telle que $P^{-1}MP$ est diagonale.

Il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs pour $P^{-1}MP$. En effet, cette matrice est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à M dans la nouvelle base formée des vecteurs propres. Les valeurs propres apparaissent sur la diagonale dans le même ordre que les vecteurs propres dans la matrice de passage P.

- **Polynômes d'endomorphismes, polynômes annulateurs**

Polynômes annulateurs

Scanné avec CamScanner

• On dit que le polynôme P est un **polynôme annulateur** de u lorsque $P(u)$ est l'endomorphisme nul de E, ce qu'on notera abusivement $P(u) = 0$.
• Si $P(u) = 0$, alors toute valeur propre de u est un zéro de P ;
• Lorsque E est de dimension finie, tout endomorphisme u de E admet au moins un polynôme annulateur. Ce n'est pas vrai lorsque E n'est pas de dimension finie.
• **Résultat important:**
Si P est un polynôme annulateur de u, alors toute valeur propre de u est racine de P. La réciproque est fausse.

Polynôme minimal

• En dimension finie, il existe un polynôme non nul de degré minimal π_u (que l'on pourra choisir unitaire) On l'appelle le **polynôme minimal** de u. Les racines de π_u sont **exactement** les valeurs propres de u.

Le théorème de Cayley-Hamilton

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors $\chi_u = 0$ ou de manière équivalente : π_u / χ_M. **Il en résulte que** $deg\ (\pi_u) \leq dim\ E$.
Remarque *: si le polynôme minimal de A est scindé simple alors A est diagonalisable.*

• Endomorphismes trigonalisables

Soit E un espace vectoriel **de dimension finie égale à** n ***sur*** K. Un endomorphisme u de E est dit **trigonalisable** lorsqu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

Remarque

Si dans une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ la matrice de u est triangulaire supérieure, alors dans la base $(e_n, \ldots, e_1)$, elle est triangulaire inférieure. Une matrice $M \in Mn(K)$ est dite trigonalisable dans $Mn(K)$ lorsqu'il existe une matrice $P \in GLn(K)$ telle que la matrice $P^{-1}MP$ soit triangulaire

• Diagonalisation, trigonalisation et polynôme annulateur

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$.

• Critères de diagonalisation

• L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si u admet un polynôme annulateur **non nul, scindé dans** $K[X]$ **et à racines simples.**
• L'endomorphisme u **est** diagonalisable si et seulement si son **polynôme minimal** est scindé **dans** $K[X]$ **et à racines simples.**

• Critères de trigonalisation

• L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si u admet un polynôme annulateur **non nul, scindé dans** $K[X]$.
• L'endomorphisme u **est** trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé *dans* $K[X]$.

Scanné avec CamScanner

- **Quelques applications de la réduction des matrices**

Calcul des puissances de A : soit $A \in Mp(K)$.

• Lorsqu'on dispose d'un polynôme P annulateur de A, on effectue la division euclidienne de X^n par P. Il existe $(Q, R) \in K[X]^2$ tels que $\boldsymbol{X^n = PQ + R}$ avec $deg\, R \leq n - 1$. On en déduit que

$$\boldsymbol{A^n = P(A)Q(A) + R(A) = R(A)} \ .$$

En particulier, en notant p le degré de P, A^n est combinaison linéaire de $(I, A, \ldots, A^{p-1})$.

• Lorsque A est diagonalisable, il existe $P \in GLp(K)$ et D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P^{-1}A^nP = D^n$ et donc $A^n = PD^nP^{-1}$.

• Lorsque A est seulement trigonalisable, on essaie d'écrire $A = PTP^{-1}$ avec $P \in GLp(K)$, T triangulaire supérieure telle que $T = D + N$ avec D diagonale, N triangulaire strictement supérieure et $DN = ND$. Ainsi on peut utiliser la formule du binôme de Newton, et on obtient $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$, N étant nilpotente, le calcul est alors plus simple.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2018-2019
UFRMI L2 SM

1ère SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée:2 heures

Exercice 1

1° a) Echelonner la matrice M avec:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & m \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Discuter le rang de M suivant les valeurs de m.

c) Pour $m = -2$, donner la forme ligne canonique de M.

2° Résoudre et discuter le système linéaire:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$$

Exercice 2

Pour tout nombre réel λ, on considère l'endomorphisme f_λ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

1° Déterminer les valeurs propres de f_λ et discuter le nombre et les multiplicités suivant les valeurs de λ.

2° Pour quelles valeurs de λ f_λ est-il diagonalisable?

3° Déterminer le polynôme minimal de f_λ

4° Calculer $(A_1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2018-2019
UFRMI L2 TOUTES LES FILIERES

2ème SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée: 2 heures

Exercice 1 (6pts)

1° a) Donner la définition d'une matrice diagonalisable.
b) Montrer que si une matrice est diagonalisable, alors son carré aussi diagonalisable.

2° Dire si les assertions suivantes sont vraies (V) ou fausses (F). Pour chaque assertion fausse, proposer une assertion vraie qui la corrige:
a) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.
b) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.
c) Toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est diagonalisable.

Exercice 2 (6pts)

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$) telles que:

$$AB - BA = A$$

Le but de cet exercice est de montrer que A est nilpotente c.a.d $\exists k \in \mathbb{N}$, $A^k = 0$

On note E l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ et on considère l'application:

$$\varphi : \begin{array}{c} E \longrightarrow E \\ M \longmapsto MA - MB \end{array}$$

φ : $E \to E$, $M \mapsto MB - BM$

1° Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2° Montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(A^k) = kA^k$.
3° on suppose que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \neq 0$. Montrer que φ a une infinité de valeurs propres.
4° Conclure

Exercice 3 (8pts)

Soit la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Scanné avec CamScanner

1° a) Determiner les valeurs propres et les sous espaces propres de A.

b) A t-elle diagonalisable? trigonalisable?

2° Trouver une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible P telles que $A = PTP^{-1}$.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2019-2020
UFRMI L2 TOUTES LES FILIERES

1ère SESSION D'EVALUATION

EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE

Durée: 2 heures

Exercice 1 $(10pts)$

Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1° a) f est-il un automorphisme de E?

b) Déterminer le noyau et l'image de f

2° Soit $B = (u, v, w)$ avec: $u = (3, 1, 0)$; $v = (1, -1, 1)$; $w = (2, -1, 1)$ une famille de vecteurs de E.

a) B est-il une base de E?

b) Déterminer la matrice A' de f dans la base B

3° a) Calculer A^2

b) En déduire la nature de f et donner ses éléments caractéristiques

Exercice 2 $(10pts)$

Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$ où a est un réel donné.

1) Calculer le polynome caractéristique de M et montrer que M est trigonalisable.

2) Montrer que si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, alors M est diagonalisable.

3) Montrer que si $a = 1$ ou $a = 0$, alors M n'est pas diagonalisable.

4) On suppose $a = 0$, trigonaliser M

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2020-2021
UFRMI L2 TOUTES LES FILIERES

1ère SESSION D'EVALUATION

EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE

Durée: 2 heures

Exercice 1 (8*pts*)

1- Donner une matrice de format $(4,5)$ échelonnée réduite par lignes de rang 3.

2- Soit $H \in M_4(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est $m_H(X) = (X+5)^2$

a) H est-elle inversible?

b) H est-elle diagonalisable?

c) H est-elle jordanisable?

(Seules les justifications aux questions a),b) et c) sont notées)

d) On suppose que le sous espace propre de H associé à -5 est de dimension 2. Donner la réduite de Jordan J de H (Justifier entre trois et cinq lignes)

3- Dire si les assertions suivantes sont vraies (V) ou fausses (F). Pour chaque assertion fausse, proposer une assertion vraie qui la corrige:

a) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $det(\lambda A) = \lambda\, det(A)$.

b) Le rang d'une matrice est égal au nombre de ses lignes non nulles

c) Toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est diagonalisable.

d) Toute matrice est produit fini de matrices d'opération élémentaire.

Exercice 2 (12*pts*)

Pour tout nombre réel m, on considère l'endomorphisme f_m de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1-m & m-1 & m+1 \end{pmatrix}$$

1- Déterminer les valeurs propres de f_m et discuter le nombre et les multiplicités suivant les valeurs de m.

2- Pour quelles valeurs de m, f_m est-il diagonalisable?

3- Déterminer le polynôme minimal de f_m suivant les valeurs de m.

4- Calculer $(A_1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2020-2021
UFRMI L2 SM

2ème SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée: 2 heures

Exercice 1 (11*pts*)
Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1- f est-il un automorphisme de E?
2- a) calculer M^2
b) En déduire la nature de f et donner ses éléments caractéristiques.
3- Pourquoi f est-il diagonalisable?
4- Soient respectivement P et D la base et la direction de f.
a) Dire pourquoi on a $E = P \oplus D$ et donner la définition d'une base $B' = (u, v, w)$ de E adaptée à cette somme directe.
b) Soit $B' = (u, v, w)$ une base de E adaptée à la somme directe $E = P \oplus D$. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 2 (9*pts*)
Soit la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

1-a) Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de A.
b) A est-elle diagonalisable? trigonalisable?
2- Trouver une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible P telles que $A = PTP^{-1}$.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2021-2022
UFRMI L2 TOUTES LES FILIERES

1ère SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée: 2 heures

Exercice 1 (*4pts*)

1° répondre par vrai (V) ou faux (F) Dans le cas où la réponse est fausse, donner l'affirmation correcte:

a) Le rang d'une matrice est égal au nombre de ses lignes non nulles

b) Toute matrice symétrique est diagonalisable

c) Toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est diagonalisable

d) le determinant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des blocs de la diagonale

2° Donner quatre critères (c.à.d conditions necessaires et suffisantes) de diagonalisation

Exercice 2 (*8pts*)

Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 11 \\ 1 & -4 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1° a) f est-il un automorphisme de E ?

b) Determiner le noyau et l'image de f

2° Soit $B = (u, v, w)$ avec: $u = (3, 1, 0)$; $v = (1, -1, 1)$; $w = (2, -1, 1)$ une famille de vecteurs de E.

a) B est-il une base de E?

b) Déterminer la matrice A' de f dans la base B

3° Calculer A^2, A^3. Quelle est la nature de f?

Exercice 3 (*8pts*)

Soit la matrice

Scanné avec CamScanner

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$ où a est un réel donné.

1) Calculer le polynôme caractéristique de M et montrer que M est trigonalisable.

2) Montrer que si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, alors M est diagonalisable.

3) Montrer que si $a = 1$ ou $a = 0$, alors M n'est pas diagonalisable.

4) On suppose $a = 0$. trigonaliser M

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB DE COCODY ANNEE 2021-2022
UFRMI L2 TOUTES LES FILIERES

2ème SESSION D'EVALUATION
EPREUVE D'ALGEBRE LINEAIRE
Durée: 2 heures

Exercice 1 (4*pts*)

1° répondre par vrai (V) ou faux (F) Dans le cas où la réponse est fausse, donner l'affirmation correcte:

a) Le rang d'une matrice est égal au nombre de ses lignes non nulles

b) Toute matrice symétrique est diagonalisable

c) Toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est diagonalisable

d) le determinant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des blocs de la diagonale

2° Donner quatre critères (c.à.d conditions necessaires et suffisantes) de diagonalisation

Exercice 2 (7*pts*)

Donner une forme échelonnée par lignes, le rang et la forme ligne canonique de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

2° Résoudre le système:

$$\begin{cases} x + 2y - z - 3t = 1 \\ 2x + 4y + z - 2t = 3 \\ 3x + 6y + 2z - 6t = 2 \end{cases}$$

Exercice 3 (9*pts*)

Soit la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1° a) Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de A.

b) Sur $\mathbb{R}$, A t-elle trigonalisable? diagonalisable?

2°.a) calculer A^2, et A^3 et en déduire A^n en fonction de A et n, $\forall n \geq 2$

b) Calculer $e^A = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} A^n$ en fonction de I_3, A et A^2

Scanné avec CamScanner

UFR-MI L2 Année 2018-2019

CORRECTION : ALGEBRE LINEAIRE SESSION 1

EXERCICE 1

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & m \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. a) Echelonnons M

$$\text{On a : } M \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1-m \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & -4-2m \end{pmatrix}$$

b) $Rg(m)$ =Nombre de ligne **non nulles** de M.
Ainsi $Rg(m) = 2$ ssi $-4-2m = 0$
D'où $\begin{cases} Rg(m) = 2 & \text{ssi} \quad m = -2 \\ Rg(m) = 3 & \text{ssi} \quad m \neq -2 \end{cases}$

c) Après échelonnement de M,on a :

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & -4-2m \end{pmatrix}$$

$$\text{Pour } m = -2 \text{ on a : } M \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Soit (E) : $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$

La matrice du système est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

La matrice augmentée du système est :

$$\overline{A} = M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & m \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & -4-2m \end{pmatrix}$$

- Pour $m \neq -2$

Scanné avec CamScanner

On a : $Rg(\overline{A}) = Rg(M) = 3$ et $Rg(A) = 2$.
$\Rightarrow Rg(\overline{A}) > Rg(A)$ d'où (E) est incompatible et $S_{(E)} = \emptyset$

• Pour $m = -2$.

On a : la forme ligne canonique de M est : $M \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Rg(A) = Rg(M) = 2 < 3$ le nombre d'inconnu. Alors (E) admet une infinité de solutions.

Par interprétation à l'aide de la forme ligne canonique de M, on a :

$\begin{cases} y - z = 1 \quad (1) \\ x + y - z = 1 \quad (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow y = 1 + z$

Dans (2).on a : $x + 1 + z - z = 1 \Rightarrow x = 0$

D'où $(E) = \{(0, 1 + z, z), z \in \mathbb{Q}\}$.

EXERCICE 2

Soit f_λ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice associée $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1-\lambda & \lambda - 1 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$

1. Valeur propre de f_λ.

on a : $|A_\lambda - XI_3| = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda+1-X \end{vmatrix}$

$|A_\lambda - XI_3| = -(X-1)(X-2)(X-(1+\lambda))$

Ainsi :

-Si $\lambda = 0$ alors $Sp(A_\lambda) = \{1, 2\}$ avec 1 de multiplicité 2 et 2 de multiplicité 1.

-Si $\lambda = 1$ alors $Sp(A_\lambda) = \{1, 2\}$ avec 1 de multiplicité 1 et la valeur propre 2 de multiplicité 2.

-Si $\lambda \notin \{0, 1\}$: $Sp(A_\lambda) = \{1, 2, 1 + \lambda\}$

2. Les valeurs de λ pour lesquels A_λ est diagonalisable.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a : le polygone caractéristique :

$|A_\lambda - XI_3| = -(X+1)(X-2)(X-(1+\lambda))$

Calculons les sous-espaces propres associés à chaque valeurs propres.

* E_1 ? Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow (A_\lambda - XI_3).X = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ (1-\lambda)x + (\lambda-1)y + \lambda z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = x \\ (1-\lambda)x + (\lambda-1)y = 0 \end{cases}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$.on a : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow dim(E_1) = 1.$

Or d'après le précédent, pour $\lambda = 0$ la valeur propre 1 est de multiplicité 2 différent de $dim(E_1) > 1$. Alors pour $\lambda = 0, A_\lambda$ n'est pas diagonalisable.

* E_2 ? Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2$

$$\Rightarrow (A_\lambda - 2I_3).X = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ -x + z = 0 \\ (1-\lambda)x + (\lambda-1)y + (\lambda-1)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ (1-\lambda)x + (\lambda-1)y + (\lambda-1)z = 0 \end{cases}$$

* Pour $\lambda = 1$, on a : $z = x; y = y$ (quelconque)

D'où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ et pour $\lambda = 1$ la valeur propre 2 est de multiplicité 2 et $dim E_2 = 2$.

* Pour $\lambda \neq 1$,On a :$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

* $E_{1+\lambda}$?

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{1+\lambda}$

$$\Rightarrow (A_\lambda - (1+\lambda)I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda x + z = 0 \\ -x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ (1-\lambda)x + (\lambda-1)y + = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \lambda x \\ y = x \\ (1-\lambda)x + (\lambda-1)y = 0 \end{cases}$$

avec $\lambda \notin \{1, 0\}$

$$\Rightarrow E_{1+\lambda} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \right\rangle$$

Finalement on en déduit que A_λ est diagonalisable ssi $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

3. Soit $m_{A_\lambda}(X)$ le plynôme minimal de A_λ

   * Pour $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ le polynôme caractéristique de A_λ est scindé simple, en plus $m_{A_\lambda}(X)$ et $P_{A_\lambda}(X)$(polynôme caractéristique) ont les mêmes racines et $m_{A_\lambda}(X)$ divise $P_{A_\lambda}(X)$. Alors :
   $m_{A_\lambda}(X) = (X-1)(X-2)(X-(\lambda+1))$

   * Pour $\lambda = 1$ on trouve $m_{A_\lambda}(X) = (X-1)(X-2)$

4. Calculons $(A_1)^n$

On a : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Sp\, A_1 = \{1, 2\}$

$$E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

A_1 est diagonalisable (question précédente) et $A_1 = PDP^{-1}$ avec

Scanné avec CamScanner

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice diagonale.

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage.

Déterminons P^{-1}

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$

$$PX = E \Rightarrow \begin{cases} y + z = e_1 \\ x + z = e_2 \\ y = e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -e_1 + e_2 + e_3 = x \\ e_1 - e_3 = z \\ e_3 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -e_1 + e_2 + e_3 = x \\ e_3 = y \\ e_1 - e_3 = z \end{cases}$$

D'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

On a : $A_1 = PDP^{-1} \Rightarrow A_1^n = PD^nP^{-1}$

On a : $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$PD^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n & 1 \\ 2^n & 0 & 1 \\ 0 & 2^n & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n & 1 \\ 2^n & 0 & 1 \\ 0 & 2^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Finalement $A_1^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

UFR-MI :L2 Année 2018-2019

CORRECTION :ALGEBRE LINEAIRE SESSION 2

EXERCICE 1

1.a) Matrice diagonalisable

Une matrice diagonalisable est une matrice semblable à une matrice diagonale.

b) Supposons $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.

Alors, $A = PDP^{-1}$ où P inversible et D diagonale.

$\Rightarrow A^2 = AA = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$

$\Rightarrow A^2 = PD^2P^{-1}$

Et comme le carré d'une matrice diagonale est une matrice diagonale, alors D^2 est diagonale.

Ainsi, A^2 est semblable à une matrice diagonale D^2. D'où A^2 est diagonalisable.

2.a) **FAUX.**

L'assertion vraie est : $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R},\ det(\lambda A) = \lambda^n\, det(A)$

b) **FAUX.**

Assertion vraie : $\forall A; B \in M_n(\mathbb{R})$, On a : $det(AB) = det(AB) = det(A)\, det(B)$

c) **FAUX.**

Assertion vraie : Toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est trigonalisable.

EXERCICE 2

$\varphi : E \longrightarrow E$ et $AB - BA = A$ pour $A, B \in E$

$M \longmapsto MB - BM.$

(2) Soit la proposition $P_k : \forall k \in \mathbb{N}, \varphi(A^k) = \varepsilon A^k$

• pour $k = 1$, on a : $\varepsilon(A) = AB - BA = A$

Par hypothèse $AB - BA = A$

$\Rightarrow \varphi(A) = 1 \times A^1$. Ainsi P_1 est vrai.

Supposons P_k vraie et montrons que P_{k+1} est vrai.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(A^k) = kA^k$

$\Rightarrow \varphi(A^k)A = kA^{k+1}$

$\Rightarrow \varphi(A^k)A + A^{k+1} = (k+1)A^{k+1} \quad (*)$

Par définition de φ, on a : $\varphi(A^k) = A^kB - BA^k$

$\Rightarrow \varphi(A^k)A = A^kBA - BA^{k+1}$

Scanné avec CamScanner

$$\varphi(A^k).A + A^{k+1} = A^kBA - BA^kA + A^kA$$
$$= A^k(BA + A) - BA^{k+1}$$

Or pour $(A, B) \in E^2$. $AB - BA = A \Rightarrow A + BA = AB$. D'où :

$$\varphi(A^k).A + A^{k+1} = A^k(AB) - BA^{k+1}$$
$$= A^{k+1}B - BA^{k+1} \quad (**)$$
$$= \varphi(A^{k+1})$$

$(*)$ et $(**)$ nous donne que : $\varphi(A^{k+1}) = (k+1)A^{k+1}$

Donc P_{k+1} est vrai sachant P_k est vraie.

On en déduit alors que P_k est vraie c'est-à-dire que $\forall k \in \mathbb{N}. \varphi(A^k) = kA^k$.

(3) On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}. A^k \neq \mathbb{Q}$.

D'après précédent. $\forall k \in \mathbb{N}. \varphi(A^k) = kA^k$.

$\Rightarrow \varphi(U) = kU$ avec $U = A^k \in E$.

Ainsi pour k fixe dans $\mathbb{N}$. $\exists! U = A^k \in E$ tel que $\varphi(U) = kU$ alors k est une valeur propre dont le vecteur propre associé est : $U = A^k \neq O_E$.

Comme k parcourt $\mathbb{N}$ alors tout k élément de $\mathbb{N}$ est valeur propre de φ.

Ainsi il existe une infinité de valeur propre.

(4) Conclusion

On a montré précédemment que $\forall k \in \mathbb{N}. A^k \neq 0 \Rightarrow \varphi$ admet une infinité de valeur propre.

Soit $P \Rightarrow Q$ avec $\begin{cases} P : "\forall k \in \mathbb{N}, A^k \neq 0" \\ Q : "\varphi \text{ admet une infinité de valeur propre"} \end{cases}$

Or $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow non\, Q \Rightarrow non\, P$ avec :

$non\, P$: "$\exists k \in \mathbb{N} \backslash A^k = 0$"

$non\, Q$: "φ admet un nombre fini de valeur propre"

φ étant un endomorphisme de E alors $dim(\varphi) = n^2$ (E l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$).

Ainsi $S \leq n^2$ avec S le nombre de valeur propre de φ. Donc (S) est fini. D'où φ admet un nombre fini de valeur propre.

Comme $non\, Q \Rightarrow non\, P$, alors $\exists k \in \mathbb{N} \backslash A^k = 0$.

A est donc nilpotent.

EXERCICE 3

Scanné avec CamScanner

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.a) Valeur propre de A

$$\begin{aligned} P(X) &= det(A - XI) \\ &= \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -4 & 4-X & 0 \\ -2 & 1 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)\begin{vmatrix} -X & 1 \\ -4 & 4-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)[X(X-4)+4] \\ &= (2-X)(X^2-4X+4) \\ &= (2-X)(X-2)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X) = (X-2)^3}$$

Donc 2 est la seule valeur propre de A

Sous-espaces propre de A

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
$E_2 = ker(f - 2I_3)$

$$(x, y, z) \in E_2 \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \Rightarrow 2x - y = 0 \\ -2x + y = 0 \Rightarrow y = 2x \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $E_2 = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $dim\, E_2 = 2$ et $mult(2) = 3$
$dim\, E_2 \neq mult(2)$, donc A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable car son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

2) Trouvons une matrice triangulaire T et une matrice P telles que

Scanné avec CamScanner

$A = PTP^{-1}$

$$E_2 = Vect\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Posons $u_1 = (1, 2, 0)$ et $u_2 = (0, 0, 1)$.
Pour trigonaliser A, il suffit de completer la base pour un troisième vecteur indépendant de u_1 et u_2.
Par exemple $u_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. En effet, $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{vmatrix} = -1 \neq 0$

La matrice A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix}2 & 0 & a\\0 & 2 & b\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Déterminons a et b

On a : $A(u_3) = au_1 + bu_2 + 2u_3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2a + 2 = 4 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Donc $T = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

La matrice de passage P étant $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\-2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Il en resulte que : $A = PTP^{-1}$

Scanné avec CamScanner

Proposition de correction de la licence 2

Algèbre Linéaire : 2019-2020

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1) a) Vérifions si f est un automorphisme de E ou non :

f est un automorphisme de E si $det(A) \neq 0$

On a : $detA = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow det(A) = 0$

Donc f n'est pas un automorphisme de E.

b) Déterminons le noyau et l'image de f.

Noyau de f : $\left(ker(f) = < \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >\right)$

Image de f :

on a : $\dim(ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$

alors : $\dim(Im(f)) = 2$. D'où $Im(f)$ est engendré par 2 vecteurs. Soient v_1 et v_2 ces deux vecteurs et e_1 et e_2 deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a : $v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) a) B est-il une base de E ?

B est une base de E si

B est libre et génératrice.

On a : $\det(B) = \det(u, v, w) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$det(B) = 3\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2) = 1 \neq 0$

Donc, B est une famille libre.

On a : $card(B) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ alors B est génératrice par conséquent, B est une base de E.

b) Déterminons la matrice A' de f dans la base B.

$$\begin{matrix} & f(u) & f(v) & f(w) \\ \end{matrix}$$

On a : $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}$

Déterminons a_{11}, a_{21} et a_{31}.

On a : $f(u) = a_{11}u + a_{21}v + a_{31}w$

Or $f(u) = Au = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = 0 \\ a_{31} = 0 \end{cases}$ De même, on montre que $A' = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

3) a) Calculons A^2

On a : $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Donc $A^2 = A$

b) Déduisons-en la nature de f et donnons ses éléments caractéristiques.

$inv(f) = \{X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / f(X) = X\}$

On a : $f(X) = X \Leftrightarrow AX = X \Rightarrow \begin{cases} -x + 6y + 8z = \\ x - 2y - 4z = \\ -x + 3y + 5z = \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x + 6y + 8z = \\ x - 3y - 4z = \\ -x + 3y + 4z = \end{cases}$

Les trois équations $(E_1), (E_2)$ et (E_3) sont proportionnelles alors, on a :

$x = 3y + 4z$

D'où $inv(f) = \{(3y + 4z, y, z) / y, z \in \mathbb{R}\}$

$inv(f) = \{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \neq \emptyset$ et $A^2 = A$ donc,

f est une projection P.

Eléments caractéristique

$inv(f) = < \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$ c'est la base de P

$Ker(f) = < \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >$ c'est la direction de P

Exercice 2

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

Polynôme caractéristique de M

Soit $P_M(X)$ le polynôme caractéristique de M.

$P_M(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & -2 \\ 1 & a-X & -1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{vmatrix}$

$= (2-X)\begin{vmatrix} a-X & -1 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ a-X & -1 \end{vmatrix}$

$P_M(X) = -X(X-a)(X-1)$

Montrons que si a≠ 0 et a≠ 1 alors M est diagonalisable.

On a : $P_M(X) = -X(X-a)(X-1)$.

Si a≠ 0 et a≠ 1 alors :

$m(X) = X(X-a)(X-1)$ où

$m(X)$ est le polynôme minimal de M.

Comme $m(X)$ est scindé simple sur $\mathbb{R}$ alors M est diagonalisable.

Montrons que si a= 1 ou a= 0, alors M n'est pas diagonalisable.

Supposons que a= 1 alors :

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P_M(X) = -X(X-1)^2$

$\Rightarrow S_p(M) = \{0; 1\}$ où $m_{(0)} = 1$ et $m_{(1)} = 2$.

Sous-espace propre

$E_{(1)} = \{X\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ MX = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

On a : $MX = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \ (E_1') \\ x + y - z = 0 \ (E_2') \end{cases}$

$\Rightarrow x = z - y \ (*)$

$(E_1') \Rightarrow 2z - 2y + y - 2z = 0$

$\Rightarrow y = 0$

$x = z.$

$= \{(z, 0, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\}.$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \Rightarrow \dim(E_0) = 1 = m_{(0)}$

Méthode

$1 \leq dim E_{(\lambda)} \leq m_\lambda$

$1 \leq dim E_{(0)} \leq m_{(0)} = 1$

$dim E_{(0)} = 1 = m_0$

$\{X\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \ (M - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$(M - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$

$= \{(z, z, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\}.$

$E_{(1)} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > \Rightarrow \dim(E_{(1)}) = 1 \neq m_{(1)} = 2$

Par conséquent, M n'est pas diagonalisable.

Conclusion

Si $a = 1$, M n'est pas diagonalisable.

Supposons que $a = 0$

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P_M(X) = -X^2(X-1)$

$\Rightarrow S_p(M) = \{0; 1\}$ où $m_{(0)} = 2$ et $m_{(1)} = 1$.

Sous-espace propre

$E_{(1)} = \{X\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ (M - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

On a : $(M - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \ (1) \\ x - y - z = 0 \ (2) \\ x + y - 2z = 0 \ (3) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \ (1) \\ x - y - z = 0 \ (2) \end{cases}$

$(2) \Rightarrow x = z + y \ (*)$

$(*)$ dans $(1) \Rightarrow y + z + y - 2z = 0$

$\Rightarrow z = 2y$

Alors $x = 3y$.

D'où $E_{(1)} = \{(3y, y, 2y) \ / \ y \in \mathbb{R}\}$.

$E_{(1)} = < \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} > \Rightarrow \dim(E_{(1)}) = 1 = m_{(1)}$

$E_{(0)} = \{X\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ MX = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$MX = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \ (1) \\ x - z = 0 \quad (2) \\ x + y - z = 0 \quad (3) \end{cases}$

$(2) \Rightarrow x = z$

Dans (1) on a : $y = 0$.

$E_{(0)} = \{(z, 0, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\}$

$E_{(0)} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \Rightarrow \dim(E_{(0)}) = 1 \neq m_{(1)} = 2.$

Donc, M n'est pas diagonalisable.

Conclusion : *si* $a = 0$, M n'est pas diagonalisable.

4) On suppose $a = 0$.

Trigonalisons M

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$dont la matrice de la base canonique est M.

T la matrice Trigonaliser de M dans la $B' = (u, v, w)$

Scanné avec CamScanner

Avec $u = (3,1,2)$, $v = (1,0,1)$.

P la matrice de passage inversible $P_{BB'}$ telle que :

$$M = PTP^{-1} \text{ avec } T = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminons a, b et c

Prenons $w = e_1 = (1,0,0)$

On a : $f(u) = u$ (1)

$f(v) = au + 0 \times v$ (2)

$f(e_1) = bu + cv$ (3)

(2) $\Rightarrow f(v) = av$ alors $a = 0$.

(3) $\Rightarrow f(e_1) = bu + cv$

Or : $f(e_1) = M \times e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3b + c = 2 \\ b = 1 \\ 2b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Donc $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

Université FHB Année 2020-2021
MATHS-INFO L2

CORRECTION ALGEBRE LINEAIRE
Session 1

Exercice 1

1) Une matrice de format $(4,5)$ échelonnée réduite par ligne de rang 3 est :

Soit A cette matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2)a- VRAI car $0 \in Sp(H)$
b- FAUX car le polynôme minimal de H n'est pas scindé simple dans $\mathbb{R}$.
c- VRAI car le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$.
d- Comme -5 est la seule valeur propre de H alors H contient un seul élémentaire de Jordan. On a $E_{-5} = 2$ donc il y a 2 sous blocs de Jordan dans la matrice élémentaire de Jordan. Par ailleurs $m_H(X) = (X+S)^2$ donc l'ordre maximal des sous blocs de Jordan est 2.

Donc $J = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

3) a- FAUX car $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $det(\lambda A) = \lambda^n \, det(A)$
b- FAUX car c'est le nombre de lignes ou de colonnes non nuls.
c- VRAI
d- VRAI

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1-m & m-1 & m+1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminons les valeurs propres de f_m

* Déterminons le polynôme caractéristique

Scanné avec CamScanner

$$P_{A_m}(A) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1-m & m-1 & m+1-X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 1-X & 2-X & 1 \\ 0 & m-1 & m+1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 0 & m-1 & m+1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-X & 1 \\ X-(m+1) & m-1 & m+1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)(X-m-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-X & 1 \\ 1 & m-1 & m+1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)(X-m-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2-X & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)(X-m-1)(2-X)$$

$$= -(X-1)(X-m-1)(X-2)$$

$$P_{A_m}(X) = -(X-1)(X-m-1)(X-2).$$

On a: $Sp(A_n) = \{m+1, 2, 1\}$
Soit l_i le nombre de multiplicité.
Si $m = 0$, on a: $P_{A_0}(X) = -(X-1)^2(X-2)$
Alors $l_1 = 2$ et $l_2 = 1$

Si $m = 1$, on a: $P_{A_1}(X) = -(X-1)(X-2)^2$
Alors $l_1 = 1$ et $l_2 = 2$

Si $m \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ alors P_{A_m} est scindé simple. D'où chaque valeur propre a pour multiplicité 1.

2) Si $m \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $P_{A_m}(X)$ est scindé simple donc f_m est diagonalisable.

Si $m = 0$ on a: $P_{A_0}(X) = -(X-1)^2(X-2)$

* Déterminons les sous espaces propres E_1 et E_2

Scanné avec CamScanner

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow (A_0 - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$(x, y, z) = (y, y, 0) = (1, 1, 0)y \Rightarrow \boxed{E_1 =< (1,1,0) >}$

On a $dim E_1 = 1 \neq m_1 = 2$ (la multiplicité de 1) donc A_0 n'est pas diagonalisable d'où f_m n'est pas diagonalisable.

- Si $m = 1$ on a $P_{A_1}(X) = -(X-1)(X-2)^2$

  * Déterminons E_2

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow (A_1 - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x + z = 0 \Leftrightarrow x = z$$

$(x, y, z) = (z, y, z) = (0, 1, 0)y + (1, 0, 1)z \Leftrightarrow E_2 =< (0,1,0); (1,0,1) >$

On a $dim\, E_2 = 2 = m_2 = 2$ et $dim\, E_1 = 1$ donc f_m est diagonalisable.

Conclusion

- Si $m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, f_m est diagonalisable.
- Si $m = 0$, f_m n'est pas diagonalisable.

3) Déterminons le polynôme minimal de f_m suivant les valeurs de m.

Soit $m_{A_m}(X)$ le polynôme minimal de f_m.

Pour $m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ f_m est diagonalisable donc $m_{A_m}(X)$ est scindé simple. Par conséquent $m_{A_m}(X) = (X-1)(X-2)(X-(m+1))$

$\boxed{m_{A_m}(X) = (X-1)(X-2)(X-(m+1))}$

Pour $m = 0$ on $P(X) = -(X-1)^2(X-2)$ le polynôme minimal est soit $(X-1)^2(X-1)$, soit $(X-1)(X-2)$

On a: $(A_0 - I)(A_0 - 2I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Scanné avec CamScanner

$$(A_0 - I)(A_0 - 2I) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A_0 - I)(A_0 - 2I) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$$

Donc nous pouvons dire que: $m_{A_0}(X) = (X-1)^2(X-2)$

Conclusion

- Si $m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $m_{A_m}(X) = (X-1)(X-2)(X-(m+1))$
- Si $m = 0$, $m_{A_0}(X) = (X-1)^2(X-2)$

4) Calculons $(A_1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

On a: $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Comme A_1 est diagonalisable, il existe une matrice D diagonale et P une matrice inversible telle que $A_1 = P\,D\,P^{-1}$

On a $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

* Déterminons E_1 pour $m = 1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow (A_1 - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$E_1 = < (1,1,0) >$

On a: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(À vous de déterminer l'inverse de P)

On a: $A_1 = P\,D\,P^{-1}$

$\Rightarrow A_1 \times A_1 = P\,D\,P^{-1}(P\,D\,P^{-1}) = P\,D(P^{-1}\,P)\,D\,P^{-1}$

$A_1^2 = P\,D^2\,P^{-1}$

Scanné avec CamScanner

$$A_1^n = P\,D^n\,P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_1^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

RESUME ALGEBRE BILINEAIRE

Soit E un espace vectoriel réel.

✓ Forme bilinéaire sur symétrique

-On appelle **forme bilinéaire symétrique** sur E toute application φdéfinie sur $E \times E$ à valeurs réelles telle que :

- pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire (linéarité à droite)
- pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x,y)$est linéaire (linéarité à gauche)
- pour tout $(x, y) \in E \times E$ $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ (symétrie).

◦ L'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E est un $\mathbb{R} - espace\ vectoriel$ ..

◦ On dit que la forme bilinéaire symétrique est **positive** lorsque, pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x,x) \geq 0$. On dit qu'elle est **définie positive**, lorsque de plus, l'égalité $\varphi(x,x) = 0$ implique $x = 0_E$ (la réciproque étant toujours vraie).

✓ Formes quadratiques

◦ Si φ est une forme bilinéaire symétrique, on appelle forme quadratique associée à φ. l'application q définie sur E à valeurs réelles, telle que, pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$ On dit qu'elle est **positive** lorsque, pour tout $x \in E$, $q(x) \geq 0$, et **définie positive** lorsque, pour tout $x \in E \setminus \{0\}, q(x) > 0$.

◦ **Formules de polarisation :** si q est la forme quadratique associée à φ, alors pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a : $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) - \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$

◦ **Inégalité de Cauchy-Schwarz :** si φ est une forme bilinéaire symétrique positive et si q est sa forme quadratique associée, alors pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $\varphi(x,y)^2 \leq q(x)q(y)$.

• **Matrice d'une forme bilinéaire symétrique**

Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur E, et $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. On pose $a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$ pour i et j compris entre 1 et n. La matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est appelée matrice de la forme bilinéaire symétrique φ (ou de sa forme quadratique associée q) dans la base B. Cette matrice est symétrique.

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ **et** $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, on note X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans la base B . Alors $\varphi(x,y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i y_j = {}^tXAY$. En particulier ,

$q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j = {}^tXAX$

✓ Endomorphismes orthogonaux

Un endomorphisme u de E est dit **orthogonal** lorsqu'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire $\forall (x,y) \in E^2, (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.

• L'endomorphisme u est orthogonal si et seulement si $u \circ u^* = Id_E$ (c'est-à-dire que u est inversible et $u^* = u^{-1}$.

Scanné avec CamScanner

• L'endomorphisme u est orthogonal si et seulement si l'image par u d'une base orthonormale est une base orthonormale.

• On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux. Muni de la loi $\circ$, $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$, appelé groupe orthogonal.

• Si $u \in \mathcal{O}(E)$, $\boldsymbol{alors\ det\, u = \pm 1}$. On note $S\mathcal{O}(E)$ le sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ formé des éléments de déterminant égal à 1, appelé groupe spécial orthogonal.

• Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque l'endomorphisme de $\mathbb{R}n$ canoniquement associé à M est orthogonal. Cela est équivalent à l'une des propositions suivantes :

- ✓ (i) les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}_n$.
- ✓ (ii) la matrice vérifie la relation $\boldsymbol{{}'MM = M'M = I_n}$.

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathbb{R}^n$ est noté $O_n(\mathbb{R})$. C'est un groupe multiplicatif, appelé **groupe orthogonal**.

• **Caractérisation matricielle des endomorphismes orthogonaux:** l'endomorphisme u est orthogonal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale quelconque de E est orthogonale.

• **Changement de bases orthonormales :** si B et B' sont deux bases orthonormales de E, alors la matrice de passage de la base B à la base B' est une matrice orthogonale.

✓ **Endomorphismes orthogonaux particuliers:**

Soit F un sous-cspace vectoriel de E. On appelle :

• **symétrie orthogonale** par rapport à F, la symétrie par rapport à F dans la direction $F^{\perp}$

• **réflexion** toute symétrie orthogonale parrapport à un hyperplan (son déterminant vaut alors -1).

Lorsque **dim E = 2**, une rotation de E est un endomorphisme orthogonal de déterminant 1. Sa matrice dans toute base orthonormale s'écrit

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{COS\,\theta} & \boldsymbol{-Sin\theta} \\ \boldsymbol{Sin\theta} & \boldsymbol{COS\theta} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{ou\ \theta\ (l'angle\ de\ rotation) \in \mathbb{R}}$.

Lorsque **dim E = 3,** une rotation de E *est un endomorphisme orthogonal u de déterminant 1. Dans une base orthogonale dont le premier vecteur est dans* $Ker\,(u - Id_E)$. *Sa matrice s'écrit*

$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{Cos\theta} & \boldsymbol{-Sin\theta} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{Sin\theta} & \boldsymbol{Cos\theta} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{ou\ \theta \in \mathbb{R}}$.

Scanné avec CamScanner

Université FHB
MATHS-INFO.

Examen d'algèbre bilinéaire
1ère session ; L2 ; durée : 1 H 00

Répondez par VRAI ou FAUX.

Certaines questions nécessitent un travail au brouillon.

Une bonne réponse vaut 1,5 points(+1,5points), une mauvaise vaut moins 0,5point(-0,5point), aucune réponse vaut 0 point(0point)

Question 1(VRAI ou FAUX)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

On considère par leurs coordonnées les points :

$A(1; -1+\sqrt{2}; 2)$; $B(3; -1-\sqrt{2}; 4)$; $C(2; -1; 3)$.

On appelle :

Σ l'ensemble des points de coordonnées $(x; y; z)$ tels que :

$(x-1)(x-3)+(y+1-\sqrt{2})(y+1+\sqrt{2})+(z-2)(z-4)=0$.

$\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne : $x-y+z\sqrt{2}=3\sqrt{2}-1$.

a) Σ est une sphère dont un diamètre est $[AB]$.

b) Σ est une sphère de centre C.

c) La distance de C à $\mathcal{P}$ est $\dfrac{3(1+\sqrt{2})}{2}$

d) $\mathcal{P}$ est tangent à Σ

Question 2(VRAI ou FAUX)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on désigne par $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ les plans d'équations respectives :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} y-x=sin^2\theta \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \; ; \; \mathcal{Q} : \begin{cases} z-y=cos^2\theta \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On appelle (D) la droite d'intersection de ces deux plans.

a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont orthogonaux.

b) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la droite (D) est contenue dans le plan d'équation :

$$\begin{cases} z-x=1 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

c) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la droite (D) est orthogonale au plan d'équation :

$x+y+z=0$.

d) Il existe un réel θ tel que (D) soit parallèle au plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Exercice

On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les trois points non alignés A, B, C suivants, donnés par leurs coordonnées

$A(1; 0; -1)$; $B(3; -1; 2)$; $C(2; -2; -1)$

et le point E de coordonnées : $E(4; -1; -2)$.

Scanné avec CamScanner

c) Montrer que la droite (CE) est orthogonale à la droite (AB) et à la droite (AC).

d) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A, B et C.

e) Calculer la distance $d(E;\mathcal{P})$ du point E au plan $\mathcal{P}$.

f) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AE).

On considère la droite $(\mathcal{D})$ dont un système d'équations paramétriques est :

$$(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \\ t \in R \end{cases}$$

a) Donner un point J et un vecteur directeur $\vec{w}$ de $(\mathcal{D})$.

b) Expliquer pourquoi la droite $(\mathcal{D})$ est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.

c) Déterminer le point M de $(\mathcal{D})$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{EM}$ et $\vec{v}(0;1;1)$ soient orthogonaux.

d) En déduire la distance $d(E;(\mathcal{D}))$ du point E à la droite $(\mathcal{D})$.

Courage, ça peut aller maintenant !

Scanné avec CamScanner

Année 2018

Université FHB
MATHS-INFO.

Examen d'algèbre bilinéaire
2^{nde} session ; L2 ; durée : 1 H 30

Exercice

Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :
$q(x) = x_1^2 + (1+a)x_2^2 + (1+a+a^2)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_2x_3$; $a \in \mathbb{R}$;
$x = (x_1, x_2, x_3)$ dans β la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. Donner la matrice A de q dans β la base canonique de $\mathbb{R}^3$
2. Calculer le déterminant de A
3. Pour quelles valeurs de a la forme q est-elle non dégénérée ?
4. Réduire q et donner son rang en fonction de a
5. Déterminer une base orthogonale pour q
6. En déduire une matrice inversible P telle que $D = ({}^tP)\,AP$ soit diagonale.

Scanné avec CamScanner

Université FHB
MATHS-INFO.

Année 2019-2020

Examen d'algèbre bilinéaire
L2 : durée : 1 H 30

Exercice

Répondez par **VRAI** ou **FAUX** avec justification dans l'ordre des questions

On note E l'espace vectoriel des matrices réelles de taille 2×2.

Pour toute matrice $A \in E$ on pose $q(A) = tr(A^2)$.

1) q est une forme quadratique

2) Sa forme polaire est : $b(A, B) = tr(AB) = tr(BA)$.

3) L'expression de q dans la base canonique de E,

$$\text{pour } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ est : } q(A) = a^2 + 2bc - d^2.$$

4) Une décomposition de Gauss de q est : $q(A) = a^2 - \frac{1}{2}(b+c)^2 - \frac{1}{2}(b-c)^2 - d^2$.

5) La signature de q est : $(3, 1)$.

6) Pour tout $A \in E$, on a : $A^2 = (trA)A - (detA)I_2$, I_2 matrice identité d'ordre 2.

On considère maintenant le sous-espace $F \subset E$ des matrices de trace nulle.

7) Pour tout $A \in F$ on a $q(A) = -2det(A)$.

8) La signature de la restriction de q à F est : $(2, 1)$.

9) Une base orthogonale pour la restriction $q|F$ est :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

10) Pour que $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$, pour tout choix de sous-espace $F \subset E$,
il est nécessaire et suffisant que q soit non dégénérée

11) Pour que $F \oplus F^{\perp} = E$, pour tout choix de sous-espace $F \subset E$,
il est nécessaire et suffisant que $q|F$ soit non dégénérée.

Scanné avec CamScanner

Université FHB
MATHS-INFO.

Année 2020-2021

EXAMEN D'ALGEBRE BILINEAIRE
Session 1 ;L2; durée:1H30

EXERCICE

1) Décomposer en carés la forme quadratique $q(x, y, z) = xy + yz + xz$ sur $\mathbb{R}^3$.
Quelle est sa signature ? Quel est son rang ? Est-elle dégénérée ?

2) Ecrire une base orthogonale pour cette forme quadratique.

3) On désigne par (D) l'axe des x.

   a) Déterminer $(D^{\perp})$ pour cette forme quadratique.

   b) Déterminer $(D) \cap (D^{\perp})$

   c) Est-ce que (D) et $(D^{\perp})$ sont supplémentaires ?

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB 2020-2021
Maths-Info

EXAMEN ALGEBRE BILINEAIRE

L2

2ème Session, Durée: 01h30'

Exercice 1 (06 points)

Soit a et b deux nombres réels et $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$\beta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + ax_2y_2$.
Donnez, lorsqu'il y en a, les valeurs de a et b pour lesquelles β est
a) linéaire en la première variable,
b) linéaire en la deuxième.
c) symétriques,
d) positives,
e) non dégénérée,
f) un produit scalaire.

Exercice 2 (14 points)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}, \beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et f une forme bilinéaire sur E dont la matrice par rapport à β est

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

1) Calculer $f(x, y), f(x, x), f(y, y)$ dans les deux cas suivants:
   a) $x = e_1 + e_2 - e_3$ et $y = e_1 - e_2$.
   b) $x = e_1 + 2e_2$ et $y = e_2 + 7e_3$.
2) Trouver une nouvelle base de E par rapport à laquelle la matrice f est la matrice $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{91}{3} \end{pmatrix}$. En déduire une matrice inversible P telle que $({}^tP)MP = D$, où $({}^tP)$ est la transposée de P.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FHB

Maths-Info

EXAMEN ALGEBRE BILINEAIRE

L2

1ère Session, durée : 01h00

Exercice

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et f une forme bilinéaire sur E dont la matrice par rapport à β est

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1) Calculer $f(x,y)$, $f(x,x)$, $f(y,y)$ dans les deux cas suivants :

a) $x = e_1 + e_2 - 2e_3$ et $y = e_1 - e_2 + 2e_3$.

b) $x = e_1 - 2e_2$ et $y = e_2 - 7e_3$.

2) Trouver une nouvelle base de E par rapport à laquelle la matrice de f est la matrice $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{76}{3} \end{bmatrix}$. En déduire une matrice inversible P telle que $({}^tP)MP = D$. où $({}^tP)$ est la transposée de P.

Scanné avec CamScanner

UFHB Année 2021-2022

Maths-Info

EXAMEN D'ALGEBRE BILINEAIRE

2e session

Durée : 1 H 30

EXERCICE 1

Soit a un nombre réel. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$q(v) = x^2 + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 + 2xy - 2ayz$

pour $v = (x, y, z)$. Soit f la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1. Déterminer une décomposition de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
2. Donner le rang et la signature de q suivant les valeurs de a.
3. Pour quelles valeurs de a, f définit-elle un produit scalaire ?

EXERCICE 2

Soit $E = \mathbb{R}^3$ considéré comme espace vectoriel euclidien orienté muni de la base orthonormée directe canonique (i, j, k).

Dans E le produit scalaire est noté $< x, y >$, le produit vectoriel $x \wedge y$ pour $x, y \in E$.

Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire de E. Soit D l'axe orienté par u.

Pour tout réel λ non nul on note f_λ l'endomorphisme de E qui à x associe

$$f_\lambda(x) = x + \lambda < x, u > u.$$

1.1 a) Justifier l'existence d'une base orthonormée directe (u, v, w) et donner la matrice A_λ de f_λ dans cette base.

(Si vous ne pouvez justifier de l'existence d'une base orthonormée directe (u, v, w), supposer qu'elle existe et continuer)

b) Déterminer le noyau et l'image de f_λ.

c) Pour quelle valeur de λ, f_λ est-elle une projection orthogonale non triviale.

1.2 a) Pour quelle valeur de λ, f_λ est-elle un endomorphisme orthogonal ?

Cette valeur de λ est désormais notée λ_0.

b) Déterminer la nature de f_{λ_0}.

c) Donner la matrice de f_{λ_0} dans la base (i, j, k).

Courage, ça peut aller maintenant !

Scanné avec CamScanner

UFR :MI 2018-2019

CORRECTION D'ALGÈBRE BILINÉAIRE SESSION 1

EXERCICE 1

QCM

- Question 1

a) Vrai
Justification : Après développement.
On a : $(\sum) : (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$
$||\overrightarrow{AB}|| = 4 = 2r$ avec $r = 2$ le rayon de $\sum$.

b) Vrai.

c) Faux.

d) Faux.

- Question 2

a) Faux
Pour le voir, il suffit juste de faire le produit scalaire de leur vecteurs normaux et remarquer que c'est différent de 0.

b) Vrai

$$(D) : \begin{pmatrix} -\sin^2\theta \\ 0 \\ \cos^2\theta \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y - \sin^2\theta \\ y = y \\ z = y + \cos^2\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - x = 1 \\ y = y \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Or $\begin{cases} z - x = 1 \\ y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - x = 1 \\ y = \mathbb{R} \end{cases}$
D'où le resultat.

c) Vrai.

Car (D) est dirigée par $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V}$ est normal au plan donné.

d) Faux.

EXERCICE

1. a) On a : $(CE) \perp (AB)$ et $(CE) \perp (AC)$
On a : $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}, \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AE} = 0$. D'où le resultat.

b) Soit M un point de l'espace.
$(\mathcal{P})$ est le plan tels que $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AM} = 0$
$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AM} = 0 \Rightarrow 2x + y - z - 3 = 0$
Donc $(\mathcal{P}) : 2x + y - z - 3 = 0$

c) On a : $d(E, \mathcal{P}) = \dfrac{|2x_E + y_E - z_E - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

2. Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un point de l'espace d'abscisse t dans le repère (A, E)
de la droite (AE), on a :
$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AE} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 3t \\ y = -t \\ z + 1 = -t \end{cases}, \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -t \\ z + 1 = -t \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

3. a) $(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$

$\Rightarrow \forall M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{D}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2+t \\ -1+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{W} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $(\mathcal{D})$ est contenu dans $(\mathcal{P})$ si deux points de $(\mathcal{D})$ appartiennent à $(\mathcal{P})$.

$(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$, pour $t = 1$ on : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$

Soit $K = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

K et J appartiennent à $\mathcal{D}$.

On vérifie facilement que $K, J \in \mathcal{P}$

D'où $\mathcal{D}$ est condensée dans $\mathcal{P}$.

4. a) Soit M un point de $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{EM} . \overrightarrow{r} = 0$

On a : $\begin{pmatrix} 0-4 \\ 2+t+1 \\ -1+t+2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow t = -2$

Donc $M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $d(E, D) = ||\overrightarrow{EM}|| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-1)^2}$

$d(E, D) = 3\sqrt{2}$ ($\overrightarrow{EM}$ orthogonal à $\overrightarrow{r}$)

SESSION 2 (Voir examen corrigé algèbre bilinéaire 2016-2017)

Scanné avec CamScanner

position de correction Algèbre bilinéaire : 2019-2020

xercice

1) Vrai

ification

et $A \in E$,

$q(\lambda A) = tr(\lambda^2 A^2) = \lambda^2 tr(A^2) = \lambda^2 q(A)$

nséquent, q est une forme quadratique.

2) Vrai

ification

$\frac{1}{2}[q(A+B) - q(A) - q(B)]$

$\frac{1}{2}[tr(A^2 + 2AB + B^2) - tr(A^2) - tr(B^2)]$

$\frac{1}{2}[tr(A^2) + 2tr(AB) + tr(B^2) - tr(A^2) - tr(B^2)]$

$= \frac{1}{2}[2tr(AB)] = tr(AB)$ (*)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix}$

$tr(AB) = aa' + bc' + cb' + dd'$

$= a'a + b'c + c'b + d'd$

$AB) = tr(BA)$ (#)

et de (#), on en déduit que :

$tr) = tr(AB) = tr(BA)$.

3) Vrai

ification

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$= tr(A^2)$ alors :

$A \times A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} bc & ab + bd \\ a + dc & cb + d^2 \end{bmatrix}$

$tr(A^2) = a^2 + bc + cb + d^2$

$= a^2 + 2cb + d^2$

$(A) = a^2 + 2cb + d^2$

4) Vrai

Justification

On a : $q(A) = a^2 + 2cb + d^2$

Or : $bc = \frac{1}{4}[(b+c)^2 - (b-c)^2]$

$\Rightarrow 2bc = \frac{1}{2}(b+c)^2 - \frac{1}{2}(b-c)^2$

$d'où : q(A) = a^2 + \frac{1}{2}(b+c)^2 - \frac{1}{2}(b-c)^2 + d^2.$

5) Vrai

Justification

On a : $sign(q) = (r,s)$ où

$\begin{cases} r: le\ nombre\ de\ terme\ positif \\ s: le\ nombre\ de\ terme\ négatif \end{cases}$

Alors $sign(q) = (3,1)$

6) Vrai

$\forall A \in E, A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{bmatrix}$ (1)

On a : $tr(A)A = (a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ca + dc & ad + d^2 \end{bmatrix}$ et

$\det AI_2 = (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det AI_2 = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}$

D'où :

$tr(A)A - \det AI_2 = \begin{bmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ca + dc & ad + d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}$

(2)

De (1) et (2), on déduit que :

$$A^2 = tr(A)A - (detA)I_2.$$

7) Vrai

Justification

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$Tr(A) = 0 \Leftrightarrow a + d = 0 \Leftrightarrow a = -d$

Prenons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

Alors $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix}$

$q(A) = tr(A^2) = 2a^2 + 2bc$ or :

$\det(A) = -a^2 - bc \Rightarrow -2detA = 2a^2 + 2bc$ d'où

$q(A) = -2\det(A)$

Scanné avec CamScanner

8) **Vrai**

Justification

On a : $q(A) = 2a^2 + 2bc$ or :

$$bc = \frac{1}{4}[(b+c)^2 - (b-c)^2]$$

$$\Rightarrow q(A) = 2a^2 + \frac{1}{2}(b+c)^2 - \frac{1}{2}(b-c)^2$$

$d'ou\ sign(q|F) = (2,1)$

9) **Vrai**

Justification

Soit b' la forme polaire de $q|F$.

Alors $b'(A,B) = tr(AB) = tr(BA)$

Avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix}$

D'après 2).

$b'(A,B) = 2aa' + bc' + cb'$

Posons $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

La base $\{E_1, E_2, E_3\}$ est orthogonale si

$b'(E_1, E_2) = 0$, $b'(E_1, E_3) = 0$ et
$b'(E_2, E_3) = 0$

On vérifie ça aisément.

10) Vrai

Justification

Par définition :

$$dimF + dimF^{\perp} = dimE + dimKer(F \cap F^{\perp})$$

Si q est non dégénérée alors :

$$Ker(F \cap F^{\perp}) \Rightarrow dimKer(F \cap F^{\perp}) = 0$$

D'où $dimF + dimF^{\perp} = dimE$

11) Vrai

Justification

(Voir cours)

Scanné avec CamScanner

Proposition de correction

EXAMEN ALGEBRE BILINEAIRE

L2.Session 1_2021-2022

Correction de l'exo

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et f une forme bilinéaire sur E dont la matrice par rapport à β est

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1) Calculons $f(x,y)$, $f(x,x)$, $f(y,y)$ dans les deux cas suivants :

a) $x = e_1 + e_2 - 2e_3$ et $y = e_1 - e_2 + 2e_3$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} ; y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$$

$$f(x,x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -20$$

$$f(y,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -4$$

b) $x = e_1 - 2e_2$ et $y = e_2 - 7e_3$.

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} ; y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} = 9$$

$$f(x,x) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -37$$

$$f(y,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} = -21$$

2) La forme quadratique associe à f avec $x = (x_1, x_2, x_3)$ est :

Scanné avec CamScanner

$$q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$q(x) = x_2(2x_1 - 7x_2 + x_3) + x_3(3x_1 + x_2) + x_1(2x_2 - x_1 + 3x_3)$$

$$q(x) = -x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_3x_1 - 7x_2^2 + 2x_3x_2$$

La décomposition en carré de Gauss de q esr :

$$q(x) = -(x_1 - 2x_2 - 3x_3)^2 - 3\left(x_2 - \frac{7}{3}x_3\right)^2 + \frac{76}{3}x_3^2$$

Soit β' la nouvelle base de E, par rapport à laquelle la matrice de f est la matrice $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{91}{3} \end{pmatrix}$.

Avec $x = (x_1', x_2', x_3')$ dans β', ainsi

$q(x) = -(x_1')^2 - 3(x_2')^2 - \frac{76}{3}(x_3')^2$ dans la base β' et

$q(x) = -(x_1 - 2x_2 - 3x_3)^2 - 3\left(x_2 - \frac{7}{3}x_3\right)^2 + \frac{76}{3}x_3^2$ dans β.

par identification on a : $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_2' = x_2 - \frac{7}{3}x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' + 2x_2' + \frac{23}{3}x_3' \\ x_2 = x_2' + \frac{7}{3}x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$$

alors

$$P = P_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{23}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow ({}^tP) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{23}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

et ainsi $\beta' = \left\{(1,0,0)\ ;\ (2,1,0)\ ;\ \left(\frac{23}{3}, \frac{7}{3}, 1\right)\right\}$ dans la base β

et le calcul de :

$$D = ({}^tP)MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{23}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{23}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{76}{3} \end{pmatrix}.$$

Commentaire

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P_M(X) = -X^3 - 8X^2 + 7X + 76$$

et $P_M(-1) = -(-1)^3 - 8(-1)^2 + 7(-1) + 76 = 62 \neq 0$, donc les éléments diagonaux de D, ne sont pas les valeurs propres de M.

D'ailleurs les valeurs propres de M qui ne sont pas facilement

Scanné avec CamScanner

déterminables analytiquement.

Une autre méthode pour répondre à la question 2,
au moyen des opérations élémentaires sur les matrices

$$\left[\frac{I_3}{M}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ L_1 \\ L_2+2L_1 \\ L_3+3L_1 \end{array} \simeq \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 7 & 9 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ccc} C_1 & C_2+2C_1 & C_3+3C_1 \end{array}$$

$$\simeq \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 7 & 9 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 76 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ L_2 \\ 3L_3+7L_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} C_2 & 3C_3+7C_2 & -\frac{1}{3}C_3 \end{array}$$

$$\simeq \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 76 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \frac{23}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{76}{3} \end{array}\right] = \left[\frac{P}{D}\right]$$

Ainsi

$$\beta' = P = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \frac{23}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow {}^tP = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{23}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{array}\right]$$

et alors $\beta' = \left\{(1,0,0) : (2,1,0) : \left(\frac{23}{3}, \frac{7}{3}, 1\right)\right\}$ dans la base β

Aussi, évaluons ${}^tPMP$

$${}^tPMP = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{23}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \frac{23}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$${}^tPMP = \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{76}{3} \end{array}\right] = D$$

Scanné avec CamScanner

EXAMEN DE SUITES ET SERIES
DUREE: 2H 2018-2019 SESSION 1

Exercice 1

Soit la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} tg\frac{1}{2^n}$

1) Démontrer qu'elle est convergente. On désigne par S sa somme.

2) a) Démontrer que $cotgx - 2cotg2x = tgx, \quad x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

b) En déduire un calcul de S.

Exercice 2

a) Etudier la nature et la somme des séries de terme général:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \; ; v_n = (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

b) Soit la série de terme général:

$$u_n = Ln(n) + aLn(n+2) + bLn(n+3) \; , n \geq 1.$$

Trouver les valeurs de a et b pour lesquelles la série $\sum u_n$ converge et, dans ce cas, calculer sa somme.

c) Soit S_n la somme des n premiers termes de la série $\sum_1^\infty u_n \;\; (u_n > 0)$.

Montrer que l'on a:

$$\sum_1^\infty \frac{u_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \begin{cases} u_1^{-1} & \text{si } \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty \\ u_1^{-1} - S^{-1} & \text{si } \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S. \end{cases}$$

En déduire la somme des séries suivantes:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

Exercice 3

1) Développer en série entière la fonction $f(x) = \frac{1}{2+x}$ au voisinage de $x = 0$.

2) Montrer que si p est un entier ≥ 0, on a:

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{2^n(n+p+1)}$$

3) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 4

Soit f la fonction paire, de période 2π, égale à $f(x) = (\pi - x)^2$ pour $0 \leq x \leq \pi$

1) Calculer les coefficients de Fourrier de f.

2) Montrer que la série de Fourrier de f est convergente de somme $f(x)$.

En déduire que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Scanné avec CamScanner

EXAMEN SUITES ET SÉRIES
DUREE: 2h

Exercice 1

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \dots$ où $x \in [0, \dots]$

a) Etudier la convergence simple, absolue, uniforme de cette série. Soit $f(x)$ sa somme.

b) Montrer que f est continue pour $x \geq 0$ et dérivable pour $x > 0$.

Exercice 2

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \dots$

a) Etudier la convergence simple et calculer sa somme $S(x)$.

b) Etudier la convergence uniforme et la convergence normale sur $[0, a]$ où a est un réel $0 < a < 1$.

Exercice 3

1) Développer en série entière la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ au voisinage de $x = 0$.

2) Montrer que si n est un entier ≥ 0, on a :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2+x}\,dx = \frac{1}{n+1} \sum \dots$$

3) En déduire la somme de la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{2^n (n+1)}$$

Exercice 4

a) Soit f une fonction continue positive et croissante sur $[0, +\infty[$.

Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

b) En déduire que pour $n \geq \dots$ on a : $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq \dots$

En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \dots$

Exercice 5

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique définie par $f(x) = \dots$ pour $x \in \dots$

Scanné avec CamScanner

1) Tracer sommairement le graphe de f.

2) Montrer sans calcul que la série de Fourier de f converge vers f sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer le développement en série de Fourier de f: la convergence de la série de Fourier de $f$est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

4) En calculant $f(\pi) - f(0)$, en déduire la somme de la série $\Sigma_{p\geq 0} \frac{1}{2p^2+2p+1}$.

Scanné avec CamScanner

EXAMEN SUITES ET SERIES
DUREE: 2H

Exercice 1

a) Soit f une fonction, positive et croissante sur $[0, +\infty[$.
Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a:

$$\int_0^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx.$$

b) Trouver un équivalent pour $n \to +\infty$ de $S_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}$.
En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{S_n}$.

Exercice 2

On considère la série de fonctions de terme général:
$u_n(z) = \dfrac{z}{(nz+1)\left[(n-1)z+1\right]}$, $z \in \mathbb{C}$ et $n \geq 1$.
a) Etudier la convergence simple et calculer sa somme $S(z)$.
b) Etudier la convergence uniforme et la convergence normale sur $\mathbb{C}$ puis sur l'ensemble $D = \{z \in \mathbb{C}/Rez > 0\}$.

Exercice 3

On considère la série de fonction de terme général $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}$, $x \in \mathbb{R}^+$.
1) Montrer que la somme de cette série est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer que $\forall a > 0$, la somme de cette série est dérivable sur $[a, +\infty[$.
3) La somme de cette série est-elle dérivable au point $x = 0$?

Exercice 4

1) Développer en série entière la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ au voisinage de $x = 0$.
2) Montrer que si p est un entier ≥ 0, on a:

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{2^n(n+p+1)}$$

3) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 5

Soit f la fonction paire, de période 2π, égale à $f(x) = (\pi - x)^2$ pour $0 \leq x \leq \pi$

1) Calculer les coefficients de Fourrier de f.

2) Montrer que la série de Fourrier de f est convergente de somme $f(x)$.

En déduire que: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Scanné avec CamScanner

EXAMEN SUITES ET SERIES
DUREE: 2H30 SESSION 1 2021-2022

Exercice 1

Soit la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} tg \frac{1}{2^n}$

1) Démontrer qu'elle est convergente. On désigne par S sa somme.

2) a) Démontrer que $cotgx - 2cotg2x = tgx, \quad x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

b) En déduire un calcul de S.

Exercice 2

a) Etudier la nature et la somme des séries de terme général:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \; ; \; v_n = (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

b) Soit la série de terme général:

$$u_n = Ln(n) + aLn(n+2) + bLn(n+3) \; , \; n \geq 1.$$

Trouver les valeurs de a et b pour lesquelles la série $\sum u_n$ converge et, dans ce cas, calculer sa

c) Soit S_n la somme des n premiers termes de la série $\sum_1^\infty u_n \quad (u_n > 0)$.

Montrer que l'on a:

$$\sum_1^\infty \frac{u_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \begin{cases} u_1^{-1} & \text{si } \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty \\ u_1^{-1} - S^{-1} & \text{si } \lim_{n\to+\infty} S_n = S. \end{cases}$$

En déduire la somme des séries suivantes:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{2n+1}{n^2(n-1)^2}.$$

Exercice 3

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}^+$.

1)Montrer que la somme de cette série est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2)Montrer que $\forall a > 0$, la somme de cette série est dérivable sur $[a, +\infty[$.

3)La somme de cette série est-elle dérivable au point $x = 0$?

Exercice 4

1) Développer en série entière la fonction $f(x) = \frac{1}{2+x}$ au voisinage de $x = 0$.

2) Montrer que si p est un entier ≥ 0, on a:

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x} dx = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{2^n(n+p+1)}$$

Scanné avec CamScanner

3) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}$$

Exercice 5

Soit f la fonction paire, de période 2π, égale à $f(x) = (\pi - x)^2$ pour $0 \leq x \leq \pi$

1) Calculer les coefficients de Fourrier de f.

2) Montrer que la série de Fourrier de f est convergente de somme $f(x)$.
En déduire que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Scanné avec CamScanner

Examen SUITES ET SERIES
DUREE: 2H
SESSION 2 2021-2022

Exercice 1

a) Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[0, +\infty[$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a:

$$\int_0^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx.$$

b) Trouver un équivalent pour $n \to +\infty$ de $S_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}$.

En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{S_n}$.

Exercice 2

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(z) = \frac{z}{(nz+1)[(n-1)z+1]}$, $z \in \mathbb{C}$ et $n \geq 1$.

a) Etudier la convergence simple et calculer sa somme $S(z)$.

b) Etudier la convergence uniforme et la convergence normale sur $\mathbb{C}$ puis sur l'ensemble $D = \{z \in \mathbb{C} / R$ [illegible]

Exercice 3

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

1) Montrer que la somme de cette série est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer que $\forall a > 0$, la somme de cette série est dérivable sur $[a, +\infty[$.
3) La somme de cette série est-elle dérivable au point $x = 0$?

Exercice 4

1) Développer en série entière la fonction $f(x) = \frac{1}{2+x}$ au voisinage de $x = 0$.

2) Montrer que si p est un entier ≥ 0, on a:

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{2^n(n+p+1)}$$

3) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)}$$

Exercice 5

Soit f la fonction paire, de période 2π, égale à $f(x) = (\pi - x)^2$ pour $0 \leq x \leq \pi$.

1) Calculer les coefficients de Fourier de f.

2) Montrer que la série de Fourier de f est convergente de somme $f(x)$.

En déduire que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Scanné avec CamScanner

UFR :MI

2018-2019

CORRECTION SUITE ET SERIE SESSION 1

EXERCICE 1

Soit la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \tan \frac{1}{2^n}$

1. Convergence

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}. \tan x \underset{+\infty}{\sim} x$ d'où $\tan \frac{1}{2^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{2^n} \tan \frac{1}{2^n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{2^n} \tan \frac{1}{2^n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Comme la série $\sum_0 \left(\frac{1}{4}\right)^n$ est une série géométrie convergente alors par équivalence la série $\sum_1 \frac{1}{2^n} \tan \frac{1}{2^n}$ converge normalement donc converge.

2. a) Démontrons que $cotgx - 2cotg2x = \tan x, x \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

Notons d'abord que : $\begin{cases} cotgx = \frac{1}{\tan x} \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x \end{cases}$

Développons :

On a : $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, cotgx - 2cotg2x = \frac{1}{\tan x} - 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$

$$\begin{aligned} cotgx - 2cotg2x &= \frac{1}{\tan x} - 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} \\ &= \frac{1}{\tan x} + \left(-\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x}\right) \\ &= \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\tan x} + \tan x \end{aligned}$$

$cotgx - 2cotg2x = \tan x$

b) La somme S

Scanné avec CamScanner

On a : $S = \lim\limits_{+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan \frac{1}{2^k}$

Or d'après précédent $\tan(\frac{1}{2^k}) = cot(\frac{1}{2^k}) - 2cot(\frac{1}{2^{k-1}})$

$\Rightarrow S = \lim\limits_{+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cot \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}} \cot \frac{1}{2^{k-1}} \right)$

Posons $U_n = \frac{1}{2^n} \cot \frac{1}{2^n}$. Cette série est convergente et

$S = \lim\limits_{+\infty} \sum\limits_{1}^{n} U_k - U_{k-1} = \lim\limits_{+\infty} \left(-\sum\limits_{1}^{n} U_{k-1} - U_k \right)$

D'où par la formule des séries télescopiques.

Donc $S = \lim\limits_{+\infty} -(U_1 - U_n)$

$$S = -\frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} + \lim_{+\infty} \frac{1}{2^n} \cot \frac{1}{2^n}$$

$$S = 1 - \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2}$$

EXERCICE 2

Soit la série de fonction de terme général $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}, x \in \mathbb{R}^+$

1. Continuité de $\sum\limits_{0} u_n(x)$

   Considérons les applications u_n définie par $u_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$.

   $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x \in \mathbb{R}^+$

   On a bien les u_n continue.

   Comme $\left| \frac{e^{-nx}}{n^2+1} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_{0} \frac{1}{n^2}$ converge.

   Alors $\sum\limits_{0} u_n(x)$ converge normalement donc uniformement.

   Ainsi $\sum\limits_{0} u_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

2. Dérivabilité sur $[a, +\infty[$, a positive.

   On a l'application $x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$ est dérivable sur $[a, +\infty[, a > 0$.

   Et $\forall x \in [a, +\infty[, u'_n(x) = -\frac{ne^{-nx}}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}$

   On a : $|u'_n(x)| = \frac{ne^{nx}}{n^2+1}$

   $\forall x \in [a, +\infty[$, on a : $e^{-nx} \leq e^{-na}$

Scanné avec CamScanner

$|u'_n(x)| \leq \dfrac{e^{-na}}{n}$

On a : $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{n^2 e^{-na}}{n} = \lim\limits_{+\infty} n e^{-na} = 0$

D'où $\dfrac{e^{-na}}{n} = 0(\frac{1}{n^2})$

Comme $\sum\limits_0 \frac{1}{n^2}$ converge alors $\sum\limits_0 u'_n(x)$ converge absolument donc uniformement.

Conclusion : $\sum\limits_0 u_n(x)$ est dérivable.

EXERCICE 3

1. Développement en série de fonction.

   On a : $f(x) = \dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{2(1+\frac{x}{2})} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}}$

   $\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_0^{+\infty}(-1)^n(\frac{x}{2})^n$

2. Montrons que $\forall p \in \mathbb{N}, \int_0^1 \dfrac{x^p}{2+x}dx = \dfrac{1}{2}\sum\limits_0 (-1)^n \dfrac{1}{2^n(n+p+1)}$

   D'après précédent :

   $\dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_0^{+\infty}(-1)^n \dfrac{x^n}{2^n}$

   $\Rightarrow \dfrac{x^p}{2+x} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_0^{+\infty}(-1)^n \dfrac{x^{n+p}}{2^n}$ (Multiplier de par et d'autre par x^p)

   $\dfrac{x^p}{2+x} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_0 (-1)^n \dfrac{x^{n+p}}{2^n}$

   $$(*)\begin{cases} \int_0^1 \dfrac{x^p}{2+x}dx &= \dfrac{1}{2}\int_0^1 \sum\limits_0 (-1)^n \dfrac{x^{n+p}}{2^n}dx \\ &= \dfrac{1}{2}\sum\limits_0 \dfrac{(-1)^n}{2^n}\int_0^1 x^{n+p}dx \end{cases}$$

   $$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_0 \frac{(-1)^n}{2^n}\left[\frac{x^{n+p+1}}{n+p+1}\right]_0^1$$

Scanné avec CamScanner

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_0 \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1}{(n+p+1)} \quad (*)$$

$(*)$ est possible car il s'agit d'une série alternée qui converge.

3. En déduire $\sum_0 \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)}$

Pour $p=3$ $(*)$ devient :

$$\int_0^1 \frac{x^3}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_0 \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)}$$

$$\Rightarrow \sum_0 \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)} = 2\int_0^1 \frac{x^3}{2+x}dx$$

Une division eucludienne nouspermet de voir que :

$$\frac{x^3}{2+x} = x^3 - 2x + 4 - \frac{1}{2+x}$$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{2+x}dx = 8(\frac{2}{3} - \ln 3 + \ln 2)$$

D'où $\sum_0 \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)} = 16\left(\frac{2}{3} - \ln 3 + \ln 2\right)$

$$= 16\left(\frac{2}{3} + \ln\frac{2}{3}\right)$$

EXERCICE 4

Soit f la fonction paire définie par :

$$f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = (\pi - x)^2 = (x-\pi)^2$$

1. Les coefficients de Fourier de f.

f paire $\Rightarrow b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

On a : $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2\cos(nx)dx$$

Intégrons deux fois par partie a_n.

Première int'egration par partie : $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2\cos(nx)dx$

Posons $u' = \cos nx \ \Rightarrow u = \frac{1}{n}\sin nx$

$$v = (x-\pi)^2 \Rightarrow v' = 2(x-\pi)$$

Scanné avec CamScanner

Université FHB - Cocody Année Universitaire 2018-2019
UFR Mathématique-Informatique

LICENCE 2
Suites et séries
Examen Seconde Session

Exercice 1 (4 points)

1) Posons $u_n = \frac{1}{2^n} tg \frac{1}{2^n}$

On a : $u_n \approx \left(\frac{1}{4}\right)^n$ quand $n \to \infty$ or $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ est une série convergente, donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge **(1 points)**

2) a) $cotg\ x - 2cotg\ 2x = \frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\tan 2x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos^2 - \sin^2}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x}$

$cotg\ x - 2cotg\ 2x = \tan x$ **(1 points)**

b) Posons $u_n = \frac{1}{2^n} tg \frac{1}{2^n}$ et $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

En utilisant a) on obtient : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} v_k - v_{k-1} = -v_2 + v_n$ avec $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n cot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a : $S = \lim_{n\to\infty} S_n = -v_1 + 1$ car $tg\left(\frac{1}{2}\right)^n \sim \left(\frac{1}{2}\right)^n$ en $\infty \Longrightarrow cot\left(\frac{1}{2}\right)^n \sim \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$$\Rightarrow S = 1 - \frac{1}{2}\cot\left(\frac{1}{2}\right)$$

a) On a : $u_n \approx \frac{1}{n^2}$ si $n \to \infty$ or $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge

En utilisant la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

on a : $S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ Par itération

$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

On a : $\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$, d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} v_k = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ qui tend vers 1 quand $n \to \infty$

Scanné avec CamScanner

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ converge et on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)} = 1$

(2 points)

b) On a : $u_n = (a+b+1)\ln(n) + a\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + b\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)$

$u_n = (a+b+1)\ln(n) + (2a+3b)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ si $n \to \infty$

$\sum u_n$ converge si et seulement si $\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$

Or si $u_n = \ln(n) - 3\ln(n+2) + 2\ln(n+3)$,

on a : $S_n = \ln 2 - 2\ln 3 + \ln\frac{(n+3)^2}{(n+1)(n+2)}$ qui tend vers $\ln\frac{2}{9}$ quand $n \to \infty$

(2 points)

c) On a : $\frac{u_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}$ d'où $\sum_{k=1}^{n} \frac{u_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{n+1}}$ d'où quand $n \to \infty$, on obtient les égalités cherchées.

Soit la série $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Prenons $u_n = n$, on a : $S_n = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ d'où $\frac{u_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$,

on a alors : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}u_1^{-1} = \frac{1}{4}$

Pour la deuxième série, prenons $u_n = 2n-1$, on a : $S_n = 1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$,

d'où $\frac{u_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = u_1^{-1} = 1$

(4 points)

Exercice 3 (4 points)

1) $\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^n}{2^n}$ si $|x| < 2$ **(1 points)**

2) Pour p un entier ≥ 0, on écrit :

$\frac{x^p}{2+x} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n}x^{n+p}$ si $|x| < 2$.

La série est normalement convergente sur l'intervalle $[0,1]$, donc par une intégration terme à terme, on obtient :

$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n}\int_0^1 x^{n+p}dx.$

Scanné avec CamScanner

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n(n+p+1)}.$$

(2 points)

3) Prenons $p=3$, alors : $\int_0^1 \frac{x^3}{2+x}dx = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1}{n+4}$

or $\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}dx = \int_0^1 \frac{(x^3+8)-8}{2+x}dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8\ln(2+x)\right]_0^1$

On obtient donc que :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1}{n+4} = 2\left[\frac{10}{3} - 8\ln\frac{3}{2}\right]$$

(1 points)

Exercice 4 (4 points)

1) f étant paire, on a : $b_n = 0\ \forall n \geq 0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}\textbf{(0.5 points)}$$

$\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)^2\cos nx dx = \frac{4}{n^2}$**(1 points)**

2) f est continue et dérivable sauf aux points $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ où elle admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

La théorème de Dirichlet montre que la série de Fourier de f est convergente et que sa somme est $f(x)$: **(1.5 points)**

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Pour $x = 0$, on a : $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ d'où $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$**(1 points)**

Scanné avec CamScanner

EXAMEN D'INTEGRALES GENERALISEES
DUREE: 02H

2018-2019 SESSION 2

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales suivantes:

- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$
- $\int_1^{3} \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} dx$
- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx$
- $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x\sqrt{x}} dx$
- $\int_1^{+\infty} x^x dx$
- $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)} dx$

Exercice 2

1) Démontrer que: $\forall X \in [1, +\infty[, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$2n\pi > n\pi > X$ et $|\int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx| \geq \frac{1}{4}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$

2) Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx, \quad 0 < \alpha \leq 1$?

3) Démontrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente.

4) Montrer que les deux fonctions définies sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = f(x) + \frac{\sin^2 x}{x}$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.

5) Les intégrales $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ sont-elles de même nature? conclusion?

Exercice 3

1) Soit la fonction **réelle définie** par:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

2) Déterminer l'ensemble de définition de Γ

3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Scanné avec CamScanner

3- En déduire en fonction de n l'expression de [illegible]

4- En admettant que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,
Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$.

VALIDE

Scanné avec CamScanner

EXAMEN D'INTEGRALES GENERALISEES session 2019-2020
DUREE: 02H

Exercice 1

Soit f une fonction dérivable, continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

1. Etudier la convergence de l'intégrale impropre

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}dx, \quad n > 0$$

2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ et que $\lim_{n\to+\infty} nI_n = f(0)$

Exercice 2

1. Soit l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
   a) Pour quelles valeurs réelles de x, $\Gamma(x)$ est-elle convergente?
   b) Evaluer $\Gamma(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

   On admettra l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. Application: Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 x^m(\ln x)^n dx$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $m > -1$.

Exercice 3

a) Etudier la nature des intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx,$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{Arctgx}{x}dx,$$

$$I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$I_4 = \int_{-1}^{1} \frac{e^{x^2}}{x\sqrt{|x|}}dx.$$

b) Soit $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x+3}dx$

Vérifier que cette intégrale est divergente. Trouver une fonction g sur $[1,+\infty[$ telle que

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{x^3+1}}{x+3} - g(x)\right)dx \text{ soit convergente.}$$

BONNE CHANCE

EXAMEN D'INTEGRALES GENERALISEES
DUREE: 2H

Exercice 1

Soit f une fonction définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

1) Etudier la convergence de l'intégrale impropre.

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}\,dx,\ n > 0$$

2) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ et que $\lim_{n\to+\infty} nI_n = f(0)$

Exercice 2

1) Soit l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

a) Pour quelles valeurs réelles de x, $\Gamma(x)$ est-elle convergente?

b) Evaluer $\Gamma(n), n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(\frac{1}{2})$.

On admettra l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2) Application: Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 x^m(\ln x)^n\,dx$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $m > -1$.

Exercice 3

a) Indiquer pour quelles valeurs du paramètre réel a l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-ax}\sqrt{1+x}}{x^2}\,dx$ converge.

b) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ est convergente et qu'elle est nulle.

c) Etudier la nature des intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx,$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}dx,$$

$$I_3 = \int_1^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}dx,$$

$$I_4 = \int_{-1}^1 \frac{e^{\arctan x}}{x\sqrt{|x|}}dx.$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 4

a) Soit $\int_1^{+\infty} \frac{x^1+1}{x+3}\,dx$

Vérifier que cette intégrale est divergente. Trouver une solution g sur $[1,+\infty[$ telle que:

$\int_1^{+\infty} [\frac{x^1+1}{x+3} - g(x)]\,dx$ soit convergente.

b) Soient f et g deux fonctions réelles localement intégrables sur $[a,+\infty[$ Si f est décroissante et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et s'il existe une constante M telle que $|\int_a^x g(t)\,dt| \leq M, \forall x \geq a$, alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,g(t)dt$ est convergente.

Montrer ce résultat dans l'hypothèse supplémentaire très souvent réalisée en pratique, que f et g soient de classe C^1.

BONNE CHANCE

Scanné avec CamScanner

EXAMEN D'INTEGRALES GENERALISEES
DUREE: 2H

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales suivantes:

a- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$

b- $\int_1^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} dx$

c- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}$

d- $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x\sqrt{x}} dx$

e- $\int_1^{+\infty} x^r dx$

f- $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)} dx$

Exercice 2

1) Démontrer que $\forall X \in [1, +\infty[$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$2n\pi > n\pi > X \text{ et } \left| \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \right| \geq \frac{1}{4}.\ 0 < \alpha \leq 1.$$

Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx,\ 0 < \alpha \leq 1.$

2) Démontrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente.

3) Vérifier que les deux fonctions définies sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = f(x) + \frac{sin^2 x}{x}$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Les intégrales $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ sont-elles de même nature? conclusion?

Exercice 3

a) Etudier la nature des intégrales suivantes:

$$\int_1^{+\infty} (e^{-\frac{1}{t}} - \cos\frac{1}{t})\frac{dt}{t},\ \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt;\ \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$$

b) Soit $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} dx$

Scanné avec CamScanner

EXAMEN D'INTEGRALES GENERALISEES
DUREE: 01H

SESSION 1 2021-2022

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales suivantes:

a- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$

b- $\int_1^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} dx$

c- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx$

d- $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x\sqrt{x}} dx$

e- $\int_1^{+\infty} x^x dx$

f- $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)} dx$

Exercice 2

1) Démontrer que: $\forall X \in [1,+\infty[, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$2n\pi > n\pi > X$ et $|\int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx| \geq \frac{1}{4}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$

Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx, \quad 0 < \alpha \leq 1$?

2) Démontrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente.

3) Vérifier que les deux fonctions définies sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = f(x) + \frac{\sin^2 x}{x}$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Les intégrales $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ sont-elles de même nature? conclusion?

Exercice 3

a) Etudier la nature des intégrales suivantes:

$$\int_1^{+\infty} (e^{-\frac{1}{t}} - cos\frac{1}{t})\frac{dt}{t}; \int_1^{+\infty} \frac{e^{sint}}{t} dt; \int_1^{+\infty} \frac{Arctgx}{x} dx$$

b) Soit $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} dx$

Vérifier que cette intégrale est divergente. Trouver une fonction g sur $[1,+\infty[$ telle que $\int_1^{+\infty} [\frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} - g(x)]dx$ soit convergente.

BONNE CHANCE

Scanné avec CamScanner

Université FHB - Cocody Année Universitaire 2018-2019
UFR Mathématique-Informatique

LICENCE 2
EXAMEN D'INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES
Examen Seconde Session

Exercice 1 : Étude d'intégrales

a- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$

Posons $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$
f est définie et continue sur $]0, +\infty[$

Au voisinage de 0 (0.5 points)

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
Pas de problème de convergence en 0, car f peut être prolongée par continuité en $x = 0$

Au voisinage de l'infini (0.5 points)

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est positive, décroissante et tend vers 0 quand $x \to +\infty$
De plus on a : $\left|\int_1^A \sin x dx\right| = |\cos 1 - \cos A| \leq 2 \; \forall A > 1.$

Donc d'après Abel, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente

En définitive, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente

b- $\int_1^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} dx$

Posons $f(x) = \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$
f est définie et continue sur $[1, 3[$
$f(x) \approx_3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{10}}$
$\int_1^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{10}} dx$ est une intégrale divergente.

donc l'intégrale $\int_1^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} dx$ diverge

(1 points)

c- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx$

Scanné avec CamScanner

Posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}$

f est définie et continue sur $]1,+\infty[$

Au voisinage de l'infini (0.5 points)

$f(x) \approx_{+\infty} \frac{1}{x^2}$ or $\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ est convergente $\forall c > 1$, donc $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ est convergente $\forall c > 1$

Au voisinage de 1 (0.5 points)

$f(x) \approx_1 \frac{1}{2(x-1)^{\frac{1}{2}}}$ or $\int_1^c \frac{dx}{2(x-1)^{\frac{1}{2}}}$ est une intégrale convergente $\forall c > 1$, donc $\int_1^c \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ est une intégrale convergente

d- $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x\sqrt{x}}dx$

Posons $f(x) = \frac{\cos(x)}{1+x\sqrt{x}}$

f est définie et continue sur $[0,+\infty[$

Au voisinage de l'infini (1.5 points)

$|f(x)| = \left|\frac{\cos(x)}{1+x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{1+x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

or $\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ est convergente $\forall c > 0$, donc $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x\sqrt{x}}dx$ est convergente

e- $\int_1^{+\infty} x^x dx$

Posons $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$

f est définie et continue sur $[1,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{x\ln x}dx$ diverge.

(0.5 points)

f- $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(1+x)}dx$

Posons $f(x) = \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(1+x)}$

f est définie et continue sur $]0,+\infty[$

Au voisinage de l'infini (0.5 points)

$f(x) \approx_{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\ln x}$

or $\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\ln x}dx$ est une intégrale divergente, donc $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ est une intégrale divergente $\forall c > 0$

Au voisinage de 0 (0.5 points)

Scanné avec CamScanner

$f(x) \approx_0 \dfrac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{x}$

or $\left|\dfrac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

et $\displaystyle\int_0^c \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} dx$ est une intégrale convergente $\forall c > 0$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(1+x)} dx$ est une intégrale divergente .

Scanné avec CamScanner

Exercice 2 : 7 points

1) $\forall X \in [1,+\infty[, \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $2n\pi > 2n > X$ et

$\left|\int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx\right| \geq \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \geq \frac{1}{2n\pi} \int_{n\pi}^{2n\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{4}$. **(1 points)**

Le **critère de Cauchy** n'est pas satisfait (pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$).

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ diverge pour $0 < \alpha \leq 1$ **(2 points)**

2) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge par **Abel**.

$\forall x \in [1,+\infty[, \left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x}$, d'après 1) on a :

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ diverge, il s'en suit que :

$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ diverge.

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente.

(2 points)

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) = 1$

Donc f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ converge par Abel, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ est divergente d'après 1)

Donc $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x}\right) dx$ est divergente. **(1 points)**

Conclusion : $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} g(x)$ ne sont pas de même nature bien que l'on ait $f \approx_{+\infty} g$ (car f et g ne gardent pas un signe constant au voisinage de $+\infty$) **(1 points)**

Exercice 3 : 7 points

a) * La fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ est continue pour $1 \leq t \leq +\infty$

Un développement limité montre que la fonction est équivalente à $-t^2$ si $t \to +\infty$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge **(2 points)**

* Comme $-1 \leq \sin t \leq 1$, $\frac{e^{-1}}{t} \leq \frac{e^{\sin t}}{t} \leq \frac{e}{t}$

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$ diverge **(2 points)**

Scanné avec CamScanner

$^*f(x) = \frac{Arctgx}{x} \approx \frac{\pi}{2x}$ si $x \to +\infty$
$\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge **(1 points)**

b) Posons $f(x) = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3}$
On a : $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ d'où $f(x) > 1\ \forall x \leq A$ (constante A)
ce qui implique que l'intégrale est divergente.
Le développement limité de f pour $x \to +\infty$ donne $f(x) = x-3+\frac{9}{x}-\frac{27}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Il suffit de poser $g(x) = x - 3 + \frac{9}{x}, x \in [1, +\infty[$
On obtient $f(x) - g(x) \approx \frac{-27}{x^2}$ pour $x \to +\infty$
Donc $\int_1^{+\infty} [f(x) - g(x)]\, dx$ converge.

Scanné avec CamScanner

EXAMEN D'INTEGRALITES GENERALISEES

Exercice 1 (voir précédent)

Exercice 2

1- a) Soit l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$f :]0;+\infty] \to \mathbb{R}$$

$t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est positive et continue sur $]0,+\infty]$ et donc localement Intégrable sur $]0,+\infty]$.

*Etude de la convergence en 0

$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ donc f est intégrable sur $]0;1[$ si et seulement si $x > 0$ (d'après les Critère de Riemann)

*Etude en +∞

On a: $\lim_{t\longrightarrow+\infty} t^2e^{-t}t^{x-1} = 0$

C'est-à-dire $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} o(\frac{1}{t^2})$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les intégrables $\int_0^1 f(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ convergent toutes les deux pour tout $x \in]0,+\infty[$.

Par conséquent, en utilisant la relation de Charles, $\Gamma(x)$ converge si et seulement si $x \in]0,+\infty[$.

1- b) Evaluons $\Gamma(x), \forall x \in \mathbb{N}^*$.

Soit $x \in]0,+\infty[$. Soient a et A deux réels tels que $0 < a < A$.

Les fonctions $t \longmapsto t^x et\ t \longmapsto -e^{-t}\ sont$ de classe C^1 sur le segment $[a,A]$.

En effectuant une intégration par parties, on obtient :

En posant $\begin{cases} u = t^x \\ v' = -e^{-t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = xt^{x-1} \\ v = e^{-t} \end{cases}$

$$\int_a^A t^x e^{-t}dt = [-t^x e^{-t}]_a^A + x\int_a^A t^{x-1}e^{-t}dt$$

$$\int_a^A t^x e^{-t}dt = -A^x e^{-A} + a^x e^{-a} + x\int_a^A t^{x-1}e^{-t}dt$$

Puisque $x > 0$ et donc $x + 1 > 0$, quand $a \longrightarrow 0$ et $A \longrightarrow +\infty$, on obtient :

Scanné avec CamScanner

$$\Gamma(x+1) = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ a\to 0}} \int_a^A t^2 e^{-t}dt = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ a\to 0}} \left(-A^x e^{-A} + a^x e^{-a} + x\int_a^A t^{x-1}e^{-t}dt\right)$$

$$\Gamma(x+1) = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ a\to 0}} x\int_a^A t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x)$$

$$\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)$

De plus $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^t dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$,

Par récurrence, on obtient alors

$\forall n \in \mathbb{N}^*,$ $\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$

$$* \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$$

On pose $u = \sqrt{t}$ et $t = u^2$ et $dt = 2u\,du$

et on obtient:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} \times 2udu$$
$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

$$\boxed{\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}}$$

2) Application,

Calculons $I = \int_0^1 x^m (lnx)^n dx$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $m > -1$.

$Soit\ f:]0,1] \longrightarrow \mathbb{R},$

$$x \longmapsto x^m (lnx)^n$$

f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $m > -1$. Par conséquent I est bien défini.

Posons $u = lnx \Longrightarrow x = e^u, du = \frac{1}{x}dx$

$$\Longrightarrow xdu = dx \Longrightarrow e^u du = dx$$

quand $x \longrightarrow 0, u \longrightarrow -\infty$ et quand $x \longrightarrow 1, u \longrightarrow 0.$

Scanné avec CamScanner

$I = \int_0^1 x^m (lnx)^n dx = \int_{-\infty}^0 e^{mn}\ u^n e^u du$

$I = \int_{-\infty}^0 u^n\ e^{(m+1)u} du$ posons $I = In$

$I_{n+1} = \int_{-\infty}^0 u^{n+1}\ e^{(m+1)n} du$

Posons $x = u^{n+1} = 0 \implies x' = (n+1)u^n$

$v' = e^{(m+1)u} \implies v = \frac{1}{m+1} e^{(m+1)u}$

$I_{n+1} = \left[\frac{n^{n+1}}{m+1} e^{(m+1)u}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{n^{n+1}}{m+1} \int_{-\infty}^0 u^n e^{(m+1)u} du$

$I_{m+1} = -\frac{n+1}{m+1} \int_{-\infty}^0 u^n e^{(m+1)u} du$

$I_{n+1} = -\frac{n+1}{m+1} In$

On a: $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = -\frac{n+1}{m+1} I_n$

On montre par récurrence que

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, I_n = -\frac{n}{m+1} I_{n-1}$

$\forall \in \mathbb{N}^*, I_n = -\frac{1}{m+1} (u\ I_{n-1})$

On a: $I_o = \int_0^1 x^m dx = \int_{-\infty}^0 e^{(m+1)u} du = \frac{1}{m+1}$

$I_1 = -\frac{1}{m+1} I_0 = -\frac{1}{(m+1)^2}$

$I_2 = -\frac{1}{m+1} (2\ I_1)$

$I_2 = -\frac{2}{m+1} I_1 = -\left(-\frac{2}{(m+1)}\right)\left(-\frac{2}{(m+1)^u}\right)$

$I_2 = -\frac{2}{(m+1)^3}$

$I_n = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}} = (-1)^n\ \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 3

a) Etude de la nature d'intégrales :

- $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{sin\,(x)}{x} dx$

Posons $f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$$

f est continue sur $-]0;+\infty[$, donc localement intégrable sur $]0;+\infty[$.

*Etude en 0

Soit $C \in]0,+\infty[$

On a: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Alors $\int_0^c f(x)dx$ est une fausse intégrale généralisée en zero. Par conséquent, elle converge en

*Etude en +∞

Posons $\forall\, x \in [c,+\infty[,\ f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \sin(x)$

$f \in C^{\infty}([c,+\infty[)$. De plus $\forall\, x \in]c,+\infty[$,

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Alors f est strictement décroissante sur $[c,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Aussi, $\forall x \in [c,+\infty[$, $\left|\int_c^x g(t)\,dt\right| = \left|\int_c^x \sin t\,dt\right|$

$$= |-[\cos t]_c^x| = |\cos(c) - \cos(x)|$$
$$= |\cos(c) - \cos(x)| \leq |\cos x| + |\cos(c)|$$
$$\leq 1 + 1 = 2$$

$$\left|\int_c^x g(t)\,dt\right| = 2$$

D'après la règle d'Abel, $\int_c^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_c^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge.

Comme les intégrales $\int_0^c \frac{\sin(x)}{x} dx$ et $\int_c^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ convergent, on conclut en utilisant la relation que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge.

- $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{Arctg\,x}{x} dx$

Posons $f : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{Arctg\,x}{x}$$

f est continue sur $[1;+\infty[$, donc localement intégrable sur $[1;+\infty[$.

Scanné avec CamScanner

*Etude en $+\infty$

$f(x) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$ donc les intégrales $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x}\,dx$ sont de même nature.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x}\,dx$ est Riemann divergente.

b) Vérifions que $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3}\,dx$ diverge.

Posons $f : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3}$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{x^4+1}}{x+3}$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x} = +\infty$$

Alors $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3}\,dx$ diverge (Règle de Riemann au voisinage de l'infini).

*Trouvons g sur $[1;+\infty[$ telle que $\int_1^{+\infty} [\frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} - g(x)]dx$ converge.

Posons $h : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} - g(x)$$

$$h(x) \underset{t\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\sqrt{x^4+1}}{x+3} - g(x)\right) = x - g(x).$$

Comme $\int_1^{+\infty} h(x)\,dx$ converge, alors $\int_1^{+\infty} (x - g(x))\,dx$ converge.

La fonction $g : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x - \frac{1}{x^2}$$ est suffisante. Par conséquent $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Scanné avec CamScanner

- $I_3 = \int_1^3 \frac{dx}{(3-x)(\sqrt{x^2+1})}$

Posons $f : [1;3[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{(3-x)(\sqrt{x^2+1})}$$

f est continue sur $[1;3[$, donc localement intégrable sur $[1;3[$.

*Etude en 3

On a : $\lim\limits_{x\to 3^-}(-3+x)f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{\sqrt{10}} \neq 0$

Alors $\int_1^3 f(x)\,dx$ diverge (Règle de Riemann au voisinage d'un point).

- $I_4 = \int_{-1}^1 \frac{e^{Arctg\,x}}{x\sqrt{|x|}}\,dx$

Posons $f : [-1;0[\cup]0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{e^{Arctg\,x}}{x\sqrt{|x|}}$$

f est continue sur $[-1;0[\cup]0;1]$, donc elle est localement intégrable sur $[-1;0[\cup]0;1]$

On a : $\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{Arctg\,x}}{x\sqrt{|x|}} = +\infty$

Donc $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ diverge (Règle de Riemann au voisinage d'un point).

Scanné avec CamScanner

UFHB Examen de Géométrie plane Durée : 2 heures

Session 1 Septembre 2019

NB On tiendra compte de la précision de la rédaction et aussi des courbes.

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de ses structures euclidienne et affine et de son repère cartésien monique, $R = (O, e_1, e_2, e_3)$, on pose les vecteurs $u_1(1, 0, 1)$, $u_2(1, -1, 1)$, $(1, 1, 0)$ et le point A(-1,0, 1), puis le plan vectoriel $\vec{P}$ $(u_1 ; u_2)$ et la droite vectorielle $\vec{D}(u_3)$ (de sorte que l'espace vectoriel à $\mathbb{R}^3$ $\vec{E} = \vec{P} \oplus \vec{D}$) et enfin plan affine P=A+$\vec{P}$.

Déterminer l'expression analytique de :

a) La projection sur P, de direction $\vec{D}$

b) L'affinité de base P, de rapport (-2), de direction $\overrightarrow{D}$.

Exercice 2

Faire une étude et construire la courbe paramétrée suivante :

$x(t) = (t + 2)e^{\frac{-1}{t}}$

$y(t) = (t - 2)e^{\frac{-1}{t}}$

Exercice 3

Etudier et construire la courbe d'équation polaire : $r(\theta) = \sin(2\theta)$

Scanné avec CamScanner

UFHB Examen de Géométrie plane Durée : 2 heures

Session 2 Fevrier 2020

NB On tiendra compte de la précision de la rédaction et aussi des courbes.

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de ses structures euclidienne et affine et de son repère cartésien canonique, $R = (O, e_1, e_2, e_3)$, on pose les vecteurs $u_1(1, 0, 1)$, $u_2(1, -1, 1)$, $u_3(1, 1, 0)$ et le point A(-1,0, 1), puis le plan vectoriel $\vec{P} = \langle u_1 ; u_2 \rangle$ et la droite affine $D = A + \vec{D}(u_3)$ (de sorte que l'espace vectoriel à $\mathbb{R}^3$ $\vec{E} = \vec{P} \oplus \vec{D}$) et enfin le plan vectoriel $\vec{P}$.

Déterminer l'expression analytique de :

i) La projection sur D, de direction $\overrightarrow{P}$

ii) La symétrie sur D, de direction $\overrightarrow{P}$.

Exercice 2

Faire une étude et construire la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{-1}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t}{1+t^2} \end{cases}$$

Exercice 3

Etudier et construire la courbe d'équation polaire : $r(\theta) = -1 + \sin(2\theta)$

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFRMI L2 2019- 2020

EXAMEN DE GEOMETRIE 1 (ou GEOMETRIE Plane) : Durée 2 h

Exercice 1

Faire une étude et construire les courbes paramétrées suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = sin(2t) \\ y(t) = sin(t) \end{cases}$$

On précisera les tangentes aux points particuliers

Exercice 2

Dans $\mathbb{E}^3$ muni de ses structures euclidienne et affine et de son repère cartésien canonique, $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$. On considère la droite affine $\mathcal{D}$ d'équation : $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y - z - 1 = 0$.

1- Déterminer la position relative de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{P}$.

2- Déterminer l'expression analytique de :

a- La symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$.

b- L'affinité de base $\mathcal{P}$, de rapport (-2), de direction la droite vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ associée à $\mathcal{D}$.

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFR L2 2020-2021

EXAMEN DE GEOMETRIE 1(ou GEOMETRIE Plane)
Durée: 2H

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de ses structures euclidienne et affine et de son repère cartésien canonique, $R = (O, e_1, e_2, e_3)$, on considère la droite affine $\mathcal{D}$ d'équation : $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation: $x + y - z - 2 = 0$.

1- Déterminer la position relative de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{P}$.

2- Déterminer l'expression analytique de:

a- La symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$.

b- L'affinité de base $\mathcal{P}$, de rapport (-3), de direction la droite vectorielle $\vec{\mathcal{D}}$ associée à $\mathcal{D}$.

Exercice 2

Etudier et représenter graphiquement la courbe paramétrée (Γ) définie par:

$$M(t) = (x(t), y(t)) = (-\cos t; \sin 2t)$$

On précisera les tangentes aux points particuliers.

Exercice 3

Etudier et construire la courbe d'équation polaire: $r = 1 - \sin(2\theta)$

VALIDEUR

Université FHB Cocody UFRMI L2 2021- 2022 SESSION 1

EXAMEN DE GEOMETRIE 1 (ou GEOMETRIE Plane) : Durée 1 h 30'

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de ses structures euclidienne et affine et de son repère cartésien canonique, $R = (O, e_1, e_2, e_3)$, on considère la droite affine $\mathcal{D}$ d'équation : $\begin{cases} y + 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$. $A(1; 0; 1)$ un point de l'espace et le plan $\mathcal{P}$ passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

1- Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
2- Déterminer l'expression analytique de :
l'affinité de base $\mathcal{P}$, de rapport (-2), de direction la droite vectorielle $\vec{\mathcal{D}}$ associée à $\mathcal{D}$.

Exercice 2

Etudier et représenter graphiquement la courbe paramétrée (Γ) définie par :

$$M(t) = \big(x(t), y(t)\big) \quad \begin{cases} x(t) = (t+1)e^{\frac{1}{t}} \\ y(t) = (t-1)e^{\frac{1}{t}} \end{cases}$$

On précisera les tangentes aux points particuliers

Exercice 3

Etudier et construire la courbe d'équation polaire : $r(\theta) = \sqrt{\cos(\theta)}$

Scanné avec CamScanner

Correction de géométrie 1 2018-2019 Session 1

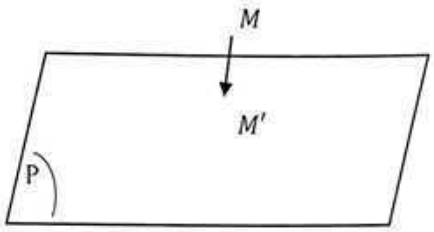
Exercice 1

On donne dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

$\vec{E} = \vec{P} \oplus \vec{D}$ avec $\vec{D} = \langle u_3 \rangle$, une droite vectorielle et $\vec{P} = \langle u_1, u_2 \rangle$ le plan vectoriel tel que $u_1(1,0,1), u_2(1,-1,1), u_3(1,1,0)$. Et enfin le plan affine $\mathcal{P} = A + \vec{P}$. $A(-1,0,1)$

i) Déterminions la projection sur $\mathcal{P}$, de direction $\vec{D}$.

Configuration :



$M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ la projection du point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ suivant la direction $\vec{D}$sur le plan $\mathcal{P}$.

Soit $\mathcal{P}(M) = M'$

On a $\begin{cases} \overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{U_3} & \textbf{1} \\ M' \in (\mathcal{P}) & \textbf{2} \end{cases}$

Déterminons l'équation de $(\mathcal{P})$

On a : $\mathcal{P} = A + vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$

Soit $H\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ alors $A.\vec{H} \in vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$

$$H \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ y & 0 & -1 \\ z-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -y - z + 1 + x + 1 + y = 0$$

$$\Leftrightarrow x - z + 2 = 0$$

On a : $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in (\mathcal{P})$ donc $x' - z' + 2 = 0$ ①

$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = k\overrightarrow{U_3}$

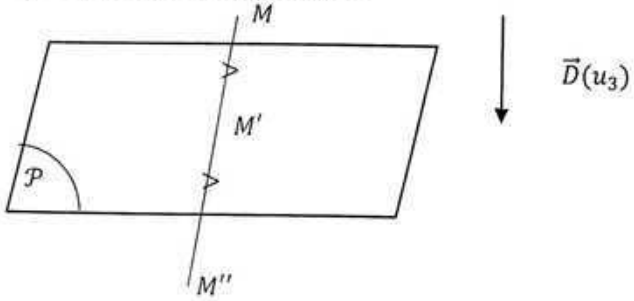
$\Rightarrow \begin{cases} x'-x=k \\ y'-y=k \\ z'-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=k+x \\ y'=k+y \\ z'=0z \end{cases}$ Dans ① on a : $k + x - z + 2 = 0$

D'où : $k = -x + z - 2$

Ainsi $\begin{cases} x' = z - 2 \\ y' = -x + y + z - 2 \\ z' = z \end{cases}$ $(l'expression\ de\ la\ progression)$

Scanné avec CamScanner

La symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ de direction $\vec{D}$.



$\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{MM'}$

$M' = \overrightarrow{MM'}$

$= M' + \overrightarrow{MM'}$

$(M) = M'' = M' + \overrightarrow{MM'}$.

$(M) = 2M' - M$ avec M'la projection de M et $M'' = S(M)$ la symétrie cherchée.

lors : $M''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} x'' = 2x' + x \\ y'' = 2y' - y \\ z'' = 2z' - z \end{cases}$

ethode : (Après avoir trouver l'expression de la M'.)

la symétrie associé à la projection $\mathcal{P}$ trouvée précedement.

$s(M) = 2p(M) - M$

$= 2x' + x$
$= 2y' - y$
$= 2z' - z$

ès précédent avec $M' = P(M)$

pression est : $\begin{cases} x' = z - 2 \\ y' = -x + y + z - 2 \\ z' = z \end{cases}$

$\begin{cases} x'' = 2(z-2) - x \\ y'' = 2(-x + y + z - 2) - y \\ z' = 2z - z \end{cases}$

$x'' = -x + 2z - 4$
$= -2x + y + 2z - 4$ $(expression\ analytique)$
$z'' = z$

méthode : (Sans utilisation de la projection)

$M'' = S(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM''} \in \vec{\theta} & \text{❶} \\ I - \frac{1}{2}(M + M'') \in \mathcal{P} & \text{❷} \end{cases}$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $M''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$,tel que $\overrightarrow{MM''} = \lambda\overrightarrow{u_3}$

Scanné avec CamScanner

D'où (II) $\begin{cases} x'' = \lambda + x \\ y'' = \lambda + y \\ z'' = z \end{cases}$

$I\left(\frac{1}{2}(x+x''), \frac{1}{2}(y+y''), \frac{1}{2}(z+z'')\right)$

❷ $\Rightarrow I \in \mathcal{P} : x - z + 2 = 0$

D'où $x + x'' - z - z'' + 4 = 0$

$\Rightarrow x'' - z'' = -x + z - 4$ (III)

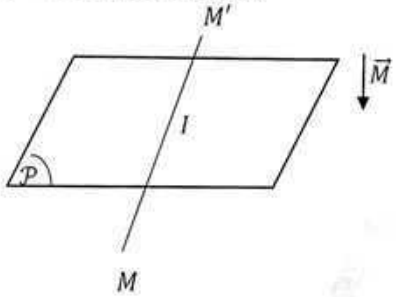
Portons (II) dans (III)

On a : $x'' - z'' = -x + z - 4 \Rightarrow \lambda + x - z = -x + z - 4$

$\Rightarrow \lambda = -2x + 2z - 4$

(II) devient donc $\begin{cases} x'' = -x + 2z - 4 \\ y'' = -2x + y + 2z - 4 \\ z'' = z \end{cases}$ (L'expression analytique)

iii) La symétrie par rapport à $\mathcal{P}$



On a : $\begin{cases} \overrightarrow{MM''} = k\vec{M} \quad (\vec{M} \text{ normal à } \mathcal{P}) \\ I \in \mathcal{P} \text{ avec } I = \frac{1}{2}(M + M'') \end{cases}$

$(\mathcal{P}) : x - z + 2 = 0$ d'où $\vec{M}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

NB : $(\mathcal{P}) : ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow \vec{M}(la\ normal\ du\ plan\ \mathcal{P})$

$\vec{M}\begin{pmatrix} a \\ b \\ -d \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MM''} = k\vec{M} \Rightarrow \begin{cases} x'' - x = k \\ y'' - y = 0 \\ z'' - z = -2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = k + x \\ y'' = y \\ z'' = -2k + z \end{cases} \quad (I)$

$I\left(\frac{1}{2}(x+x''), \frac{1}{2}(y+y''), \frac{1}{2}(z+z'')\right)$

$I \in (\mathcal{P}) \Rightarrow x'' - z'' = -x + z - 4$

(I) Nous permet : $k + x + 2k - z = -x + z - 4$

$3k - z = -2x + z - 4$

$k = \frac{1}{3}(-2x + z - 4)$

(I) Devient : $\begin{cases} x'' = \frac{1}{3}(x + 2z - 4) \\ y'' = y \\ z'' = \frac{1}{3}(4x - z - 4) \end{cases}$ (L'expression analytique)

iv) L'affinité de base $\mathcal{P}$ de rapport r = - 2 de direction $\vec{D}$

Scanné avec CamScanner

Comme r = -2 alors par la formule :

$a(M) = P(M) + 2M$

Or d'après i) l'expression analytique de la projection est : $P(M) : \begin{cases} x' = z - 2 \\ y' = -x + y + z - 2 \\ z' = z \end{cases}$

D'où : $a(M) = \begin{cases} x' = 2x + z - 2 \\ y' = -x + 3y + z - 2 \\ z' = 3z \end{cases}$ (l'expression analytique de l'affinité)

Scanné avec CamScanner

UFR :MI

CORRECTION GEOMETRIE 1 : COURBES POLAIRES

EXERCICE 1

On a : $r : r \mapsto r(\theta) = 1 + 2\cos 2\theta$ est définie de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

* Reduction d'ensemble de définition :

On a : $r(\theta + \pi) = 1 + 2\cos(2\theta + 2\pi)$

$= 1 + 2\cos 2\theta$

$\Rightarrow r(\theta + \pi) = r(\theta)$

On restreint donc l'étude sur un intervalle de longueur π puis on complète par la symétrie centrale de centre O pour avoir toute la courbe.

Soit $D_r = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

On a : $r(-\theta) = 1 + 2\cos(-2\theta) = 1 + 2\cos(2\theta) = r(\theta)$

Soit $M(-\theta) = S_{ox}(M(\theta))$

On se restreint donc à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis on complète la courbe par la symétrie axiale d'axe (ox).

* Variations :

r est dérivable sur son domaine d'étude $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

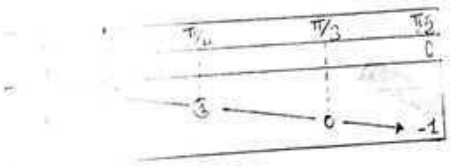
On a : $r'(\theta) = -4\sin(2\theta)$



Scanné avec CamScanner

Ainsi $\forall \theta \in \left[0, \frac{\sigma}{2}\right]$, $r'(\theta) < 0$

*Tableau de variation



*Tangeantes aux points particuliers.

•Etude en 0

On a : $r'(0) = 0$ et $r(0) = 3$

La tangeante en 0 est de direction $\overrightarrow{d} = r'(0)\overrightarrow{u_0} + r(0)\overrightarrow{v_0}$ avec

$\overrightarrow{u_0} = \cos(0)\overrightarrow{i} + \sin(0)\overrightarrow{j}$. $\overrightarrow{v_0} = -\sin(0)\overrightarrow{i} + \cos(0)\overrightarrow{j}$

$\Rightarrow \overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{j}$

D'où $\overrightarrow{d} = 3\overrightarrow{j} \equiv \overrightarrow{j}$

Tangente au point M avec $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{i}$.

•Etude en $\frac{\pi}{1}$

On a : $r'(\frac{\pi}{1}) = -4$ et $r(\frac{\pi}{1}) = 1$

La tangeante en $\frac{\pi}{4}$ est dirigée par $\overrightarrow{d}$ avec $\overrightarrow{d} = r'(\frac{\pi}{4})\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{4}}} + r(\frac{\pi}{4})\overrightarrow{v_{\frac{\pi}{4}}}$

On a : $\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{1}}} = \cos(\frac{\pi}{1})\overrightarrow{i} + \sin(\frac{\pi}{1})\overrightarrow{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{v_{\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{j} - \overrightarrow{i})$

$\Rightarrow \overrightarrow{d} = -2\sqrt{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$

$\Rightarrow \overrightarrow{d} = (\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2})\overrightarrow{i} - (\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2})\overrightarrow{j}$

Tangente au point T avec $\overrightarrow{OT} = r(\frac{\pi}{4})\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{4}}}$

On a : $\overrightarrow{OT} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$

•Etude en $\frac{\pi}{2}$

Scanné avec CamScanner

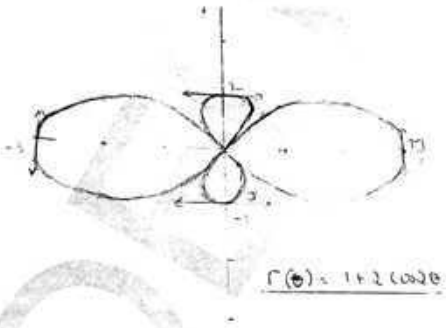
On a : $r'(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $r(\frac{\pi}{2}) = -1$
La tangeante en $\frac{\pi}{2}$ est dirigée par $\overrightarrow{d}$ avec $\overrightarrow{d} = r(\frac{\pi}{2})\overrightarrow{r_{\frac{\pi}{2}}} = \overrightarrow{j}$.
Au point J avec $\overrightarrow{OJ} = r(\frac{\pi}{2})\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{2}}}$.
$\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{J}$.

•Etude en $\frac{\pi}{3}$

$r'(\frac{\pi}{3}) = 0$ et $r(\frac{\pi}{3}) = 0$
D'où on a passage à l'origine.

Point remarque :

Toujours voir s'il n'existe pas de passage à l'origine et lire le tableau pour pouvoir bien tracer la courbe.



$r(\theta) = 1 + 2\cos\theta$

EXERCICE 2

On a : $r : r \longmapsto r(\theta) = -1 + \sin 2\theta$ est definie de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

*Reduction d'ensemble de définition :

On a : $r(\theta + \pi) = -1 + \sin(2\theta + 2\pi)$
$= -1 + \sin 2\theta$
$= r(\theta)$

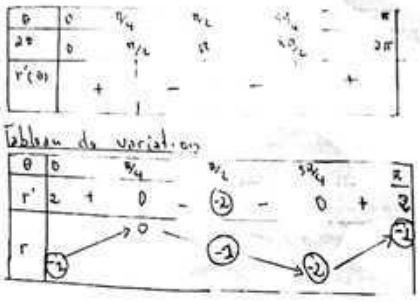
On restreint donc l'étude sur un intervalle de longueut πpuis on complète par

Scanné avec CamScanner

la symétrie centrale de centre O pour avoir toute la courbe. Soit $D_r = [0, \pi]$

*Variations :

r est dérivable surson domaine détude $[0, \pi]$
On a : $r'(\theta) = 2\cos(2\theta)$.



*Tangentes aux points particuliers

•Etude en 0

On a : $r'(0) = 2$ et $r(0) = -1$
La tangeante en 0 est dirigée par $\overrightarrow{d}$ avec $\overrightarrow{d} = r'(0)\overrightarrow{u_0} + r(0)\overrightarrow{v_0}$
$\overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$
Tangente au point M avec $\overrightarrow{OM} = r(0)\overrightarrow{u_0}$
$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{i}$

•Etude en $\frac{\pi}{4}$

On a : $r'(\frac{\pi}{4}) = 0$ et $r(\frac{\pi}{4}) = -2$
On a donc passage à l'origine . (Point de rebroursement de deuxième espèce).

•Etude en $\frac{\pi}{2}$

On a : $r'(\frac{\pi}{2}) = -2$ et $r(\frac{\pi}{2}) = -1$
La tangeante en $\frac{\pi}{2}$ est dirigée par $\overrightarrow{d}$ avec $\overrightarrow{d} = r'(\frac{\pi}{2})\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{2}}} + r(\frac{\pi}{2})\overrightarrow{v_{\frac{\pi}{2}}}$
$\overrightarrow{d} = -2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{i}$

Scanné avec CamScanner

Tangente au point T avec $\overrightarrow{OT} = r(\frac{\pi}{2})\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{2}}} = -\overrightarrow{j}$

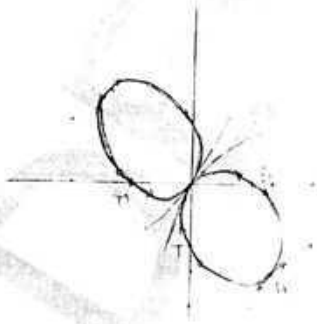
•Etude en $\frac{3\pi}{4}$

On a : $r'(\frac{3\pi}{4}) = 0$ et $r(\frac{3\pi}{4}) = -2$
La tangeante en $\frac{3\pi}{4}$ est dirigée par $\overrightarrow{d}$ avec $\overrightarrow{d} = r'(\frac{3\pi}{4})\overrightarrow{u_{\frac{3\pi}{4}}} + r(\frac{3\pi}{4})\overrightarrow{v_{\frac{3\pi}{4}}}$
$\overrightarrow{d} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{i} + \sqrt{2}\,\overrightarrow{j} \equiv \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$

Tangente au point H avec $\overrightarrow{OH} = r(\frac{3\pi}{4})\overrightarrow{u_{\frac{3\pi}{4}}} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{i} - \sqrt{2}\,\overrightarrow{j}$

•Etude en π

On a : $r'(\pi) = 2$ et $r(\pi) = -1$
La tangeante en π est dirigée par $\overrightarrow{d}$ avec $\overrightarrow{d} = r'(\pi)\overrightarrow{u_\pi} + r(\pi)\overrightarrow{v_\pi}$
$\overrightarrow{d} = -2\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$
Tangente au point S avec $\overrightarrow{OS} = r(\pi)\overrightarrow{u_\pi}$
$\Rightarrow \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{i}$



$\Gamma(\theta)$: cardioïde

EXERCICE 3

On a : $\Gamma : r \mapsto r(\theta) = 1 + \cos\theta$ est définie de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Scanné avec CamScanner

On a : $r(\theta + 2\pi) = 1 + \cos(\theta + 2\pi)$
$= 1 + \cos\theta$
$\Rightarrow r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$

Soit $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$. Donc $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$
De plus $r(-\theta) = r(\theta)$ donc $M(\theta)$ par rapport à l'axe (ox). On peut limiter l'étude sur $[0, \pi]$: la courbe obtenue sera complété par la symétrie d'axe (ox).
$\forall \in [0, \pi]$. $r'(\theta) = -\sin\theta$

*Tableau de varition



*Etude en $\theta = 0$

On a : $r(0) = 2$ et $r'(0) = 0$
Il yadonc une tangente de direction $\overrightarrow{d} = r(0)\overrightarrow{v_0} \Rightarrow \overrightarrow{d} \equiv \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{i}$.

*Etude en $\theta = \pi$

On a : $r(\pi) = 0$ donc il s'agit d'un passage à l'origine. $M(\pi) = 0$ est donc un point de reboursement de première espèce dont la tangente est la droite d'équation polaire $\theta = \pi$

*Points stationnaires :

(M, θ) tel que $r(\theta) = 0$ et $r'(\theta) = 0$ d'où $\theta = \pi$ et $M \equiv 0$

Nature de θ : $r''(\theta) = -\cos\theta \Rightarrow r''(\pi) = 1$
$\Rightarrow$ Point ordinaire.

Scanné avec CamScanner

*Etude en $\frac{\pi}{2}$

On a : $r(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $r'(\frac{\pi}{2}) = -1$
$\overrightarrow{OH} = r(\frac{\pi}{2})\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{2}}} = \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

EXERCICE 4

$r : \theta \mapsto r(\theta) = \cos^{\theta}$ est définie de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$.

On a :$r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$
$r'(\theta) = r(\theta) \Rightarrow M(-\theta) = S_{or}\, M(\theta)$ Donc on peut se reduire à l'intervalle $[0.\pi]$.
Le reste de la courbe sera obtenue par la symétrie d'axe $(o.r)$.
On a : $r'(\theta) = -2\sin\theta\cos\theta = -\sin(2\theta)$.

•Etude du signe de $r'(\theta)$.



•Tableau de variation.



Etude de la tangente au points particuliers.

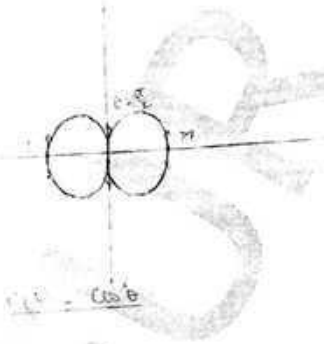
*Etude en 0

Scanné avec CamScanner

On a : $r(0) = 0$ et $r'(0) = 1$
$\overrightarrow{d} = r(0)\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{i}$.
Au point M avec $\overrightarrow{OM} = r(0)\overrightarrow{u_0}$
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{i}$

*Etude en $\frac{\pi}{2}$

On a : $r'(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $r(\frac{\pi}{2}) = 0$. Il s'agit donc d'un passage à l'origine.
$M(\frac{\pi}{2}) = 0$ est un point de rebroussement.



Courbe :

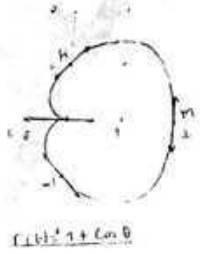


FIGURE 1 – La cardioide

Scanné avec CamScanner

Géométrie 1 : 2019-2020

Exercice 1

Soit $\Gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$

Faire une étude et construire la courbe paramétrée.

- **Domaine de définition D**

$D_x = \mathbb{R}$ et $D_y = \mathbb{R}$

$\Rightarrow D = D_x \cap D_y = \mathbb{R}$

- **Réduction du domaine D**

$\forall t \in \mathbb{R}, t + 2\pi \in \mathbb{R},$

$\Gamma(t + 2\pi) = \begin{cases} x(t + 2\pi) = \sin(2t) \\ y(t + 2\pi) = \sin(t) \end{cases}$

$\Gamma(t + 2\pi) = \Gamma(t)$

Donc, on réduit D sur un intervalle de longueur 2π

Prenons $D_1 = [-\pi; \pi]$

On obtient la courbe complète quand t décrit D_1

$\forall t \in D_1, -t_1 \in D_1,$

$\Gamma(-t) = \begin{cases} x(-t) = sin(-2t) \\ y(-t) = sin(-t) \end{cases}$

$\Gamma(-t) = \begin{cases} x(-t) = -\sin(2t) \\ y(-t) = -\sin(t) \end{cases}$

$\Gamma(-t) = \begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$

$\Rightarrow \Gamma(-t) = S_0\Gamma(t)$

Donc, on réduit le domaine de définition sur $D_2 = [0; \pi]$, puis on obtient la courbe complète par la symétrie centrale de centre O.

$\forall t \in [0; \pi],$

$\Gamma(\pi - t) = \begin{cases} x(\pi - t) = -sin(2t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = sin(t) = y(t) \end{cases}$

$\Gamma(\pi - t) = S_0 y\Gamma(t)$

On étudie et on construit la courbe sur $D_3 = [0; \frac{\pi}{2}]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy), puis par symétrie centrale de centre O.

- **Dérivée et sens de variation**
- **Dérivée**

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], x'(t) = 2\cos(2t)$

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], y'(t) = \cos(t)$

- **Sens de variation**

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], x'(t) \geq 0$

$\forall t \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right], x'(t) < 0$

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], y'(t) > 0$

Tableau de variation

t	0	$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	$+$	0
$x(t)$	0	1
$y(t)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$y'(t)$	$+$	
Points particuliers	$O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$A\begin{pmatrix}1\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$
Vecteurs tangents	$\overrightarrow{T_0}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{T_A}\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

Construction



Exercice 2

1) Position relative de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{P}$.

Déterminons l'intersection de $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{P}$.

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

$M \in P \cap D \Leftrightarrow M \in P$ et $M \in D$

Scanné avec CamScanner

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z-1 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z-1 \\ y=-z \end{cases}$

$\Leftrightarrow x+y-z-1=0$

$\in P \cap D \Leftrightarrow z-1-z-z-1=0$

$z=0 \Leftrightarrow z=-2$

-3

2

-2

$P \cap D = M\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

D est sécante au plan P en $M\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Expression analytique de :

La symétrie orthogonale par rapport à D

Déterminons l'expression analytique de la projection orthogonale à D.

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

projection orthogonale de M sur D.

$M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in D \\ \exists \lambda \in \mathbb{R} / \overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{n} \text{ où} \end{cases}$

vecteur normal à D.

est un vecteur normal à D.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x=\lambda \\ y'-y=\lambda \\ z'-z=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x' = x+\lambda \\ y' = y+\lambda \\ z' = z \end{cases}$

Déterminons λ

$\Rightarrow \begin{cases} x'+y'+1=0 \\ x'-z'+1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-2\lambda-y-1 \\ -\lambda=y+z \end{cases} \Rightarrow \lambda=-(y+z)$

$x = x-y-z$

$y' = -z$ est l'expression analytique de la

$z' = z$

orthogonale sur D.

Expression analytique de la symétrie orthogonale.

la symétrie orthogonale

$M' + \overrightarrow{MM'}$

$2M' - M$

$S(M) = 2P(M) - M$

B) Soit a l'affinité de rapport (-2), de base $\mathcal{P}$ et de direction $\vec{D}$.

$a(M) = M' - 2\overrightarrow{M'M}$

$a(M) = 3M' - 2M$

Posons $P(M) = M'$

La projection de M sur $\mathcal{P}$ de direction $\vec{D}$.

Déterminons l'expression analytique de la projection de base $\mathcal{P}$ et de direction $\vec{D}$.

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur directeur de D.

Alors $\vec{D} = <\vec{v}>$

Soient $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$P(M) = M' \Rightarrow \begin{cases} M' \in \mathcal{P} \\ \exists \alpha \in \mathbb{R} / \overrightarrow{MM'} = \alpha \vec{v} \end{cases}$

On a : $\overrightarrow{MM'} = \alpha \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x=\alpha \\ y'-y=-\alpha \\ z'-z=\alpha \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x+\alpha \\ y' = y-\alpha \\ z' = z+\alpha \end{cases}$

Déterminons α

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow x+y-z-1=0$

$M' \in \mathcal{P} \Leftrightarrow x'+y'-z'-1=0$

$\Rightarrow \alpha = x+y-z-1$

Alors

$\begin{cases} x' = 2x+y-z-1 \\ y' = -y+z+1 \\ z' = x+y-1 \end{cases}$ est l'expression analytique de la projection sur $\mathcal{P}$ de direction $\vec{D}$.

Posons $a(M) = M''$

Alors $a(M) = M'' = 3P(M) - 2M \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x'' = 4x+3y-3z-3 \\ y'' = 3z-5y+3 \\ z'' = 3x+3y-3-2z \end{cases}$ est l'expression analytique de l'affinité de base $\mathcal{P}$ de rapport (-2) et de direction $\vec{D}$.

Scanné avec CamScanner

Correction de Géométrie 1

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de ses structures euclidiennes et affines et de son repère cartésien canonique. $\mathcal{R} = (0, e_1, e_2, e_3)$, on considère la droite affine $\mathcal{D}$ d'équation $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y - z - 2 = 0$

1) Déterminons la position relative de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ z = x + 1 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ z = x + 1 \\ x + (-x - 1) - (x + 1) - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ z = x + 1 \\ -x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ z = x + 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = -3 \\ x = -4 \end{cases}$$

D'où $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = I(-4,3,-3)$

Donc $\mathcal{D}$ coupe le plan au point $I(-4,3,-3)$

1. Déterminons l'expression analytique de :

On a : $\mathcal{D} = \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$

$$\mathcal{D} = \begin{cases} y = -x - 1 \\ z = x + 1 \\ x = x \end{cases}$$

Posons $t = x$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D} = \begin{cases} y = -t - 1 \\ z = t + 1 \\ x = t \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{D} = A + \vec{D}$$

Avec $A = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si M' est symétrie orthogonale de M par rapport à la droite $\mathcal{D}$ alors :

$$S(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ \overrightarrow{MM'}.\vec{D} = 0 \\ ii)\ \frac{1}{2}(M + M') \in D \end{cases}$$

Posons $I = \frac{1}{2}(M + M')$ et $A \in D$.

D'où $I \in D, \overrightarrow{AI} = \lambda \vec{D}$

Scanné avec CamScanner

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x'+x) \\ \frac{1}{2}(y+y')+1 \\ \frac{1}{2}(z+z')-1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'+x = 2\lambda \\ y+y'+2 = -2\lambda \\ z+z'-2 = 2\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2\lambda - x \\ y' = -2\lambda - y - 2 \ (E_1) \\ z' = 2\lambda - z + 2 \end{cases}$$

i) $\overrightarrow{MM'}.\vec{D} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x'-x-y'+y+z'-z = 0 \ (E_2)$

En remplaçant (E_1) dans (E_2) on a :

$2\lambda - x - x + 2\lambda + y + 2 + y + 2\lambda - z + 2 - z = 0$

$\Leftrightarrow 6\lambda - 2x + 2y - 2z + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 3\lambda - x + y - z + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 3\lambda = x - y + z - 2$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}(x-y+z-2)$

En remplaçant λ dans (E_1) on a :

$$\Leftrightarrow S(M) = \begin{cases} x' = \frac{2}{3}(x-y+z-2) - x \\ y' = \frac{-2}{3}(x-y+z-2) - y - 2 \\ z' = \frac{2}{3}(x-y+z-2) - z + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow S(M) = \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x-2y+2z-4) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x+5y-2z-2) \\ z' = \frac{1}{3}(2x-2y-z+4) \end{cases}$$

b) l'affinité de base $\mathcal{P}$, de rapport (-3) de direction la droite vectorielle $\vec{D}$ associé à D.

Soit $P(M)$ la projection associée à l'affinité $a(M)$ et λ le rapport de l'affinité.

On a : $a(M) = p(M) + \lambda\overrightarrow{p(M)M}$

Scanné avec CamScanner

$$a(M) = p(M) - \lambda\big(M - p(M)\big)$$

$$a(M) = p(M) + (1-\lambda)p(M)$$

- Déterminons $p(M)$

$$p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ M' \in \mathcal{P} \\ ii)\overrightarrow{MM'} = \lambda\vec{D} \end{cases}$$

On a : $\mathcal{P} = x + y - z - 2 = 0\ (E_1)$ et $D = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{D} = A + \vec{D}$$

$$i)\ M' \in \mathcal{P} \Leftrightarrow x' + y' - z' - 2 = 0$$

$$ii)\overrightarrow{MM'} = \lambda\vec{D} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = \lambda \\ y'-y = -\lambda \\ z'-z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \lambda + x \\ y' = -\lambda + y\ \ (E_2) \\ z' = \lambda + z \end{cases}$$

En remplaçant (E_2) dans (E_1) on a :

$$\lambda + x - \lambda + y - \lambda - z - 2 = 0$$

$$-\lambda + x + y - z - 2 = 0$$

$$\lambda = x + y - z - 2$$

En remplaçant λ dans (E_1)

$$\text{On a : } p(M) = M' = \begin{cases} x' = x + y - z - 2 + x \\ y' = -(x + y - z - 2) + y\ \ (E_2) \\ z' = x + y - z - 2 + z \end{cases}$$

$$p(M) = \begin{cases} x' = 2x + y - z - 2 \\ y' = -x + z + 2\ \ (E_2) \\ z' = x + y - 2 \end{cases}$$

Comme $a(M) = \lambda M + (1-\lambda)p(M)$

$$a(M) = \begin{cases} x'' = -3x + 4x' \\ y'' = -3y + 4y' \\ z'' = -3z + 4z' \end{cases}$$

$$a(M) = \begin{cases} x'' = -3x + 8x + 4y - 4z - 8 \\ y'' = -3y - 4x + 4z + 8 \\ z'' = -3z + 4x + 4y - 8 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

$$a(M) = \begin{cases} x" = 5x + 4y - 4z - 8 \\ y" = -4x - 3y + 4z + 8 \\ z" = 4x + 4y - 3z - 8 \end{cases}$$

Exercice 2

$M(t) = (x(t); y(t)) = (-cost\,; sin2t)$

$$M(t) = \begin{cases} x(t) = -cost \\ y(t) = sin2t \end{cases}$$

Soit $f(t) = (x(t); y(t))$

Ensemble de définition

$D_f = \mathbb{R}$

Domaine de définition

$\forall t \in D_f, t + 2\pi \in D_f$ et $f(t + 2\pi) = f(t)$. D'où f est périodique de période 2π. On prend l'intervalle $D_1 = [-\pi; \pi]$ et obtient toutes les courbes par une rotation de centre O et d'angle

$\forall t \in [0, \pi], -t \in [-\pi, 0]$ et $f(-t) = \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$

Nous allons restreindre le domaine à $D_2 = [0, \pi]$ et obtenir la courbe r_1 par symétrie d'axe O_x, $r_1 = S_{O_X}(M) \cup r_2$

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \pi - t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et $f(\pi - t) = (cost, -sin2t)$ soit $f(\pi - t) = -f(t)$.

D'où nous avons une symétrie centrale.

On se restreint à $D_3 = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et on complète à $[0; \pi]$ par symétrie centrale.

Variation

$$f'(t) = \begin{cases} x'(t) = sint \\ y'(t) = 2cos2t \end{cases}$$

$x'(t) = 0 \Leftrightarrow sint = 0$

$\Leftrightarrow t = 0$ ou $t = \pi$

$y'(t) = 0 \Leftrightarrow 2cos2t = 0$

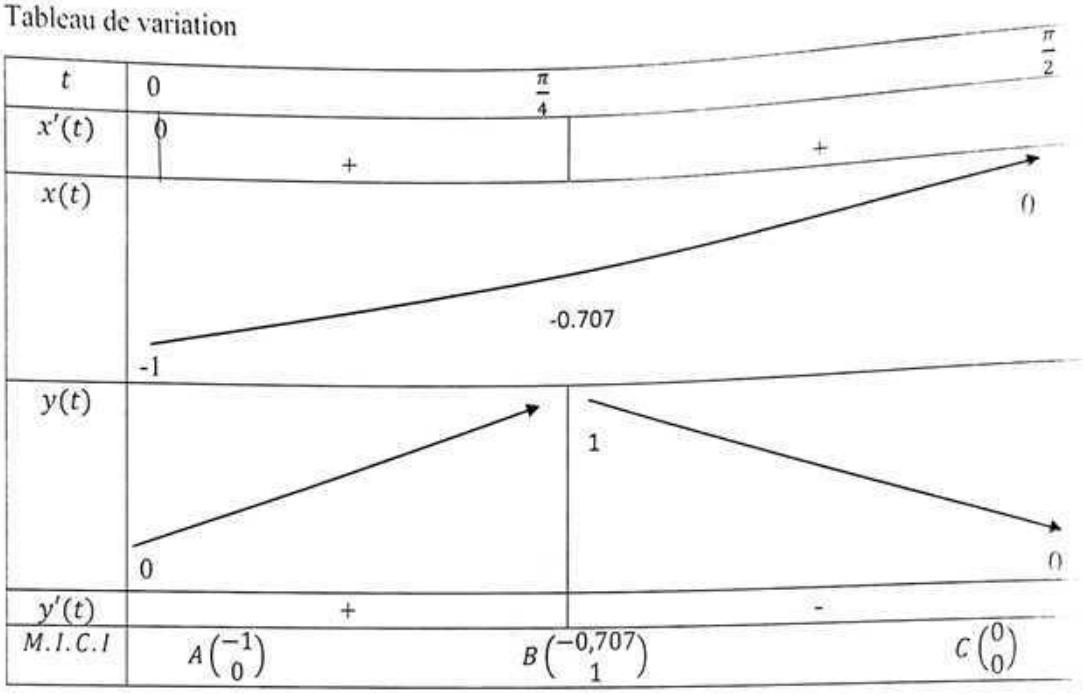
$\Leftrightarrow cos2t = 0$

$\Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{2}$

Scanné avec CamScanner

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$

Tableau de variation



Pas de boucle infinie

Pas de points stationnaires

Tangente

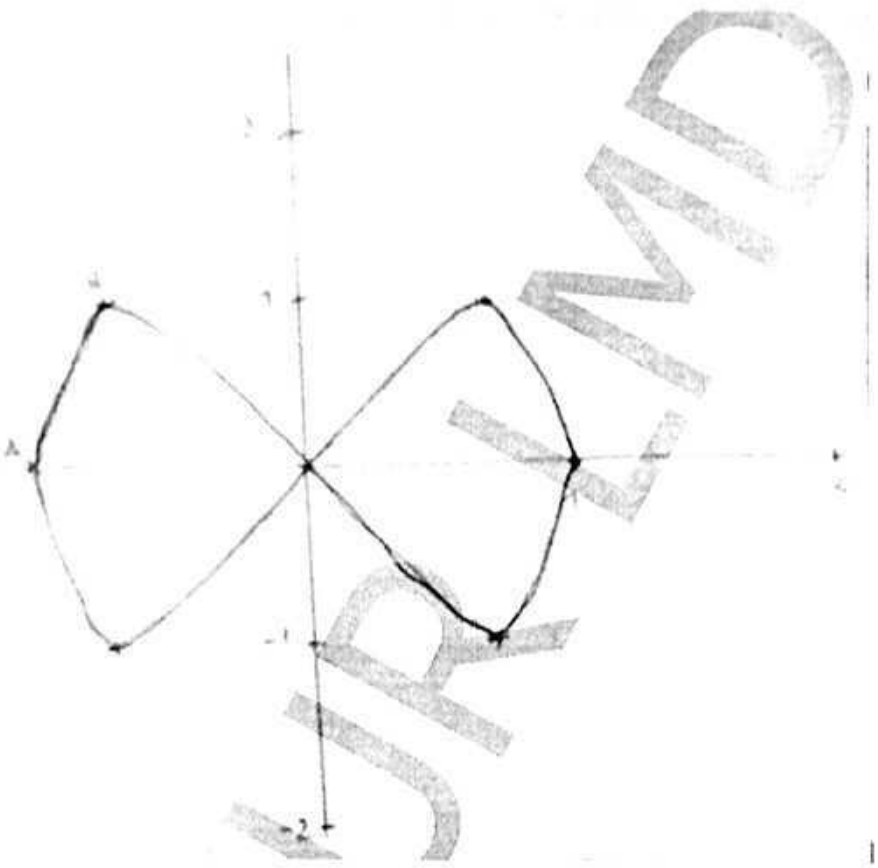
En $0, \vec{d} = 2\vec{j} \equiv \vec{j}$

En $\frac{\pi}{4}, \vec{d} = -0,7\vec{\imath} \equiv -\vec{\imath}$

En $\frac{\pi}{2}, \vec{d} = \vec{\imath} - 2\vec{j}$

Construction de la courbe

Scanné avec CamScanner



Exercice 3

$r = 1 - \sin(2\theta) = f(\theta)$

Ensemble de définition

$D_f = \mathbb{R}$

Domaine de définition

$f(\pi + \theta) = f(t)$. f est périodique de période π. Nous allons restreindre au domaine à

$D_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Plus de réduction possible.

Variation

$f'(\theta) = -2\cos(2\theta)$

$f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2cos2\theta = 0$

$\Leftrightarrow cos2\theta = 0$

$\Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$

Scanné avec CamScanner

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

Tableau de variation

θ	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$	-		0		+
$f(\theta)$	1	↘	0	↗	1
M.I.C.I	$r\left(\begin{matrix}-\frac{\pi}{2}\\1\end{matrix}\right)$		$B\left(\begin{matrix}\frac{\pi}{4}\\0\end{matrix}\right)$		$C\left(\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\1\end{matrix}\right)$

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE GEOMETRIE 1 SESSION 1 ANNEE 2021-2022

EXERCICE 1

(D): $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$ $A(1;0;1)$ *un point de l'espace et le plan* $\mathcal{P}$ passant par A et perpendiculaire à (D)

1-) Equation cartésienne de $\mathcal{P}$

$\begin{matrix} x-y+1=0 & (1) \\ x+z+1=0 & (2) \end{matrix}$ $(1)-(2) \Rightarrow \begin{cases} y=-z \\ x=-1-z \end{cases}$ En posant $t=z$, d'où $\begin{cases} x=-1-t \\ y=-t \\ z=t \end{cases}$

Alors $(D): B\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + IR_{\vec{t}}$ *avec* $\vec{t}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Comme (D) *est perpendiculaire au plan* $(\mathcal{P})$ alors le vecteur normal du plan est colinéaire à $\vec{t}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $\vec{n}$ le vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

L'équation du plan $(\mathcal{P})$ $ax+bx+cz+d=0$, *avec* $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathcal{P}): -x-y+z+d=0$

Comme $A \in (\mathcal{P})$ Alors $-x_A - y_A + z_A + d = 0$, $\Rightarrow d=0$ d'où $(\mathcal{P})$: $-x-y+z=0$

2-) Soit $P: \varepsilon \to \epsilon$ La projection sur $(\mathcal{P})$ de direction $\vec{D}$,

$M \mapsto P(M) = M'$

- M'$\in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{MM'} \in \vec{D}$ Soit $M(x',y',z'), \overrightarrow{MM'} \in \vec{D} \Leftrightarrow \exists \lambda \in IR$, $\overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{t}$

$\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\lambda + x \\ y' = -\lambda + y \\ z' = \lambda + z \end{cases}$ M'$\in \mathcal{P}$ Alors M' vérifie l'équation du plan $\mathcal{P}$ d'où

$-x'-y'+z'=0, \Rightarrow -(-\lambda+x)-(-\lambda+y)+(\lambda+z)=0, \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}(x+y-z)$

$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x-y+z) \\ y' = \frac{1}{3}(-x+2y+z) \\ z' = \frac{1}{3}(x+y+2z) \end{cases}$; $\begin{cases} a: \varepsilon \to \varepsilon \\ M \mapsto a(M) = M'' \end{cases} \Rightarrow a(M) = \lambda M + (1-\lambda)P(M) = -2M + 3P(M)$

$a(M): \begin{cases} x'' = -y+z \\ y'' = -x+z \\ z'' = x+y \end{cases}$

EXERCICE 2

$M(t) = \begin{cases} x(t) = (t+1)e^{\frac{1}{t}} & D_x = IR^* \\ y(t) = (t-1)e^{\frac{1}{t}} & D_y = IR^* \end{cases}$ $D_f = IR^*$ *car* $D_f = D_x \cap D_y$

- Etude de $x(t)$

Scanné avec CamScanner

$\forall t \in IR^*, x'(t) = \left(\frac{t^2 - t - 1}{t^2}\right) e^{\frac{1}{t}}$ *Donc le signe de* $x'(t)$ *devend de* $t^2 - t - 1$

t	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$x'(t)$	+	−	‖	−	+

- Etude $y(t)$

$\forall t \in IR^*, y'(t) = \left(\frac{t^2 - t + 1}{t^2}\right) e^{\frac{1}{t}}$ *Donc le signe de* $y'(t)$ *depend de* $t^2 - t + 1$.

Or $t^2 - t + 1 > 0 \forall t \in IR$ *Donc* $y'(t) > 0$

$\lim_{t \to -\infty} x(t) = \lim_{t \to -\infty} y(t) = -\infty$, *car* $\lim_{t \to -\infty} \frac{1}{t} = 0$

$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$, *car* $\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} = 0$

$\lim_{t \to 0_<} x(t) = 0$, *car* $\lim_{t \to 0_<} \frac{1}{t} = -\infty$

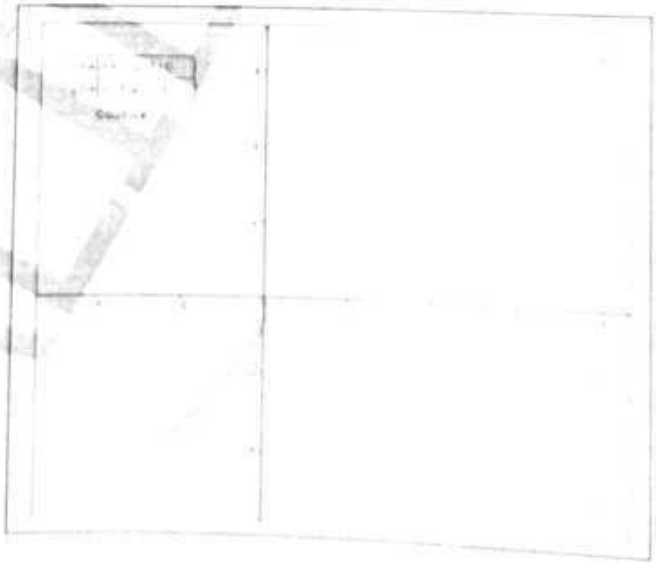
$\lim_{t \to 0_>} x(t) = +\infty$, *car* $\lim_{t \to 0_>} \frac{1}{t} = +\infty$

$\lim_{t \to 0_<} y(t) = 0$, *car* $\lim_{t \to 0_<} \frac{1}{t} = -\infty$

$\lim_{t \to 0_>} y(t) = -\infty$, *car* $\lim_{t \to 0_>} \frac{1}{t} = +\infty$



$\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1$; $\lim_{t \to +\infty} y(t) - x(t) = -2$, ***Donc la*** *droite* $y = x - 2$ *est une asymptote oblique en* $+\infty$ *et en* $-\infty$



Scanné avec CamScanner

EXERCICE 3

$r(\theta) = \sqrt{\cos(\theta)} \quad \theta \in D_r <=> \cos(\theta) \geq 0 <=> \theta \in \bigcup_{k\in z}\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\,\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

$D_r = \bigcup_{k\in z}\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\,\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

Domaine d'étude

- Periodicity

$\forall\theta \in D_r, \theta + 2\pi \in D_r, r(\theta + 2\pi) = \sqrt{\cos(\theta + 2\pi)} = \sqrt{\cos(\theta)} = r(\theta)$

On réduit le domaine à un intervalle de longueur 2π, Soit I l'intervalle. $I = [-\pi;\pi] \cap D_r = \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Soit $D_1 = \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; (Γ_1) est la courbe de r sur D_1 et (Γ) est la courbe de r sur D_r

- Parité

$\theta \in D_1 \; et \; -\theta \in D_1, \; r(-\theta) = \sqrt{\cos(-\theta)} = \sqrt{\cos(\theta)} = r(\theta)$

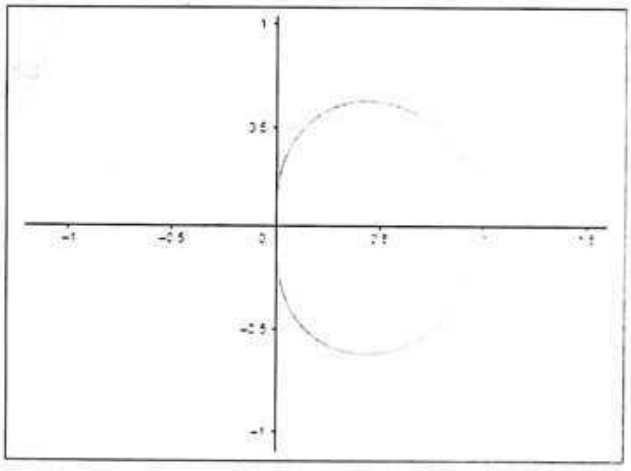
(Γ_1) Est symétrie par rapport à (ox) $D_{2=}\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et (Γ_2) est la courbe sur D_2

- *Etude sur* D_2

$$r(\theta) = \sqrt{\cos(\theta)}\,; \quad r'(\theta) = -\frac{\sin(\theta)}{2\sqrt{\cos(\theta)}}; \; \theta \in D_2 <=> 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} <=> \sin(\theta)$$

$$\geq 0 \; Alors \; r'(\theta) \leq 0$$

θ	0	$+\infty$
$r'(\theta)$		−
$r(\theta)$	1 ↘	0



Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny
UFRF MI

Année universitaire 2018-2019

LICENCE 2 MATHEMATIQUES

Géométrie de l'ESPACE, Examen annuel, 1ère session, durée : 02 h.

L'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ orienté, muni du repère $(O, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{E}$, est le repère commun à tous les exercices qu'on peut, néanmoins, aborder dans un ordre arbitraire.

Exercice 1

Cet exercice n'utilise que la structure affine de $\mathcal{E}$.

On considère l'endomorphisme affine f de $\mathcal{E}$ qui, à un point M(x, y, z) de $\mathcal{E}$, associe le point

$$M'(-6x - 3y + 2z - 14,\ 3x - 2z + 6\ ,\ -6x - 6y + z - 12)$$

1° Montrer que f est une affinité de $\mathcal{E}$ dont on précisera la projection associée p et le rapport.

2° Donner la base et la direction de p.

3° Donner l'image directe par p de la droite $\mathcal{D}_o$ d'équations $x - y + 1 = 0$ et $2y + z = 0$, puis celle du plan $\mathcal{P}_o$ d'équation $x + y - \frac{2}{3}z + 2 = 0$.

Exercice 2

Montrer que l'endomorphisme affine f de $\mathcal{E}$ qui au point M (x, y, z) de $\mathcal{E}$ associe le point

$$M'\left(\frac{1}{3}(x + 2y - 2z + 6)\ ,\ \frac{1}{3}(2x + y + 2z + 3),\ \frac{1}{3}(-2x + 2y + z + 3)\right)$$

est une isométrie de $\mathcal{E}$ dont on précisera la nature et les caractéristiques géométriques.

Exercice 3

Soit la quadrique $\mathcal{S}$ d'équation

(e) : $x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy - 8yz - 4zx + 27x + 9y + 9z + \frac{9}{4} = 0$

En utilisant une réduction orthogonale, réduire la quadrique $\mathcal{S}$ et déterminer sa nature.

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFRMI L2 2019- 2020

EXAMEN DE GEOMETRIE 2 (ou GEOMETRIE DANS L'ESPACE) : Durée 2 h

EXERCICE 1

L'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère l'endomorphisme affine f de $\mathcal{E}$ qui à $M(x, y, z)$ associe $M'(x', y', z')$ tel que : $f(M) = (y + 1, x + 1, z)$.

Montrer f est une isométrie de $\mathcal{E}$ dont on précisera les caractéristiques géométriques.

EXERCICE 2

L'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit la quadrique d'équation : (E) $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + x = 0$

Déterminer l'équation réduite de cette quadrique et préciser sa nature.

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFR MI L2 2020-2021

EXAMEN DE GEOMETRIE 2(ou GEOMETRIE DE L'ESPACE)

Durée: 2H

EXERCICE 1

L'espace affine euclidien (ε, E) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère l'endomorphisme affine f de ε qui à $M(x, y, z)$ associe $M'(x', y', z')$ tel que : $F(M) = M'(y, x, z+1)$.

Montrer f est une isométrie de ε dont on précisera la nature et les caractéristiques géométriques.

EXERCICE 2

L'espace affine euclidien (ε, E) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit la quadrique d'équation: $(E) : x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - x - z = 0$

Déterminer l'équation réduite de cette quadrique et préciser sa nature.

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFRMI
L2 2020-2021
Session 2 Septembre 2021

EXAMEN DE GEOMETRIE 2(ou GEOMETRIE DE L'ESPACE)
Durée: 2H

EXERCICE 1

L'espace affine euclidien (ε, E) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'endomorphisme affine f de ε qui à $M(x, y, z)$ associe $M'(x', y', z')$ tel que : $F(M) = M'(y + 1, x, z + 1)$.

Montrer f est une isométrie de ε dont on précisera la nature et les caractéristiques géométriques.

EXERCICE 2

L'espace affine euclidien (ε, E) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit la quadrique d'équation: $(E) : x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + x = 0$

Déterminer une équation réduite de cette quadrique et préciser sa nature.

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody UFRMI L2 2021- 2022

EXAMEN DE GEOMETRIE 2 (ou GEOMETRIE DANS L'ESPACE) : Durée 2 h
SESSION 1

Exercice 1

L'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ $M(x,y,z) \mapsto M'(x',y',z')$ tel que $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ z' = z+1 \end{cases}$ une application affine définie par son expression analytique.

Montrer que f est une isométrie de $\mathcal{E}$ dont on précisera la nature et les caractéristiques.

Exercice 2

L'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit la quadrique d'équation :

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - x - z = 0$$

Déterminer l'équation réduite et la nature de cette quadrique

Scanné avec CamScanner

roposition de correction Géométrie dans l'espace : 2019-2020

xercice 1

$= y + 1$
$x + 1$
$' = z$

ontrons que f est une isométrie de $\mathcal{E}$ dont on précisera les éléments caractéristiques géométriques.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ z' = z \end{cases}$$

Soit la matrice associée à $L(f)$ telle que :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons $A \times ({}^tA)$

$$.1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= I_3$ donc f est une isométrie

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

est un antidéplacement.

Déterminons $inv(f)$

$inv(f) \Leftrightarrow f(M) = M$

$$\begin{array}{l} 1 = x \\ 1 = y \\ z = z \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 1 = x \\ + 1 \\ = z \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 0 \ impossible \\ z = z \end{cases}$$

$inv(f) = \emptyset$

est la composée de translation t et de réflexion S.

$f = t_{\vec{u}} o s$, où $\vec{u}$ est le vecteur de translation.

Déterminons $\vec{u}$

$f \circ f = (t_{\vec{u}} o s) o (t_{\vec{u}} o s)$

$o(sot_{\vec{u}})$

$os)ot_{\vec{u}}$

$Id_\varepsilon)ot_{\vec{u}}$ car $sos = Id_\varepsilon$

$= t_{2\vec{u}}$

O étant l'origine du repère

$= 2\vec{u}$

Or $f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow f^2(0) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Déterminons une équation de $\mathcal{P}$.

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow M\overrightarrow{f(M)} = M\overrightarrow{t_{\vec{u}}(M)} = \vec{u}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 1 \\ y' - y = 1 \\ z' - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 - x = 1 \\ x + 1 - y = 1 \\ z - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 0 \ (1) \\ x - y = 0 \ (2) \\ z = z \ (3) \end{cases}$$

Les équations (1) et (2) sont proportionnelle d'où

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

Donc, $\mathcal{P}$ est le plan d'équation :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exercice 2

Soit y la quadratique d'équation :

$x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + x = 0$. Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$

Posons $f(M) = x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + x$

q la forme quadratique associée à f et φ la partie linéaire de f.

$q(M) = x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + x$ et $\varphi(M) = x$

Prenons A la matrice associée à q telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 1) = 0$$

D'où $rg(A) < 3$

Scanné avec CamScanner

Alors y admet soit un centre vide, soit une droite affine ou un plan affine.

On a : $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2y+1=0\\ 2y-2x=0\\ -2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=0\\ x=y\\ 1=0\ impossible\end{cases}$

Donc, y n'a pas de centre.

Polynôme caractéristique de A $P_A(X)$.

$$P_A(X)=\begin{vmatrix}1-X & -1 & 0\\ -1 & 1-X & 0\\ 0 & 0 & -1-X\end{vmatrix}$$

$$P_A(X)=(-1-X)\begin{vmatrix}1-X & -1\\ -1 & 1-X\end{vmatrix}=-(1+X)[(1-X)^2-1]$$

$$P_A(X)=-X(X+1)(X-2)$$

Alors $Sp(A)=\{0,-1,2\}$

Sous espace propre

$$E_0=\left\{X\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathcal{E}/AX=0_\mathcal{E}\right\}$$

$$AX=0_\mathcal{E}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\ -x+y=0\\ -z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ z=0\end{cases}$$

D'où $E_0=<\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}>$

$$E_{-1}=\{X\in\mathcal{E}/(A+I_3)X=0_\mathcal{E}\}$$

$$(A+I_3)X=0_\mathcal{E}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=0\\ -x+2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x\\ x=0\\ z=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z\in\mathbb{R}\end{cases}$$

D'où $E_{-1}=<\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}>$

$$E_2=\{X\in\mathcal{E}/(A-2I_3)X=0_\mathcal{E}\}$$

$$(A-2I_3)X=0_\mathcal{E}\Leftrightarrow\begin{cases}-x-y=0\\ -x-y=0\\ -3z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y\\ z=0\end{cases}$$

D'où $E_2=<\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}>$

Déterminons une base orthonormée des sous-espaces propres.

Soit $\beta_1(V_1,V_2,V_3)$ une base orthogonale directe telle que $\det(V_1,V_2,V_3)=1$

$$V_1=\frac{E_0}{\|E_0\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$V_2=\frac{E_{-1}}{\|E_{-1}\|}=E_{-1}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$V_3=\frac{E_2}{\|E_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}E_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de passage β à β_1 où β est la base canonique de $\mathcal{E}$.

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Posons $X=PX'$ (Formule du changement de base.)

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'\\ z=z'\end{cases}$$

Donc y *devient* :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2-z'^2-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right.$$

Après calcul on a :

$$\Leftrightarrow 2x'^2-z'^2+\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$$

Posons $X=x'$, $Y=z'$ et $Z=y-x'$

Alors, on a : $2X^2-Y^2-\frac{1}{\sqrt{2}}Z=0$

$$\Leftrightarrow\frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}-Y^2-\frac{1}{\sqrt{2}}Z=0$$

Donc, la quadratique y est une paraboloïde hyperbolique

Scanné avec CamScanner

Université FHB
MATHS-INFO L2

Année 2020-2021

CORRECTION GEOMETRIE 2
Session 1

Exercice 1

On considère l'endomorphisme affine $f+\varepsilon$ qui à $M(x,y,z)$ associe $M(x',y',z')$ tel que :
$f(M) = M'(y, x, z+1)$
Montrons que f est une isométrie de ε dont on précisera la nature et les caractéristique géométriques.

Soit $\varphi = L(f)$ et $M = mat(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$${}^tM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; M'M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M'M = I_3$. donc f est isométrie.
$det(M) = -1$. donc f est antideplacement.
$Inv(f) = \{M(x,y,z) \backslash f(M) = M\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = x \\ z = z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - x = 0 \text{ absurde.} \\ -1 = 0 \end{cases}$$

Donc $Inv(f) = \emptyset$
Etant donné que f est un antidéplacement et que $Inv(f) = \emptyset$ donc f est la composée de translation et de réflexion.
$f = S \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ S$ où S est une reflexion d'un plan $\mathcal{P}$ $\overrightarrow{u}$ appartient à la direction de $\mathcal{P}$.

Calculons $\overrightarrow{u}$
$f \circ f = (t_{\overrightarrow{u}} \circ S) \circ (S \circ t_{\overrightarrow{u}}) = t_{\overrightarrow{u}} \circ S \circ S \circ t_{\overrightarrow{u}}$ or $S \circ S = Id_\varepsilon$ où $f \circ f = t_{2\overrightarrow{u}}$
$f \circ f = t_{2\overrightarrow{u}} \Leftrightarrow \forall M \in \varepsilon f \circ f(M) = M + 2\overrightarrow{u}$
$\Leftrightarrow f[f(M)] = M + 2\overrightarrow{u}$
$\Leftrightarrow f[f(M)] - M = 2\overrightarrow{u}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{M f[f(M)]} = 2\overrightarrow{u}$

Pour $M = O$ origine du repère, on a: $\overrightarrow{O f[f(O)]} = 2\overrightarrow{u}$, $f(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

$$\overrightarrow{O\,f[f(O)]} = 2\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = 2\vec{u} \Leftrightarrow 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 2\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Déterminons l'équation du plan

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow S(M) = M \Leftrightarrow T_{\vec{u}}[S(M)] = T_{\vec{u}}(M)$
$\Rightarrow f(M) = M + \vec{u}$
$f(M) - M = \vec{u}$
$\overrightarrow{M\,f(M)} = \vec{u}$

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{M\,f(M)} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}y\\x\\z+1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 0 \\ x - y = 0 \\ z + 1 - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = 0$$

D'où $\mathcal{P}$ d'équation $x - y = 0$

Exercice 2

Soit la quadratique d'équation:
$(E) : x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - x - z$
Déterminons l'équation réduite de cette quadratique et précisons sa nature.

* Equation réduite
$(E) : \overline{x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - x - z}$
$(E) : A + L + k$ Avec A la matrice de la partie quadratique, L la partie linéaire et k la constante.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} \text{ et } k = 0$$

On a $det(A) = 0$ d'où (E) n'a pas de centre de symétrie. Donc le nouveau repère sur $\mathcal{R}_1 = (O, \mathcal{B}_1)$ à $\mathcal{B}_1$ est une base orthonormale directe composée de vecteurs propres de A.

* Déterminons $\mathcal{B}_1$

$$P_A = \begin{vmatrix} 1\text{-x} & 1 & 0 \\ 1 & 2\text{-x} & -1 \\ 0 & -1 & 1\text{-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 + c_3 & & \\ 1\text{-x} & 1 & 0 \\ 0 & 2\text{-x} & -1 \\ 1\text{-x} & -1 & 1\text{-x} \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2\text{-x} & -1 \\ 1 & -1 & 1\text{-x} \end{vmatrix}$$

$$P_A = (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2\text{-x} & -1 \\ 1 & -2 & 1\text{-x} \end{vmatrix}_{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} = (1-x)\begin{vmatrix} 2\text{-x} & -1 \\ -2 & 1\text{-x} \end{vmatrix}$$

$P_A = (1-x)\left[(2-x)(1-x) - 2\right] = x(1-x)(x-3)$ D'où $Sp(A) = \{0, 1, 3\}$

Scanné avec CamScanner

Déterminer les vecteurs propres associés à chaque valeur propre.

$$U_0\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in Ker(A-0\times I_3) \Leftrightarrow [A-0\times I_3]U_0=0$$

$$\Leftrightarrow AU=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0\\ x+2y-z=0\\ -y+z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y\\ z=y\\ y=y\end{cases}$$

$Ker(A-0\times I_3)=\{(-y,y,y),\ y\in\mathbb{R}\}=\{y(-1,1,1),\ y\in\mathbb{R}\}$. D'où $U_0=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$U_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow AU_1=U_1$$

$$\begin{cases} x+y=x\\ x+2y-z=y\\ -y+z=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-x=0\\ x+2y-z-y=0\\ -y+z-z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0\\ x+y-z=0\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z\\ y=0\\ z=z\end{cases}$$

$Ker(A-I_3)=\{(z,0,z),\ z\in\mathbb{R}\}=\{z(1,0,1),\ z\in\mathbb{R}\}$. D'où $U_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$U_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow AU_3=3U_3$$

$$\begin{cases} x+y=3x\\ x+2y-z=3y\\ -y+z=3z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3x=0\\ x+2y-z-3y=0\\ -y+z-3z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y=0\\ x-y-z=0\\ -y-2z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}y\\ z=-\frac{1}{2}y\\ y=y\end{cases}$$

$Ker(A-I_3)=\{(\frac{1}{2}y,y,-\frac{1}{2}y),\ y\in\mathbb{R}\}=y(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})$. D'où $U_3=\begin{pmatrix}1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix}$

Déterminons $\mathcal{B}_1$

$$V_0=\frac{1}{||U_0||}U_0 \text{ avec } ||U_0||=\sqrt{3}$$

$$V_0=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$$

$$V_1=\frac{1}{||U_1||}U_1 \text{ avec } ||U_1||=\sqrt{2}$$

$$V_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$$

Scanné avec CamScanner

$$V_3 = \frac{1}{||U_3||}U_3 \text{ avec } ||U_3|| = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$V_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}) \Rightarrow V_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$$

Dans l'ordre V_0 V_1 V_3 le déterminant est positif dans $\mathcal{B}_1 = (\vec{V_0}, \vec{V_1}, \vec{V_3})$ est une base orthonormale directe. D'où le nouveau repère $\mathcal{R}_1 = (O, \mathcal{B}_1)$

On a: $X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

Matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

On a: $X = P\,X_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}z_1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}z_1 \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}z_1 \end{cases}$

Dans le repère $\mathcal{R}_1$ l'équation de (E) devient:

$$(E) : 0x_1^2 + y_1^2 + 3z_1^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}z_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}z_1 = 0$$

$$(E) : y_1^2 + 3z_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1 = 0 \Leftrightarrow y_1^2$$

$$(E) : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z}{c} = 0$$

Donc (E) est l'équation d'une paraboloïde elliptique.

VALIDE

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE GEOMETRIE 2 SESSION 1 ANNEE 2021-2022

EXERCICE 1

$f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}, \begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ z' = z + 1 \end{cases}$

$A = Mat(L(f), \beta) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Donc f est un antidéplacement.

$M \in Inv(f) <=> \begin{cases} x = y \\ y = x \\ z = z + 1 \end{cases}$

$<=> \begin{cases} y = x \\ 0 = 1' \end{cases}, Inv(f) = \emptyset$

Inv(f)=ϕ donc f est un antidéplacement.

Donc f=$f = t_{\vec{v}} o d_p$; on a $fof = t_{\overrightarrow{2v}}$

$t_{2v}(0) = 0' = f'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} => \vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$=> d_p = t_{-\vec{v}} o f = \begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ z' = z + 1 \end{cases}$

EXERCICE 2

$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - x - z = 0\ (E)$

$(E): {}^tXAX + {}^tLX + k = 0 \quad avec\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$

$L = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $k = 0$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)(3-\lambda)$

- Les valeurs propres : Spec(A)={0,1,3}
- Vecteurs propres

$\vec{u} \in E_0 <=> E_0 = \mathbb{R}_{\vec{u}_0}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \in E_1 <=> E_1 = \mathbb{R}_{\vec{u}_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \in E_3 <=> E_3 = \mathbb{R}_{\vec{u}_3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{v_0} = \frac{\vec{u}_0}{\|\vec{u}_0\|}$; $\overrightarrow{v_1} = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$; $\overrightarrow{v_2} = \frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|}$

$B(\overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3})$ est la base orthonormée directe car $\det(u_0, u_1, u_3) > 0$

$P = Pas_{B_0 B} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

On a $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} => A = PDP^{-1}$

$(E): {}^tXPDP^{-1}X + {}^tLX + k = 0$;

On pose $Y = P^{-1}X \quad => X = PY$

${}^tYDY + {}^tLX = 0$ On pose $Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

$(-1\ 0\ -1)\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$

$$y_1^2 + 3z_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1 = 0$$

$$<=> \left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3z_1^2 = \frac{1}{2}$$

Alors c'est un cylindre elliptique

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITÉ FHB COCODY
UFR SSMT

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018-2019
SESSION DE [illegible] 2020

LICENCE 2 SM & IG
EXAMEN D'ELECTROMAGNÉTISME
Durée : 2 heures

Exercice 1. (3 pts)

On considère dans un repère cartésien (O,x,y,z), une demi spire de centre O, de rayon R, d'axe $(O$ située dans le plan (yOx) et parcourue par un courant continu d'intensité I (Figure 1).

1. Quel est le plan d'antisymétrie de cette distribution ?
2. Quel est le plan de symétrie de cette distribution ?
3. Montrer que le champ magnétique en tout point $M(0,0,z)$ de son axe (Oz) est de la forme

$$\vec{B}(M) = B_z \vec{e}_z - B_y \vec{e}_y$$

4. Quelle est la forme du vecteur champ $\vec{B}(O)$ créé par la demi spire au point O ?

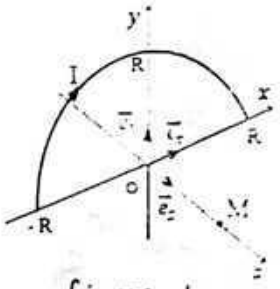


figure 1

Exercice 2. (3 pts)

On considère une distribution constituée par un fil rectiligne de longueur finie parcouru par un courant d'intensité I en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) (figure 2).

1. Faire l'étude des invariances et en déduire les coordonnées dont dépend le champ magnétique
2. Donner l'orientation du vecteur $\vec{B}(M)$ pour tout point M appartenant à l'axe Oy, $y > 0$.

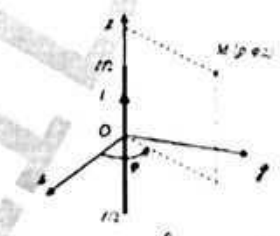


figure 2

Exercice 3. (8 pts)

On considère un fil rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant d'intensité I, dans un repère en coordonnées cartésiennes (Figure 3a).

1. Un élément de longueur dl pris autour d'un point P du conducteur crée un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}(M)$ en tout point M situé à une distance $OM = r$ du conducteur. Donner l'expression de $d\vec{B}(M)$.
2. Donner les expressions respectives des projetés des vecteur $d\vec{l}$ et $\vec{PM}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
3. En déduire le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par le fil au point M.
4. On place au voisinage de ce fil, un cadre rectangulaire ABCD ($AB = CD = a$, $BC = DA = b$,

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITÉ FHB COCODY
UFR SSMT

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019-2020
SESSION DU 8 DÉCENBRE 2020

LICENCE 2 SM & IG
EXAMEN D'ELECTROMAGNÉTISME
Durée : 2 heures

Exercice 1. (5 pts)

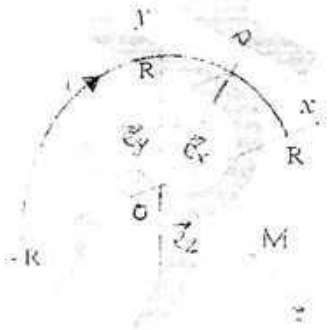
On considère dans un repère cartésien (O,x,y,z), une demi spire de centre O, de rayon R, d'axe (Oz), située dans le plan (yOx) et parcourue par un courant continu d'intensité I (Figure 1).

1. Quel est le plan d'antisymétrie de cette distribution de courant ?
2. Quel est le plan de symétrie de cette distribution de courant ?
3. Montrer que le champ magnétique en tout point M$(0,y,z)$ est de la forme

$$\vec{B}(M) = B_z \vec{e}_z + B_y \vec{e}_y$$

où B_z et B_y sont les composantes du champ $\vec{B}$

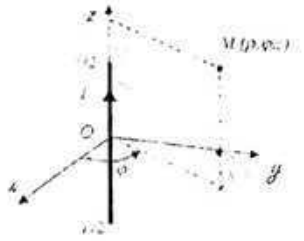
4. Quelle est la forme du vecteur champ $\vec{B}(O)$ créé par la demi spire au point O?



Exercice 2. (5 pts)

On considère une distribution constituée par un fil rectiligne de longueur finie parcouru par un courant d'intensité I en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) (figure 2).

1. Faire l'étude des invariances et en déduire les coordonnées dont dépend le champ magnétique.
2. Déterminer l'orientation du vecteur $\vec{B}(M)$ pour tout point M appartenant à l'axe $Oy(y > 0)$.



Exercice 3. (10 pts)

On considère un fil rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant d'intensité I_1 dans un repère en coordonnées cartésiennes (Figure 3a).

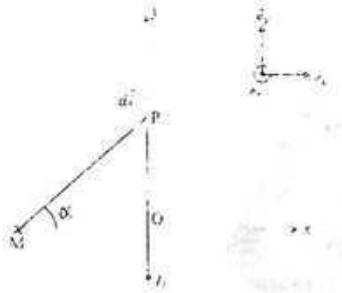
1. Un élément de longueur dl pris autour d'un point P du conducteur créé un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}(M)$ en tout point M situé à une distance $OM = x$ du conducteur. Donner l'expression de $d\vec{B}(M)$.
2. Donner les expressions respectives des projetés des vecteur $d\vec{l}$ et $\overrightarrow{PM}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Scanné avec CamScanner

3. En déduire le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par le fil au point M.
4. On place au voisinage de ce fil, un cadre rectangulaire ABCD ($AB = CD = a$, $BC = DA$ parcouru par un courant d'intensité I_2. La distance qui sépare le fil de la médiatrice principale cadre ABCD est $R>a$ (Figure 3b). Le cadre baigne dans le champ magnétique créé par le fil longueur infinie. Comment appelle t-on la force qui s'exerce sur ce circuit rectangulaire ABCD ?
5. Quelle est l'expression du champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le fil infini en tout point M ∈ [AD] ?
6. Ce champ est-il uniforme en tout point du segment [AD]?
7. En déduire les forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ qui s'exercent respectivement sur les côtés AD et CB du cadre.
8. En tout point M, situé à une distance x du fil, le champ magnétique est donné par l'expression

$$\vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\vec{e}_\theta$$

Déterminer les expressions des forces $\vec{f}_3$ et $\vec{f}_4$ qui s'exercent respectivement sur les côtés BA DC.
9. Quelle est la résultante $\vec{f}$ des forces qui s'exercent sur le cadre ?
10. A quelle(s) condition(s) le cadre se rapproche-t-il du fil?



(a)



(b)

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

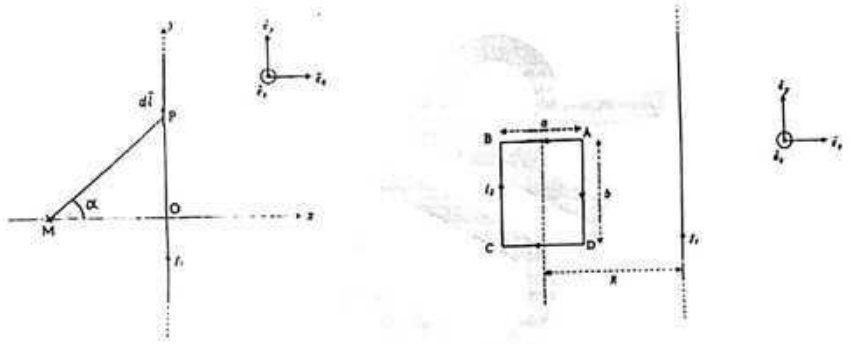
parcouru par un courant d'intensité I_2. La distance qui sépare le fil de la médiatrice principale du cadre ABCD est $R > a$ (Figure 3b). Le cadre beigne dans le champ magnétique créé par le fil de longueur infinie. Comment appelle t-on la force qui s'exerce sur ce circuit rectangulaire ABCD ?

5. Quelle est l'expression du champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le fil infini en tout point $M \in [AD]$?
6. Ce champ est-il uniforme en tout point du segment [AD]?
7. En déduire les forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ qui s'exercent respectivement sur les côtés AD et CB du cadre.
8. En tout point M, situé à une distance x du fil, le champ magnétique est donné par l'expression

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\vec{e}_z$$

Déterminer les expressions des forces $\vec{f}_3$ et $\vec{f}_4$ qui s'exercent respectivement sur les côtés BA et DC.

9. Quelle est la résultante $\vec{f}$ des forces qui s'exercent sur le cadre?
10. A quelle(s) condition(s) le cadre se rapproche-t-il du fil?



(a) (b)

figure 3

Exercice 4. (6 pts)

On considère un solénoïde (S_1) de longueur infinie, de rayon R_1 consitué de n spires jointives par unité de longueur parcourues par un courant permanant d'intensité I_1. On place à l'intérieur du solénoïde,

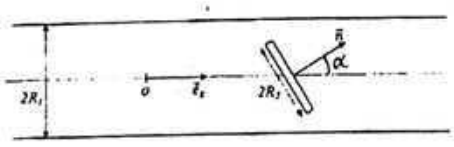


figure 4

une spire circulaire (S_2) de rayon $R_2 < R_1$. On définit $\alpha = (\vec{e}_z, \vec{n}_1)$ où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface de la spire (Figure 4).

1. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}_1$ créé sur l'axe du solénoïde.
2. Déterminer l'expression du flux Φ_{21} du champ $\vec{B}_1$ à travers la spire (S_2).
3. En déduire l'inductance mutuelle L_{21} des deux circuits.
4. En réalité, la spire circulaire est animée d'un mouvement de rotation avec une vitesse angulaire $\alpha = \omega t$, où ω désigne la pulsation. Déterminer la force électromotrice $e(t)$ induite dans la spire .
5. La spire ayant une résistance interne R, quelle est l'expression du courant $i(t)$ induit dans la spire?
6. Calculer l'amplitude maximale I_m de $i(t)$. On donne $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}\, SI$, $I_1 = 0,1\, A$, $\omega = 100\pi\, rd/s$, $R = 0,1\,\Omega$, $R_2 = 10^{-2}\, m$, $n = 10^3\, /m$

Scanné avec CamScanner

Université FHB Cocody, Abidjan
UFR-SSMT/Département de Physique

Année universitaire 2020-20..
(Session du 16 Septembre 20..)

LICENCE 2 (MI-IG)
Examen d'ELECTROMAGNETISME
(Durée 02H00)

Questions (4 points)

1. Quand dit-on qu'une distribution de courant possède un plan de symétrie ?
2. Pourquoi dit-on que le champ magnétique est non divergent ?
3. *Répondre par Vrai ou Faux*

3.1. Les vecteurs champs magnétiques en deux points symétriques d'une distribution possédant un pl... de symétrie sont eux même symétriques ?

3.2. Les vecteurs champs magnétiques en deux points symétriques d'une distribution possédant un pl... d'antisymétrie sont eux même symétriques ?

Exercice 1 (6 points)

1. Déterminer le champ magnétostatique $\vec{B}(O)$ créé par une spire circulaire de centre O de rayon R ... d'axe Oz parcourue par un courant d'intensité I *(figure 1)* au centre O de la spire.
2. On considère par la suite, le circuit représenté par la *figure 2* constitué de deux fils semi-infinis ... et (d_2) reliés par une semi-spire circulaire de centre O et de rayon R. Le circuit est contenu dans ... plan (xOy) et est parcouru par un courant I. Déterminer le champ magnétostatique $\vec{B}(O)$ au point ... dans la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

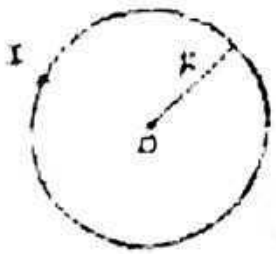


Figure 1

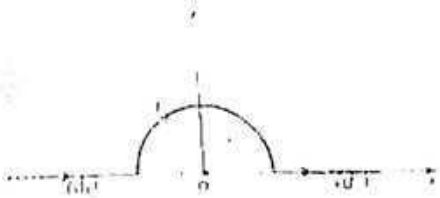


Figure 2

Exercice 2 (10 points)

Un conducteur (C_1) *filiforme* de longueur infinie est parcouru par un courant d'intensité I. L'espace est orienté selon une base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

1. Quelle est le champ magnétique $\vec{B}$ crée par (C_1) en un point M situé à la distance ρ du conducteur
2. Représenter le vecteur $\vec{B}$ et les lignes de champ.

En réalité le conducteur (C_1) est un cylindrique de rayon R, d'axe Oz. Il est parcouru par un courant volumique uniforme de vecteur densité $\vec{j} = j_0\vec{e}_z$ où J_0 est un réel. A l'extérieur de (C_1), c'est-à-dire pour $\rho > R, \vec{j} = \vec{0}$.

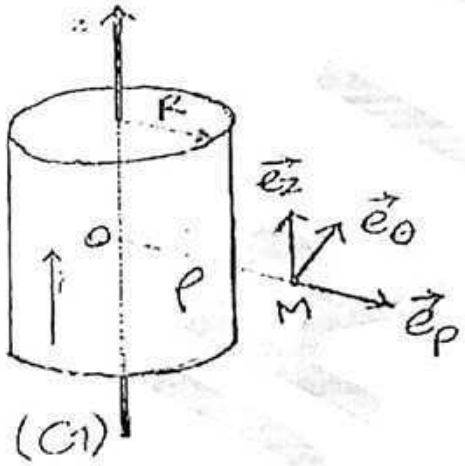
3. Donner l'expression de l'intensité du courant enlacé par le contour circulaire de rayon ρ et d'axe Oz pour $\rho \geq R$ (désigné par I_{ext}) et pour $\rho \leq R$ (désigné par I)

Scanné avec CamScanner

4. Donner l'expression de la circulation (C) du champ magnétique $\vec{B}$ créée par ce conducteur (C_1) le long du contour circulaire de rayon ρ et d'axe Oz.
5. En déduire les expressions du champ magnétique $\vec{B}$ à $\rho \geq R$ puis à $\rho \leq R$.
6. Donner les composantes du potentiel vecteur $\vec{A}$ en fonction de A_0, ρ, R, μ_0 et J_0 à $\rho \geq R$ puis à $\rho \leq R$. On donne $A_z|0| = A_0$ à $\rho = 0$.

On rappelle : $\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$ et le rotationnel d'un vecteur $\overrightarrow{F}$ dans une base cylindrique est :

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho F_\varphi)\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\varphi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$



Scanné avec CamScanner

UNIVERSITÉ FHB COCODY
UFR MI

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021-2022
SESSION DU 10 MARS 2022

UE ELECTROMAGNÉTISME
DURÉE : 2H00

Question (4 pts)
Dans un repère cartésien, un circuit carré $A_1(a,a,0);A_2(-a,a,0);A_3(-a,-a,0);A_4(a,-a,0)$, est par
par un courant I (a est un nombre entier nature constant).
1. Déterminer les plans de symétries et d'antisymétrie de cette distribution de courant.
2. Quelles sont les invariances de cette distribution ?

Exercice 1 (10 pts)
Une spire carrée plane $P_1P_2P_3P_4$, de côté a, est parcourue par un courant stationnaire d'intensité I (figu
1. Quel est le champ magnétique $\vec{B}_{P_1P_2}(M)$ produit par le côté P_1P_2 en un point M de son plan diam
Le point M est situé à une distance r de P_1P_2.
2. En vous servant de la symétrie de distribution du courant, donner l'orientation du champ magn
$\vec{B}(M)$ créé par la spire en un point M(0,0,z) de son axe (Oz).
3. Montrer que le champ au centre O de la spire $P_1P_2P_3P_4$ est

$$\vec{B}(O) = 2\sqrt{2}\frac{\mu_0 I}{\pi a}\vec{e}_z$$

4. Quelle est l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par la spire sur son axe (Oz) à une dis
de son centre O. On exprimera $\vec{B}(M)$ en fonction de $z = OM$, a et I
5. La spire est déformée en un polygone à N côtés, plan régulier inscrit dans un cercle de centre
rayon R. Déterminer l'expression du champ $\vec{B}(M)$ au point $M(0,0,z)$.
6. En déduire l'expression du champ $\vec{B}(M)$ créé par une spire circulaire en un point M de son axe

Exercice 2 (6pts)
Une spire rigide de côté a, d'arie S est parcourue par un courant d'intensité I. La spire de centre M, m
sans frottement autour d'un axe $(\Delta) = (Mz)$ est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, av
direction et le sens de l'axe (Mx). Sa position est repérée par l'angle θ (Figure 2).
1. Quelle est force qui s'exerce sur la spire ?
2. On note $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_3$ les forces subies respectivement par les côtés perpendiculaires à (Mz) de milieu
P_3, $\vec{f}_2$ et $\vec{f}_4$ les forces subies respectivement par les côtés parallèles à (Mz) de milieux P_2 et P_4. Déter
la somme totale des forces exercées sur la spire.
3. Calculer le moment des forces de Laplace $\vec{\Gamma}_\Delta$ par rapport à (Δ) en fonction de I, S B et θ.
4. Montrer que l'énergie potentielle de cette spire dans la position repérée par θ peut s'écrire

$$Ep = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$$

5. Quelles sont les valeurs de θ pour lequelles le système est en équilibre?

Scanné avec CamScanner

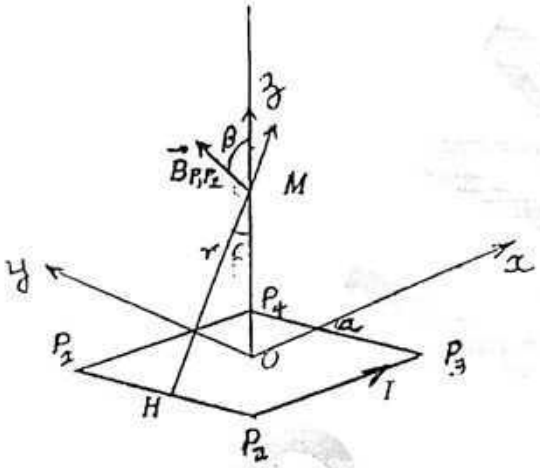


Figure 1:

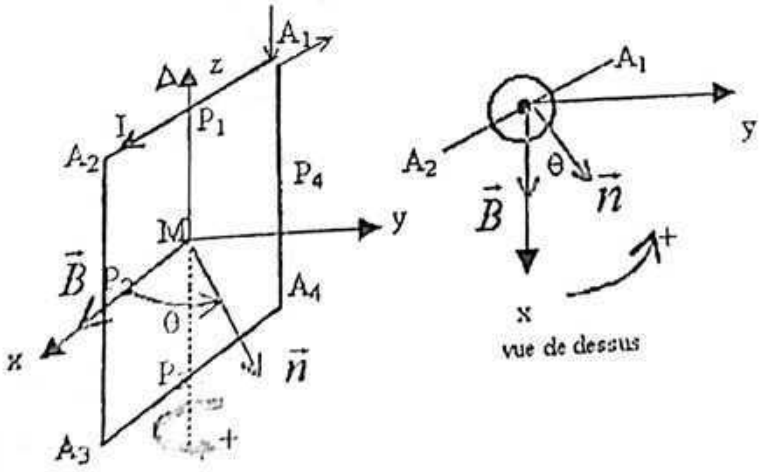


Figure 2:

Scanné avec CamScanner

***VALIDEUR LMD EDITION ?

Licence Master Doctorat <<Tout est possible à celui qui croit.>>

UNIVERSITE FHB COCODY
UFR MI

ANNEE UNIVERSITAIRE 2021-2022
SESSION DU 21 JUILLET 2022

UE ELECTROMAGNETISME
DURÉE : 2H00

Question (4 pts)

Dans un repère cartésien, un circuit carré $A_1(a,a,0); A_2(-a,a,0); A_3(-a,-a,0); A_4(a,-a,0)$, est parcouru par un courant d'intensité I (a est un nombre entier nature constant).

1. Représenter le circuit $A_1A_2A_3A_4$ dans un repère (O,x,y,z).
2. Donner le ou les plans de symétrie de cette distribution de courant.
3. Donner le ou les plans d'antisymétrie de cette distribution de courant.
4. Quelles sont les invariances de cette distribution ?

Exercice 1 (8 pts)

Une spire carrée plane $P_1P_2P_3P_4$, de côté a, est parcourue par un courant stationnaire d'intensité I (figure

1. Quel est le champ magnétique $\vec{B}_{P_1P_2}(M)$ produit par le côté P_1P_2 en un point M de son plan diamét
Le point M est situé à une distance r de P_1P_2.
2. En vous servant de la symétrie de distribution du courant, donner l'orientation du champ magné
$\vec{B}(M)$ créé par la spire en un point M(0,0,z) de son axe (Oz).
3. Quelle est l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par la spire sur son axe (Oz) à une distan
de son centre O. On exprimera $\vec{B}(M)$ en fonction de $z = OM$, a et I
4. En déduire l'expression du champ $\vec{B}(O)$ au centre O de la spire $P_1P_2P_3P_4$
5. La spire est déformée en un polygone à N côtés, plan régulier inscrit dans un cercle de centre O
rayon R. Déterminer l'expression du champ $\vec{B}(M)$ au point $M(0,0,z)$.
6. En déduire l'expression du champ $\vec{B}(M)$ créé par une spire circulaire en un point M de son axe $(Oz$

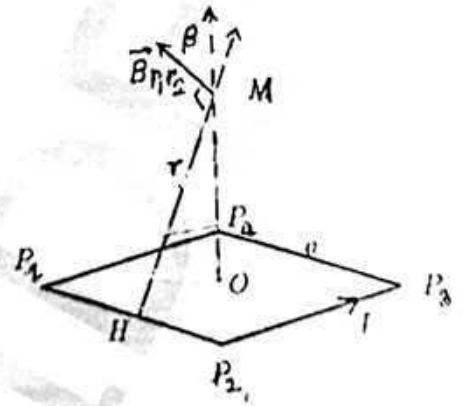


Figure 1:

Exercice 2 (8 pts)

Une spire rectangulaire $NPQR$, d'aire S de largeur $RQ = NP = a$ et de longueur $RN = QP = b$ est parcourue par un courant d'intensité I. La spire de centre O, mobile sans frottement autour de son axe (Δ) est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_x$ (Figure 2).

1. Comment appelle t-on la force qui s'exerce sur chaque côté de la spire ?
2. Déterminer les forces $\vec{f}_{QR}$ et $\vec{f}_{NP}$ qui s'exercent respectivement sur les côtés QR et NP de la spire.
3. Déterminer les forces $\vec{f}_{RN}$ et $\vec{f}_{PQ}$ qui s'exercent respectivement sur les côtés RN et PQ de la spire.
4. Calculer le moment des forces de Laplace $\vec{\Gamma}_\Delta$ par rapport à (Δ) en fonction de I, S, B et α.
5. Montrer que

$$\vec{\Gamma}_\Delta = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

Scanné avec CamScanner

désigne le moment magnétique de la spire.
Quelles sont les valeurs de α pour lequelles le système est en équilibre?

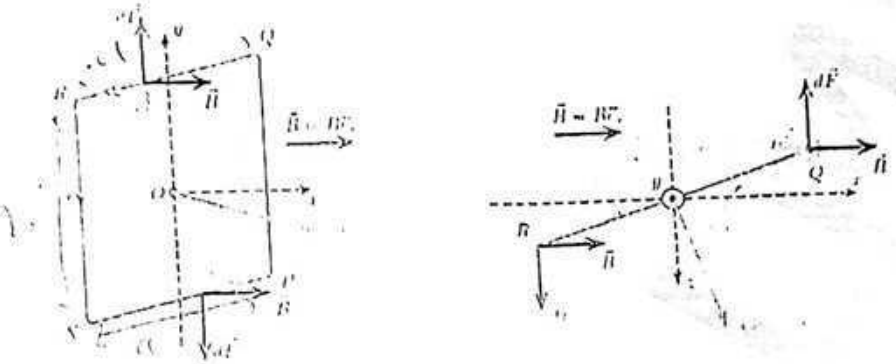


Figure 2:

Scanné avec CamScanner

Examen d'électromagnétisme 2018-2019

Session 1 :

Exercice 1 :



1) Quel est le plan d'antisymétrie de cette distribution ?
Tout plan contenant l'axe (oz) est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant.

2) Plan de symétrique
(yox) est un plan de symétrique pour la distribution de courant.

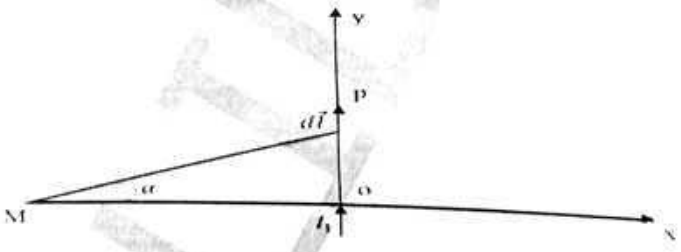
3) $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\sin^3(\alpha)\int_0^{\pi} d\varphi\overrightarrow{e_z}$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4R}\sin^3(\alpha)\overrightarrow{e_z}$$

4)

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{4R}\overrightarrow{e_z}$$

Exercice 2 :



1) Donnons l'expression de $d\vec{B}(M)$

$$\boxed{d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\wedge\overrightarrow{PM}}{\|PM\|}} \quad (1)$$

2) Donnons l'expression de $d\vec{l}$ et $\overrightarrow{PM}$ dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

$$d\vec{l} = dy\overrightarrow{e_y}$$

Scanné avec CamScanner

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} = -y\overrightarrow{e_y} - x\overrightarrow{e_x}$$

3) Déduisons le champ magnétique $\vec{B}(M)$

$$d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM} = dy\overrightarrow{e_y} \wedge \left(-y\overrightarrow{e_y} - x\overrightarrow{e_x}\right) = xdy\overrightarrow{e_z}$$

$$tg\alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xtg\alpha \Rightarrow \frac{dy}{dy} = \frac{x}{(\cos^2\alpha)} \Rightarrow dy = \frac{x}{(\cos^2\alpha)}d\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{PM} \Rightarrow \left(\frac{1}{PM}\right)^3 = \left(\frac{cos\alpha}{x}\right)^3$$

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{x^2}{\cos^2\alpha}d\alpha\left(\frac{cos\alpha}{x}\right)^3\overrightarrow{e_z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}cos\alpha d\alpha\overrightarrow{e_z} \quad ①$$

Le fil d'infini,

Donc $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(cos\alpha d\alpha)\right)\overrightarrow{e_z}$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\overrightarrow{e_z}$$

4) Il s'agit de la force de Laplace.

5) L'expression du champ magnétique $\vec{B}_1$.

6) Oui le champ magnétique en tout point du segment est uniforme car $B_1 = cste$

7) En déduire les forces $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$

$$\overrightarrow{f_1} = I_2\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{B_1(M)} = -I_2 b\overrightarrow{e_z} \wedge \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\left(R - \frac{\alpha}{2}\right)}\right)\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{f_1} = \frac{\mu_0 b}{2\pi}I_1 I_2\left(\frac{1}{\left(R - \frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$

$$\overrightarrow{f_1} = \mu_0 b I_1 I_2\left(\frac{1}{0-a} - \frac{1}{\left(R-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$

$\overrightarrow{f_2} = I_2\overrightarrow{CB} \wedge \vec{B}_2(M)$ où $\overrightarrow{CB} = b\overrightarrow{e_y}$ et $\vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\left(R-\frac{\alpha}{2}\right)}\overrightarrow{e_z}$

$$\overrightarrow{f_2} = I_2\, b\overrightarrow{e_y} \wedge \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\left(R - \frac{\alpha}{2}\right)}\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{f_1} = \frac{\mu_0 b}{2\pi}I_1 I_2\left(\frac{1}{\left(R + \frac{\alpha}{2}\right)}\right)\overrightarrow{e_x}$$

8)

Scanné avec CamScanner

$$\vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\vec{e_z}$$

Déterminons les forces $\vec{f_3}$ et $\vec{f_4}$.

$d\vec{f_3} = I_2 d\vec{l} \wedge \vec{B_z}(M) d\vec{l}$ avec $d\vec{l} = dx\vec{e_x}$.

$= I_2 dx\vec{e_x} \wedge \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\vec{e_z}$

$$d\vec{f_3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{dx}{x}$$

$$\vec{f_3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_{R-\frac{\alpha}{2}}^{R+\frac{\alpha}{2}} \frac{dx}{x}$$

$$\vec{f_3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\left(\frac{R+\frac{\alpha}{2}}{R-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

De même , $\vec{f_4} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\left(\frac{R+\frac{\alpha}{2}}{R-\frac{\alpha}{2}}\right)$

9) La résultante de $\vec{f}$

$\vec{f} = \vec{f_1} + \vec{f_2} + \vec{f_3} + \vec{f_4}$ or $\vec{f_3} + \vec{f_4} = \vec{0}$

$\vec{f} = \vec{f_1} + \vec{f_2}$

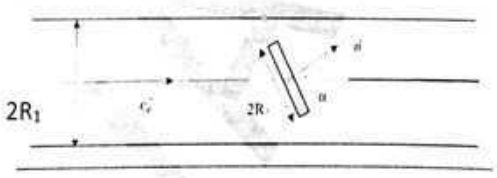
$$\vec{f} = \frac{\mu_0 b I_1 I_2}{2\pi}\left(\frac{1}{\left(R+\frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{1}{\left(R-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$

10) Conditions de rapprochement du cadre vers le fil.

Le cadre se rapproche du fil si $I_1 I_2 > 0$.

Donc le cadre se rapproche du fil à condition que la force de résistance $\vec{f} < 0 \Rightarrow I_1 I_2 > 0$.

Exercice 3 :



1) Donnons l'expression du champ magnétique B_1.

Scanné avec CamScanner

$\overrightarrow{B_1} = \mu_0 n I_1 \overrightarrow{e_z}$

2) Déterminons l'expression du $\emptyset_{21}$,

$$\emptyset_{21} = \int_{S_2} \overrightarrow{B_1} d\overrightarrow{S_2} = BS_2 cos\alpha \text{ ou } \alpha = (\overrightarrow{e_z}, \vec{n})$$

$$\emptyset_{21} = \mu_0 n I_1 \pi R_2^2 cos\alpha$$

3) Inductance Mutuelle L_{21}

$$L_{21} = \frac{\emptyset_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 n I_1 \pi R_2^2 cos\alpha}{I_1}$$

$$L_{21} = \mu_0 n_1 \pi R_2^2 cos\alpha$$

4) Déterminons $e(t)$

$$e(t) = -\frac{d\emptyset(t)}{dt} = -\frac{-d(\mu_0 n I_1 \pi R_2^2 \cos(wt))}{dt}$$

$$e(t) = \mu_0 n I_1 \pi R_2^2 w \sin(wt)$$

5) $i(t) = \frac{e(t)}{R} \Rightarrow i(t) = \frac{\mu_0 n I_1 \pi R_2^2 w \sin(wt)}{R}$

6) Calculons I_m

On a : $i(t) = I_m \sin(wt)$; par identification

$$I_m = \frac{\mu_0 n I_1 \pi R_2^2 w}{R}$$

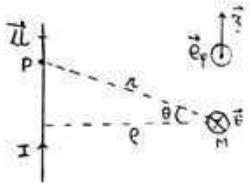
$I_m = ?$

Scanné avec CamScanner

Correction d'Electromagnétisme session 1

Exercice 1

1) Première méthode



Posons $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$ puisque $\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int \frac{\overrightarrow{dl}\wedge\vec{r}}{r^3}$

Et que $\overrightarrow{dl}\wedge\vec{r} = dl.r\ sin(\overrightarrow{dl},\vec{r})\vec{e}_\varphi$ et $sin(\overrightarrow{dl},\vec{r}) = cos\theta$

Alors $\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int \frac{dl.r}{r^3} cos\theta\ \vec{e}_\varphi$ ①

On a : $cos\theta = \frac{\rho}{r} \Rightarrow r = \frac{\rho}{cos\theta}$ et $l = \rho tg\theta$ car $tg\theta = \frac{l}{\rho} \Rightarrow dl = \frac{\rho}{\cos^2\theta}d\theta$

D'où ① devient $\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int \frac{\rho}{cos^3\theta}\frac{\cos^2\theta}{\rho^2} cos\theta\ \vec{e}_\varphi$

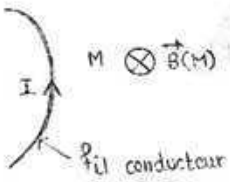
$$\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos\theta}{\rho}.d\theta\ \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}[sin\theta_1 - sin\theta_2]\ \vec{e}_\varphi$$

Et puisque le fil est infinie alors $\theta_1 = -\theta_2$ d'où

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu.I}{2\pi}.\vec{e}_\varphi}$$

2)



3) Le champ magnétique est non divergent.

Preuve : calcul la divergence du champ magnétique à partir du champ créé par un courant volumique.

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}\wedge\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}dv$$

$$div\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int div\left(\vec{j}\wedge\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right)dv$$

Scanné avec CamScanner

On rappelle que

$$\begin{cases} div(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b}.\overrightarrow{rot}(\vec{a}) - \vec{a}.\overrightarrow{rot}(\vec{b}) \\ \dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = -\overrightarrow{grad}\left(\dfrac{1}{PM}\right) \end{cases}$$

$$div\left(\vec{j} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right) = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\overrightarrow{rot}(\vec{j}) - \vec{j}.\overrightarrow{rot}\left(\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right)$$

Comme le vecteur densité volumique $\vec{j}$ est uniforme au point P, $\overrightarrow{rot}(\vec{j}) = \vec{0}$

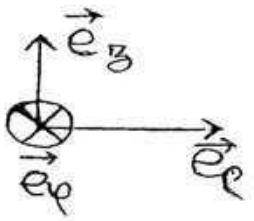
Par ailleurs $-\vec{j}.\overrightarrow{rot}\left(\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right) = -\vec{j}.\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{PM}\right)\right) = 0$

Donc $div\vec{B} = 0$

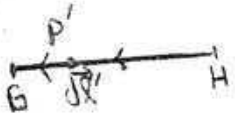
4) Sachant que Donc $div\vec{B} = 0$ et que la divergence du rotationnel d'un champ vectoriel est nulle, on en déduit qu'il existe un champ vectoriel $\vec{A}$ appelé potentiel de vecteur tel que : $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$

Exercice 2

1) Calculons $\vec{B}_{AC}$ et $\vec{B}_{GH}$ au point O.



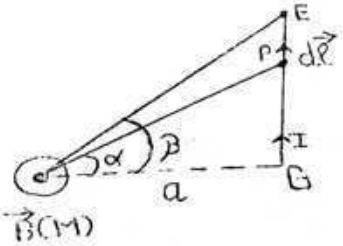


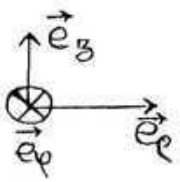


On a : $d\vec{l}//\overrightarrow{PO} \Rightarrow \vec{B}_{AC} = \vec{0}$

$d\vec{l}//\overrightarrow{PO} \Rightarrow \vec{B}_{GH} = \vec{0}$

2) Calculons $\vec{B}_{CD}(O)$ et $\vec{B}_{GH}(O)$





$$d\vec{B}_P(O) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}.\frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO}}{PO^3}$$

$$d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO} = -dl.PO\ sin(\widehat{d\vec{l},\vec{r}})\vec{e}_\varphi$$

$$d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO} = -dl.POcos\alpha \text{ avec } dl = dz$$

Scanné avec CamScanner

Alors $\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{POdz}{PO^3}\cos(\alpha)\vec{e}_\varphi$

$\cos(\alpha) = \frac{a}{PO} \Rightarrow PO = \frac{a}{cos\alpha}$

$\tan(\alpha) = \frac{z}{a} \Rightarrow z = a.tan\alpha$

$dz = \frac{a}{\cos^2\alpha}d\alpha$

D'où $\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^\beta \frac{a}{cos\alpha} \times \frac{a}{\cos^2\alpha} \times \frac{\cos^3\alpha}{a^3} \times \cos(\alpha) d\alpha \vec{e}_\varphi$

$\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^\beta \cos(\alpha)\, d\alpha \vec{e}_\varphi$

$\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}[sin\alpha]_0^\beta \vec{e}_\varphi$

$\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} sin\beta \vec{e}_\varphi$

$\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\frac{a}{\sqrt{a^2+a^2}}\vec{e}_\varphi$

$\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\pi a}\vec{e}_\varphi = -\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi a}\vec{e}_\varphi$

Par symétrie, $\vec{B}_{GH}(O) = -\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi a}\vec{e}_\varphi$

3) On a : $DF = 2FG$

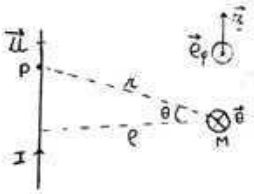
$\Rightarrow \vec{B}_{DF}(O) = 2\vec{B}_{FG}(O)$

$\vec{B}_{DF}(O) = -\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi a}\vec{e}_\varphi$

4) $\vec{B}(O) = \vec{B}_{AC} + \vec{B}_{GH} + \vec{B}_{DF} + \vec{B}_{FG} + \vec{B}_{GH}$

Exercice 3

1) Première méthode



Posons $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$ puisque $\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int \frac{\overrightarrow{dl}\wedge\vec{r}}{r^3}$

Et que $\overrightarrow{dl}\wedge\vec{r} = dl.r\ sin(\overrightarrow{dl},\vec{r})\vec{e}_\varphi$ et $sin(\overrightarrow{dl},\vec{r}) = cos\theta$

Alors $\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int \frac{dl.r}{r^3} cos\theta\, \vec{e}_\varphi$ ①

On a : $cos\theta = \frac{\rho}{r} \Rightarrow r = \frac{\rho}{cos\theta}$ et $l = \rho tg\theta$ car $tg\theta = \frac{l}{\rho} \Rightarrow dl = \frac{\rho}{\cos^2\theta}d\theta$

D'où ① devient $\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int \frac{\rho}{cos^3\theta}\frac{\cos^2\theta}{\rho^2} cos\theta\, \vec{e}_\varphi$

Scanné avec CamScanner

$$\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos\theta}{\rho}.d\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu.I}{4\pi}[sin\theta_1 - sin\theta_2]\,\vec{e}_\varphi$$

Et puisque le fil est infinie alors $\theta_1 = -\theta_2$ d'où

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu.I}{2\pi}.\vec{e}_\varphi}$$

Deuxième méthode

D'après le théorème d'ampère on a :

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\sum I = \mu_0 I$$

Or $\oint \vec{B}d\vec{l} = B.2\pi\rho$

D'où $B.2\pi\rho = \mu_0 I$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$



Soit

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi}$$

2) Répresentation (Voir Cours)

3) Pour $\rho \geq R$

$$I = \int_{(S)}\vec{J}.d\vec{S}$$

Or $\vec{J} = J_0\vec{R}_z$

Et $d\vec{S} = dS\vec{e}_z$

D'où $I = \int_{(S)}J_0 d\vec{S}$

Avec $dS = \frac{1}{2}R^2 d\varphi$

$$I = J_0\int_{(S)}dS$$

$$I = J_0\int_{(S)}\frac{1}{2}R^2 d\varphi$$

$$I = J_0\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}R^2 d\varphi$$

$$I = \frac{1}{2}R^2 J_0\int_0^{2\pi}d\varphi$$

Scanné avec CamScanner

$$I = \frac{1}{2}R^2 J_0 2\pi$$

$$\boxed{I = \pi R^2 J_0}$$

Pour $\rho \leq R$

$$dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi$$

$I_{inF} = \int \vec{J}.d\vec{S}$ Or $\vec{J} = J_0\vec{e}_z$

Et $d\vec{S} = dS\vec{e}_z$

D'où $Int = \frac{1}{2}J_0\rho^2 \int_0^{2\pi} d\varphi$

$$Int = \frac{1}{2}J_0\rho^2 2\pi$$

$$Int = J_0\rho^2\pi$$

Or $J_0 = \frac{I}{\pi R^2}$ car on avait trouvé precedement que $I = \pi R^2 J_0$

Donc $Int = \frac{I}{\pi R^2}.\rho^2\pi$

$$\boxed{Int = I\left(\frac{\rho}{R}\right)^2}$$

4) Composantes du champ $\vec{B}$

à $\rho \leq k$

Dans la base cylindrique $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$

on a :

$$\begin{vmatrix} \beta_\rho = 0 \\ \beta_\varphi = \frac{\mu_0 I_{int}}{2\pi\rho} \\ \beta_z = 0 \end{vmatrix}$$ d'après l'expression de $\vec{B}$ vu dans la question 1) .

donc $\vec{B} = \frac{\mu_0 Int}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi\rho}\left[I\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]\vec{e}_\varphi$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\rho}{2\pi R^2} I\vec{e}_\varphi$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} \beta_\rho = 0 \\ \beta_\varphi = \frac{\mu_0\rho}{2\pi R^2} I\vec{e}_\varphi \\ \beta_z = 0 \end{vmatrix}}$$

à $\rho \geq k$

Dans la base cylindrique $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$

$$\vec{B}\begin{vmatrix} \beta_\rho = 0 \\ \beta_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \\ \beta_z = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{B}\begin{vmatrix} \beta_\rho = 0 \\ \beta_\varphi = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2\rho} \\ \beta_z = 0 \end{vmatrix}$$

5) Les composantes du potentiel vecteur $\vec{A}$.

Pour $\rho \leq R$

Nous avons ceci $\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{B}$

Scanné avec CamScanner

Comme l'expression du rotationnel en coordonnée cylindrique est :

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}[\rho A_\varphi]\right] \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right] \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\rho}\left[-\frac{\partial A_z}{\partial \varphi}\right] \\ -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ 0 \end{vmatrix}$$

En fait,

Nous savons que : $\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{J} = -\mu_0 J_0 \vec{e}_z$

On remarque que : $A_z \neq 0$

$A_\rho = 0$

$A_\varphi = 0$

Ainsi $\vec{A} = A_z\vec{e}_z$

On vient de montrer que $\vec{A} = A_z\vec{e}_z$

D'où $\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = 0$

Par conséquent $\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ 0 \end{vmatrix}$

Donc

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\vec{e}_\varphi = B\varphi\vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2\rho}\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2\rho}$$

$$\Rightarrow A_z = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\int \frac{d\rho}{l}$$

$$\Rightarrow A_z = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\ln(\rho) + cste$$

Pour $\rho = R$ on a $A_z(R) = A_z$

$$\Rightarrow -\frac{\mu_0 I R^2}{2\pi R^2} + A_0 = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\ln(R) + cste$$

$$\Rightarrow cste = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} + \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\ln(R) + A_0$$

$$\Rightarrow cste = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{4} + \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\ln(R) + A_0$$

$$cste = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\left[-\frac{1}{2} + \ln(R)\right] + A_0$$

Donc $A_z = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\left[\frac{1}{2} - \ln(R) + \ln(\varphi)\right] + A_0$

$$\boxed{A_z = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\left[\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{R}{\varphi}\right)\right] + A_0}$$

Or $-\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = B_\varphi = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R^2}$

Scanné avec CamScanner

Car $\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\vec{e}_\varphi = B_\varphi \vec{e}_\varphi$

$dA_z = -\frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R^2} d\varphi$

$\Rightarrow A_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\rho^2 + cste$

Pour $\rho = 0$ on a $A_z(0) = A_0$

Donc $A_z(\rho) = -\frac{\mu_0 J_0}{4\pi R^2}\rho^2 + A_0$ or puisque $J_0 = \frac{I}{\pi R^2}$

$A_z(\rho) = -\frac{\mu_0 J_0}{4}\rho^2 + A_0$

$A_\rho = A_\varphi = 0$

Pour $\rho \geq R$

$\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2\rho}$

En effet

$rot\vec{A} = \vec{B}$

En coordonnée cylindrique

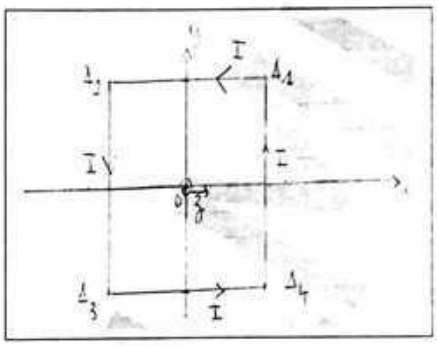
$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}[\rho A_\varphi]\right] \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\varphi - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\right] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Car $\vec{A} = A_z\vec{e}_z \Rightarrow A_\rho = 0, A_\varphi = 0, \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = 0$

Scanné avec CamScanner

CORRECTION D'ELECTROMAGNE 2021-2022 SESSION 1

QUESTION DE COURS



1 – Plan de symétries et d'antisymétrie

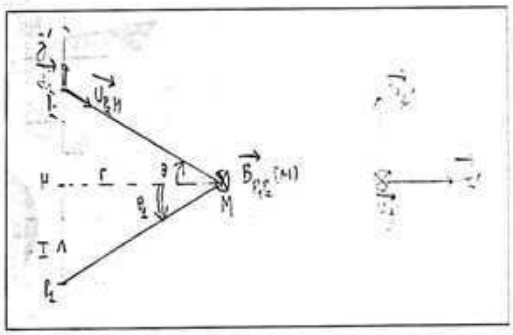
- Le plan (XOY) est un plan de symétrie pour cette distribution de courant
- Les plans (XOZ) et (YOZ) sont des plans d'antisymétrie pour cette distribution de courant

2 – Invariance

Cette distribution de courant est invariante par rotation discrète d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe (OZ)

EXERCICE 1

1 -Déterminons le champs magnétique $\overrightarrow{B_{p1p2}}(M)$



$\overrightarrow{B_{p1p2}}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{p1}^{p2}\frac{\overrightarrow{dl}\Lambda\overrightarrow{U_{p2M}}}{P_2M^2}$

$\overrightarrow{dl} = dz'\overrightarrow{U_z}$ Et $\overrightarrow{dl}\Lambda\overrightarrow{U_{pM}} = dz'\overrightarrow{U_z}\Lambda\overrightarrow{U_{pM}} = dz'\sin(\overrightarrow{U_{z'}};\overrightarrow{P_2M})$

$\overrightarrow{B_{p1p2}}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{p1}^{p2}\frac{dz'\sin(\overrightarrow{U_{z'}};\overrightarrow{P_2M})}{P_2M^2}\overrightarrow{U_{y'}}$

Pour effectuer ce calcul de l'intégrale, on introduit le paramètre angulaire

$\theta = (\overrightarrow{MH};\overrightarrow{MP_2})$ et $\sin(\overrightarrow{U_{z'}};\overrightarrow{P_2M}) = \cos\theta$

$\cos\theta = \frac{r}{P_2M} \Rightarrow \frac{1}{P_2M^2} = \frac{\cos^2\theta}{r^2}$ et $\tan\theta = \frac{z'}{r} \Rightarrow dz' = \frac{r}{\cos^2\theta}d\theta$

$\overrightarrow{B_{p1p2}}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{r}{\cos^2\theta}.\cos\theta.\frac{\cos^2\theta}{r^2}.d\theta\overrightarrow{U_{y'}}$

$\overrightarrow{B_{p1p2}}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta.d\theta\overrightarrow{U_{y'}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\overrightarrow{U_{y'}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}.2\sin\theta_2\overrightarrow{U_{y'}}$ car $\theta_1 = -\theta_2$

$\sin\theta_2 = \frac{P_1H}{P_1M} = \frac{a/2}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+r^2\right)^{1/2}}$; Donc $\overrightarrow{B_{p1p2}}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}.\frac{a}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+r^2\right)^{1/2}}\overrightarrow{U_{y'}}$

2 – Orientation du champ magnétique $\vec{B}$(M)

Les plans (XOZ) et (YOZ) *sont des plans d'antisymétrie. Le champ appertient à leur intersection donc* $\vec{B}(M)$ *est*

Portée par l'axe $\overrightarrow{e_z}$. $\vec{B}(M) = B_z(z)\overrightarrow{e_z}$

3 – Montrons que le champ au centre O est $\vec{B}(O) = 2\sqrt{2}\frac{\mu_0 I}{\pi a}\overrightarrow{e_z}$

Le plan (XOY) *est un plan de symétrie donc le champ lui est normal* $\vec{B}(O) = B_z(O)\overrightarrow{e_z}$

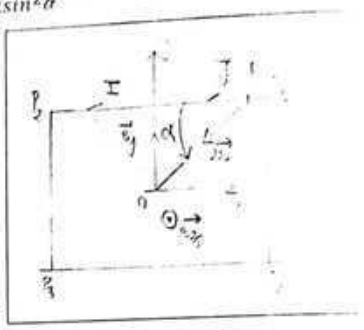
09/11/2022

Scanné avec CamScanner

$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi PO^2}\overrightarrow{dl}\Lambda\vec{u}$ $\overrightarrow{dl} = dx\overrightarrow{e_x}$ $\alpha = (\overrightarrow{P_1P_2};\vec{u})ou\ \vec{u} = \frac{\overrightarrow{PO}}{PO}$ $\vec{u} = -\cos\alpha\overrightarrow{e_x} - \sin\alpha\overrightarrow{e_y}$

$\overrightarrow{dl}\Lambda\vec{u} = -dx\sin\alpha\overrightarrow{e_z}$ $\tan\alpha = \frac{a}{2x}$ $=> x = \frac{a}{2\tan\alpha}$ $=> dx = -\frac{a}{2sin^2\alpha}d\alpha$

$\sin\alpha = \frac{a}{2PO}$ $=>$ $\frac{1}{PO} = \frac{2\sin\alpha}{a}$ $donc\ \overrightarrow{dB_{p1p2}}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}.\left(\frac{2\sin\alpha}{a}\right)^2.\frac{ad\alpha}{2sin^2\alpha}.\sin\alpha\overrightarrow{e_z}$



$\overrightarrow{B_{p1p2}}(O) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin\alpha d\alpha\overrightarrow{e_z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(-\cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right)$

$\overrightarrow{B_{p1p2}}(o) = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\mu_0 I}{\pi a}$

$\vec{B}(O) = 4\overrightarrow{B_{p1p2}}(O)$ $donc$ $\vec{B}(O) = 2\sqrt{2}\frac{\mu_0 I}{\pi a}\overrightarrow{e_z}$

4- L'expression du champ $\vec{B}(M)$ *crée par la spire sur son axe (oz)*

$\vec{B}(M) = 4\overrightarrow{B_{p1p2}}.\overrightarrow{e_z}$ $donc\ \vec{B}(M) = 4B\cos\beta\overrightarrow{e_z}$ $avec\ \cos\beta = \frac{a}{2r}$ $et\ r = \left(z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}$ $; z = OM$

$$\vec{B}(M) = 4.\frac{\mu_0 I}{4\pi r}.\frac{a}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2\right)^{1/2}}.\frac{a}{2\left(z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}}.\overrightarrow{e_z}$$

En remplacent $r = \left(z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}$ *dans* $\vec{B}(M)$



on obtient : $\vec{B}(M) = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I a^2}{\pi(a^2+4z^2)\sqrt{a^2+2z^2}}\overrightarrow{e_z}$

5 – l'expression du champ $\vec{B}(M)$ *crée par un polygone à N cotés*

$\overrightarrow{B_{p1p2}}.\overrightarrow{e_z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.\sin\theta_2\cos\beta$ Avec $\sin\theta_2 = \frac{P_1P_2}{2P_1M}$ $P_1M^2 = R^2 + z^2$

$\sin\alpha = \frac{P_1P_2}{2R}$ $=>$ $P_1P_2 = 2R\sin\alpha$ où $\alpha = \frac{\pi}{N}$ D'où $P_1P_2 = 2R\sin\frac{\pi}{N}$

Donc $\sin\theta_2 = \frac{2R\sin\frac{\pi}{N}}{2\sqrt{R^2+z^2}}$ $\cos\beta = \frac{HO}{r}$ $et\ \cos\alpha = \frac{HO}{R}$ $=> HO = R\cos\alpha$ $=> HO = R\cos\frac{\pi}{N}$

$r^2 = HO^2 + z^2$ on obtient $\cos\beta = \frac{R\cos\frac{\pi}{N}}{\sqrt{R^2cos^2\frac{\pi}{N}+z^2}}$ en remplacent dans $\overrightarrow{B_{p1p2}}.\overrightarrow{e_z}$ et en multipliant par

N on obtient : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi}.\frac{R^2\cos\frac{\pi}{N}\sin\frac{\pi}{N}}{\left(z^2+R^2cos^2\frac{\pi}{N}\right)\sqrt{R^2+z^2}}\overrightarrow{e_z}$

6 – L'expression du champ $\vec{B}(M)$*crée par une spire circulaire*

Pour une spire circulaire *N tend vers l'infinie alors* $\sin\frac{\pi}{N} \to \frac{\pi}{N}$ et $\cos\frac{\pi}{N} \to 1$

Donc $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi}.\frac{R^2\frac{\pi}{N}}{(z^2+R^2)\sqrt{R^2+z^2}}\overrightarrow{e_z}$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)^3\overrightarrow{e_z}$$

Scanné avec CamScanner

On reconnait le champ crée en un point de son axe par une spire de courant de centre O et de rayon R parcourue par un courant I vue sous l'angle φ $depuis\ M\ avec\ \sin\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$

EXERCICE 2

1- Il s'agit de la force de Laplace.

2- Calculons la somme totale des forces

$\overrightarrow{f_1} = I\overrightarrow{A_1A_2}\Lambda\vec{B} = \vec{0}$ Et $\overrightarrow{f_3} = I\overrightarrow{A_3A_4}\Lambda\vec{B} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{f_2} = I\overrightarrow{A_2A_3}\Lambda\vec{B} = -Ia\vec{z}\Lambda B\vec{x} = -IaB\vec{y}$$

$$\overrightarrow{f_4} = I\overrightarrow{A_4A_1}\Lambda\vec{B} = Ia\vec{z}\Lambda B\vec{x} = IaB\vec{y}$$

La somme des forces est nulle.

3 -calculons le moment des forces de Laplace

$$\overrightarrow{\Gamma_\Delta} = \vec{M}\Lambda\vec{B}\ avec\ \vec{M} = IS\vec{n}\ moment\ magnétique$$

$$\overrightarrow{\Gamma_\Delta} = ISB\sin(\vec{n};\overrightarrow{e_x})\overrightarrow{e_z} = -ISB\sin\theta\overrightarrow{e_z}$$

4 – Montrons que $E_p = -\vec{M}.\vec{B}$

La spire tourne d'un angle $d\theta\ autour\ de\ M_z$.le travail élémentaire du couple de force est :

$$\delta W = \Gamma_\Delta d\theta = -ISB\sin\theta d\theta = -d[-ISB\cos\theta]$$

On définit une énergie potentielle par :

$$dE_p = -\delta W = d[-ISB\cos\theta] \Rightarrow E_p = -ISB\cos\theta \Rightarrow E_p = -\vec{M}.\vec{B}$$

5- les valeurs de θ

A l'équilibre $\frac{dE_p}{d\theta} = 0 \Rightarrow ISB\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0\ où\ \theta = \pi$

Scanné avec CamScanner

Examen de Mécanique des systèmes
Année académique 2018/2019
1ère session
3 h

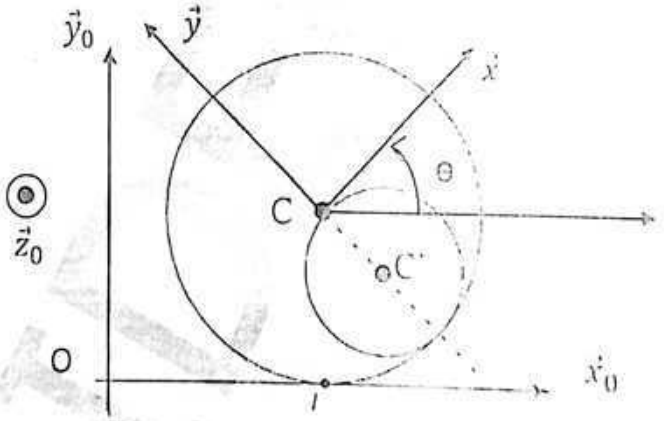
Exercice 1 — 4 points

Dans un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on considère les trois glisseurs définis par les trois vecteurs
$\vec{V}_1 = (1,0,-1)$ d'origine $A(1,0,0)$;
$\vec{V}_2 = (1,2,2)$ d'origine $B(0,1,0)$;
$\vec{V}_3 = (\lambda, \mu, \nu)$ d'origine $C(0,0,1)$.
Soit [T] la somme des trois glisseurs.

1. Déterminer (λ, μ, ν) pour que [T] soit un couple et trouver son moment
2. Déterminer la relation doit lier λ, μ et ν pour que [T] soit un glisseur ?
3. Dans le cas où $(\lambda, \mu, \nu) = (-2; -2; 0)$, trouver les équations de l'axe central de [T] et peut-on dire de la direction de l'axe central.

Exercice 2 — 8 points

Le système D étudié, est un disque homogène D_1 de centre d'inertie C' de rayon R et de masse M dont on a ôté un disque D_2 de rayon $\frac{R}{2}$ et de centre d'inertie C'', tangent au premier disque.



Le repère fixe $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est orthonormé direct et le repère $\mathcal{R}(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au système D, avec $\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ et $\vec{z} = \vec{z}_0$.
On note $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}) = (\vec{y}_0, \vec{y})$.

1.a) Déterminer la masse M' du système D.
b) En déduire la position de son centre d'inertie G dans le repère $\mathcal{R}$.

2. On rappelle que le moment d'inertie d'un disque homogène de rayon a et de masse m, par rapport à un axe passant par son centre d'inertie C et orthogonal au plan du disque (plein et homogène) est $I = \frac{1}{2}ma^2$.

a) Déterminer le moment d'inertie du disque D_1 par rapport à l'axe $(G; \vec{z})$.
b) Déterminer le moment d'inertie du disque D_2 par rapport à l'axe $(G; \vec{z})$.
c) En déduire le moment d'inertie du système D par rapport à l'axe $(G; \vec{z})$.

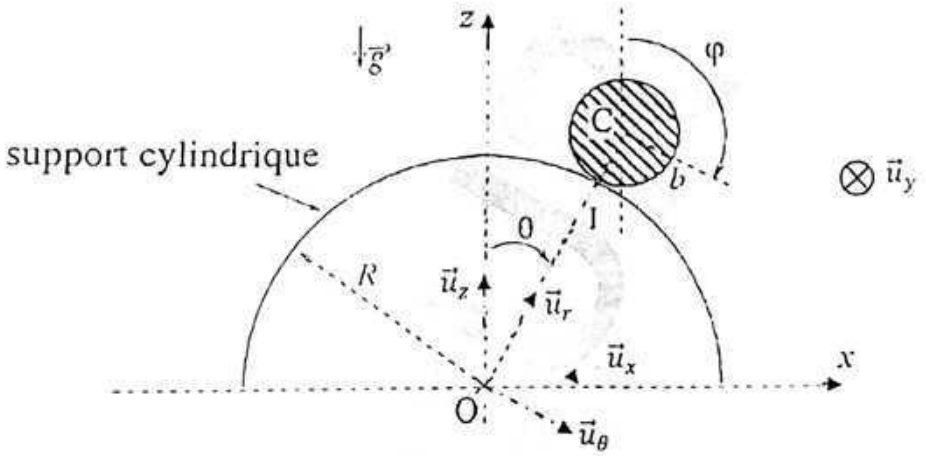
Scanné avec CamScanner

Le système D roule sans glisser sur un plan horizontal.
Montrer que le moment cinétique du système en G est

$$\vec{\sigma}(G, D/\mathcal{R}_0) = \frac{37}{96} MR^2 \dot{\theta} \vec{z}.$$

Exercice 3 **8 points**

Une sphère homogène (S), de masse m, de centre C et de rayon b, se déplace sur un support cylindrique (S_c) fixe de rayon R de centre O. On supposera que la sphère reste en permanence en contact avec le support cylindrique. La position de C est repérée par un angle θ avec la verticale et la rotation de la sphère est décrite par un angle φ entre un point fixe de la sphère et la verticale (voir figure).
La sphère est lâchée du sommet du cylindre ($\theta = 0$), sans vitesse initiale ; puis elle roule sans glisser du côté $\theta \geq 0$. On admettra que le mouvement de C se fait dans un plan (xOz).



Quel est le vecteur instantané de rotation de la sphère par rapport au repère fixe (x, y, z) ?
Déterminer le vecteur vitesse en C de deux manières et montrer que $(R + b)\dot{\theta} = b\dot{\varphi}$. En déduire l'expression de $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$ en fonction de R, b et $\dot{\theta}$.
Déterminer les éléments de réduction du torseur dynamique en C en fonction de R, b, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.

Appliquer les théorèmes de la résultante et du moment dynamique à la sphère.
Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{7}{5}(\mathrm{R} + \mathrm{b})\ddot{\theta}\,\dot{\theta} = g\sin\theta\,\dot{\theta}.$$

Intégrer la relation précédente et déduire, les expressions de la force de frottement (force résistance au glissement) $\|\vec{T}\|$ sur la sphère et de la composante normale $\|\vec{N}\|$ de la réaction exercée sur la sphère, en fonction de m, g et θ.

La matrice d'inertie de la sphère est

$$J(C, \mathcal{R}') = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda \end{pmatrix}_{(C,x,y,z)} \quad \text{avec } \Lambda = \frac{2}{5} mb^2.$$

Scanné avec CamScanner

EXAMEN – LICENCE 2 : 1ère session
Mécanique des systèmes
Année académique 2019/2020
Durée : 2h00
(Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1 et 2)

Exercice 1 (4 points)

Soit un quart de disque de rayon **R** de centre **O** et de masse surfacique non uniforme $\sigma(r) = a\,r$, avec a une constante positive.

1) Calculer la masse **m** du quart de disque.
2) Calculer son moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire au quart de disque passant par **O** en fonction de **R** et **m**.

Exercice 2 (6 points)

Dans un repère $\mathcal{R}(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé et direct, on considère les torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ dont les éléments de réduction au point **O** et au point **O'** (0, 1, 1) sont respectivement $[\vec{R}_1, \vec{M}_{1O}]$ et $[\vec{R}_2, \vec{M}_{2O'}]$ définis par :

$$[T_1(O)] = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & -a\sin\alpha \\ \sin\alpha & a\cos\alpha \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad [T_2(O')] = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & -(a+1)\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -(a+1)\cos\alpha \\ 0 & \cos\alpha \end{Bmatrix}$$

où **a** et α sont des constantes réelles.

1) Préciser la nature des deux torseurs.
2) Déterminer l'équation de l'axe central de $[T_1]$ et en déduire le moment $\vec{M}_{1P}$ en un point **P** de cet axe.
3) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles le torseur $[T] = [T_1] + [T_2]$ est un glisseur.
4) Calculer le co-moment des deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$.
5) Trouver l'axe central de **[T]**.

Exercice 3 (10 points)

On considère un référentiel auquel est associé le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ vis-à-vis duquel on étudie le mouvement du système Σ suivant constitué:

- d'une tige **T** infiniment mince, de masse négligeable et de longueur **2R**, de milieu **E** et dont l'une des extrémités est liée à l'axe $O\vec{z}_0$ au point **A** défini par $\overrightarrow{OA} = R\vec{z}_0$. La liaison en **A** est telle que **T** peut tourner autour de ce point vis-à-vis de $\mathcal{R}_0$.

Scanné avec CamScanner

- d'un disque **D** de centre B, de rayon **R** restant en contact ponctuel avec le plan $\Pi(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0)$. Le centre de **D** est lié à l'extrémité libre de **T** et la liaison est telle que **T** reste perpendiculaire à **D**, ce dernier pouvant tourner autour de **AB**. On note I le point de contact avec le plan Π à l'instant t.

Pour repérer Σ vis-à-vis de $\mathcal{R}_0$ on introduit la base orthonormée directe $(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ avec :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2R}$$

et on pose

$$\psi(t) = (\vec{x}_0,\vec{u}) = (\vec{y}_0,\vec{v}).$$

De même, en considérant un point **P** lié à lapériphérie de **D**, on introduit la base orthonormée directe $(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ avec

$$\vec{w} = \frac{\overrightarrow{BP}}{R}$$

et on pose

$$\theta(t) = (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{z}_0,\vec{z}).$$

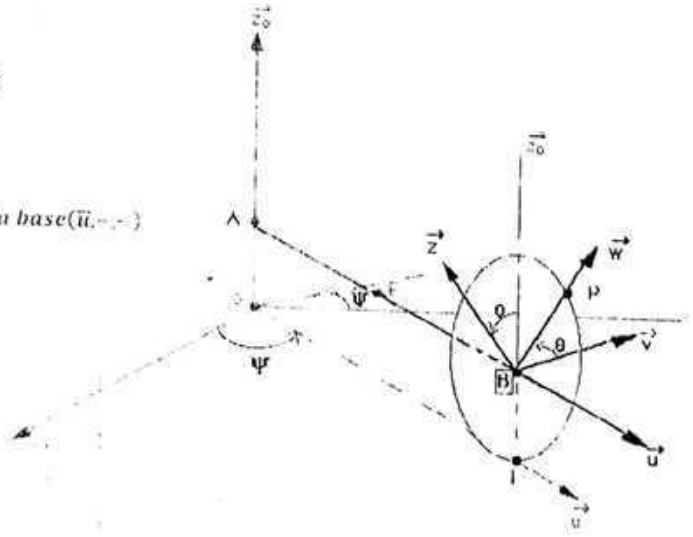
Dans tout ce qui suit, les résultats vectoriels seront donnés, projetés dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$.

1) a) Déterminer les éléments de réduction en **E** du torseur cinématique associé au mouvement de **T** vis-à-vis de $\mathcal{R}_0$.
   b) Déterminer les éléments de réduction en **B** du torseur cinématique associé au mouvement de **D** par rapport à $\mathcal{R}_0$.
2) On suppose que **D** roule sans glisser sur Π. Déterminer une relation entre $\dot{\theta}$ et $\dot{\psi}$ aduisant ce roulement sans glissement.
3) Calculer $\vec{\sigma}(B,\Sigma/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{\delta}(B,\Sigma/\mathcal{R}_0)$.
4) Calculer l'énergie cinétique $E_c(\Sigma/\mathcal{R}_0)$.

<u>On donne :</u>

Matrice d'inertie du disque de rayon **R**

$$J_B(D) = \frac{mR^2}{4}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{=\,la\ base(\vec{u},-,-)}$$



Scanné avec CamScanner

« Tout est possible à celui qui croit

Université FHB Cocody — UFR MI L2 2020-2021

EXAMEN DE MECANIQUE DES SYSTEMES

SESSION 1

Durée: 3heures

Exercice 1 (4 points)

Dans un repère orthonormé direct $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le champ de vecteurs $\vec{V}(M)$ dont les composantes sont définies en fonction des coordonnées (x, y, z) de M par:

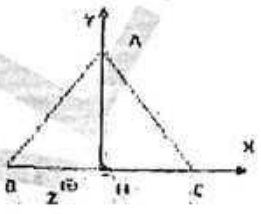
$$\begin{cases} V_x = 1 + 3y - tz \\ V_y = -3x + 2tz \\ V_z = 2 + tx - t^2 y \end{cases} \quad \text{où t est un paramètre réel.}$$

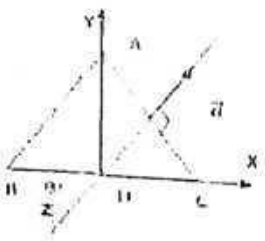
1) Calculer le vecteur $\vec{V}(M)$ au point O.
2) Pour quelles valeurs de t, ce champ est antisymétrique ?
3) Pour chaque valeur trouvée de t, déterminer les éléments de réduction du torseur (résultante et moment en O)
4) Décomposer le torseur associé à $\vec{V}(M)$ en une somme d'un couple et d'un glisseur dont on précisera les éléments de réduction.
5) Déterminer la position de l'axe central du torseur pour $t = 0$ et $t = 2$.

Exercice 2 (6 points)

Un solide (S) à la forme d'une plaque triangulaire homogène d'épaisseur négligeable, de masse m, et de côtés $AB = AC = a\sqrt{2}$. $BC = 2a$. Où a est un réel strictement positif. On appelle H le milieu du coté BC.
Soit $(R_H) = (H; X, Y, Z)$ un repère orthonormé lié à (S) tel que (HX) et (HY) sont confondus respectivement à (HC) et (HA) (*voir figure*).
1) Déterminer les coordonnées du centre d'inertie G du solide (S) dans (R_H).
2) a) Montrer que la matrice d'inertie du solide (S) en H dans le repère orthonormé (R_H) est de la forme $[J_M] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}$
où M, N et P sont des scalaires que l'on déterminera en fonction de a et de a.

b) En déduire la matrice d'inertie du solide (S) en G dans le repère orthonormé $(R_G) = (G; X, Y, Z)$.
3) Quel est le moment d'inertie du solide (S) par rapport à la droite (AB)?



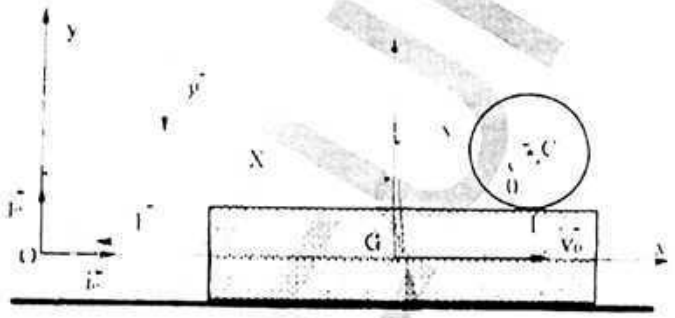


Scanné avec CamScanner

Exercice 3 (10 points)

On considère le système matériel composé d'un plateau (P) et d,un cylindre (C). Le plateau, de masse m est animé d'un mouvement rectiligne horizontal et uniforme de vitesse $\overrightarrow{v}_0$. Le cylindre (C), placé sur le plateau (P), est homogène , de masse m, de rayon a et son axe est perpendiculaire au vecteur vitesse $\overrightarrow{v}_0$. Le cylindre est initialement immobile par rapport au plateau. A l'instant $t = 0$, on applique au plateau une force $\overrightarrow{F}$ de freinage constante. La résultante des forces de réaction du plateau sur le cylindre est $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{T} + N\,\overrightarrow{j}_0$ $(N > 0)$. Le coefficient de frottement de glissement du plateau sur le cylindre est f. On désigne par $\mathcal{R}_0(O, \overrightarrow{i}_0, \overrightarrow{j}_0, \overrightarrow{k}_0)$ le repère fixe est par $\mathcal{R}_G(G, \overrightarrow{i}_0, \overrightarrow{j}_0, \overrightarrow{k}_0)$ un repère lié au plateau. Le centre C du cylindre est repéré, par rapport à $\mathcal{R}_G$ par $x = KI$ avec $I = K$ en $x = 0$ à l'instant initial $(t = 0)$. La rotation du cylindre est repérée par l'angle θ tel que $\theta = 0$ à $t = 0$. Le mouvement de (P) par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ est repéré par $X = OG$ avec $X = 0$ pour $t = 0$ et $\overrightarrow{v}_0 = v_0\,\overrightarrow{i}_0$.

Dans tout le problème, on considère que le cylindre roule sans glisser sur le plateau.



1) a) Faites un schéma montrant les différentes forces agissant sur le système.

b) Préciser la condition de roulement sans glissement du cylindre sur le plateau.

2) En appliquant le P.F.D dans le repère $\mathcal{R}_0$ au cylindre seul, puis au plateau seul, donner les équations différentielles qui régissent le mouvement du système.

3) Trouver la relation liant $\ddot{x}$ et $\ddot{X}$. En déduire que : $x(t) = \dfrac{Ft^2}{3m + m_1}$

4) Exprimer $X(t)$ en fonction de F, v_0, m, m_1 et t. Trouver l'instant t_a correspondant à l'arrêt du plateau.

5) Sachant que le plateau restera immobile pour $t \geq t_a$ donner les valeurs de la force de frottement T et de $\overrightarrow{r}(C/\mathcal{R}_0)$.

6) Quelle est la nature du mouvement du cylindre pour $t \geq t_a$.

11/2022

Scanné avec CamScanner

Licence Master Doctorat

<<Tout est possible à celui qui croit.>>

Université FHB Cocody

UFRMI L2 2020-2021

EXAMEN DE MECANIQUE DES SYSTEMES
SESSION 2
Durée: 3h00

Exercice 1 (4 points)

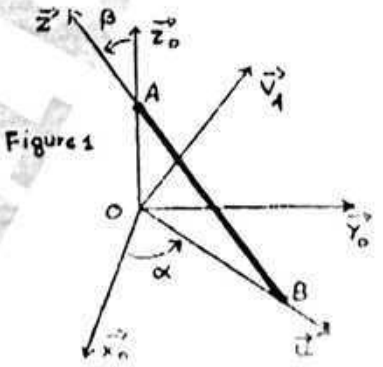
Dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient $A(3.0.0)$ et $B(-1.2.1)$ deux points de l'espace. Soit $\vec{M}$ un champ de vecteurs défini par:
$\vec{M}(O) = (1.1.4)$, $\vec{M}(A) = (1.1.1)$, $\vec{M}(B) = (2.-1.9)$.

1) Montrer que $\vec{M}$ est un champ antisymétrique.
2) Déterminer la résultante $\vec{R}$ du torseur associéau champ $\vec{M}$.
3) En déduire $\vec{M}(P)$ en tout point $P(x, y, z)$ de l'espace.
4) Déterminer l'axe central (Δ) du torseur, et calculer $\vec{M}$ sur (Δ).

Exercice 2 (8 points)

Soit $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct. Une tige rectiligne AB de longueur L, est mobile relativement à $\mathcal{R}_0$ de manière que A se déplace sur $O\vec{z}_0$ et B se déplace dans le plan $O\vec{x}_0\vec{y}_0$ (figure 1). On suppose que le montage permet pour la côte de A des valeurs positives et négatives, et que B ne vient jamais en O. On note $\mathcal{R}_1(O, \vec{u}, \vec{v}_1, \vec{z}_0)$ le repère orthonormé direct tel que $\vec{u}$ soit le vecteur unitaire de OB dirigé de O vers B.
On pose $\overrightarrow{BA} = L\vec{z}$ et $\vec{v} = \vec{v}_1 \wedge \vec{z}$.

1) Justifier le fait que la position de AB relativement à $\mathcal{R}_0$ est déterminée par les angles $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{u})$ autour de $\vec{z}_0$ et $\beta = (\vec{z}_0, \vec{z})$ autour de $\vec{v}_1$.
2) Calculer $\vec{\Omega}(AB/\mathcal{R}_0)$ par ses composantes dans $\mathcal{R}_1$.
3) Caculer $\vec{V}(A/\mathcal{R}_0)$, $\vec{V}(B/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{V}(B/\mathcal{R}_1)$ dans $\mathcal{R}_1$.
4) Retrouver $\vec{V}(B/\mathcal{R}_0)$ en utilisant la composition de mouvements.
5) Calculer les composantes dans la base de $\mathcal{R}_1$ de l'accélération absolue de B.



Scanné avec CamScanner

Exercice 3 (8 points)

On considère une tige (EF), homogène, de masse m, de longueur $2a$ et de centre d'inertie G qui glisse sans frottement à l'intérieur d'un anneau (A) circulaire de centre C et de rayon r (figure 2). Tout en restant dans le plan vertical (xOy) du repère $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, l'anneau roule sur l'axe Ox du repère $\mathcal{R}$ avec une vitesse angulaire angulaire ω **constante**. On désigne par, θ l'angle formé, à chaque instant, entre les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CG}$; x l'abscisse du point C sur l'axe Ox; $\vec{g} = -g\vec{y}$ le vecteur accélération de la pésanteur; I le point de contact de l'anneau avec l'axe Ox et $(\vec{u}, \vec{r}, \vec{z})$ une base orthonormée directe liée à la tige (EF).

On pose $\overrightarrow{GC} = L\vec{r}$ avec $L = \sqrt{r^2 - a^2}$, $\overrightarrow{CE} = r\vec{u}_2$ et $\overrightarrow{CF} = r\vec{u}_1$.

1)Montrer que $\vec{\Omega}(EF/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\vec{z}$ et calculer $\vec{V}(G)$.

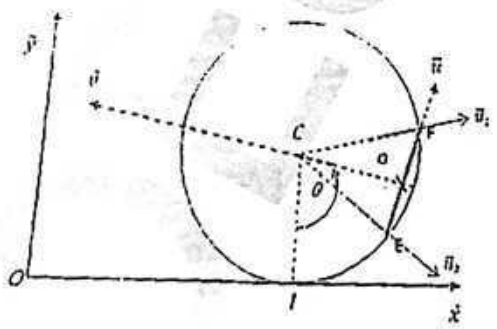
2) Calculer le moment d'inertie J de la tige (EF) par rapport à son axe $G\vec{z}$.

3) Déterminer le torseur dynamique de la tige (EF) au point G : $[m\vec{\gamma}(G), \delta(G, EF/\mathcal{R})]$.

4) En utilisant le théorème du moment dynamique à la tige (EF) au point C, montrer que l'une de ses équations dans le repère $\mathcal{R}$ s'écrit:

$$\ddot{\theta}\left[L + \frac{J}{mL}\right] + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0$$

5) En utilisant le théorème de la résultante dynamique, calculer les réactions de contact $\vec{R}_E$ et $\vec{R}_F$ aux points E et F.



Scanné avec CamScanner

EXAMEN de Mécanique des Systèmes
Année académique 2021 2022
Première session
Durée : 3 h 00
(Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2)

EXERCICE 1 : (5 points)

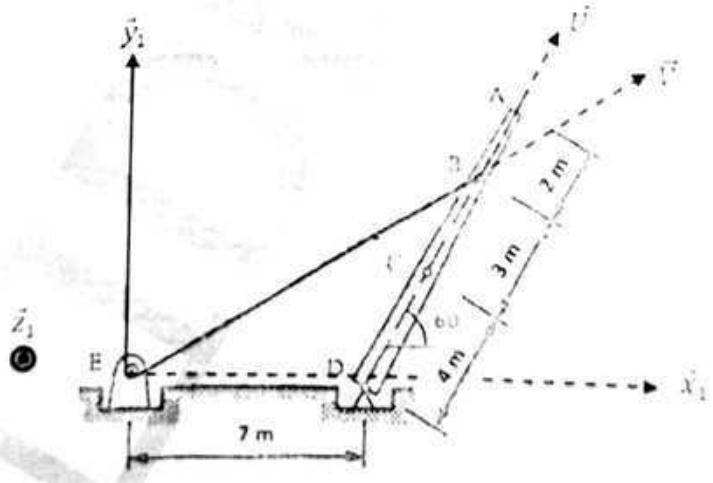
Soit un triangle rectangle (S) de côtés (a, b, c) dont la masse surfacique σ est donnée par : $\sigma(x, y) = \sigma_0 \frac{y}{b}$, $\sigma_0 = cste$

Le domaine de (S) est : $\left\{P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} / 0 \leq y \leq b,\ 0 \leq x \leq x_{MN}\right\}$.

1) Déterminer l'équation de la droite (MN) et exprimer x c'est-à-dire x_{MN}, en fonction de y, a et b.
2) Calculer la masse m du triangle OMN en fonction de a, b et σ_0.
3) Calculer les coordonnées (x_G, y_G) du centre de masse G.

EXERCICE 2 : (7 points)

Pour mettre en place un mât d'éclairage, on le soulève lentement avec un câble de hissage actionné par un treuil L. Le mât a une masse m (centre d'inertie C) et le câble (EB) est de masse négligeable. $\mathcal{R}_1\ (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ repère orthonormé direct relié à la terre supposé galiléen.



1) Pour la configuration indiquée sur la figure ci-dessus, faire le bilan des efforts extérieurs sur le mât (S_0). On notera $T > 0$ la tension du câble. $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont des vecteurs unitaires.
2) Écrire l'équilibre (relativement à la terre) et déterminer les efforts inconnus qui sollicitent le mât (la liaison pivot entre le mât et la terre en D est supposée parfaite) en fonction de m.

Scanné avec CamScanner

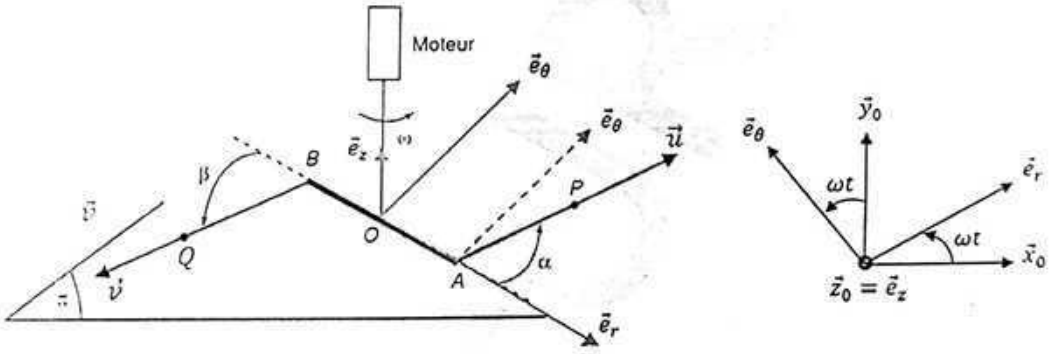
EXERCICE 3 : (8 points)

Une tige AB de masse négligeable, de longueur $2L$, de centre O fixe tourne dans un plan horizontal (π). $\mathcal{R}_0\,(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère lié à (π) tel que $\vec{z}_0$ est ascendant dirigé vers le haut. Un moteur impose à la tige une vitesse angulaire $\omega = cte$ à la tige.

Deux autres tiges AP et BQ de masses négligeables et de longueur L portent chacune en leur extrémité respective P et Q un point matériel de masse m. Ces tiges sont articulées en A et B et peuvent donc tourner par rapport à la tige AB. L'ensemble forme le système (S_1).

$\mathcal{R}\,(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ repère lié à AB tel que $\vec{e}_z = \vec{z}_0$.

On note respectivement α l'angle entre $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AP} = L\vec{u}$ et β l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BQ} = L\vec{v}$.



1) **On considère dans un premier temps que les articulations en A et B sont bloquées et donc que $\alpha = cte$ et $\beta = cte$.**
   a) Déterminer les positions $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ en fonction de L, α et β
   b) En déduire les expressions des vitesses $\vec{V}(P/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{V}(Q/\mathcal{R}_0)$ dans $\mathcal{R}$.
   c) En déduire la quantité de mouvement $\vec{\mathcal{P}}$ de (S) en fonction de L, m, ω, α et β.
   d) Exprimer le moment cinétique $\vec{\sigma}_0$ de (S_1) en O.

2) **Les articulations sont à présent débloquées.**
   a) Exprimer $\vec{\mathcal{P}}$ en fonction de L, m, ω, α, β, $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$.
   b) En déduire le moment cinétique $\vec{\sigma}_0$ de (S_1) en O.
   c) Vérifier que l'on retrouve la question **1.d)** lorsque $\alpha = cte$ et $\beta = cte$.

Scanné avec CamScanner

EXAMEN de Mécanique des Systèmes
Année académique 2021/2022
Deuxième session
Durée : 3 h 00
(Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2)

EXERCICE 1 (5 points)

Dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_1\ (O;\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$, on considère le champ de vecteurs $\vec{v}(M)$ dont les composantes sont définies en fonction des coordonnées (x, y, z) de M par :

$$v_x = 1 + 3y - tz \ ;\ \ v_y = -3x + 2tz \ ;\ \ v_z = 2 + tx - t^2y\,, \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

1) Calculer le vecteur $\vec{v}(M)$ au point O.
2) Pour quelles valeurs de t, ce champ est antisymétrique ?
3) Pour chaque valeur trouvée de t, déterminer les éléments de réduction du torseur en O.
4) Décomposer le torseur associé à en une somme d'un couple et d'un glisseur dont on indiquera les éléments de réduction.
5) Déterminer la position de l'axe central du torseur pour chaque valeur de t.

EXERCICE 2 (9 points)

Un solide plan (T) est constitué d'une plaque plane triangulaire, *homogène* de masse m, de densité surfacique σ_0 et d'épaisseur négligeable. On désigne par G le centre d'inertie de (T) et par C le milieu du côté AB (Figure 1). On note $\mathcal{R}$ le repère orthonormé direct $(C;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ lié à (T), tel que $\vec{y}$ est colinéaire à AB, dirigé de A vers B, $C\vec{z}$ est orthogonal à $C\vec{y}$ dans le plan de (T).

Le repère $\mathcal{R}_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est orthonormé direct, avec $O\vec{z}_0$ vertical ascendant. Le solide (T) est lié en C à l'extrémité d'une tige OC de longueur l et de *masse négligeable*. OC reste dans le plan $O\vec{x}_0\vec{y}_0$ en étant confondu avec $\vec{x}$. La liaison en C est telle que le plan de (T) reste vertical et perpendiculaire à OC. On pose $\psi = (\vec{x}_0,\vec{x}) = (\vec{y}_0,\vec{u})$ et $\varphi = (\vec{z}_0,\vec{z}) = (u,\vec{y})$ et on donne $AB = 2CD = 2a$.

$(T) = \left\{M\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} / \ y_{DB} \le y \le y_{DA},\ -a \le z \le 0\right\}$.

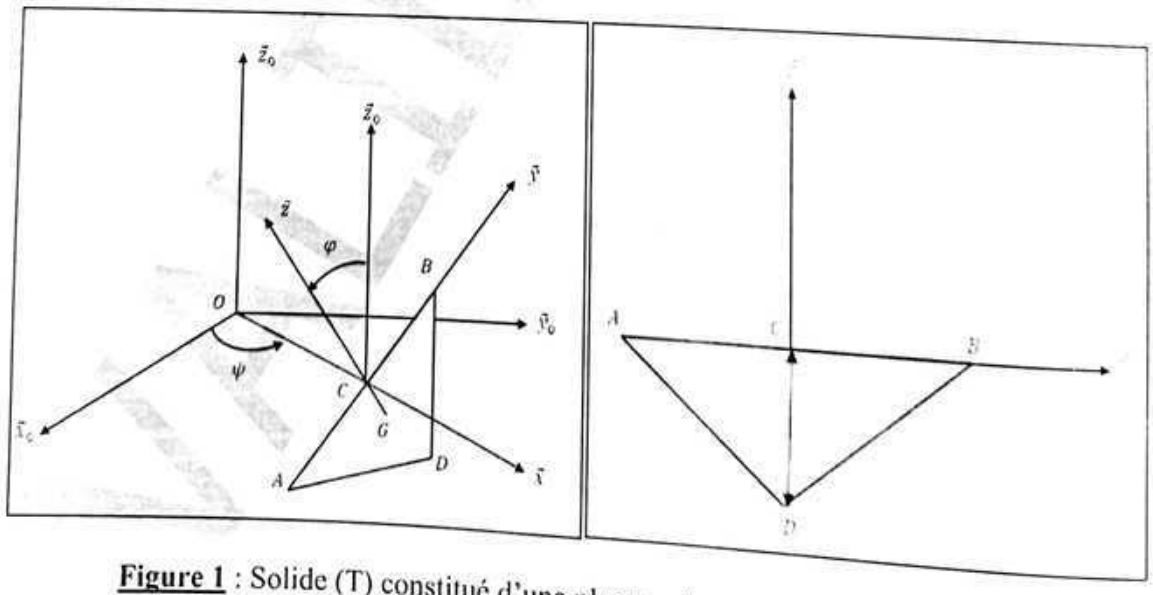


Figure 1 : Solide (T) constitué d'une plaque plane triangulaire homogène

Scanné avec CamScanner

1) Calculer $\vec{\Omega}(T/\mathcal{R}_0)$ par ses composantes dans la base de $\mathcal{R}$.
2) Montrer que G a pour coordonnées dans $\mathcal{R}$; $\left(0\,,0,-\frac{a}{3}\right)$.
3) Montrer que $(C;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est un repère principal d'inertie de (T) et déterminer l'opérateur d'inertie $\Pi_C(T)$ en C de (T).
4) Déterminer l'opérateur d'inertie $\Pi_C(G,m)$ au point C du centre de masse G. En déduire l'opérateur d'inertie $\Pi_G(T)$ au point G.
5) Calculer les moments cinétiques $\vec{\sigma}(G,T/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{\sigma}(O,T/\mathcal{R}_0)$.

EXERCICE 3 (9 points)

Un solide (S) est constitué de deux cylindres homogènes, concentriques, de rayons respectifs R_1 et $R_2 < R_1$ (Figure 2). La masse totale de (S) est M, son centre de masse G, son moment d'inertie par rapport à son axe de révolution est noté J_G. Le solide roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Un fil inextensible et sans masse est enroulé en partie autour du cylindre de rayon R_2 ; l'autre partie est parallèle à la pente. On fait passer ce fil sur une poulie parfaite sans masse et on y accroche une masse m. Le tout est lâché sans vitesse initiale. Le référentiel R(O; x,y,z) lié au plan incliné est galiléen. On repère le mouvement du solide (S) par les variables : $x(t)$: abscisse de G sur un axe parallèle à la pente, dirigé vers le bas ; $\theta(t)$: angle de rotation du cylindre dans R(O;x,y,z) ; $z'(t)$: abscisse du centre de masse G' de la masse m sur un axe Oz' vertical descendant.

1) Montrer que deux relations cinématiques entre ces trois variables cinématiques $x(t)$, $\theta(t)$ et $z'(t)$ sont données par : $\dot{x} + R_1\dot{\theta} = 0$ et $\dot{z}' + \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)\dot{x} = 0$. (On utilisera respectivement l'hypothèse de roulement sans glissement du cylindre de rayon R_1 ainsi que la nature inextensible du fil).
2) Faire un bilan des actions extérieures exercées sur le solide (S) et sur la masse m.
3) Appliquer le théorème de la résultante cinétique au solide (S) et à la masse m. A-t-on assez d'équations pour déterminer le mouvement des systèmes étudiés ?
4) Appliquer le théorème du moment cinétique au solide (S) en G. En déduire l'accélération de G.

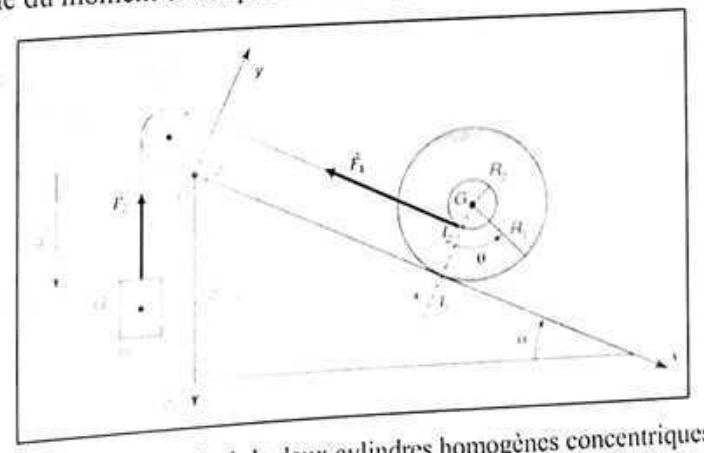


Figure 2 : Solide (S) constitué de deux cylindres homogènes concentriques

Scanné avec CamScanner

CORRECTION MECANIQUE DES SYSTEMES 2018-2019

EXERCICE 1

$\begin{cases} \vec{V}_1 = (1,0,-1) \text{ d'origine } A(1,0,0) \\ \vec{V}_2 = (1,2,2) \text{ d'origine } B(0,1,0) \\ \vec{V}_3 = (\lambda,\ \mu,\ \upsilon) \text{ d'origine } C(0,0,1) \end{cases}$

Soit $[T]$ la somme des trois glisseurs.

1) Déterminons $(\lambda,\ \mu,\ \upsilon)$ pour que $[T]$ soit un couple.

Pour que $[T]$ soit un couple, il faut et il suffit que $\vec{R} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \upsilon \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2 = 0 \\ \mu + 2 = 0 \\ \upsilon + 1 = 0 \end{cases}$

Donc $[T]$ est un couple pour $\lambda = -2, \mu = -2,$ et $\upsilon = -1 \Longrightarrow (\lambda,\ \mu,\ \upsilon) = (-2,-2,-1)$

*Trouvons son moment : le moment du couple $[T]$

$\overrightarrow{M_p} = \overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}_1 + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{V}_2 + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{V}_3 \quad \forall p$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\forall p, \overrightarrow{M_p} = \overrightarrow{M_o} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) Déterminons la relation qui doit lier $\lambda,\ \mu,$ et υ pour que $[T]$ soit un glisseur

Pour que $[T]$ soit un glisseur, il faut et il suffit que $\vec{R}.\overrightarrow{M_p} = \vec{0}$ et $\vec{R} \neq \vec{0}$;

avec $\overrightarrow{M_p} = \overrightarrow{M_o} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$ d'où $\vec{R}.\overrightarrow{M_p} = \vec{R}.(\overrightarrow{M_0} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}) = \vec{R}.\overrightarrow{M_0} + \vec{R}.(\vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}) = \vec{R}.\overrightarrow{M_0}$

donc l'invariant scolaire de $[T]$ est : $I = \vec{R}.\overrightarrow{M_p} = \vec{R}.\overrightarrow{M_O}$

$I = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{R_0}.\overrightarrow{M_0} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda+2 \\ \mu+2 \\ \upsilon+1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 4(\lambda+2) - (\mu+2) - (\upsilon+1) = 0$

$I = 0 \Leftrightarrow \boxed{4\lambda - \mu - \upsilon + 5 = 0}$

- $\vec{R} \neq \vec{0} \Longrightarrow (\lambda,\ \mu,\ \upsilon) \neq (-2,-2,-1)$

3) Dans le cas où $(\lambda,\ \mu,\ \upsilon) = (-2,-2,-1)$, trouvons les équations de l'axe central de $[T]$

Soit $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\forall p, O,$ on a : $\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{OM}}{R^2} + \alpha \vec{R}$

On a : $\overrightarrow{M_p} = \overrightarrow{M_o} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$

Comme $\overrightarrow{M_p} \wedge \vec{R} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{M_o} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = \alpha \vec{R}$

- $\vec{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{M_o} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4-y \\ x-1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$
- $\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $R^2 = 1$

$\overrightarrow{OP} = \vec{R} \wedge \overrightarrow{M_o} + \alpha \vec{R}$

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$

EXERCICE 2

- Repère fixe $R_o(0, \overrightarrow{x_0},\ \overrightarrow{y_0},\ \overrightarrow{z_0})$
- Repère lié au système D est $R\,(c, \vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z})$

Scanné avec CamScanner

Avec $\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ et $\vec{z} = \vec{z_0}$

On note $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x}) = (\vec{Y_0}, \vec{Y})$

1-a) Déterminons la masse M' du système D

On a : $D = D_1 - D_2$

$\Rightarrow M' = M - M_2$ or le système est homogène donc $m = \sigma ds \Rightarrow m = \sigma s$

$\Rightarrow M' = \sigma(S - S_2)$ avec $S = \pi R^2$ et $S_2 = \pi(\frac{R}{2})^2$

$\Rightarrow M' = \sigma(\pi R^2 - (\frac{\pi R^2}{4}))$

Donc $M' = \frac{3}{4}\sigma\pi R^2$

1-b) Déduisons-en la position de G dans le repère R

Le système D étant discrète, alors, on a :

$$\sum_{i=1}^{N} mi\,\overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \Leftrightarrow M\overrightarrow{GC} - M_2\overrightarrow{GC'} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow$

$M\overrightarrow{GC} - M_2(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC'}) = \vec{0}$

2) Soit $I = \frac{1}{2}ma^2$

a) Déterminons le moment d'inertie de D_1/ à l'axe $(G, \vec{Z})$

On sait que $I_{\vec{z}}(G/D_1) = I_{zz}(C) + M(CG)^2$

$$I_{\vec{z}}(G/D_1) = \frac{1}{2}MR^2 + M(\frac{R}{6})^2$$

$$= \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{36}MR^2$$

$$I_{\vec{z}}(G/D_1) = \frac{19}{36}MR^2$$

b) Déterminons le moment d'inertie de D_2/ à l'axe $(G, \vec{Z})$

On a : $I_{\vec{z}}(G/D_2) = I_{zz}(C') + M_2(C'G)^2$

$$= -\frac{1}{2}M_2\left(\frac{R}{2}\right)^2 - M_2(C'G)^2$$

Avec $C'G = C'C + CG = \frac{R}{2} + \frac{R}{6} = \frac{2}{3}R$

Donc $I_z(G/D_2) = -\frac{1}{8}M_2R^2 - \frac{4}{9}M_2R^2$

$$I_z(G/D_2) = -\frac{41}{72}M_2R^2 \quad \text{or} \quad M_2 = \frac{1}{4}M$$

$$\Rightarrow \quad I_{\vec{z}}(G/D_2) = -\frac{41}{288}MR^2$$

c) Déterminons le moment d'inertie du système D par rapport à l'axe $(G, \vec{Z})$

On a : $I_z(G/D) = I_{\vec{z}}(G/D_1) + I_{\vec{z}}(G/D_2)$

$$I_z(G/D) = \frac{19}{36}MR^2 - \frac{41}{288}MR^2$$

$$\boxed{I_z(G/D) = \frac{37}{96}MR^2}$$

3) Le système D roule sans glisser sur un plan horizontal

*Montrons que le moment cinétique du système en G est $\vec{\sigma}(G, D/R_0) = \frac{37}{96}MR^2\dot{\theta}\vec{z}$

On sait que $\vec{\sigma}(G, D/R_0) = I_{G\vec{z}}(D).\vec{\Omega}(D/R_0)$

Avec $I_{G\vec{z}}(D) = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$ et

$\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\theta}\vec{z} = \dot{\theta}\vec{z_0}$

$$*I_{G\vec{z}}(D) = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_z(G/D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{37}{96}MR^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}(G, D/R_0) = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{37}{96}MR^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{\vec{\sigma}(G, D/R_0) = \frac{37}{96}MR^2\dot{\theta}\vec{z}}$

Scanné avec CamScanner

$\sum_{i=1}^{N} mi\,\overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \Leftrightarrow M\overrightarrow{GC} - M_2\overrightarrow{GC} - M_2\overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow M\overrightarrow{GC} - M_2\overrightarrow{GC} = M_2\overrightarrow{CC'}$

$\Leftrightarrow (M - M_2)\overrightarrow{GC} = M_2\overrightarrow{CC'}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GC} = \frac{M_2}{M-M_2}\overrightarrow{CC'}$

Or $M = \sigma\pi R^2$ et $M_2 = \frac{1}{4}\sigma\pi R^2 \Longrightarrow M_2 = \frac{1}{4}M \Longrightarrow M = 4M_2$

$\Longrightarrow \overrightarrow{GC} = \frac{M_2}{4M_2-M_2}\overrightarrow{CC'}$

$\overrightarrow{GC} = \frac{M_2}{3M_2}\overrightarrow{CC'}$ avec $\overrightarrow{CC'} = -\frac{R}{2}\vec{j}$

$\overrightarrow{GC} = -\frac{1}{6}R\vec{j} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{CG} = \frac{R}{6}\vec{j}$

EXERCICE 3

1.a) Le vecteur instantané de rotation de la sphère par rapport au repère fixe (o, x, y, z)

$\Longrightarrow R(o,x,y,z) \longrightarrow R(c, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}) \longrightarrow R(o, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_r})$

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(S/R) = \dot{\varphi}\,\overrightarrow{U_u}}$$

1.b) déterminons $\vec{v}(c)$ de deux manières

* 1 ère méthode

$\vec{v}(c) = \frac{d\overrightarrow{oc}}{dt}/R = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC}\right)/R =$

$\frac{d}{dt}\left(R\overrightarrow{U_r} + b\overrightarrow{U_r}\right)/R$

$= \frac{d}{dt}(R+b)\overrightarrow{U_r}/R$

$= (R+b)\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt}/R$ or $\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} =$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{U_r}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}}$$

$$\boxed{\vec{v}(c) = (R+b)\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}}$$

* 2e méthode : ici $\overrightarrow{\Omega}(S/R) = \dot{\theta}\overrightarrow{U_y}$

D'après la formule de varignon, on a :

$\vec{v}(c) = \vec{v}(o) + \overrightarrow{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{oc}$ or $\overrightarrow{oc} = (R+b)\overrightarrow{U_r}$

$\vec{v}(c) = \vec{v}(o) + \Omega(S/R) \wedge \overrightarrow{oc}$ avec $v(0) = 0$ et $\overrightarrow{oc} = (R+b)\overrightarrow{U_r}$

$\vec{v}(c) = \Omega(S/R) \wedge \overrightarrow{oc}$

$= \dot{\theta}\overrightarrow{U_y} \wedge (R+b)\overrightarrow{U_r}$

$= \dot{\theta}(R+b)\overrightarrow{U_y} \wedge \overrightarrow{U_r}$ or $\overrightarrow{U_y} \wedge \overrightarrow{U_r} = \overrightarrow{U_\theta}$

$$\boxed{\vec{v}(c) = (R+b)\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}}$$

* Montrons que $(R+b)\dot{\theta} = b\dot{\varphi}$

D'après la relation de roulement et pivotement au point de contact I on a :

$\vec{v}(c) = \vec{v}(i \in C/O) + \overrightarrow{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{IC}$

$$\boxed{\vec{v}(c) = \overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{IC}}$$

$\overrightarrow{V_g} = 0 \Longrightarrow \vec{v}(c) = \overrightarrow{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{IC}$

$\vec{v}(c) = \dot{\varphi}\overrightarrow{U_y} \wedge b\overrightarrow{U_r}$

$\vec{v}(c) = \dot{\varphi}b\overrightarrow{U_y} \wedge \overrightarrow{U_r}$ Or $\overrightarrow{U_y} \wedge \overrightarrow{U_r} = \overrightarrow{U_\theta}$

$\vec{v}(c) = \dot{\varphi}b\overrightarrow{U_\theta}$ Or $\vec{v}(c) = (R+b)\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}$

Donc: $\boxed{\dot{\theta}(R+b) = \dot{\varphi}b}$

* Déduisons-en l'expression de $\overrightarrow{\Omega}(S/R)$ en fonction de R, b, et $\dot{\theta}$

$\dot{\varphi}b = \dot{\theta}(R+b) \Leftrightarrow \dot{\varphi} = \left(1 + \frac{R}{b}\right)\dot{\theta}$

Scanné avec CamScanner

Comme $\overrightarrow{\Omega}(S/R) = \dot{\varphi}\overrightarrow{U_y}$; Alors

$\Omega(S/R) = \dot{\theta}\,(1+\frac{R}{b})\,\overrightarrow{U_y}$

2°) Déterminons l'élément de la réduction du torseur dynamique en C

en fonction de R, b, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$

On a: $\vec{a}(S/R) = m\,\vec{j}\,(G/R)$

$\overrightarrow{\delta_C}(S/R) = \frac{d\overrightarrow{\sigma_C}(S/R)}{dt}/R$

Avec $\vec{a}(S/R)$ la résistance dynamique du torseur au centre de masse G, on a : $C \equiv G$

$\Rightarrow \vec{j}(G/R) = \vec{j}(C/R) = \frac{d\vec{v}(C/R)}{dt}$ Or $\vec{v}(c) = (R+b)\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}$

$= (R+b)\ddot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}$

$= \vec{R}_{ext}(S)$

*D'après le théorème des moments dynamiqu+ $(R+b)\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt}/R$

$= (R+b)\ddot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + (R+b)\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt}$ Or $\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{d\theta} = -\overrightarrow{U_r}$

$= (R+b)\ddot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + (R+b)\dot{\theta}^2(-\overrightarrow{U_r})$

$\vec{j}(C/R) = (R+b)(\ddot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} - \dot{\theta}^2\overrightarrow{U_r})$

Donc $\vec{a}(S/R) = m(R+b)\ddot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} - m(R+b)\dot{\theta}^2\overrightarrow{U_r}$

* $\overrightarrow{\sigma_C}(S/R) = J_C(s).\vec{\Omega}(S/R)$; avec $J_C(s) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$; $A \in \mathbb{R}$.

$= \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(R+b)\dot{\theta}}{b} \\ 0 \end{pmatrix}$

$= A\frac{(R+b)\dot{\theta}}{b}\overrightarrow{U_y}$ or $A = \frac{2}{5}mb^2$

$\overrightarrow{\sigma_C}(S/R) = \frac{2mb}{5}(R+b)\dot{\theta}\overrightarrow{U_y}$

$\Rightarrow \vec{\delta}_C(S/R) = \frac{d\vec{a}(S/R)}{dt}/R = \frac{2mb}{5}(R+b)\frac{d\dot{\theta}\overrightarrow{U_y}}{dt}/R$

$$\boxed{\vec{\delta}_C(S/R) = \frac{2mb}{5}(R+b)\ddot{\theta}\,\overrightarrow{U_y}}$$

$m(R+b)\ddot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} - m(R+b)\ddot{\theta}^2\overrightarrow{U_r}$

Conclusion :

$[D(S/R)]_C = \frac{2}{5}mb\,(R+b)\ddot{\theta}\,\overrightarrow{U_y}$

C

3-a) Appliquons les théorèmes de la résultante et du moment dynamique de la sphère.

*D'après le Théorème de la résultante dynamique, $m\vec{j}(G/R)$e

On a : $\vec{\delta}_C(S/R) = \vec{M}_{C\,ext}$

*Système : la sphère

*Bilan des forces :

- Le poids P de la sphère $\vec{P} = m\vec{g}$
- La force de contact $\vec{R}$ $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$

Projection sur l'axe $(C, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{U_r})$

$\vec{P}\begin{vmatrix} -P\cos\theta\,\overrightarrow{U_r} \\ P\sin\theta\,\overrightarrow{U_\theta} \end{vmatrix}$; $\overrightarrow{T}\begin{vmatrix} -T\,\overrightarrow{U_\theta} \\ 0 \end{vmatrix}$; $\vec{N}\begin{vmatrix} 0 \\ N\,\overrightarrow{U_r} \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \vec{R}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{R}$

$= (P\sin\theta - T)\overrightarrow{U_\theta} + (-P\cos\theta + N)\overrightarrow{U_r}$

$\vec{R}_{ext} = (mg\sin\theta - T)\overrightarrow{U_\theta} + (-mgcos + N)\overrightarrow{U_r}$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \vec{M}_{C\,ext} = \vec{M}_C(\vec{R}) + \vec{M}_C(\vec{P})$

$= \vec{M}_C(\vec{N}) + \vec{M}_C(\vec{T}) + \vec{M}_C(\vec{P})$

avec $\vec{M}_C(\vec{N}) = 0$

$\vec{M}_C(\vec{P}) = 0$

$= \vec{M}_C(\vec{T}) = \overrightarrow{CI} \wedge \vec{T}$

$\vec{M}_{C\,ext} = (-b\overrightarrow{U_r}) \wedge (-T)\overrightarrow{U_\theta} = bt(\overrightarrow{U_r} \wedge \overrightarrow{U_\theta})$

Donc $\vec{M}_{C\,ext} = (b\,T\,\overrightarrow{U_y})$

*Egalité entre les deux résultantes

$m\vec{j}(C/R) = \vec{R}_{ext\,(s)} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -m(R+b)\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N & (1) \\ m(R+b)\ddot{\theta} = mg\sin\theta - T & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow N + m(R+b)\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta$

$\Rightarrow N = mg\cos\theta - m(R+b)\dot{\theta}^2$

$\Rightarrow N = m[g\cos\theta - (R+b)\dot{\theta}^2]$ (3)

*Egalité entre les moments

$\frac{d\overrightarrow{\sigma_C}(S/R)}{dt}/R = \vec{M}_{C\,ext} \Leftrightarrow \frac{2mb}{5}(R+b)\ddot{\theta} = bT$

$\Leftrightarrow T = \frac{2}{5}m(R+b)\ddot{\theta}$ (4)

3-b) Montrons que l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ peut se mettre sous la forme $\frac{7}{5}m(R+b)\ddot{\theta}\,\dot{\theta} = g\,sin(\theta)\dot{\theta}$

d'après l'équation (2) $\Rightarrow T + m(R+b)\ddot{\theta} = mg\sin\theta$

$\Rightarrow T = mg\sin\theta - m(R+b)\ddot{\theta}$

$\Rightarrow T = m[g\sin\theta - (R+b)\ddot{\theta}]$ (5)

(4) = (5) $\Rightarrow \frac{2}{5}(R+b)\ddot{\theta} = g\sin\theta - (R+b)\ddot{\theta}$

$\Rightarrow \frac{2}{5}(R+b)\ddot{\theta} + (R+b)\ddot{\theta} = g\sin\theta$

$\Rightarrow (R+b)\ddot{\theta} + \left(\frac{2}{5}+1\right) = g\sin\theta$

$\Rightarrow \frac{7}{5}(R+b)\ddot{\theta}\,\dot{\theta} = g\sin(\theta)\dot{\theta}$ (6)

4) Intégrons $\frac{7}{5}(R+b)\ddot{\theta}\,\dot{\theta} = g\sin(\theta)\dot{\theta}$

$\Rightarrow \frac{7}{5}(R+b)\int_0^t \ddot{\theta}\,\dot{\theta}\,d\theta = g\int_0^t \sin(\theta)\dot{\theta}\,d\theta$

$\Rightarrow \frac{7}{5}(R+b)[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2]_0^t = g[-\cos\theta]_0^t$

Soit $\frac{7}{10}(R+b)\dot{\theta}^2 = -g\cos(\theta)$ (7)

*En déduisons l'expression de $\|\vec{T}\|$ et $\|\vec{N}\|$ en fonction de m, g et θ

$(7) \Leftrightarrow 7(R+b)\dot{\theta}^2 = -10\,gcos\,\theta$

$\dot{\theta}^2 = -\frac{10\,gcos\,\theta}{7(R+b)}$

$(3) \Rightarrow N = m[g\cos\theta - (R+b)\dot{\theta}^2] = \|\vec{N}\|$

$N = m\left[g\cos\theta + (R+b)\frac{1}{(R+b)} \cdot \frac{10}{7}gcos\,\theta\right]$

$N = m(g\cos\theta + \frac{10}{7}gcos\,\theta)$

$N = mg\cos\theta(1 + \frac{10}{7})$

$\boxed{N = \frac{10}{7}mg\cos\theta}$

On a : $7(R+b)\ddot{\theta} = 5\,gsin\,\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{5g}{7(R+b)}\sin\theta$

Or $T = m[g\sin\theta - (R+b)\ddot{\theta}] = \|\vec{T}\|$

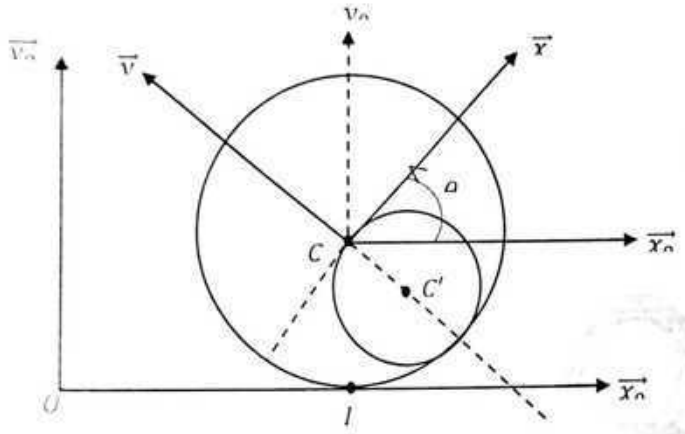
$T = m[g\sin\theta - (R+b)\frac{5g\sin\theta}{7(R+b)}]$

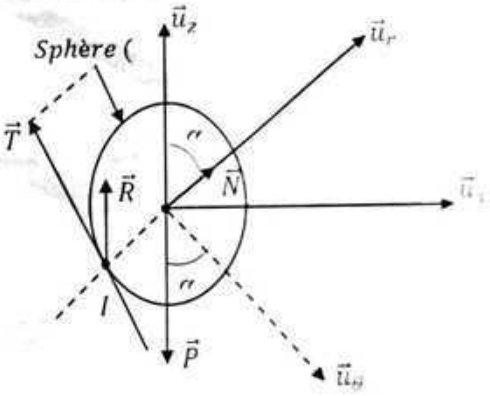
Scanné avec CamScanner

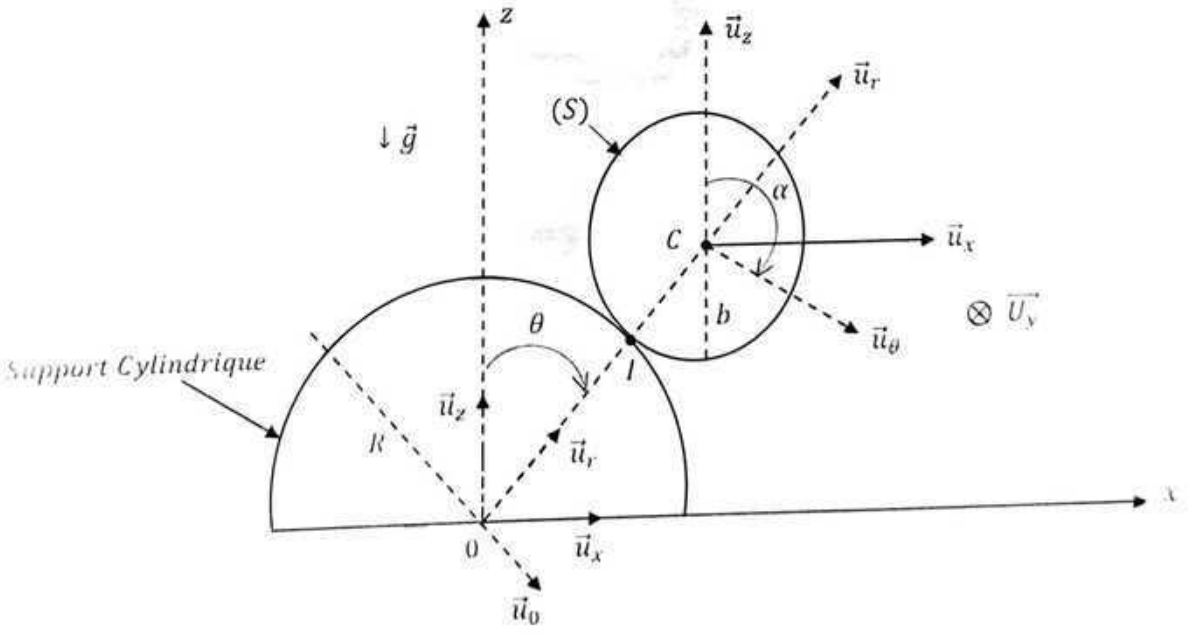
$$T = m[g\sin\theta - \frac{5}{7}g\sin\theta]$$

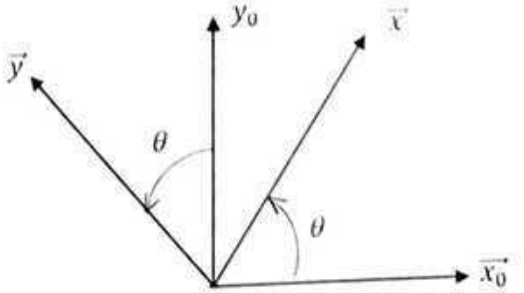
$$T = mg\sin\theta(1 - \frac{5}{7})$$

Donc $\boxed{T = \frac{2}{7}mg\sin\theta}$









Scanné avec CamScanner

Correction Mécanique des systèmes Session 1 2020-2021

Exercice 1

1. Le point O a pour coordonnée $O = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{V(O)} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

2. Equiprojectivité, on utilise les points O et M, tel que :

$$\overrightarrow{V(O)}\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{V(M)}\,\overrightarrow{OM} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3y-tz\\2tz-3x\\2+tx-t^2y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 2$

Le champ $\overrightarrow{V(M)}$ est équiprojectif pour $t = 0$ ou $t = 0$; $\overrightarrow{V(M)}$ est un torseur pour ces valeurs de t.

3. Pour $t = 0$ on a : $\vec{R}(t=0) = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$

   Pour $t = 2$ on a : $\vec{R}(t=2) = \begin{pmatrix}-4\\-2\\-3\end{pmatrix}$

4. Soit les deux torseurs associés à $t = 0$: $[\mathcal{C}_0]$ et à $t = 2$: $[\mathcal{C}_2]$

Calculons pour les deux valeurs l'invariant scalaire :

$I_0 = \vec{V}(O).\vec{R}(t=0) = -6 \neq 0$

$I_2 = \vec{V}(O).\vec{R}(t=2) = -10 \neq 0$

Donc les deux torseurs sont quelconques (ni glisseur ni couple) chacun peut cependant être décomposé en la somme d'un glisseur et d'un couple :

$[\mathcal{C}_0] = [\vec{V}(O), \vec{R}(t=0)] = [\vec{V}(O), 0] + [0, \vec{R}(t=0)]$

De même

$[\mathcal{C}_2] = [\vec{V}(O), \vec{R}(t=2)] = [\vec{V}(O), 0] + [0, \vec{R}(t=2)]$

Donc $\begin{cases} couples : \vec{C}(M) = \vec{V}(O) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \forall M \\ Glisseurs : \vec{G}(M) = \vec{0} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OM} \end{cases}$

5. Soit p appartient à l'axe central du torseur, la position de P par rapport à O est donnée par $\overrightarrow{OP} = \frac{R(t)\wedge\vec{V}(M)}{R^2} + \lambda\vec{R}$

   Avec $\lambda \in \mathbb{R}$

   Pour $\lambda = 0$, $\overrightarrow{OP_0} = \frac{R(t)\wedge\vec{V}(0)}{R^2}$

   Donc pour $t = 0, \vec{R}(t=0) = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$;

   $\vec{V}(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ on obtient alors $\overrightarrow{OP_0} = -\frac{1}{3}\vec{j}$

Scanné avec CamScanner

L'axe central pour $t = 0$ passe pour p_0 et parallèle à $\vec{R}(t=0)$ ⇒parallèle à $\vec{k}$. De la même façon on obtient l'axe central pour $t = 2$.

L'axe central pour $t = 0$ passe par

$$p_0 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{29} \\ -\frac{5}{29} \\ \frac{2}{29} \end{pmatrix} \text{ et parallèle à } \vec{R}(t=2) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. $G(0, y_G, 0)$ car l'axe y est un de symétrie et G appartient à l'axe de symétrie. On a :
   $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$
   $B(-a, 0)\,; C(a, 0)\,; A(0, y_A); y_A = AH = a$
   $A(0, a)\ y_G = \frac{a}{3}$ donc $G(0, \frac{a}{3}, 0)$.
2. Les plans (H, X, Y) et (H, Y, Z) sont des plans de symétrie matériel. Alors le repère (H, X, Y, Z) est un repère principale d'inertie d'où

$$J_H = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} M \text{ moment d'inertie par rapport à } (HX) \\ N \text{ moment d'inertie par rapport à } (HY) \\ P \text{ moment d'inertie par rapport à } (HZ) \end{cases}$$

- Déterminons M, N et P

Posons $(h = 0, b = 2a)$

$\frac{by}{b} = \frac{h-y}{h}$

$\Rightarrow by = \frac{b}{h}(h - y)$

$ds = \lambda b y dy$

$m = \lambda \frac{b \times h}{2}$

$\lambda = \frac{2m}{b \times h}$

$$M = \int_S (y^2 + z^2) ds = \int_S (y^2) ds = \int_S (y^2) \lambda b y dy = \lambda \frac{b h^3}{12}$$

$$\Rightarrow M = \frac{m h^2}{6} = \frac{m a^2}{6}$$

$$N = \int_S (x^2 + y^2) ds = \int_S x^2 ds = \int_0^h \lambda x^2 \left(\frac{b}{h}\right)(h - x)\, dx$$

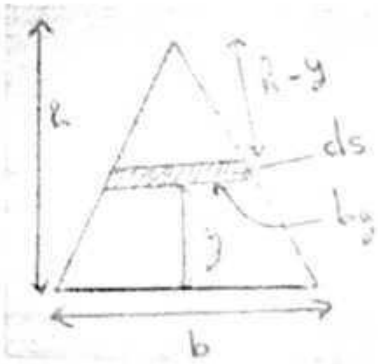
$N = \frac{mh^2}{6} = \frac{ma^2}{6}$ or $M + N = P + 2\int_S z^2 ds$

Donc $P = \frac{ma^2}{3}$; $J_H(S) = \frac{ma^2}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) On a : $J_H(S) = J_G(S) + J(G, m)$

$\Rightarrow J_G(S) = J_H(S) - J(G, m)$

$$J_G(S) = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} - m\begin{pmatrix} y_G^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_G^2 \end{pmatrix}; y_G^2 = \frac{a^2}{9}$$



Scanné avec CamScanner

$$J_G(S) = \frac{ma^2}{6}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

3. Moment d'inertie par rapport à (AB)

$I_{AB} = I_{\Delta H} + md^2$

$I_{\Delta H} = t_{\vec{u}} j_H(S)\vec{u}$

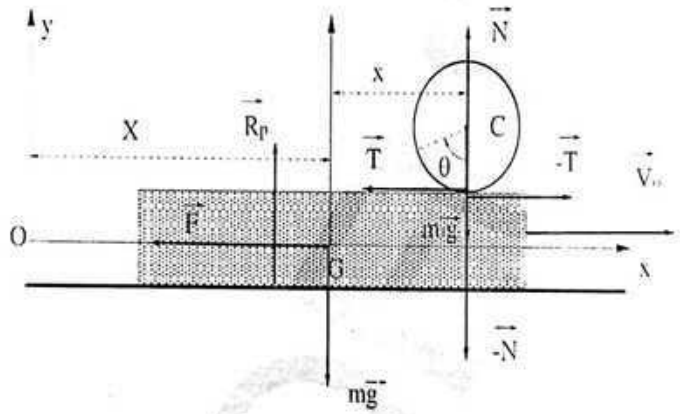
$\vec{u} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\jmath}$

$I_{\Delta H} = \frac{ma^2}{6}, d = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$I_{AB} = \frac{2}{3}ma^2$

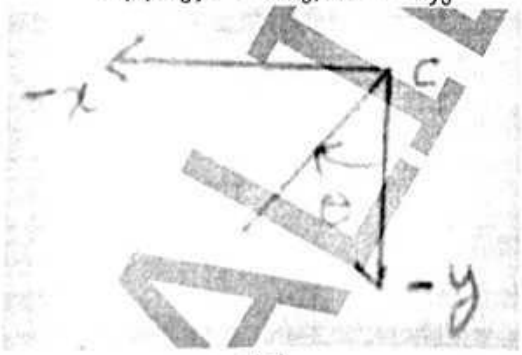
Exercice 3

1. a.



b. $\vec{V}_g(c/P) = \vec{V}(I \in c/R_G) = \vec{v}(c/R_G) + \vec{\Omega}(c/R_G) \wedge \overrightarrow{CI}$ avec

$\vec{\Omega}(c/R_G) = -\dot{\theta}\vec{k}_0; \overrightarrow{CI} = -a\overrightarrow{j_0}$



$\vec{v}(c/R_G) = \frac{dx\vec{\imath}_0}{dt}/R_G = \dot{x}\vec{\imath}_0$

$\vec{V}_g(c/P) = (\dot{x} - \dot{\theta}a)\vec{\imath}_0 = \vec{0}$ ①

Scanné avec CamScanner

2. Pour le cylindrique

$$\begin{cases} m_1\vec{\gamma}(c/R_0) = m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} \\ \vec{f}(C,c/R_0) = \dfrac{d}{dt}\vec{\sigma}\,(C,c/R_0)/R_0 \end{cases}$$

Car le cylindre roule sans glisser sur le plateau

Or $\vec{\sigma}\,(C,c/R_0) = J(c,R_0).\vec{\Omega}\,(c/R_0) = -\frac{ma^2\dot{\theta}}{2}\overrightarrow{k_0}$ or

D'où $\vec{f}(C,c/R_0) = -\frac{ma^2\ddot{\theta}}{2}\overrightarrow{k_0}$ or

$\vec{f}(C,c/R_0) = \vec{M}_c,ext = \vec{M}(\vec{P}) + \vec{M}(\vec{N}) + \vec{M}(\vec{T})$

$= \overrightarrow{CC} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{CI} \wedge \vec{N} + \overrightarrow{CI} \wedge \vec{T} = -aT\overrightarrow{k_0}$

$\vec{\gamma}(c/R_0) = \dfrac{d^2}{dt^2}(X+x)\vec{\imath}_0/R_0 = (\ddot{X}+\ddot{x})\vec{\imath}_0$

par projection sur les axes on obtient

$$\begin{cases} m_1(\ddot{X}+\ddot{x}) = -T \ (2) \\ 0 = N - m_1 g \ (3) \\ aT = \left(\dfrac{m_1 a^2}{2}\right)\ddot{\theta} \ (4) \end{cases}$$

- Pour le plateau

$m\vec{\gamma}(G/R_0) = m\vec{g} + \overrightarrow{R_p} + \vec{F} - \vec{N} - \vec{T}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{X} = T - F \ (5) \\ 0 = Rp - N - mg \ (6) \end{cases}$$

3. L'équation (1) $\Rightarrow \dot{x} = a\dot{\theta}$

$\Rightarrow \ddot{x} = a\ddot{\theta}$

$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{a}$ dans l'équation (4)

$\Rightarrow \quad T = \left(\frac{m_1}{2}\right)\ddot{x}$ (7)

(7) dans (2) $\Rightarrow \quad m_1(\ddot{X}+\ddot{x}) = -\left(\frac{m_1\ddot{x}}{2}\right) \Rightarrow$

$m_1\left(\ddot{X} + \frac{3}{2}\ddot{x}\right) = 0 \Rightarrow \quad \ddot{X} + \frac{3}{2}\ddot{x} = 0$ (8)

(7) Et (8) dans (5) $\Rightarrow \quad m\ddot{X} = \left(\frac{m_1\ddot{x}}{2}\right) - F$

$\Rightarrow -\frac{3}{2}m\ddot{x} = \left(\frac{m_1\ddot{x}}{2}\right) - F \Rightarrow \ddot{X} = \dfrac{2F}{3m+m_1}$ (9)

(9) $\Rightarrow \dot{x}(t) = \dfrac{2Ft}{3m+m_1}$

$$\boxed{x(t) = \frac{Ft^2}{3m+m_1}}$$

4. L'équation (9) dans (8) $\Rightarrow$

Scanné avec CamScanner

$$\ddot{X} + \frac{2F}{3m + m_1} \times \frac{3}{2} = 0$$

$$\ddot{X} = -\frac{3F}{3m + m_1} \Rightarrow \dot{X} = -\frac{3Ft}{3m + m_1} + V_0$$

donc $X(t) = -\frac{3Ft^2}{3m+m_1} + V_0 t$

L'instant $t\alpha$ correspondent à l'arrêt du plateau correspond à

$$\dot{X}(t\alpha) = 0 \Rightarrow t\alpha = \frac{V_0(3m + m_1)}{3F}$$

5. $t \geq t\alpha$, le plateau s'immobilise $\Rightarrow \dot{X}(t) = \ddot{X}(t) = 0$
   L'équation ② devient $m_1\ddot{x} = -T$ et d'après ⑦ $m_1\ddot{x} = 2T \Rightarrow T = 0$
   Ainsi $m_1\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = cte = \dot{x}(t\alpha)$
6. Pour $t \leq t\alpha$, et en utilisant ⑧ $\dot{X} + \frac{3}{2}\dot{x} = V_0$ pour tout $t = t\alpha$,

   $\dot{X} = 0$ et $\dot{x} = \frac{2}{3}V_0$

   Or $\vec{V}(c/R_0) = \vec{V}(c/R_G) + \vec{V_e} = \dot{x}(t)\vec{\imath_0} = \frac{2}{3}V_0\vec{\imath_0}$

   Le mouvement du cylindre est uniforme

Scanné avec CamScanner

Université FHB
MATHS-INFO L2 Année 2020-2021

CORRECTION MECANIQUE DES SYSTEMES
Session 2

Exercice 1

$A(3.0.0)$; $B(-1.2.1)$

$\overrightarrow{M}(0) = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{M}(A) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{M}(B) = \begin{pmatrix}2\\-1\\9\end{pmatrix}$

1) Champ antisymétrique $\Leftrightarrow$ champ équiprojectif.

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{M}(0) = 3$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{M}(0) = 3 \Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{M}(0) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{M}(A)$ même chose pour $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{M}(0) = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{M}(B)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{M}(A) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{M}(B)$.

Donc $\overrightarrow{M}$ est un champ antisymétrique.

2) $\overrightarrow{M}$ est antisymétrique donc $\exists!\ \overrightarrow{R}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tel que

$\forall A.O.\ \overrightarrow{M}(A) = \overrightarrow{M}(O) + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{OA} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

$\forall A.B.\ \overrightarrow{M}(B) = \overrightarrow{M}(A) + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

$\forall O.B.\ \overrightarrow{M}(B) = \overrightarrow{M}(0) + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{OB}$ alors $\overrightarrow{R}$ est unique et $\overrightarrow{R} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

3) $\overrightarrow{M}(P)$ en tout point $P(x.y.z)$ de l'espace

On a: $\overrightarrow{M}(P) = \overrightarrow{M}(O) + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{M}(P) = \begin{cases} 1 + z \\ 1 - 2z \\ 4 - x + 2y \end{cases}$

4) $\overrightarrow{M}(P) = \lambda\overrightarrow{R} / P \in (\Delta)$

$$\begin{cases} 1 + z = 2\lambda \\ 1 - 2z = \lambda \\ 4 + 2y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1/5 \\ y = \frac{1}{2}(x - 4) \end{cases} \Rightarrow (\Delta) \text{ est la droite d'équation}$$

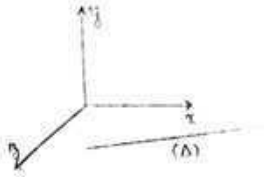
$y = \frac{1}{2}(x - 4)$ qui se trouve dans le plan $z = \frac{1}{5}$

$z = \frac{1}{5} \Rightarrow \lambda = \frac{3}{5} \Rightarrow \overrightarrow{M}(P \in \Delta) = \frac{3}{5}\overrightarrow{R}$

9/11/2022

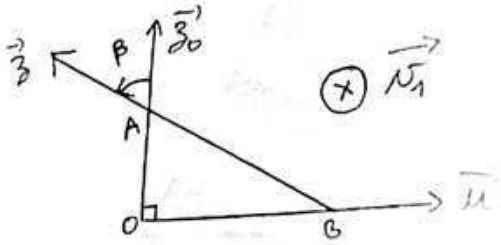
Scanné avec CamScanner

$$\vec{M}(P \in \Delta) = \frac{\vec{R}.\vec{M}(0)}{R^2}\vec{R} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$



Exercice 2

1) À tout instant t la tige se trouve dans le plan $(O, \vec{u}, \vec{z}_0)$



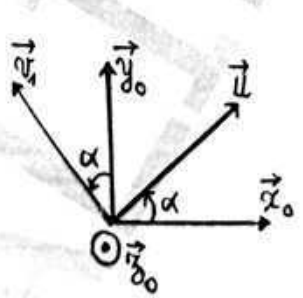
Or $\vec{r}_1$ est orthogonal à tout instant à ce plan$\Rightarrow$ $\vec{r}_1$ est lié à la tige. $\vec{z}$ vecteur unitaire de la tige est lié à la tige. $\vec{r}_1$ et $\vec{z}$ sont orthogonaux or $\vec{r} = \vec{r}_1 \wedge \vec{z} \Rightarrow (\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{z})$ est orthonormé direct et $\vec{r}$ est aussi lié à la tige. Donc le repère $R(A, \vec{r}, \vec{r}_1, \vec{z})$ est lié à la tige.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{z}_0 \Rightarrow \lambda = \overrightarrow{OA}.\vec{z}_0$

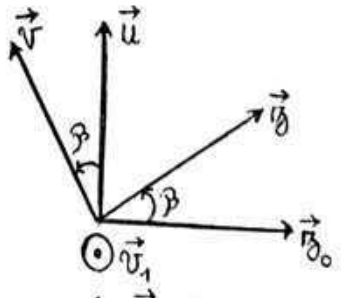
$= \overrightarrow{OB}.\vec{z}_0 + \overrightarrow{BA}.\vec{z}_0$

$= 0 + L\vec{z}.\vec{z}_0$

Donc $\lambda = L\vec{z}.\vec{z}_0$



$R_1(O, \vec{u}, \vec{v}_1, \vec{z}_0)$



$(A, \vec{v}_1, \vec{v}, \vec{z})$

Scanné avec CamScanner

$\vec{z} = \cos\beta\,\vec{z}_0 + \sin\beta\,\vec{u}$

$\lambda = L\,\vec{z}.\vec{z}_0 = L\cos\beta$
$\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{z}_0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} = L\cos\beta\,\vec{z}_0$
$(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow[\vec{z}_0]{\alpha} (\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{z}_0) \xrightarrow[\vec{v}_1]{\beta} (\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{z})$

On passe de la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ à la base $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{z}_0)$ par rotation d'angle α autour de $\vec{z}_0$ et on passe de la base $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{z}_0)$ à la base $(\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{z})$ par rotation d'angle β autour de $\vec{v}_1$ donc α et β déterminent la position de $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{z})$ par rapport à $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$or $(\overrightarrow{OA} = L\cos\beta\,\vec{z}_0)$ β donne la position de A par rapport à $\mathcal{R}_0$.
Finalement α et β donnent la position de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ et comme $\mathcal{R}$ est lié à la tige , α et β donnent la position de la tige par rapport à $\mathcal{R}$.

2) Calculons $\vec{\Omega}(AB/\mathcal{R}_0)$ dans $\mathcal{R}_1$
$\vec{\Omega}(\overrightarrow{AB}/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)$
$= \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$
$= \dot{\beta}\,\vec{v}_1 + \dot{\alpha}\,\vec{z}_0$

3)
$\vec{V}(A/\mathcal{R}_0) = \dfrac{d\overrightarrow{OA}}{dt/\mathcal{R}_0} = \dfrac{Ld(\cos\beta\,\vec{z}_0)}{dt/\mathcal{R}_0}$
$= L\left(\cos\beta\dfrac{d\vec{z}_0}{dt/\mathcal{R}_0} + \dfrac{d\cos\beta}{dt}\vec{z}_0\right)$

$\vec{V}(A/\mathcal{R}_0) = -L\dot{\beta}\sin\beta\,\vec{z}_0$
$\vec{V}(B/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(A/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\overrightarrow{AB}/\mathcal{R}_0)\wedge\overrightarrow{AB}$
$= -L\dot{\beta}\sin\beta\,\vec{z}_0 + (\dot{\beta} + \dot{\alpha}\,\vec{z}_0)\wedge(-L\vec{z})$
$= \vec{V}(A/\mathcal{R}_0) - L\dot{\beta}\vec{v} - L\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{v}_1$
$\vec{z}_0 = \cos\beta\,\vec{z} - \sin\beta\,\vec{v}$; $\vec{v} = \cos\beta\,\vec{u} - \sin\beta\,\vec{z}_0$
$\vec{V}(B/\mathcal{R}_0) = -L(\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{u} + \dot{\alpha}\sin\beta\vec{v}_1)$

$\vec{V}(B/\mathcal{R}_1) = \dfrac{d\overrightarrow{OB}}{dt/\mathcal{R}_1}$
$\overrightarrow{OB} = \delta\,\vec{u} \Rightarrow \delta = \overrightarrow{OB}.\vec{u} = \overrightarrow{OA}.\vec{u} + \overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0 - L\vec{z}.\vec{u}$
$\Rightarrow \delta = -L\cos(\dfrac{\pi}{2} - \beta)$
$\Rightarrow \delta = -L\sin\beta$

$\overrightarrow{OB} = -L\sin\beta\,\vec{u}$
$\vec{V}(B/\mathcal{R}_1) = -L\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{u}$
4) Prenons comme repère absolue $\mathcal{R}_0$ et repère relatif $\mathcal{R}_1$
$\vec{V}_a(B) = \vec{V}_r(B) + \vec{V}_e(B) = \vec{V}(B/\mathcal{R}_0)$
$\vec{V}_r(B) = \vec{V}(B/\mathcal{R}_1)$
$\vec{V}_e(B) = \vec{V}(B \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$

Scanné avec CamScanner

$$\vec{V}(B\in R_1/R_0)=\vec{V}(O/R_0)+\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\overrightarrow{OB}$$
$$=\dot{\alpha}\,\vec{z}_0\wedge(-L\sin\beta\,\vec{u})$$
$$=-L\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{u}$$
$$\vec{V}(B/R_0)=-L\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{u}-L\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{r}_1$$

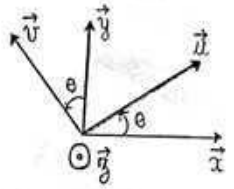
5) $\vec{\gamma}(B/R_0)=\dfrac{d\vec{V}(B/R_0)}{dt/R_0}$

$$\vec{\gamma}(B/R_0)=L(\sin\beta(\dot{\beta}^2+\dot{\alpha}^2)-\ddot{\beta}\cos\beta)\vec{u}-L(2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta+\ddot{\alpha}\sin\beta)\vec{r}_1$$

Exercice 3

1) Montrons que $\vec{\Omega}(EF/\mathcal{R})=\dot{\theta}\,\vec{z}$: la base $(\vec{u},\vec{r},\vec{z})$ est une base orthonormée directe liée à la tige (EF)

On a: $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})\xrightarrow[\vec{z}]{\theta}(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z})$ donc $\vec{\Omega}(EF/\mathcal{R})=\dot{\theta}\,\vec{z}$



* Calculons $\vec{V}(G)$

$$\vec{V}(G)=\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt/\mathcal{R}}=\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CG})_{/\mathcal{R}}=\frac{dx}{dt}\vec{x}+r\frac{d\vec{y}}{dt/\mathcal{R}}-L\frac{d\vec{r}}{dt/\mathcal{R}}\ \text{avec}$$

$$\frac{d\vec{y}}{dt/\mathcal{R}}=\vec{0};\ \frac{d\vec{v}}{dt/\mathcal{R}}=\vec{\Omega}(EF/\mathcal{R})\wedge\vec{v}=\dot{\theta}\,\vec{z}\wedge\vec{r}$$

$$\vec{V}(G)=\dot{x}\,\vec{x}+L\dot{\theta}\,\vec{u}\ \text{avec}\ L=\sqrt{a^2-r^2}=Cste$$

2) Caculons J le moment d'inertie de la tige par rapport à son axe $\overrightarrow{Gz}$

$$J=\lambda\int(u^2+v^2)du=\lambda\int_{-a}^{a}u^2\,du;\ m=\lambda 2a\Rightarrow\boxed{J=\frac{ma^2}{3}}$$

3) Déterminons le torseur dynamique de la tige au point G: $[m\vec{\gamma}(G),\vec{\delta}(G,EF/\mathcal{R})]$

$$\vec{\gamma}(G)=\frac{d\vec{V}(G)}{dt/\mathcal{R}}=\ddot{x}\,\vec{x}+L\ddot{\theta}\,\vec{u}+L\dot{\theta}^2\,\vec{r}$$

$$\vec{\delta}(G,EF/\mathcal{R})=\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(G,EF/\mathcal{R})\ \text{Or}\ \vec{\sigma}(G,EF/\mathcal{R})=J\,\vec{\Omega}(EF/\mathcal{R})=J\dot{\theta}\,\vec{z}$$

$$\vec{\delta}(G,EF/\mathcal{R})=J\ddot{\theta}\,\vec{z}$$

4) Théorème du moment dynamique de la tige au point C

$$\vec{\delta}(C,EF/\mathcal{R})=\overrightarrow{CE}\wedge\vec{R}_E+\overrightarrow{CF}\wedge\vec{R}_F+\overrightarrow{CG}\wedge\vec{P}$$

$$\vec{R}_E=-R_E\,\vec{u}_2;\ \vec{R}_F=-R_F\,\vec{u}_1;\ \overrightarrow{CE}=r\,\vec{u}_2;\ \overrightarrow{CF}=r\,\vec{u}_1;\ \overrightarrow{CG}=-L\,\vec{r};$$

$$\vec{P}=-mg\,\vec{y};\ \vec{r}=-\sin\theta\,\vec{x}+\cos\theta\,\vec{y}$$

$$\overrightarrow{CE}\wedge\vec{R}_E=\overrightarrow{CF}\wedge\vec{R}_F=\vec{0};\ \overrightarrow{CG}\wedge\vec{P}=-mgL\sin\theta\,\vec{z}$$

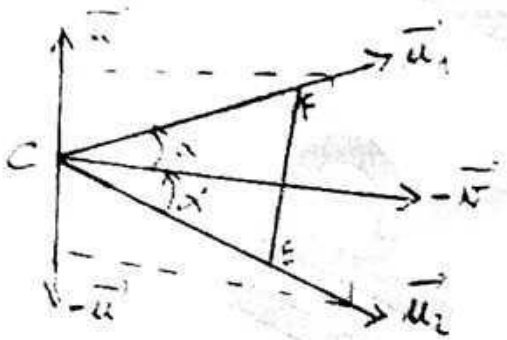
$$\vec{\delta}(C,EF/\mathcal{R})=\vec{\mathcal{S}}(G,EF/\mathcal{R})+m\,\vec{\sigma}(G)\wedge\overrightarrow{GC}=[J\ddot{\theta}+mL^2\ddot{\theta}+m\ddot{x}L\cos\theta]\vec{z}$$

Scanné avec CamScanner

$\overrightarrow{\delta}(C, EF/\mathcal{R}) = Lm[\ddot{\theta}(L+J/mL)+\ddot{x}\cos\theta]\overrightarrow{z}$ or $\overrightarrow{\delta}(C, EF/\mathcal{R}) = -Lmg\sin\theta\overrightarrow{z}$
d'où l'une de ses équations dans le repère $\mathcal{R}$ est:

$$\ddot{\theta}(L + J/mL) + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0$$

5) Théorème de la résultante dynamique
$m\overrightarrow{\gamma}(G) = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}_E + \overrightarrow{R}_F = -mg\overrightarrow{y} - R_E\overrightarrow{u}_2 - R_F\overrightarrow{u}_1$



$\overrightarrow{u}_2 = -\sin\alpha\overrightarrow{u} - \cos\alpha\overrightarrow{v}$ avec $\cos\alpha = \frac{L}{r}$; $\sin\alpha = \frac{a}{r}$
$\overrightarrow{u}_1 = \sin\alpha\overrightarrow{u} - \cos\alpha\overrightarrow{v}$
$m\overrightarrow{\gamma}(G) = -mg\overrightarrow{y} + (R_E - R_F)\sin\alpha\overrightarrow{u} + (R_E + R_F)\cos\alpha\overrightarrow{v}$
$= -mg\overrightarrow{y} + (R_E - R_F)\frac{a}{r}\overrightarrow{u} + (R_E + R_F)\frac{L}{r}\overrightarrow{v}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{u} = \cos\theta\overrightarrow{x} + \sin\theta\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{v} = -\sin\theta\overrightarrow{x} + \cos\theta\overrightarrow{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{x} = \cos\theta\overrightarrow{u} - \sin\theta\overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{y} = \sin\theta\overrightarrow{u} + \cos\theta\overrightarrow{v} \end{cases}$$

$m[(\ddot{x}\cos\theta + L\ddot{\theta})\overrightarrow{u} + (L\dot{\theta}^2 - \ddot{x}\sin\theta)\overrightarrow{v}] = [-mg\sin\theta + (R_E - R_F)\frac{a}{r}]\overrightarrow{u} +$
$[-mg\cos\theta + (R_E + R_F)\frac{L}{r}]\overrightarrow{v}$

$$\begin{cases} (R_E - R_F) = \frac{r}{a}[mg\sin\theta + m(\ddot{x}\cos\theta + L\ddot{\theta})] \\ (R_E + R_F) = \frac{r}{L}[mg\cos\theta + m(L\dot{\theta}^2 - \ddot{x}\sin\theta)] \end{cases}$$

Après résolution on obtient R_E et R_F.

Scanné avec CamScanner

CORRECTION MECANIQUE DES SYSTEMES SESSION 1 ANNEE 2021-2022

EXERCICE 1

1- Déterminons l'équation de la droite (MN) et exprimons x, c'est-à-dire x_{MN} en fonction de y, a et b. $M\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$; $N\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$, $y = Ax + B$ Avec $A = \frac{0-b}{a-0} = -\frac{b}{a}$

$y_M = Ax_M + B$ $\Rightarrow B = b$ D'où $y = -\frac{b}{a}x + b = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$ (1)

de (1) On tire $x = x_{MN} = a\left(1 - \frac{y}{b}\right)$

2

On utilise l'expression intégrale de la masse, adaptée à la distribution surfacique. Les coordonnées décrivant le triangle seront les coordonnées cartésiennes car elles permettent d'exprimer simplement les frontières du triangle.

On ne peut pas séparer ici l'intégrale double en produit de deux intégrales simples car la frontière du domaine d'intégration n'est pas rectangulaire.

La masse M est donnée par $M = \iint_{(S)} \sigma \, dS = \iint_{(S)} \sigma(x, y) \, dx dy$.

La fonction σ ne dépend que de y, il est plus facile de commencer par une intégration sur la variable x :

$$M = \int_0^b \int_0^{x_{max}} \sigma(x, y) \, dx dy$$

x_{max} est donné par l'équation de l'hypoténuse : $\frac{x_{max}}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow x_{max} = a\left(1 - \frac{y}{b}\right)$

$$M = \int_0^b \left(\int_0^{x_{max} = a\left(1 - \frac{y}{b}\right)} \sigma(y) \, dx \right) dy$$

Calculons l'intégrale :

$$M = \int_0^b \left(a\sigma(y)\left(1 - \frac{y}{b}\right)\right) dy$$

$$= \frac{a\sigma_0}{b} \int_0^b \left(y - \frac{y^2}{b}\right) dy$$

$$= \frac{a\sigma_0}{b} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3b}\right]_0^b$$

$$= \frac{a\sigma_0}{b} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{3}\right)$$

$$= \frac{ab\sigma_0}{6}$$

$$M = \frac{1}{6} ab\sigma_0$$

3 –calculons les coordonnées (x_G, y_G) du centre de masse G

$$x_G = \frac{1}{M} \int_{y=0}^b \left(\int_{x=0}^{a\left(1 - \frac{y}{b}\right)} x\sigma(x, y) \, dx \right) dy$$

$$= \frac{\sigma_0}{Mb} \int_{y=0}^b \left(\int_{x=0}^{a\left(1 - \frac{y}{b}\right)} x \, dx \right) dy$$

$$= \frac{\sigma_0}{Mb} \int_{y=0}^b \left(\frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 \right) dy$$

$$= \frac{\sigma_0 a^2}{2Mb} \int_{y=0}^b \left(y + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y}{b}\right) dy$$

$$= \frac{\sigma_0 a^2}{2Mb} \left(\frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{3} - 2\frac{b^2}{3}\right)$$

$$= \frac{\sigma_0 a^2 b}{24M}$$

$$x_G = \frac{a}{4}$$

$$y_G = \frac{b}{2}$$

On utilise alors l'expression de la masse M

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2

$R_1(o;\vec{x_1};\vec{y_1};\vec{z_1})$ Repère OND lié à la terre galiléen



1-) Bilan des efforts extérieurs sur le mât (S_o)

- Effort de pesanteur sur (S_o)
  Torseur équivalent : $[C(\vec{P})]_C = \begin{Bmatrix} -mg\vec{y_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
- Force exercée en par le câble (EB) sur (S_o)
  Torseur équivalent : $[C(\vec{T})]_B = \begin{Bmatrix} -T\vec{V} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
- Efforts sur (S_o) dûs à la liaison pivot d'axe $D\vec{z_1}$ entre (S_o) et la terre.
  Torseur équivalent : $[C(\vec{R})]_P = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{m_P} \end{Bmatrix}$

P : point arbitraire de l'espace, cette liaison pivot est parfaite, donc $\forall P \in D\vec{z_1}$, $\overrightarrow{m_P}.\vec{z_1} = 0$ (1)

2-) Ecrivons l'équilibre (relativement à la terre)

Et déterminons les efforts inconnus qui sollicitent le mât (S_o)A l'équilibre relativement à la terre (donc R_1

$$\begin{bmatrix} Torseur\ des\ efforts \\ exterieurs\ sur\ le \\ mât\ So \end{bmatrix} = [0] \quad (2)$$

$$\begin{cases} -mg\vec{y_1} - T\vec{V} + \vec{R} = \vec{0} & (3) \\ \overrightarrow{M_D(\vec{P})} + \overrightarrow{M_D(\vec{T})} + \overrightarrow{M_D(\vec{R})} = \vec{0} & (4) \end{cases}$$

$$M_D(\vec{P}) = \overrightarrow{M_C}(\vec{P}) + \vec{P}\wedge\overrightarrow{CD} = -mg\vec{y_1}\wedge\overrightarrow{CD} \quad (5)$$

$$M_D(\vec{P}) = \overrightarrow{M_B}(\vec{T}) + \vec{T}\wedge\overrightarrow{BD} = -T\vec{V}\wedge\overrightarrow{BD} \quad (6)$$

$$M_D(\vec{R}) = \overrightarrow{m_D}$$

$$(5) => \overrightarrow{M_D}(\vec{P}) = -mg\|\vec{y_1}\| * \|\overrightarrow{CD}\|\sin(\vec{y_1}, \overrightarrow{CD})\vec{z_1}$$

$$(6) => \overrightarrow{M_D}(\vec{T}) = -T\|\vec{V}\| * \|\overrightarrow{BD}\|\sin(\vec{V}, \overrightarrow{BD})\vec{z_1}$$



$$\vec{u} = cos\frac{\pi}{3}\vec{x_1} + sin\frac{\pi}{3}\vec{y_1} = \frac{1}{2}\vec{x_1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{y_1}$$

EBD est un triangle isocèle en D

$$=> 2\beta + \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \pi\ ;\ 2\beta = \frac{\pi}{3} => \beta = \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

ou $\beta = \left(\frac{\pi}{6} + \pi\right)[2\pi]$ Or β est un angle aigu => $\beta = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

Finalement $\vec{V} = cos\beta\vec{x_1} + sin\beta\vec{y_1}$

$$= cos\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{x_1} + sin\frac{1}{2}\vec{y_1}$$

$$(\vec{y_1}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\ ; \sin(\vec{y_1}, \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}$$

$$(\vec{V}, \overrightarrow{BD}) = \pi + \frac{\pi}{6} => \sin(\vec{V}, \overrightarrow{BD}) = -1/2$$



$$\begin{cases} -mg\vec{y_1} - T\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{x_1} + \frac{1}{2}\vec{y_1}\right) + \vec{R} = \vec{0} & (7) \\ -2mg\vec{z_1} + T\frac{7}{2}\vec{z_1} + \overrightarrow{m_D} = \vec{0} & (8) \\ \overrightarrow{m_D}.\vec{z_1} = 0 & (9) \end{cases}$$

Projection dans la base $(\vec{x_1};\vec{y_1};\vec{z_1})$ (7)

$$(7) => \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}T + \vec{R}.\vec{x_1} = 0 & (10) \\ -mg - \frac{1}{2}T + \vec{R}.\vec{y_1} = 0 & (11) \\ \vec{R}.\vec{z_1} = 0 & (12) \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

$$(8)\ et\ (9) => \begin{cases} \overrightarrow{m_D}.\overrightarrow{x_1} = 0 & (13) \\ \overrightarrow{m_D}.\overrightarrow{y_1} = 0 & (14) \\ \overrightarrow{m_D}.\overrightarrow{z_1} = 0 & \\ -mg + \frac{7}{2}T + \overrightarrow{m_D}.\overrightarrow{z_1} = 0 & (15) \end{cases}$$

$(15) => T = \frac{4}{7}mg$; $(10) => \vec{R}.\overrightarrow{x_1} = \frac{2\sqrt{3}}{7}mg$ et $(11) => \vec{R}.\overrightarrow{y_1} = \frac{9}{7}mg$

EXERCICE 3



$R_0(0;\overrightarrow{x_0};\overrightarrow{y_0};\overrightarrow{z_0})$ un repere OND lié à (π) galiléen ; $R_0(0;\overrightarrow{e_r};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_z})$ repère OND lié à (AB)

1-) Les articulations en A et B sont bloquées $\alpha = cte$ et $\beta = cte$

Déterminons $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ dans $(\overrightarrow{e_r};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_z})$ en fonction de L, α et β

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = L\overrightarrow{e_r} + L\vec{u}$ | $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ} = -L\overrightarrow{e_r} + L\vec{v}$

$\vec{u} = cos\alpha\overrightarrow{e_r} + sin\alpha\overrightarrow{e_\theta}$ | $\vec{v} = -cos\beta\overrightarrow{e_r} - sin\beta\overrightarrow{e_\theta}$

$\overrightarrow{OP} = L(1+cos\alpha)\overrightarrow{e_r} + Lsin\alpha\overrightarrow{e_\theta}$ | $\overrightarrow{OQ} = -L(1+cos\beta)\overrightarrow{e_r} - Lsin\beta\overrightarrow{e_\theta}$

b) Calculons $\vec{V}(P/R_0)$ et $\vec{V}(Q/R_0)$ dans R

$\vec{V}(P/R_0) = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}/R_0 = L(1+cos\alpha)\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}/R_0 + Lsin\alpha\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}/R_0$

Or $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}/R_0 = \vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\overrightarrow{e_r} = \omega\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{e_r} = \omega\overrightarrow{e_\theta}$ et $\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}/R_0 = \vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\overrightarrow{e_\theta} = \omega\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{e_\theta} = -\omega\overrightarrow{e_r}$

Finalement $\boxed{\vec{V}(P/R_0) = -L\omega sin\alpha\overrightarrow{e_r} + L\omega(1+cos\alpha)\overrightarrow{e_\theta}}$

De même $\boxed{\vec{V}(Q/R_0) = L\omega sin\beta\overrightarrow{e_r} - L\omega(1+cos\beta)\overrightarrow{e_\theta}}$

C) Quantité de mouvement $\vec{P}$ de (S_1)

$\vec{P} = m\vec{V}(P/R_0) + m\vec{V}(Q/R_0)$; $\boxed{\vec{P} = mL\omega[(sin\beta - sin\alpha)\overrightarrow{e_r} + (cos\alpha - cos\beta)\overrightarrow{e_\theta}]}$

d-) Exprimons le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_0}$ de (S_1) en 0.

Le moment cinétique de (S_1) se calcule en sommant les cinétiques des deux masses :

$\overrightarrow{\sigma_0} = \overrightarrow{OP}\wedge m\vec{V}(P/R_0) + \overrightarrow{OQ}\wedge m\vec{V}(Q/R_0)$

Scanné avec CamScanner

$$\overrightarrow{OP}\wedge\vec{V}(P/R_0)=\begin{pmatrix}L(1+cos\alpha)\\ Lsin\alpha\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-L\omega sin\alpha\\ L\omega(1+cos\alpha)\\ 0\end{pmatrix}=L^2\omega[(1+cos\alpha)^2+sin^2\alpha]\overrightarrow{e_z}$$

$$=4L^2\omega cos^2\frac{\alpha}{2}\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{OQ}\wedge\vec{V}(Q/R_0)=\begin{pmatrix}-(L+cos\beta)\\ -Lsin\beta\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}L\omega sin\beta\\ -L\omega(1+cos\beta)\\ 0\end{pmatrix}=L^2\omega[(1+cos\beta)^2+sin^2\beta]\overrightarrow{e_z}$$

$$=4L^2\omega cos^2\frac{\beta}{2}\overrightarrow{e_z}$$

Il vient que $\overrightarrow{\sigma_0}=4mL^2\omega(cos^2\frac{\alpha}{2}+cos^2\frac{\beta}{2})\overrightarrow{e_z}$

2-) Les articulations sont à présent débloquées (α *et* β *ne sont pas des contantes*)

a-) Exprimons $\vec{P}$ en fonction de $L, m, \omega, \alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$

$$\vec{V}(P/R_0)=-L\omega sin\alpha\overrightarrow{e_r}+L\omega(1+cos\alpha)\overrightarrow{e_\theta}+L\dot{\alpha}(-sin\alpha\overrightarrow{e_r}+cos\alpha\overrightarrow{e_\theta})$$

$$\vec{V}(Q/R_0)=L\omega sin\beta\overrightarrow{e_r}-L\omega(1+cos\beta)\overrightarrow{e_\theta}+L\dot{\beta}(sin\beta\overrightarrow{e_r}-cos\beta\overrightarrow{e_\theta})$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{P}=mL\omega[(sin\beta-sin\alpha)\overrightarrow{e_r}+(cos\alpha-cos\beta)\overrightarrow{e_\theta}]\\&+mL\left[(-\dot{\alpha}sin\alpha+\dot{\beta}sin\beta)\overrightarrow{e_r}+(\dot{\alpha}cos\alpha-\dot{\beta}\cos\beta)\overrightarrow{e_\theta}\right]\end{aligned}}$$

b-) Moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_0}$

$$\overrightarrow{\sigma_0}=4mL^2\omega\left(cos^2\frac{\alpha}{2}+cos^2\frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{e_z}+mL^2[\dot{\alpha}(1+cos\alpha)+\dot{\beta}(1+cos\beta)]\overrightarrow{e_z}$$

c-) Vérifions que l'on retrouve la 1-d) lorsque $\alpha = cte$ *et* $\beta = cte$

$$\alpha = cte \Rightarrow \dot{\alpha}=0$$

$$et\ \beta = cte \Rightarrow \dot{\beta}=0$$

D'où $\overrightarrow{\sigma_0}=4mL^2\omega\left(cos^2\frac{\alpha}{2}+cos^2\frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{e_z}$

Scanné avec CamScanner

ELEMENTS DE CORRECTION

MECANIQUE DES SYSTEMES 2EME SESSION 2021-2022

EXERCICE 1 (5 points)

1- Le point O a pour coordonnés : $O = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{V(O)} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

2- Equiprojectivité, on utilise les points O et M :

tq : $\overrightarrow{V(O)OM} = \overrightarrow{V(M)OM} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3y-tz\\2tz-3x\\2+tx-t^2y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$\Rightarrow t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 0\ ou\ t = 2.$

Le champ $\overrightarrow{V(M)}$ est équiprojectif pour $t = 0\ ou\ t = 2$: $\overrightarrow{V(M)}$ est un torseur pour ces valeurs de t.

3- Pour $t = 0$, on a $\vec{R}(\mathrm{t}=0) = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$:

Pour $t = 2$, on a $\vec{R}(\mathrm{t}=2) = \begin{pmatrix}-4\\-2\\-3\end{pmatrix}$:

4- Soit les deux torseurs associés à $t = 0$: $[\Im_0]$ et à $t = 2$: $[\Im_2]$:
Calculons pour les deux valeurs l'invariant scalaire :

$$I_0 = \vec{V}(O).\vec{R}(\mathrm{t}=0) = -6 \neq 0$$

$$I_2 = \vec{V}(O).\vec{R}(\mathrm{t}=2) = -10 \neq 0$$

Donc les deux torseurs sont quelconques (ni glisseur ni couple) chacun peut cependant etre décomposé en la somme d'un glisseur et d'un couple :

$$[\Im_0] = [\vec{V}(O), \vec{R}(\mathrm{t}=0)] = [\vec{V}(O), 0] + [0, \vec{R}(\mathrm{t}=0)]$$

De meme : $[\Im_2] = [\vec{V}(O), \vec{R}(\mathrm{t}=2)] = [\vec{V}(O), 0] + [0, \vec{R}(\mathrm{t}=2)]$

Donc : $\begin{cases}\text{Couples} : \vec{C}(M) = \vec{V}(O) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\ \forall M \\ \text{Glisseurs} : \vec{G}(M) = \vec{0} + \vec{R}(\mathrm{t}) \wedge \overrightarrow{OM}\end{cases}$

Scanné avec CamScanner

5- Soit $P \in$ à l'axe central du torseur, la positionde P par rapport à O est donnée par :

$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R}(t)\wedge\overrightarrow{V(M)}}{R^2} + \lambda\vec{R}$ avec $\lambda \in R$

Pour $\lambda = 0$. $\overrightarrow{OP_0} = \frac{\vec{R}(t)\wedge\vec{V}(0)}{R^2}$.

Donc pour t = 0. $\vec{R}(t=0) = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{V(O)} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, on obtient alors : $\overrightarrow{OP_0} = -\frac{1}{3}\vec{j}$

L'axe central pour t = 0, passe par P_0 et parralèle à $\vec{R}(t=0) \Longrightarrow$ parralèle à $\vec{k}$.

de la meme façon on obtient l'axe central pour t = 2 :

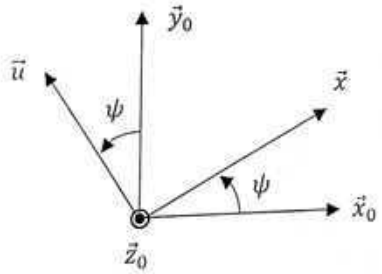
L'axe central pour t = 0, passe par $P_0 = \begin{pmatrix}-4/29\\-5/29\\2/29\end{pmatrix}$ et parralèle à $\vec{R}(t=2) = \begin{pmatrix}-4\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

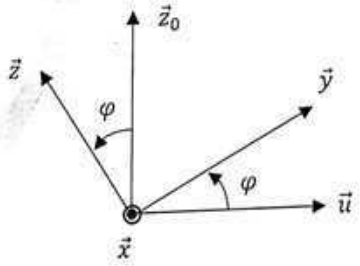
EXERCICE 2 (9 points)

1) Calculer $\vec{\Omega}(T/\mathcal{R}_0)$ par ses composantes dans la base de $\mathcal{R}$.

$\vec{x}$ et $\vec{z}_0$ vecteurs unitaires et orthogonaux $\Longrightarrow (\vec{x}, \vec{u}, \vec{z}_0)$ où $\vec{u} = \vec{z}_0 \wedge \vec{x}$

On a $\mathcal{R}_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, $\mathcal{R}(C;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et posons $\mathcal{R}_1(O;\vec{x},\vec{u},\vec{z}_0)$





$$\vec{\Omega}(T/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$$

$$\vec{\Omega}(T/\mathcal{R}_0) = \dot{\phi}\vec{x} + \dot{\psi}\vec{z}_0$$

Ainsi dans la base de $\mathcal{R}$, on obtient

$$\vec{\Omega}(T/\mathcal{R}_0) = \dot{\phi}\vec{x} + \dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{y} + \dot{\psi}\cos\varphi\,\vec{z}$$

2) Montrer que G a pour coordonnées dans $\mathcal{R}$; $\left(0, 0, -\frac{a}{3}\right)$.

(T) est une plaque plane triangulaire homogène donnée par $\left\{M\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} / y_{DB} \le y \le y_{DA}, -a \le z \le 0\right\}$,

Scanné avec CamScanner

m sa masse et G son centre de masse. Soit σ_0 sa densité surfacique égale à une constant.

On note x, y, z les coordonnées cartésiennes relativement au repère OND $\mathcal{R}(C;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

(CD) est un axe de symétrie matérielle de (T) $\Longrightarrow$ $G \in (CD) \equiv O\vec{z}$ donc $x_G = y_G = 0$.

On a :

$$mz_G = \int_{(T)} zdm$$

$A\begin{pmatrix}-a\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}-a\\0\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}(C;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Sur $(AD) : y = -(z+a)$

Sur $(DB) : y = (z+a)$

$$mz_G = \int_{(T)} zdm = \sigma_0 \int_{(T)} zdS$$

$$mz_G = \sigma_0 \int_{-a}^{0} z\left(\int_{-(z+a)}^{(z+a)} dy\right)dz$$

$$mz_G = \sigma_0 \int_{-a}^{0} z[y]_{-(z+a)}^{(z+a)}dz$$

$$mz_G = 2\sigma_0 \int_{-a}^{0} (z^2 + az)dz = 2\sigma_0 \left[\frac{z^3}{3} + a\frac{z^2}{2}\right]_{-a}^{0}$$

$$z_G = -\frac{\sigma_0}{m}\frac{a^3}{3}$$

On sait également que $m = \sigma_0 S$ avec $S = \frac{CD \times AB}{2} = a^2$

D'ou

$$m = \sigma_0 a^2 \Longleftrightarrow \frac{\sigma_0}{m} = \frac{1}{a^2}$$

Finalement,

$$z_G = -\frac{a}{3}$$

3) Montrer que $(C;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est un repère principal d'inertie de (T) et déterminer l'opérateur d'inertie $\Pi_C(T)$ en C de (T).

$C\vec{z}$ est axe de symétrie matérielle de (T) $\Longrightarrow$ $\vec{z}$ direction principale d'inertie de (T) en C

$C\vec{y}\vec{z}$ plan de symétrie matérielle de (T) $\Longrightarrow$ $\vec{x}$ direction principale d'inertie de (T) en C

$\vec{x}$ et $\vec{z}$ étant linéairement indépendants $\Longrightarrow$ $\vec{y} = \vec{z} \wedge \vec{x}$ est aussi direction principale d'inertie de (T) en C.

Conclusion : $(C;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est un repère principal d'inertie de (T).

Scanné avec CamScanner

$$[\Pi_C(T)]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{bmatrix} I_{C\vec{x}}(T) & 0 & 0 \\ 0 & I_{C\vec{y}}(T) & 0 \\ 0 & 0 & I_{C\vec{z}}(T) \end{bmatrix}$$

Avec

$$I_{C\vec{x}}(T) = I_{C\vec{y}}(T) + I_{C\vec{z}}(T)$$

Car (T) plan, $\vec{x} \perp (T)$, $C \in (T)$ et $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ othonormé.

$$I_{C\vec{y}}(T) = \int_{(T)} z^2 dm = \sigma_0 \int_{-a}^{0} z^2 \left(\int_{-(z+a)}^{(z+a)} dy \right) dz$$

$$I_{C\vec{y}}(T) = 2\sigma_0 \int_{-a}^{0} z^2 (z+a) dz$$

$$I_{C\vec{y}}(T) = 2\sigma_0 \left[\frac{z^4}{4} + a\frac{z^3}{3} \right]_{-a}^{0} = \frac{\rho a^4}{6}$$

$$I_{C\vec{y}}(T) = \frac{ma^2}{6}$$

$$I_{C\vec{z}}(T) = \int_{(T)} y^2 dm = \sigma_0 \int_{-a}^{0} \left(\int_{-(z+a)}^{(z+a)} y^2 dy \right) dz$$

$$I_{C\vec{z}}(T) = \sigma_0 \int_{-a}^{0} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-(z+a)}^{(z+a)} dz = \frac{2\sigma_0}{3} \int_{-a}^{0} (z+a)^3 dz = \frac{\sigma_0 a^4}{6}$$

$$I_{C\vec{y}}(T) = \frac{ma^2}{6}$$

$$I_{C\vec{x}}(T) = \frac{ma^2}{6} + \frac{ma^2}{6} = \frac{ma^2}{3}$$

$$[\Pi_C(T)]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \frac{ma^2}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

4) Déterminer l'opérateur d'inertie $\Pi_C(G,m)$ au point C du centre de masse G. En déduire l'opérateur d'inertie $\Pi_G(T)$ au point G.

On sait que

$$\vec{CG} = z_G\vec{z} = -\frac{a}{3}\vec{z}$$

entraine que

$$[\Pi_C(G,m)]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = m\begin{bmatrix} z_G^2 & 0 & 0 \\ 0 & z_G^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{ma^2}{9}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'après le théorème de Kœnigs, on a :

$$\Pi_C(T) = \Pi_G(T) + \Pi_C(G,m)$$

Et donc

$$\Pi_G(T) = \Pi_C(T) - \Pi_C(G,m)$$

$$\Pi_G(T) = \frac{ma^2}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{ma^2}{9}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_G(T) = \frac{ma^2}{18}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5) Calculer les moments cinétiques $\vec{\sigma}(G,T/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{\sigma}(O,T/\mathcal{R}_0)$.

$$\vec{\sigma}(G,T/\mathcal{R}_0) = \Pi_G(T)\vec{\Omega}(T/\mathcal{R}_0)$$

$$\vec{\sigma}(G,T/\mathcal{R}_0) = \frac{ma^2}{18}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi\sin\varphi \\ \psi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}(G,T/\mathcal{R}_0) = \frac{2ma^2}{9}\varphi\vec{x} + \frac{ma^2}{18}\psi\sin\varphi\,\vec{y} + \frac{ma^2}{6}\psi\cos\varphi\,\vec{z}$$

grâce à $\vec{\sigma}(G,T/\mathcal{R}_0)$ on en déduit $\vec{\sigma}(O,T/\mathcal{R}_0)$.

$$\vec{\sigma}(O,T/\mathcal{R}_0) = \vec{\sigma}(G,T/\mathcal{R}_0) + m\vec{V}(G/\mathcal{R}_0)\wedge\vec{GO}$$

Scanné avec CamScanner

Avec

$$\vec{V}(G/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} \quad et \quad \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} = l\vec{x} + z_G\vec{z}$$

$$\vec{V}(G/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = l\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + z_G\left(\frac{d\vec{z}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0}$$

$$\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{x} = \dot{\psi}\vec{u}$$

$$\left(\frac{d\vec{z}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{z} = -\dot{\phi}\vec{y} + \dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{x}$$

$$\vec{V}(G/\mathcal{R}_0) = l\dot{\psi}\vec{u} + z_G(-\dot{\phi}\vec{y} + \dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{x})$$

Expression dans une base

$$\vec{u} = \cos\varphi\,\vec{y} - \sin\varphi\,\vec{z}$$

$$\vec{V}(G/\mathcal{R}_0) = z_G\dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{x} + (l\dot{\psi}\cos\varphi - \dot{\phi}z_G)\vec{y} - l\dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{z}$$

$$\vec{V}(G/\mathcal{R}_0) = -\frac{a}{3}\dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{x} + \left(l\dot{\psi}\cos\varphi + \dot{\phi}\frac{a}{3}\right)\vec{y} - l\dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{z}$$

On en déduit

$$\vec{\sigma}(O,T/\mathcal{R}_0) = \frac{2ma^2}{9}\dot{\phi}\vec{x} + \frac{ma^2}{18}\dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{y} + \frac{ma^2}{6}\dot{\psi}\cos\varphi\,\vec{z} + m\left[-\frac{a}{3}\dot{\psi}\sin\varphi\,\vec{x} + \left(l\dot{\psi}\cos\varphi + \dot{\phi}\frac{a}{3}\right)\vec{y} - l\dot{\psi}\sin\varphi\right] \wedge \left[-(l\vec{x} + z_G\vec{z})\right]$$

$$\vec{\sigma}(O,T/\mathcal{R}_0) = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{3}\dot{\phi} + \frac{mla}{3}\dot{\psi}\cos\varphi \\ \left(ml^2 + \frac{ma^2}{6}\right)\dot{\psi}\sin\varphi \\ \frac{mla}{3}\dot{\phi} + \left(ml^2 + \frac{ma^2}{6}\right)\dot{\psi}\cos\varphi \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 3 (9 points)

1

L'énoncé indique une hypothèse de roulement sans glissement du cylindre de rayon R_1 [illegible] que la nature inextensible du fil. Il faut prendre en compte ces deux hypothèses pour établir [illegible] relations entre variables cinématiques.

La vitesse du point I_1 appartenant au cylindre de rayon R_1 et en contact avec le [illegible] incliné à un instant t est donnée par la formule de Varignon : $\vec{v}(I_1) = \vec{v}(G) + \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{GI_1}$

soit : $$\boxed{\vec{v}(I_1) = \left(\frac{dx}{dt} + R_1\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{e}_x}$$

Le plan incliné étant fixe et le cylindre roulant sans glisser sur ce plan, la vitesse précédente doit être nulle, d'où une première relation entre variables cinématiques :

$$(1)\ \boxed{\frac{dx}{dt} + R_1\frac{d\theta}{dt} = 0}$$

Le fil étant inextensible, on doit vérifier la relation (attention, l'axe z' est dirigé vers le bas) :

$$\boxed{\frac{dz'}{dt} = -\vec{v}(I_2)\cdot\vec{e}_{z'}}$$

Cependant : $$\vec{v}(I_2) = \vec{v}(G) + \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{GI_2}$$

soit : $$\vec{v}(I_2) = \left(\frac{dx}{dt} + R_2\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{e}_x$$

d'où : $$\frac{dz'}{dt} + \frac{dx}{dt} + R_2\frac{d\theta}{dt} = 0$$

Combinée avec la première relation cinématique, l'équation précédente conduit à :

$$(2)\ \boxed{\frac{dz'}{dt} + \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{dx}{dt} = 0}$$

Scanné avec CamScanner

2

On étudie séparement les deux sous-systèmes, masse m et solide sur le plan incliné. Les tensions du fil sont donc des actions extérieures.

Le solide en mouvement sur le plan incliné est soumis aux actions extérieures suivantes :
poids, appliqué en G et de résultante $M\vec{g} = Mg(\sin\alpha\vec{e}_x - \cos\alpha\vec{e}_y)$;
actions de contact appliquées au point de contact I_1 et de résultante $T\vec{e}_x + N\vec{e}_y$;
tension exercée par le fil $-F_1\vec{e}_x$.
La masse m est soumise aux actions extérieures suivantes :
poids, appliqué en G' et de résultante $m\vec{g} = mg\vec{e}_z$;
tension exercée par le fil $F_2\vec{e}_x$.

3

Le théorème de la résultante cinétique nous indique que la dérivée par rapport au temps de la résultante cinétique est egale à la résultante des actions extérieures.

Le solide a pour résultante cinétique $M\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x$. Le théorème de la résultante cinétique projeté respectivement sur (Ox) et sur (Oy) conduit donc à :

$$(3)\quad \boxed{M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = Mg\sin\alpha + T - F_1}$$

$$(4)\quad \boxed{0 = -Mg\cos\alpha + N}$$

Scanné avec CamScanner

De même, le théorème de la résultante dynamique appliqué à la masse m et projeté sur (Oz') conduit à :

$$(5)\quad \boxed{m\frac{\mathrm{d}^2 z'}{\mathrm{d}t^2} = mg - F_2}$$

Il y a trois inconnues cinématiques (x, z', θ) et quatre inconnues dynamiques X_0, Z_0, F_1 et F_2. On dispose de deux relations cinématiques et trois équations dynamiques supplémentaires, soit au total 5 équations pour 7 inconnues. Il n'y a donc pas assez d'équations pour déterminer le mouvement du système.

L'hypothèse de poulie parfaite et sans masse n'a pas été utilisée jusqu'à présent. La poulie est soumise aux actions du fil $F_1\vec{e}_x$ et $F_2\vec{e}_{z'}$, de moment par rapport à l'axe de la poulie respectivement $-F_1 r$ et $F_2 r$, où r désigne le rayon de la poulie, et aux actions d'axe, de moment nul car la poulie est supposée parfaite. On en déduit :

$$(6)\quad \boxed{F_1 = F_2}$$

On a donc finalement 6 équations pour 7 inconnues. Il manque encore une équation.

4

Le théorème du moment cinétique peut être appliqué au centre d'inertie d'un système, même si ce point est mobile.

Le moment cinétique du cylindre en G est $J_G\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z$. Déterminons le moment des actions extérieures exercées sur le solide :

- le poids, appliqué en G, a un moment nul en G ;
- les actions de contact appliquées au point de contact I_1 ont pour moment en G : $-R\vec{e}_z \wedge (X_0\vec{e}_x + Z_0\vec{e}_z) = RX_0\vec{e}_y$;
- la tension exercée par le fil $-F_1\vec{e}_x$ au point de contact I_2 a pour moment en G : $-R\vec{e}_z \wedge (-F_1\vec{e}_x) = -RF_1\vec{e}_y$.

Le théorème du moment cinétique appliquée en G conduit donc à :

$$\boxed{J_G\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = RX_0 - RF_1}$$

Cette équation peut être réécrite en fonction de x :

$$(7)\quad \boxed{\frac{J_G}{R}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = RX_0 - RF_1}$$

Il s'agit de déterminer F_1 et T en fonction de l'accélération de G. Les équations précédentes conduisent à :

Scanné avec CamScanner

$$F_1 = mg - m\frac{d^2z'}{dt^2}$$

et d'après l'équation (2) : $F_1 = mg + m\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{d^2x}{dt^2}$

équation (3) et l'expression précédente conduisent à :

$$T = M\frac{d^2x}{dt^2} - Mg\sin\alpha + mg + m\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{d^2x}{dt^2}$$

reporte les expressions de F_1 et T dans l'équation (7), d'où l'équation du mouvement
moment d'inertie du solide (S) sur le plan incliné :

$$\left(MR_1 + \frac{J_G}{R_1} + m\frac{(R_1 - R_2)^2}{R_1}\right)\frac{d^2x}{dt^2} = MgR_1\sin\alpha - mg(R_1 - R_2)$$

Scanné avec CamScanner

Licence 2 Filière classique
Examen Programmation Python
Semestre 1 Session 2/1 h 45 min/2018 – 2019

```
Algorithme combinaison
Var
cnp, n, p : entier
fonction factoriel ( nbre : entier) :entier
fact, i, nbre : entier
debut
   si (nbre= 0) ou (nbre=1) alors
     fact ←1
   sinon
     fact← 1
     pour i<- 1 a nbre+1 faire
     fact← fact*i ;
   finsi
 factoriel ← fact ;
finfonction
debut  (* debut programme principal *)
ecrire('calcul de la combinaison de n à
p ')
ecrire('donner une entier n')
lire( n)
ecrire('donner une entier p')
lire( p)
si ((n<0) ou (p<0) ou (n < p))
  alors ecrire ('erreur')
sinon
  cnp ← factoriel (n) / ( factoriel (p)*
factoriel (n-p))
  ecrire( 'la combinaison de ', n, ' a ', p,
'est', cnp)
finsi
fin  (* fin programme principal *)
```

Exercice 1 : Culture

1.Donner le code python correspondant aux structures de données suivantes : tableau, enregistrement, une classe

2.Donner les bibliothèques nécessaires pour les utilisations suivantes : tracer de courbes, utiliser des formules mathématiques.

3. Donner un exemple de code pour tracer la courbe cosinus(x)

4. Donner un exemple de code pour faire le produit de 2 matrices carrées d'ordre 2

Exercice 2 :

Écrire un programme en python permettant d'afficher les 10 premiers nombres impairs.

Exercice 3 :

Écrire un programme en python permettant d'afficher combien de fois de suite un entier positif saisie par un utilisateur est divisible par 2.

Exemple :

Entrez un entier strictement positif : 24
24 est 3 fois divisible par 2.

Exercice 4

1.Traduire l'algorithme ci-contre en python

2.Dans la foncton factoriel modifier la boucle pour par tant que

Exercice 5

Un gardien de phare va aux toilettes cinq fois par jour. Or les WC sont au rez-de-chaussée...

Écrire une procédure (donc sans return) hauteurParcourue qui reçoit deux paramètres, le nombre de marches du phare et la hauteur de chaque marche (en cm), et qui affiche :

Sélectionnez : Pour x marches de y cm, il parcourt z.zz m par semaine.

On n'oubliera pas :

- qu'une semaine comporte 7 jours ;
- qu'une fois en bas, le gardien doit remonter ;
- que le résultat est à exprimer en m.

1- Faire l'analyse mathématique
2- Listez les objectifs
3- Listez les besoins
4- Écrire la procédure hauteurParcourue
5- Écrire le programme principal qui lit le nombre de marches, la hauteur d'une marche au clavier et affiche la hauteur parcourue.

Scanné avec CamScanner

UFR MI Licence 2 2019-2020
Programmation Python
Examen session 1 durée : 1 h 30

Exercice 1 : **culture générale**

1. Completer la phrase en choisissant un mot (compilé, interprété, machine, binaire). Python est un langage .....
2. Donner le rôle des modules Python : Numpy, SciPy
3. Donner un exemple de code Python correspondant aux structures de données suivantes : dictionnaires, ensembles, listes
4. Ecrire un code python permettant de calculer la puissance entière d'un réel.
5. Remplir le tableau ci-dessous

Instructions	Code Python	Instructions	Code Python
Comment accède-t-on à la 3e lettre d'une chaîne de caractères ?		Quelle instruction en Python permet d'obtenir la liste des entiers divisibles par 3 compris entre 5 et 111 compris ?	
Comment demande-t-on à l'utilisateur d'entrer une chaine de caracteres ?		Comment accède-t-on en Python à l'avant dernier élément d'une liste (sans utiliser l'instruction len) ?	
Comment effectue-t-on la concatenation de deux chaines de caractères ?		Quel opérateur en Python permet d'obtenir le reste de la division euclidienne ?	

Exercice 2 : **Python**

```
ALGORITHME test ;
VAR b, i, N : ENTIER ;
cumul: REEL;
DEBUT
ECRIRE(' Algorithme  tester licence 2 en info');
b <-10; (* initialisation *)
cumul<-20;
ECRIRE('Saisir un nombre entier :')
LIRE(N) ;
POUR i<-1 JUSQUA N FAIRE
 DE
 cumul<- cumul+(b*i);
 b<- b-1;
 FIN;
ECRIRE(' cumul = ', cumul);
ECRIRE(' b= ', b);
FINPOUR
 ECRIRE('Fin du traitement');
FIN.
```

1. Ecrire un programme qui permet de saisir un nombre puis déterminer s'il appartient à un intervalle donné, sachant que les extremités de l'intervalle sont fixées par l'utilisateur.
2. Ecrire un programme qui demande deux nombres à l'utilisateur et l'informe ensuite si leur produit est négatif ou positif. Attention toutefois on ne doit pas calculer le produit des deux nombres.
3. Soit l'algorithme ci-contre. Si **N=3**, donner les résultats de l'exécution du programme tels qu'ils apparaissent exactement à l'écran.
4. Modifier cet algorithme en introduisant un test qui affiche une erreur si l'utilisateur saisi **N négatif**
5. Transformer la boucle pour en une boucle **tant que**
6. Traduire cet algorithme en python

Scanné avec CamScanner

Exercice 1 :

Algorithme : Tribulle(**T**)

Données : un tableau T de nombres
Résultats : le tableau T trie en ordre croissant

```
Pour i=len(T)-1 à 1 décroissant faire
    Pour j=0 à i-1 faire
        Si T[j]>T[j+1] alors
            Echange (Tjj+1) ;
```

Soit l'algorithme ci-contre.

1. Ecrire une fonction **TriBulle** en python.
2. Transformer la boucle **pour** en **tant que** en python dans **TriBulles.**
3. Echange dans l'algorithme est une fonction. Ecrire en python la fonction **Echange** qui permet de permuter deux éléments.
4. Dans un programme principal manipuler un tableau de 6 entiers.

Exercice 2

2.1

```
a=9
b=a-1
a=b-8
a=a*7
if (a < 8)
        print (« bonjour », a)
else
        print (« au revoir »,  b)
```

Un élève a écrit et exécuté le programme python ci-dessus :
Justifier avec soin la réponse obtenue en traçant ce code (cad donner le résultat obtenu après exécution.)

2.2

$a \leftarrow 5$

Saisir (a) *où n est entier*

Saisir (x) *où x est flottant*

Afficher (« Bonjour »)

Afficher ()

Traduire l'algorithme ci-dessus en python.
Modifier votre code pour que l'utilisateur puisse continuer ou no en répondant à la question voulez-vous continuez ?

Exercice 3

1. Donner le rôle des bibliothèques numpy, scipy et matplolib puis ecrire le code pour tracer la fonction **2x+1** sur l'intervalle [-3, +3].
2. Ecrire un module appeler ufrmi contenant une fonction somme, différence, division et multiplication de **2 réels**. Utiliser le module ufrmi pour réaliser une calculette (+ ; * ; - ;/) en python.
3. Ecrire **un code python** permettant de saisir le mot de passe **lic2mi** sachant que l'utilisateur n'a que trois essais.
4. Ecrire un programme python permettant de calculer la **combinaison** d'un nombre p dans un nombre n en utilisant une fonction **factoriel** itérative.
5. Réécrire la fonction **factoriel** de façon récursive.
6. On suppose qu'un **contact** est décrit par **téléphone** et **nom**. Modéliser la structure de données contact en python puis écrire un code permettant de saisir 5 contacts et de les afficher.

Scanné avec CamScanner

Consignes générales : pas de documents, calculatrices, téléphone, et internet. Merci de bien numéroter les intercalaires.

Exercice 1 : Donner les valeurs des variables A, B, C et l'affichage à l'écran des algorithmes suivants :

```
Algorithme algo1 :
Variable A, B, C, D : entier
Début
  A ←10 ;
  B← 3 ;
  TantQue (A> B) Faire
    Si (A div B=B) Alors
      B← A mod B ;
      A ← A mod B ;
    Finsi
    Si (B-A=B+A) Alors
      C ← 10*B mod B+2 ;
      D ← C+(B-A) ;
    FinSi
  FinTantQue
  Ecrire(D+C-(B+A))
Fin.
```

```
Algorithme algo2 :
Variable A, B, C, D : entier
Début
  A ←5 ;
  B← 10 ;
  Pour B allant de 1 à 2 Faire
    Si (D-A = D div 2) Alors
      A← A * 2-D /2 ;
      C ← D mod 3 div 2 ;
      D ← D /2 div A ;
    Sinon
      A ← A-D ;
      C ← A div 2 ;
      Ecrire(A-C-D*2) ;
    FinSi
  FinPour
Fin.
```

```
Algorithme algo3 :
Variable A, B, C, D : entier
Début
  A ←10 ;
  B← 1 ;
  C← 8 ;
  Répéter
    Si (B> 2) ou (A< 9) Alors
      C← (B+A) mod 5 ;
    Sinon
      D ← B+A div 3 ;
    Finsi
    A ← A-2 ;
    B ← B+1 ;
  Jusqu'à(A=C) et (B=D) ;
  Ecrire(A) ;
Fin.
```

Exercice2 :

```
Algorithme exo3 ;
Variable a, b, i, P : entier ;
Début
   Lire (a, b) ; i ←2 ; P←1 ;
   Tantque(i≤b) faire
     Si (a mod i = 0) et (b mod i = 0) alors
         P←i ;
      FinSi ;
        i← i+1 ;
   FinTantque
   Ecrire(P) ;
Fin
```

Utiliser l'algorithme ci-contre

1. Que fait cet algorithme ?
2. Tracer cet algorithme pour a =12 et b=8
3. Traduire cet algorithme en python.
4. Reprendre le code python obtenue et remplace r la boucle tant que par la boucle pour.
5. Modifier votre code python pour que l'utilisateur ne saisisse que des entiers positifs
6. Modifier votre code python pour que l'utilisateur réponde à la question voulez-vous continuez.
7. Modifier votre code sous forme de fonction.

Exercice 3 :

1. Ecrire un programme affichant les 10 premiers nombres pairs.
2. Donner le code python permettant de trier un tableau de réels par ordre croissant, d'afficher le plus grand élément et de rechercher un nombre donné.
3. Donner les bibliothèques nécessaires pour les utilisations suivantes : tracer de courbes, utiliser des formules mathématiques.
4. Donner un exemple de code pour tracer la courbe cosinus(x).
5. Donner un exemple de code pour faire le produit de 2 matrices carres d'ordre2.
6. Ecrire en python deux fonctions puissances (cad x ') l'une itérative et l'autre récursive. Tracer ces deux fonctions pour2^5 et dites celle qui semble plus rapide en termes d'exécution.
7. Soit un nom de longueur 10. Ecrire un algorithme permettant de renverser le nom (par exemple **abcdef** donne **fedcba**).

Scanné avec CamScanner

Licence 2
Année : 2021- 2022 Semestre 1
Examen Langage Python de durée : 1 h 30

Exercice 1 : Culture langage Python

1. Donner le rôle des bibliothèques numpy, scipy et matplolib
2. Un programmeur écrit un algorithme relatif à la fonction factoriel en 2 versions en utilisant le pour, le tant Réaliser ces deux versions de la fonction factoriel en Python.
3. Donner une signification à chacun des codes suivants : Après avoir reproduit le tableau ci-dessous, le remplir

On donne s=['lundi' , 'mardi' , 230 , 'dimanche']

Commande	Affichage	Commande	Affichage
s[0 :4 :2]		s.append('samedi')	
del(s[2])		for pair in range(100,110,2): print(pair)	
s+['jeudi','vendredi']		thisset = {"apple", "banana", "cherry"} print(thisset) print(len(thisset))	

Exercice 2

Soit l'algorithme suivant :

variables : x, n, puiss des entiers positifs;
afficher("entrer x") ; lire(x) ;
afficher("entrer n") ; lire(n) ;
initialiser puiss à 1
initialiser i à 1
tant que i inférieur ou égal à n faire
debut
  puiss recoit puiss*x ;
  incrémenter i ;
fin
afficher les valeurs de x, n et x puissance n

1. Tracer cet algorithme pour x=2 et n= 3
2. Traduire cet algorithme en langage Python
3. Se servir la question 2 pour transformer la boucle while en for
4. En Python, modifier le programme qui utilise une fonction puissance itérative avec les paramètres x et n
5. Modifier la fonction puissance itérative en fonction récursive
6. Modifier le code Python, prenant en compte le cas d'erreur de saisie de mauvaises valeurs de x et de n.
7. En Python, écrire un code remplissant un tableau T de 2[illegible] 2^4, 2^5 et d'afficher en renversant le tableau (plus grande plus petite)
8. Donner un code Python pour résoudre ax+b= 0, a et b réels

Exercice 3

3.1

```
n = 9
b = n+1
a = b-n
n = n*7
if (n < 8) :
    print("bonjour", n)
else :
    print("au revoir", b)
```

Un élève a écrit et exécuté le programme Python ci-dessus :
Justifier avec soin la réponse obtenue en traçant ce code (cad donner le résultat obtenu après exécution

3.2

```
n = 5
Saisir (n)        où n est entier
Saisir (x)        où x est flottant
Afficher("Bonjour")
Afficher(x)
```

Traduire l'algorithme ci dessus en python
Modifier votre code pour que l'utilisateur puisque continuer ou non en répondant à la question voulez- vous continuez ?

Scanné avec CamScanner

Licence 2
Examen final (Deuxième session) 1h30
Initiation à Python
Année : 2021-2022

EXERCICE I

Algorithme9 : triBulle(T)
Données : Le tableau T de nombre
Résultats : Le tableau T trie en ordre croissant

```
procedure tri_bulles(T)
 N ← taille de T
  pour i de N − 1 à 1 faire
    pour j de 0 à i − 1 faire
      si T[j] > T[j + 1] alors
        échanger T[j] et T[j + 1]
      fin si
    fin pour
  fin pour
fin procedure
```

1- Quelle est la différence entre une procédure et une fonction
2- Réécrire la procédure tri bulle en python
3- Transformer la boucle pour en tant que en python dans la procédure
4- Echange dans l'algorithme est une fonction. Ecrire en python la fonction **Echange** qui permet de permuter deux éléments
5- Dans un programme principal manipuler un tableau de 6 entiers

EXERCICE II

1- Ecrire un code python permettant de :
   • Lire un nombre fini de notes comprises entre 0 et 20.
   • Afficher la meilleure note, la mauvaise note et la moyenne de toutes les notes.
2- Dans un programme python, utiliser le module cercle et on demandera à l'utilisateur de donner le rayon et on affichera la circonférence et l'aire.

Scanné avec CamScanner

entier a, b écrire "Introduisez le 1er nombre: " lire a écrire "Introduisez le 2ème nombre: " lire b tant que NOT (a*b=0) faire si a>b alors a <-- a-b sinon b <-- b-a fsi ftant si a=0 alors écrire "PGCD = ", b sinon écrire "PGCD = ", a fsi	3-1 Que fait l'algorithme dans la colonne de gauche ? 3-2 Traduire l'algorithme en python 3-3 Retracer l'algorithme pour a =32 et b= 14

EXERCICE III

1- Donner le rôle des bibliotheques numpy, scipy et matplotlib puis écrire le code pour tracer la fonction 2x+1 sur l'intervalle [-3 ;+3]
2- Écrire un programme Python permettant de calculer la combinaison d'un nombre p dans un nombre n en utilisant une fonction factorielle
3- Ecrire un code python permettant de réaliser une calculette avec les quatre opérations de base. On utilisera l'instruction (switch…case….) pour permettre à l'utilisateur de faire le choix de son opération
4- On considère un tableau de 10 étudiants (matricule, nom et moyenne). Écrire un code python permettant de les saisir puis de les afficher par ordre alphabétique
5- Les nombres de Catalan sont un autre exemple de définition récursive basée non seulement sur la valeur de la fonction à n−1 et C(0). Ils sont définis ainsi: C(0) =1 et $C_n = \sum_{i=0}^{n} C(i) * C(n-i)$.

Ecrivez le code python des nombres de catalan sous la forme défini ci-dessus

Scanné avec CamScanner

CORRECTION Programmation Python Licence 2 2019 - 2020

Exercice 1 : culture générale

1. **Réponse** : Python est un langage **interprété.**
2. **Réponse** : - Numpy : est un module Python qui est utilisé pour les calculs numériques sous Python.
   - SciPy : est un module Python utilisé pour les calculs scientifiques.
3. **Réponse** : - dictionnaire : nom_dictionnaire = {"voiture : 4", "vélo : 2"}
   - ensembles : dic = {1, 3, 5, 7}
   - listes : liste = [ ] #Une liste vide.
4. **Réponse** :

```
#coding : utf-8
x = float(input("Entrez un nombre réel :"))
n = int(input("Entrez un nombre entier : "))
while (n < 0):
    n = int(input("ATTENTION : ERREUR vous devez entrer un nombre entier positif :"))
puiss = 1
i = 1
while (i <= n):
    puiss *= x
    i += 1
print("la valeur de ", x , " à la puissance ", n , " est : ", puiss)
```

5. Remplir le tableau ci-dessous.

Instructions	Code Python	Instructions	Code Python

Comment accède-t-on à la 3e lettre d'une chaîne ?	chaine[2]	Quelle instruction en Python permet d'obtenir la liste des entiers divisibles par 3 compris entre 5 et 111 compris ?	for i in range(5, 112):
			if (i % 3 == 0):
			print(i)

Scanné avec CamScanner

Comment demande-t-on à l'utilisateur d'entrer une chaîne de caractère ?	chaine = input("Entrez une chaîne : ") **ou** chaine = string(input("Entrer une chaine : "))	Comment accède-t-on en python à l'avant dernier élément d'une liste (sans utiliser l'instruction len)	liste[-2]
Comment effectue-t-on la concaténation de deux chaînes de caractères ?	chaine = chaine1 + chaine2	Quel opérateur en Python permet d'obtenir le reste de la division euclidienne ?	% (le modul

Exercice 2 : Python

1. **Réponse** :

```
#coding : utf-8
inf = int(input("Entrer la borne inférieure de l'intervalle : "))
sup = int(input("Entrer la borne supérieure de l'intervalle : "))
nombre = int(input("Entrer un nombre pour vérifier s'il appartient à l'intervalle : "))
if ((nombre > inf) and (nombre < sup)):
    print("Le nombre ", nombre , "appartient à l'intervalle.")
else:
    print("Le nombre ", nombre , "n' appartient à l'intervalle.")
```

2. **Réponse** :

```
#coding : utf-8
a = int(input("Entrer le premier nombre : "))
b = int(input("Entrer le deuxième nombre : "))
if ((a < 0) or (b < 0)):
    print("Le produit est de ", a , " par ", b , " est négatif ")
else:
    print("Le produit est de ", a , " par ", b , " est positif ")
```

Scanné avec CamScanner

```
ALGORITHME test:
VAR b, i, N : ENTIER:
cumul: REEL:
DEBUT
ECRIRE('Algorithme tester licence 2 en info');
b- 10; (*initialisation*)
cumul- 20;
ECRIRE('Saisir un nombre entier N');
LIRE(N);
POUR i - 1 JUSQUA N FAIRE
  DEBUT
    cumul- cumul+(b*i);
    b- b-1;
  FIN;
  ECRIRE('cumul =', cumul);
  ECRIRE('b =', b);
FINPOUR
  ECRIRE('Fin du traitement');
FIN.
```

3. Soit l'algorithme ci-contre. Si **N=3**, donner les résultats de l'exécution du programme tels qu'ils apparaissent exactement à l'écran.

Réponse :

Algorithme tester licence 2 en info

Saisir un nombre entier N

3

cumul = 30

b = 9

cumul = 48

b = 8

cumul = 72

b = 7

Fin du traitement

4. Réponse :

```
ALGORITHME test:
VAR b, i, N : ENTIER:
cumul: REEL:
DEBUT
ECRIRE('Algorithme tester
licence 2 en info');
b- 10; (*initialisation*)
cumul- 20;
ECRIRE('Saisir un nombre entier
N');
LIRE(N);
TANT QUE (N < 0) FAIRE
  ERCIRE("ATTENTION :
ERREUR vous devez saisir un
nombre positif");
  LIRE(N);
FINTANTQUE
POUR i - 1 JUSQUA N FAIRE
  DEBUT
    cumul- cumul+(b*i);
    b- b-1;
  FIN;
  ECRIRE('cumul =', cumul);
  ECRIRE('b =', b);
FINPOUR
  ECRIRE('Fin du traitement');
FIN.
```

5. Transformer la boucle **POUR** en une boucle **TANT QUE**

Réponse :

```
ALGORITHME test;
VAR b, i, N : ENTIER;
cumul: REEL;
DEBUT
ECRIRE('Algorithme tester
licence 2 en info');
b- 10; (*initialisation*)
cumul- 20;
ECRIRE('Saisir un nombre entier
N');
LIRE(N);
i - 1;
TANT QUE (i <= N) FAIRE
  DEBUT
```


Scanné avec CamScanner

```
    cumul← cumul+(b*i);
    b← b-1;
  i ← i + 1;
  FIN;
 ECRIRE('cumul =', cumul);
 ECRIRE('b =', b);
FINPOUR
 ECRIRE('Fin du traitement');
FIN.
```

6. Traduit cet algorithme en python.

Réponse :

```
#coding : utf-8
print('Algorithme tester licence 2 en info')
b = 10 #initialisation
cumul = 20
N = int(input('Saisir un nombre entier N'))
for i in range(1, N+1):
    cumul = cumul + ( b * i )
    b = b - 1
    print('cumul =', cumul')
    print('b =', b')
print('Fin du traitement')
```

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

SUJET PYTHON SESSION 1 LICENCE 2

Exercice 1

1. Ecrivons la fonction triBulle en python

```
TriBulle (T) :

    for i in range(len(T)-1,1,-1) :
        for j in range(0,i-1):
            if T[j] > T[j+1] :
                Echan=T[j]    #represente l'implementation de la fonction
echange.
                T[j]=T[j+1]
                T[j+1]=Echan

    return(T)
```

2. Transformons la boucle pour en tant que

```
TriBulle (T) :
  i=len(T)-1
  j=0
  while (i >=1):
      while(j <= i-1):
          if  (T[j] > T[j+1]) :
              Echan=T[j]
              T[j]=T[j+1]
              T[j+1]=Echan
          j=j+1
      i=i-1

  return(T)
```


Scanné avec CamScanner

3.Ecriture de la fonction echange

```
def Echange(T,k,k+1):

    Echan=T[k]
    T[k]=T[k+1]
    T[k+1]=Echan
    return (T) # Ici le tableau retourné sera le tableau T avec les elements
d'indice k et k+1 permuter.
```

4.Dans un programme principale manipulons un tableau de 6 entiers:

```
# saisie des elements du tableau

S=[]
for i in range(0,6):
    a=int(input('veuillez entrer l'élément svp : '))
    S.append(a) #cette fonction permet d'ajouter un element dans un tableau

#Appel de la fonction tribulle ecrite a la question 1)
TriBulle(S)
```

Exercice 2

2.1 Le resultat de l'execution est :

```
au revoir 10
```

2.2 Traduisons l'algorithme en python:

```
a=5
n=int(input('saisir n :'))
x=float(input('saisir x' :))
print('bonjour ')
print(n)
```

Scanné avec CamScanner

-*Modification de l'algorithme*

```
choix=int(input('voulez vous continuer tapez 1 pour oui et 0 pour non : '))
le (choix!=0):


    a=5
    n=int(input('saisir n :'))
    x=float(input('saisir x' :))
    print('bonjour ')
    print(n)
    choix=int(input('voulez vous continuer tapez 1 pour oui et 0 pour non : '))
```

Exercice 3

1)Voir cours

2) calculatrice

```
    nt('Calculatrice version etudiant math info')
a=int(input('entrer le premier nombre :'))
b=int(input('entrer le deuxieme nombre :'))
    t ('quelle operation voulez vous faire ')
    t ('1.addition ')
      ('2.soustraction ')
      ('3.multiplication ')
    t ('4.division')
choix=int(input('faites votre choix :'))

  (choix==1):
      resultat=a+b
      print('la somme de ',a,'et',b,'donne',resultat)

  (choix==2):

      resultat=a-b
      print(«'la difference de ',a,'et',b,'donne',resultat)
```


Scanné avec CamScanner

```
elif (choix==3):

        resultat=a*b
        print(«'le produit de ',a,'et',b,'donne',resultat)

else:

        if (b==0):
                print('ERREUR DIVISION PAR 0')
        else:
                resultat=a / b
                print('le quotient de ',a,'par',b,'donne',resultat)
```

3.mot de passe

```
password= 'lic2mi'
reponse= input('veuillez entrer le mot de passe svp :')


for i in range(1,4):

        if(reponse= ='password'):
                print('Mot de passe accepté')

        else:
                print('Mot de passe invalide')
                reponse= input('veuillez entrer le mot de passe svp :')


        if(i==3):
                print('nombre de tentative écoulé')
```

4.Combinaison avec factoriel iterative

```
        def factoriel (m):
                facto=1
                for i in range(1,m+1):
                        facto=facto*i
                return (facto)
        def  combinaison(p,n):
                comb=factoriel(n) / (factoriel(p) * factoriel (n-p))

                return (comb)
```

Scanné avec CamScanner

5.factoriel recursive

```
def factorielrecursif (m):
    if(m==0):
        facto=1
    else :
        facto=m*factorielrecursif(m-1)
    return (facto)
```


Scanné avec CamScanner

CORRECTION PYTHON 2021-2022 SESSION 1

```
#Examen Session 1 python
# Exercice 1

# 1) voir le cours
# 2) La fonction factoriel avec for et tant que:
# boucle for:
def factoriel(n):
    fact=1
    for i in range(1,n+1):
        fact=fact*i
    return fact
# boucle tant que :
def factorielle(n):
    fact=1
    i=1
    while (i<n+1):
        fact=fact*i
        i=i+1
    return fact
# 3)
s=["lundi","mardi",230,"dimanche"]
#a- s[0:4:2]
s[0:4:2]
# =>['lundi', 230] ce code liste les elements de
la listes à partir de l'index 0 à 4 avec un pas de 2.
#b- del(s[2])
del(s[2])
# =>['lundi', 'mardi', 'dimanche'] ce code
supprime l'élement à l'index 2.
# c- s+["jeudi", "vendredi"]
s+["jeudi", "vendredi"]
# ce code donne
["lundi",230, "mardi", "dimanche","jeudi",
# d- s.append('samedi')
s.append('samedi')
# => ['lundi', 'mardi', 'dimanche', 'samedi']
code ajoute l'élement samedi à la fin de li
# e- for pair in range (100,110.2):
        #print(pair)
# 100
# 102
# 104
# 106
# 108
# ce code génère les nombres compris en
et 110 avec un pas de 2
# f- thisset=["apple", "banana","cherry"]
thisset=["apple", "banana","cherry"]
print(thisset)
# ['apple', 'banana', 'cherry'] ce code affich
liste thisset
print(len(thisset))
# 3 ce code affiche la taille de la liste thisse
```


Scanné avec CamScanner

```
# Exercice 2
# 1) trace de l'algo pour x=2 et n=3 voir pages suiv
# A la 1ère itération: i=1,puiss=1,
# on obtient: puiss= 1*2=2, i=1+1=2

# A la 2e itération: i=2,puiss=2
# on obtient: puiss= 2*2=4, i=2+1=3
# A la 3e itération: i=3,puiss=4
# on obtient: puiss= 4*2=8, i=2+1=4
# on a i=4 >n=3, docn fin de boucle.
# on obtient la trace de cet algo :
# x=2, n=3, x puissance n est: 8
# 2) traduction en python
x=int(input("Entrer x :"))
n=int(input("Entrer n :"))
puiss=1
i=1
while (i<=n):
    puiss=puiss*x
    i=i+1
print("x=",x,", n=",n,"et x puissance n est :",puiss)
# 3) traduction de la boucle while en boucle for:
x=int(input("Entrer x :"))
n=int(input("Entrer n :"))
puiss=1
for i in range(1,n+1):
    puiss=puiss*x
print("x=",x,", n=",n,"et x puissance n est :",puiss)
# 4)
def puissance(x,n):
    puiss=1
    for i in range(1,n+1):
        puiss=puiss*x
    print("x=",x,", n=",n,"et x puissance n est
:",puiss)
# 5)
def puissance1(x,n):
    if (n==0):
        return 1
    if n%2==0:
        puiss=puissance1(x,n/2)
        return puiss*puiss
    else:
        return x*puissance1(x,n-1)
# 6)
def puissance(x,n):
    if(x<0 or n<0):
        return print("erreur sur la valeur de n ou
x")
    elif (n==0):
        return 1
    elif n%2==0:
        puiss=puissance(x,n/2)
        return puiss*puiss
    else:
        return x*puissance(x,n-1)
```


Scanné avec CamScanner

```
# 7)
T=[puissance(2,k) for k in range(1,6)]
for i in range(0,5):
    print(T[4-i])
# 8)
#Resolution de l'équation ax+b=0
def equation():
    a=float(input("Donnez la valeur
    b=float(input("Donnez la valeur
    x=float
    if(a==0):
        x=b
    elif(b==0):
        x=0
    else:
        x=b/a
    print("La solution de cette équa
("",a,"X +",b,"=0)est: x =",x)

# Exercice 3
# 3.1)
a=9
b=a+1
a=b-8
a=a*7
if (a<8):
    print("bonjour",a)
else:
    print("au revoir ", b)
```

```
'''
Au depart: a=9, b=a+1=10,
ensuite on a: a=b-8=10-8=2
et on a: a=a*7=2*7=14
donc on termine avec la vaeur de a=14 et b=10
par conséquant, le resultat de la trace est : au revo
10
'''
# 3.2) Traduction du code en python
for i in range(10):
    a=5
    n=int(input("Saisir n:"))
    x=float(input("Saisir x:"))
    print("Bonjour")
    print(n)
    reponse=input("Voulez-vous continuer?oui ou
:")
    if reponse=="non":
        break
```



exo 1 le tracer

Scanné avec CamScanner

CORRECTION SESSION 2 PYTHON 2021-2022

```
# Examen Session 2

# Exercice 1
# 1) La difference entre une procedure et une fonction:
# voir le cours
# 2) La procedure tri bulle en python
def tri_bulle(T):
    n=len(T)
    for i in range(n):
        for j in range(0,n-1):
            if(T[j]>T[j+1]):
                echanger(T[j],T[j+1])
#T[j],T[j+1]=T[j+1],T[j]
#3) transformation de la boucle pour en tant que dans la procedure
def tri_bulle(T):
    n=len(T)
    i=0
    while i<n:
        j=0
        while j<n-1:
            if(T[j]>T[j+1]):
                #T[j],T[j+1]=T[j+1],T[j]
                T[j],T[j+1]= echanger(T[j],T[j+1])
            j=j+1
        i=i+1
    return T
#4) Ecriture de la fonction Echange
def echanger(a,b):
    a,b=b,a
    return a,b
```


Scanné avec CamScanner

```
#5) Le programme principal
Tab=[20,4,0,1,11,2]
print(tri_bulle(Tab))
# =>[0, 1, 2, 4, 11, 20]
# Exercice 2
# 1)Ecrivons un code python permettant de:
# lire un nombre fini de notes comprises entre 0 et 20:
def notes():
  notes=[]
  for i in range(5):
    note=float(input("Saisir la note : "))
    if(note<0 or note>20):
      print("Saisissez une note comprise entre 0 et 20")
    else:
      notes.append(note)
  return notes
# Afficher la meilleure note, la mauvaise note et la moyenne des notes
note=notes()
tri_bulle(note)
print("La meilleure note est: ",note[-1],"/20")
print("La mauvaise note est: ",note[0],"/20")
som=0
for i in note:
  som=som+i
moyenne=som/len(note)
print("La moyenne des notes est : ",moyenne,"/20")
```

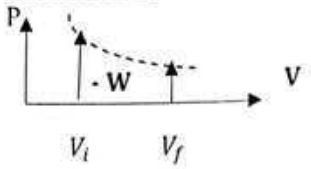
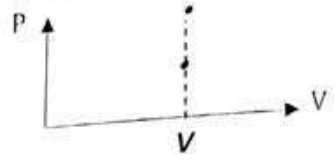
Scanné avec CamScanner

SEMESTRE 2

www.gvivaservices.com

Scanné avec CamScanner

RESUME THERMODYNAMIQUE
EXEMPLES DE TRANSFORMATION QUASI-STATIQUES POUR UN GAZ PARFAIT

	ISOTHERME	ISOCHORE
Diagramme P - V		
Caractéristique de la transformation	$T = Cste$	$V = Cste$
1er principe	$Q = -W$	$\Delta U = Q$
Travail	$W = -nRTln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$	$W = 0$
Autres relations	$PV = Cste$	$Q = nC\Delta T$ (pour C = Cste)

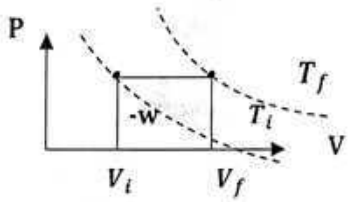
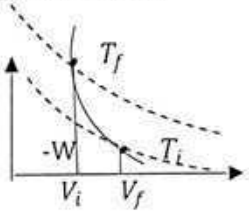
	ISOBARE	ADIABATIQUE
Diagramme P- V		
Caractéristique de la transformation	P = Cste	Q = 0
1er principe	$Q = \Delta U - W$	$\Delta U = W$
Travail	$W = -P(V_f - V_i)$	$W = \frac{(P_f V_f - P_i V_i)}{(k-1)}$
Autres relations	$Q = nC\Delta T$ (pour C = cste)	$PV^\gamma = Cste$ $TV^{\gamma-1} = Cste$ $T^\gamma P^{1-\gamma} = Cste$ $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$

TABLEAU DE FORMULES THERMODYNAMIQUE

2e identité thermodynamique	dH = TdS + VdP	
3e identité thermodynamique	dF = -SdT - PdV	
4e identité thermodynamique	dG = -SdT + VdP	
Capacité thermique a volume constant	$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)v$ en J.K^{-1}	. V : volume . T : température
Capacité thermique a pression constante	$C_r = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)p$ en J.K^{-1}	. H : enthalpie . P : Pression

Scanné avec CamScanner

Capacité thermique massique a volume/ pression constant(e)	$c_v = \frac{C_v}{m}$ $c_p = \frac{C_p}{m}$	. m : masse du système . c_v : en $j.kg^{-1}.K^{-1}$. c_p : en $j.kg^{-1}.K^{-1}$
Capacité thermique molaire a volume/ pression constant(e)	$c_{vm} = \frac{C_v}{m}$ $c_{pm} = \frac{C_p}{m}$	. c_{vm} : en $j.mol^{-1}.K^{-1}$. c_{pm} : en $j.mol^{-1}.K^{-1}$
Energie interne d'un gaz parfait monoatomique	$U = \frac{3}{2}nRT$	. n : quantité de matière . R : constante des gaz parfaits
Energie interne d'un gaz parfait diatomique	$U = \frac{5}{2}nRT$	
Enthalpie d'un gaz parfait monoatomique	$H = \frac{5}{2}nRT$	. H : enthalpie en joules
Enthalpie d'un gaz parfait diatomique	$H = \frac{7}{2}nRT$	
Loi de Mayer	$C_p - C_v = nR$ $C_{pm} - C_{vm} = R$	. R : en $J.mol^{-1}.K^{-1}$
Coefficient gamma	$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$	
Coefficient gamma d'un GPM (gaz parfait monoatomique)	$\gamma(GPM) = \frac{5}{3}$	
Coefficient gamma d'un gaz diatomique	$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{2}$	
Lois de Laplace	$TV^{\gamma-1} = cste$ $PV^{\gamma} = cste$ $T^{\gamma}P^{1-\gamma} = cste$	. valable pour un gaz parfait à γ constant subissant une transformation adiabatique et mécaniquement réversible

- Enfin quelques définitions :

Système fermé : n'échange pas de particules avec l'extérieur

Système calorifugé : n'échange pas de chaleur avec l'extérieur

Système isolé : n'échange pas de chaleur, ni de travail avec l'extérieur

Transformation adiabatique : Sans échange de chaleur (attention, T peut varier lors d'une telle transformation !)

Transformation isotherme : à température constante

Transformation isobare : à pression constante

Transformation isochore : à volume constant

Scanné avec CamScanner

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
UNION DISCIPLINE TRAVAIL

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

UNITE DE FORMATION ET DE RECHERCHE
SCIENCES DES STRUCTURES DE LA MATIERE
ET DE TECHNOLOGIE

Année universitaire 2018-201

1ère SESSION : EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE (Licence 2 - MI)

Exercice 1: (7 points)

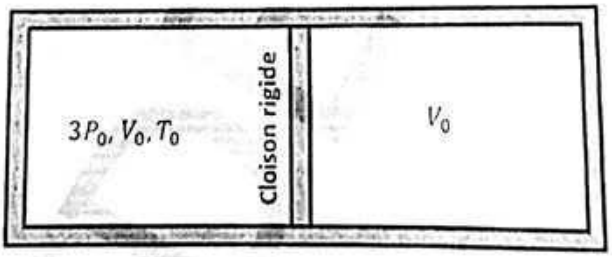
Un moteur de nature irréversible reçoit au cours de son fonctionnement de l'énergie thermique d'une sou chaude de capacite thermique μ, initialement à $T_1 = 373\ K$, et en restitue une partie à la source froide de capa thermique 5μ, initialement à $T_2 < T_1$, avec $T_2 = 273\ K$.

1- Quelle est la température finale de chacune des sources quand le moteur s'arrête de fonctionner ?
2- Trouver un encadrement de la température finale.

Exercice 2: (7 points)

Une enceinte est délimitée par une paroi indéformable et adiabatique. Une cloison rigide sépare cette encein deux parties de même volume V_0. A l'état initial, une des cellules est remplie d'hydrogène (gaz parfait), à la pre $3P_0$ et à la température T_0, et l'autre cellule est vide. On enlève la cloison centrale et on attend l'état d'équilibre

1- Déterminer le travail W_{01} et la chaleur Q_{01} échangés par le système. En déduire la température finale T_1. Q est la nature de la transformation ?
2- Déterminer la pression P_1 du gaz à l'état final.
3- Déterminer la variation d'entropie ΔS du système et les entropies échangée S_e et créée S_c en fonction de et T_0 uniquement.



Exercice 3: (6 points)

1- On considère une machine ditherme réversible fonctionnant entre une source chaude à la température une source froide à la température T_2. La quantité de travail reçue par la machine en un cycle est W
   a) Donner l'expression du rendement de la machine quand elle fonctionne, en machine fournissant du en machine frigorifique et en pompe à chaleur.
   b) Quelle relation lie Q_1, Q_2, T_1 et T_2 dans le cas d'une machine irréversible ?
2- n moles d'un gaz parfait décrivent un cycle de Carnot ABCD entre les isothermes AB et CD de temp respectives T_1 et T_2. On note $\alpha = V_B/V_A$ le rapport volumétrique.
   a) Montrer que $V_C/V_D = \alpha$.
   b) Dans quel sens le cycle doit-il être parcouru pour être résistant ?
   c) Exprimer alors Q_1 et Q_2, en fonction de T_1, T_2, et α.

Scanné avec CamScanner

Année universitaire 2018-2019

2ème SESSION : EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE (Licence 2 - MI)

estions de cours : (6 points)

appelle les expressions des différentielles de l'énergie interne U, de l'enthalpie H et de l'entropie S d'un

Pour l'entropie S, deux expressions de la différentielle sont données :

$C_v dT + (l - P)dV$, $dH = C_p dT + (h + V)dP$, $dS = \frac{C_v}{T}dT + \frac{l}{T}dV = \frac{C_p}{T}dT + \frac{h}{T}dP$

1. Sachant que dU, dH et dS sont des différentielles totales exactes, démontrer à partir de leurs expressions les relations :

$l = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$, $h = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

2. En déduire, à partir des résultats de la question 1, les expressions de l et h pour un gaz parfait.
3. En vous servant des expressions de la différentielle de l'entropie S, démontrer que pour une mole de gaz parfait, les coefficients calorimétriques C_v et C_p satisfont la relation de Mayer $C_p - C_v = R$, avec R qui est la constante des gaz parfaits.

ercice 1 : (6 points)

, dont l'équation d'état est $P(V - 1) = 0.3\,T$, décrit un cycle formé des transformations quasi-

ques suivantes :

Une transformation isotherme de (T_1, V_1) à (T_1, V_2)
Une transformation isochore de (T_1, V_2) à (T_2, V_2)
Une transformation isotherme de (T_2, V_2) à (T_2, V_1)
Une transformation isochore de (T_2, V_1) à (T_1, V_1)

pport des deux volumes est tel que $\frac{V_1 - 1}{V_2 - 1} = \sqrt{e}$, et celui des températures est $\frac{T_1}{T_2} = 2$. Le travail par

est de $62.7\ Joules$.

1. Dans quel sens se déroule la transformation ?
2. Représenter qualitativement le cycle de transformations dans un diagramme de Clapeyron en justifiant la position des volumes et des températures.
3. Calculer les différents travaux échangés lors des transformations en fonction de T_1 uniquement. En déduire la température T_1.
4. En appliquant le premier principe, calculer la quantité de chaleur échangée au cours du cycle.

rcice 2 : (8 points)

moteur de nature irréversible reçoit au cours de son fonctionnement de l'énergie thermique d'une e chaude de capacité thermique μ, initialement à $T_1 = 373\ K$, et en restitue une partie à la source de de capacité thermique 5μ, initialement à $T_2 < T_1$, avec $T_2 = 273\ K$.

1. Quand le moteur arrête-t-il de fonctionner ?
2. En appliquant le premier principe, trouver la borne supérieure de la température finale.
3. En appliquant l'inégalité de Clausius pour les machines irréversibles, trouver la borne inférieure de la température finale.
4. En déduire, des deux questions précédentes, un encadrement de la température finale.

Scanné avec CamScanner

Année universitaire 20

EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE (Licence 2 - MI)

Exercice 1 : (4 points)

L'expression du travail élémentaire échangé par un système homogène quelconque a pour expression $\delta W =$

1- Montrer que pendant une transformation réversible, ce travail peut s'écrire :

$$\delta W = A\,dP + B\,dT$$

Où A et B sont des grandeurs que l'on déterminera en fonction de l'état thermodynamique (P, T, V) et des coef thermoélastiques α, β et/ou χ.

2- Un solide de volume $V_0 = 1\ litre$, de compressibilité isotherme constante $\chi = 10^{-11}\ Pa^{-1}$, subit compression isotherme, quasi-statique, de la pression $P_i = 1\ atm$ jusqu'à la pression $P_f = 100$ supposant que le volume du solide ne change presque pas, déterminer le travail reçu par le solide.

On donne : $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$; $\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{dP}{\partial T}\right)_V$; $\chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$

Exercice 2 : (7 points)

On considère n moles d'un gaz réel dont l'équation d'état est :

$P(V - nb) - nRT - aP\,ln(P) = 0$; Où R, a et b sont des constantes.

On note que C et h sont des coefficients calorimétriques qui dépendent des variables d'état P, T et V tels que

$h = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$; $\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P - \frac{h}{T}$

1- Calculer h.

2- Montrer que C ne dépend pas de P. De quelle variable dépend alors C ?

3- On pose que la différentielle totale de l'entropie $S(T, P)$ peut s'écrire sous la forme :

$$dS = \frac{C}{T}\,dT + \frac{h}{T}\,dP$$

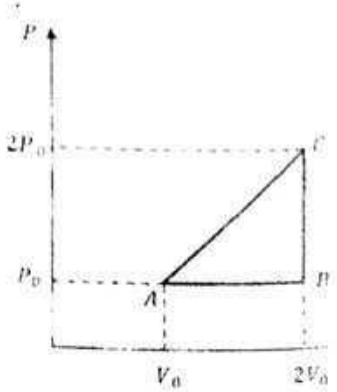
Où C et h représentent les valeurs calculées dans les deux questions précédentes.

a- Calculer la quantité de chaleur échangée entre le gaz et le milieu extérieur au cours d'une transf isotherme réversible. Donner le résultat en fonction de la pression initiale P_i, la pression finale température du thermostat T_{th}.

b- Monter que pour une transformation isentropique de ce gaz reel, la temperature et la pression s par la relation $TP^{-\lambda} = cte$, où λ est une constante a déterminer. On supposera que C est une qui n'est pas fonction d'une variable d'état.

Exercice 3 points)

On considere le cycle réversible triangulaire ci-contre décrit par une mole d'un gaz parfait.



1- Dans quel sens ce cycle doit-il être parcouru pour que le fonctionnement soit de type moteur ? Quel sera alors le signe du travail ?

2- On suppose maintenant que le cycle est moteur.

a- Calculer le travail et la chaleur échangée lors du cycle.

b- Calculer les chaleurs échangées pendant les trois transformations constituant le cycle.

3- Calculer le rendement de ce cycle moteur en fonction de $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ supposé constant. Application numérique : $\gamma = 1.4$

Scanné avec CamScanner

EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE (Licence 2-MI, Première session)

2020-2021

Exercice 1 : (5 points)

Une mole d'eau liquide est caractérisée, dans un certain domaine de températures et de pressions autour de l'état 0 où ($P_0 = 1bar; T_0 = 293\ K; V_0 = 10^{-3}m^3$), par un coefficient de dilatation isobare $\alpha = 10^{-4}K^{-1}$ et par un coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = 5x10^{-10}Pa^{-1}$ constants.

1. Etablir que l'équation d'état liant V, P et T de ce liquide est : $\ln\frac{V}{V_0} = \alpha(T - T_0) - \chi T(P - P_0)$
2. Calculer le volume de la mole d'eau sous P= 1000 bars et à T= 293 K.
3. Cette mole d'eau liquide est enfermée dans une bouteille métallique de volume v constant. Par suite d'un incendie, la température passe de $T_0 = 293\ K$ à $T = 586K$. Calculer la pression P dans le récipient.

Exercice 2 : (7 points)

Lors d'une transformation infinitésimale réversible au cours de laquelle sa pression P, son volume V et sa température T varient respectivement de dP, dV et dT, une mole de gaz reçoit une quantité de chaleur infinitésimale δQ que l'on peut écrire sous trois formes équivalentes :

$$\delta Q = C_V dT + ldv = C_p dT + hdP = \lambda dP + \mu dV$$

1. Exprimer λ *et* μ *en fonction de* C_o *et* C_v *et des dérivées partielles* $\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)P$ *et* $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)V$

Dans la suite du problème, la mole de gaz est considérée comme un gaz parfait pour lequel le rapport $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ est une fonction linéaire de la température telle que $y = aT + b$, et où a et b sont deux constantes positives.

2. Exprimer λ *et* μ *en fonction de* P, V *et* y.
3. Déterminer l'énergie interne U(T) de ce gaz en fonction de T, a, b, R, On notera U_o la constante.
4. Démontrer en utilisant $\partial Q = C_V dT\ ldV$ que les transformations isentropiques obéissent à l'équation $\frac{TV^{b-1}}{aT+b-1} = cte$. On réalisera un changement de variables en posant Z= 1/T.

Exercice 3 : (8 points)

Une mole de gaz parfait de rapport $y = aT + b$ (a et b deux constantes positives), décrit un cycle constitué des transformations suivantes :

- Une compression isotherme $A(v_1, T_1) \rightarrow B(V_2, T_1)$ pendant laquelle le gaz est en contact avec une source de chaleur de température T_1 ;
- Un échauffement à volume constant $B \rightarrow C(V_2, T_2)$ pendant lequel le gaz est en contact avec la source de température T_2;
- Une détente isotherme $C \rightarrow D(V_1, T_2)$ pendant laquelle le gaz reste en contact avec la source de température T_2;
- Un refroidissement isochore $D \rightarrow A$ pendant lequel le gaz est en contact avec la source de température T_1.

1. Quelle est la nature de la machine thermique ditherme dans laquelle circule le gaz ?
2. Calculer le travail W et la chaleur Q reçue par le gaz pour chacune des transformations en fonction de $T_1, T_2, V_1, V_2,\ a,\ b, R$. On précisera le signe des chaleurs Q.
3. Quelles sont-les quantités de chaleur Q_V et Q_C fournie au gaz respectivement par la source froide et par la source chaude ? En déduire que le rendement de cette machine est :

$$\eta = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) X \text{ avec } X = \frac{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) + \frac{1}{aT_2}\ln\left(\frac{aT2+b-1}{aT1+b-1}\right)}$$

Scanné avec CamScanner

Université FHB UFR Maths-Informatique

Licence 2: 2020-2021

EXAMEN THERMODYNAMIQUE (Licence 2-MI,Deuxième session)

Exercice 1: (4 points)

Chaque question peut avoir une ou plusieurs réponses. Donnez le ou les numéro(s) des bonne(s) réponse (s).

A- L'entropie interne, créée à l'intérieur du système est toujours:

1) positive
2) négative
3) positive ou nulle
4) négative ou nulle
5) aucune réponse ne convient

B- L'identité thermodynamique, c'est:

1) $\delta Q = T\,dS$
2) $dU = T\,dS + P\,dV$
3) $dH = T\,dS + V\,dP$
4) $dS \geq 0$ pour un système isolé
5) aucune réponse ne convient

C- L'entropie totale d'un gaz parfait, lors d'une transformation réversible, dépend:

1) uniquement de la température
2) uniquement du volume
3) dépend de deux variables
4) dépend de trois variables
5) aucune réponse ne convient

D- L'entropie est liée, au niveau microscopique:

1) à l'agitation des molécules
2) aux chocs des molécules
3) au désordre des molécules
4) à la structure des molécules
5) aucune réponse ne convient

Exercice 2: (8 points)

A des pressions inférieures à 20 bars et des températures entre $273\,K$ et $283\,K$, le volume massique de l'eau liquide est donnée par l'équation d'état:

Scanné avec CamScanner

$v = v_0[1 + a(T - T_0)^2 - (k - bT)(P - P_0)]$
où $v_0 = 1\,cm^3.g^{-1}$; $T_0 = 277\,K$; $P_0 = 10^5\,Pa = 1\,bar$
$a = 8.25 \times 10^{-6}\,K^{-2}$; $b = 7.0 \times 10^{-13}\,Pa^{-1}$; $k = 6.94 \times 10^{-10}\,Pa^{-1}.K^{-1}$.

1. Montrer qu'à pression constante v passe par un minimum pour une valeur T_m de la température.
Calculer T_m pour $P = P_0$.

2. Calculer les coefficients thermoélastiques a et χ de l'eau à $P = 1\,bar$ et $T = 283\,K$.

3. On prend désormais pour l'eau au voisinage de $277\,K$ et $1\,bar$ un modèle incompressible et indilatable.

a) Quelle est la nouvelle équation d'état ?
b) Quelle est la variation d'énergie interne lorsque $1g$ d'eau liquide passe de $273\,K$ à $283\,K$ sous $1\,bar$?
On donne: c(eau liquide)$= 4.18\,j.g^{-1}.K^{-1}$

Exercice 3:(8 points)
Une transformation polytropique est une tranformation d'un gaz pour laquelle il existe un coefficient $K > 0$ tel que $PV^k = Cte$ tout au long de la transformation. De telles transformations sont intermédiaires entre des adiabatiques et des isothermes, et se rencontrent en thermodynamique industrielles, par exemple lorsque le système réfrigérant ne permet par d'éliminer tout le transfert thermique produit par une réaction chimique. On raisonnera à partir d'une transformation quasi-statique d'un gaz parfait.

Données pour un gaz parfait:
$C_v = \dfrac{n\,R}{\gamma - 1}$ $C_p = \dfrac{\gamma\,n\,R}{\gamma - 1}$

1. À quelles transformations connues correspondent les cas $k = 0$ et $k = 1$?
2. Calculer le travail des forces de pression pour un gaz subissant une transformation polytropique entre deux états (P_0, V_0, T_0) et (P_1, V_1, T_1) en fonction des pressions et de volumes.
3. En déduire l'expression du travail en fonction des températures uniquement.
4. Montrer que le transfert thermique au cours de la transformation précédente s'écrit:
$Q = n\,R\left(\dfrac{1}{\gamma - 1} - \dfrac{1}{k - 1}\right)(T_1 - T_0)$
5. On se sert maintenant de l'expression de Q trouvée à la question précédente. À quelles transformations correspondent les cas $k = 0$, $k = +\infty$ et $k = \gamma$?

Scanné avec CamScanner

Année universitaire 202

EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE (Licence 2 - MI, Première session)

Exercice 1 : (5 points)

1. Écrire la différentielle de l'énergie interne $dU(T,V)$ en fonction des variables T et V.
2. À partir de dU et de l'expression $\delta Q = dU - \delta W$, donner l'expression de la différentielle de l'entro… pour un gaz parfait parfait de n moles en fonction des variables T et V et des dérivées partielles de l'… interne.
3. En déduire que $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$. Conclure.

Exercice 2 : (7 points)

Une mole de gaz parfait se trouve dans l'état (P_0, V_0, T_0). Au cours d'une transformation réversible, il rec… quantité de chaleur Q donnée par: $Q = \frac{3RT_0}{2}$.

1. Évaluer la pression finale P_1 et le volume final V_1 si la transformation est isotherme.
2. Évaluer la pression finale P_2 et la température finale T_2 si la transformation est isochore.
3. Évaluer la température finale T_3 et le volume final V_3 si la transformation est isobare.

Données: On rappelle que la quantité de chaleur reçu d'un gaz considéré au cours d'une transformation re… élémentaire est:

$$\delta Q = \frac{3R}{2}dT + PdV = \frac{5R}{2}dT - VdP$$

Exercice 3 : (8 points)

Une machine N°1 décrit le cycle réversible triangulaire $ACDA$ (Figure 1), et une autre machine N°2 décri… réversible triangulaire $ABCA$ (Figure 2) entre les mêmes températures T_1 et T_2.

A. Machine N°1 (Figure 1):

1. Exprimer la chaleur Q_{CD} en fonction de S_1 et S_2. En déduire les chaleurs Q_{DA} et Q_{AC} en fonction… Donner les signes des chaleurs Q_{CD}, Q_{DA} et Q_{AC}.
2. Calculer le travail W_1 du cycle en fonction de Q_{CD}.
3. En déduire le rendement η_1 de la machine $N°1$.

B. Machine N°2 (Figure 2):

4. Exprimer la chaleur Q_{AB} en fonction de S_1 et S_2. En déduire les chaleurs Q_{BC} et Q_{CA} en fonction d… Donner les signes des chaleurs Q_{AB}, Q_{BC} et Q_{CA}.
5. Calculer le travail W_2 du cycle en fonction de Q_{AB}.
6. En déduire le rendement η_2 de la machine $N°2$.

C. Comparaison:

Comparer les rendements des deux cycles.

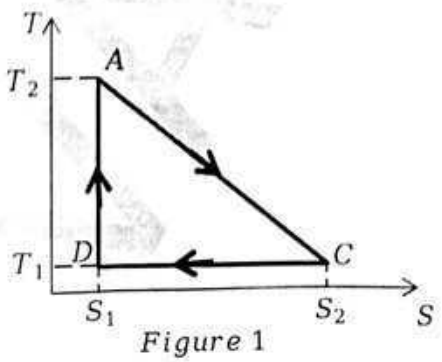


Figure 1

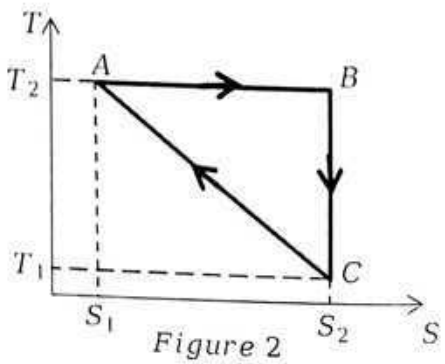


Figure 2

Scanné avec CamScanner

Année universitaire 2021-2022

EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE (Licence 2 - MI, Deuxième session)

Ce sujet comporte deux (02) pages.

Exercice 1 (questions de cours): (5 points)

Chaque question peut avoir une ou plusieurs réponses. Donnez le ou les numéro (s) des bonne(s) réponse(s).

Un inventeur prétend avoir conçu un moteur qui, lors d'un cycle complet, fournit un travail de $1200\ kJ$ contre $1200\ kJ$ de chaleur qui lui sont cédées par un seul réservoir de chaleur. Un pareil moteur violerait:

1) le premier principe
2) le second principe
3) l'un et l'autre des principes
4) ni l'un, ni l'autre des principes

Un système passe d'un certain état initial d'équilibre par deux processus différents, l'un réversible, l'autre irréversible. Parmi les équations suivantes, où ΔS se réfère à un système, laquelle est vraie?

1) $\Delta S_{irr} = \Delta S_{rév}$
2) $\Delta S_{irr} > \Delta S_{rév}$
3) $\Delta S_{irr} < \Delta S_{rév}$
4) Aucune décision possible à propos de (1), (2) et (3)

Pour n'importe quel processus, le second principe exige que la variation d'entropie du système soit:

1) positive
2) nulle
3) négative ou nulle
4) positive, nulle ou négative, sans autre précision

Les coefficients de dilatation isobare et de compressibilité isotherme d'une substance hypothétique sont de la forme: $\alpha = \frac{a}{V}$ et $\chi_T = \frac{b}{V}$ où a et b sont des constantes. L'équation d'état de cette substance est par conséquent:

1) $V = aT + bP + cte$
2) $V = aT - bP + cte$
3) $V = bT + aP + cte$
4) $V = bT - aP + cte$

Pour un système (P, V, T), l'expression $T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P - T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$ est toujours égale à:

1) Zéro
2) C_p/C_v
3) $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

Scanné avec CamScanner

Exercice 2 : (7 points)

Soit un fluide pour lequel il existe une équation d'état de la forme $f(P, V, T) = 0$. On définit pour une mole de fluide, les coefficients thermoélastiques:

$$\alpha = \frac{R}{PV} \quad ; \quad \chi = \frac{1}{P} + \frac{a}{V}$$

Où R est la constante des gaz parfait et a une constante.

1. Donner l'expression de la différentielle dV du volume du fluide en fonction de dT et dP.
2. Montrer, en utilisant les expression de α et de χ, que l'équation d'état de ce fluide est solution de l'équation différentielle:

$$P\,\frac{dk(p)}{dp} + V - \frac{RT}{P} + aP = 0$$

Où $k(p)$ est une fonction de P.

3. Sachant que, lorsque P tend vers zéro, ce fluide se comporte comme un gaz parfait, montrer que son équation d'état est:

$$P\left(V + \frac{aP}{2}\right) = RT$$

NB: On donne que la solution à l'équation différentielle de la forme $x\frac{\partial f}{\partial x} + f + bx = 0$, pour b constant, est:

$$f = -\frac{bx}{2} + \frac{c}{x}$$

où c est une constante quelconque.

Exercice 3 : (8 points)

Dans un état A, n moles données d'un gaz parfait monoatomique occupe le volume $V_0 = 2\ litres$. La pression est $P_0 = 100000\ N/m^2$. On considère que toutes les transformations de ce gaz sont quasi-statiques et on donne $\gamma = 1.4$.

1. On amène ce gaz dans l'état B, à pression constante, à un volume $V_1 = 3\ litres$. Évaluer le travail des forces de pression. Quelle est la quantité de chaleur échangée avec le milieu extérieur?
2. Le gaz est amené de l'état B dans un état C caractérisé par $V_2 = 5\ litres$ et $P_2 = 40000\ N$... transformation entre les états B et C est représentée par une droite dans le diagramme de Clapeyron. Calculer le travail des forces de pression pour cette transformation. Calculer la quantité de chaleur échangée avec le milieu extérieur.

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

UFR :MI 2018-2019

CORRECTION THERMODYNAMIQUE SESSION 1

EXERCICE 1 (voir 2e session)

EXERCICE 2

1. Nous avons une detente de joule dans le vide. elle se fait en energie constante donc $\Delta u = cst$
   $\Delta u = 0 \Rightarrow W_{0_1}$ et $Q_{0_1} = 0$
   * si $\Delta u = 0 \Rightarrow \Delta T = 0$ donc $T_1 = T_0$ par conéquent la transformation est isotherme.

2. D'après la conservation de la quantité de matière :
   $P_1V_1 = 3P_0V_0 \Rightarrow P_1 = \dfrac{3P_0V_0}{V_1}$ or $V_1 = 2V_0$
   $\Rightarrow P_1 = \dfrac{3P_0V_0}{2V_0}$

   $$\boxed{P_1 = \frac{3P_0}{2}}$$

3. Variation d'entropie.

   $\Delta S = S_1 - S_0$
   $\Delta S = \int \dfrac{Q_1}{T_1} - \int \dfrac{Q_0}{T_0}$
   $\Delta S = n\,R\,\ln(\frac{2V_0}{V_0}) + 0$ Or $\Delta S = S_e + S_{cr}$ avec $S_{cr} = 0$
   $\Delta S = n\,R\,\ln 2$ (1)
   On a : $3P_0V_0 = n\,RT_0$

   $n\,R = \dfrac{3P_0V_0}{T_0}$ (2)

   Remplaçons (2) dans (1)
   (1) $\Rightarrow \Delta S = \dfrac{3P_0V_0}{T_0}\ln 2$

Scanné avec CamScanner

$$\boxed{\Delta S = \frac{3P_0V_0}{T_0}\ln 2}$$

EXERCICE 3

1. a) expression du rendement.
   * machine fournissant du travail.

   $$\eta = \left|\frac{W}{Q_1}\right| = -\frac{W}{Q_1}$$

   * machine frigorifique

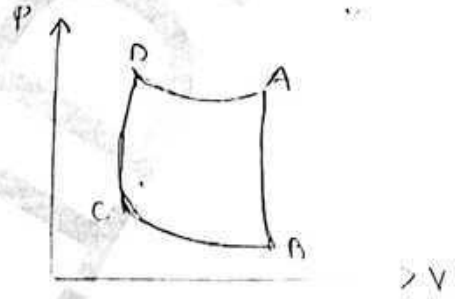
   $$\eta = \frac{Q_e}{W}$$

   * pompe à chaleur

   $$\eta = \frac{|Q_1|}{W} = -\frac{Q_1}{W}$$

   b) $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} < 0$

2. a) Montrons que $\frac{V_C}{V_D} = \alpha$



On a : $T_A V_A^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$ (1)

$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$ (2) avec $V_A = V_B$ et $V_C = V_D$

$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} = \alpha$

Scanné avec CamScanner

$$\boxed{\frac{V_C}{V_D} = \alpha}$$

b) Pour que le cycle soit resistant, il faut qu'il soit parcouru dans le sens anti-horaire ou le sens trignométrique.

c) D'après le 1er principe, on a :

$$\Delta U_{AB} = W_{AB} + Q_1 = 0$$
$$Q_1 = -W_{AB} = n\,R\,T_1\,\ln(\frac{V_B}{V_A})$$
$$\boxed{Q_1 = n\,R\,T_1\,ln(\alpha)}$$

$$\Delta U_{CD} = W_{CD} + Q_2 = 0$$
$$Q_2 = -W_{CD} = n\,R\,T_2\,\ln(\frac{1}{\alpha})$$
$$\boxed{Q_2 = n\,R\,T_2\,\ln(\alpha)}$$

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE L'EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE SESSION 2 2018-2019

QUESTIONS DE COURS

dU étant une DTE on a $dU = C_V dT + (l - p)dV$; $\frac{\partial C_V}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) = \frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial p}{\partial T}$ 1)

$$dS = \frac{C_V}{T}dT + \frac{l}{T}dV$$

dS étant une DTE on a $\frac{\partial\left(\frac{C_V}{T}\right)}{\partial V} = \frac{\partial\left(\frac{l}{T}\right)}{\partial T} \Rightarrow \frac{1}{T}\frac{\partial C_V}{\partial V} + C_V\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial V} = \left(\frac{\partial}{\partial T}\right) + \frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial T}l \Rightarrow \frac{1}{T}\frac{\partial C_V}{\partial V} = \frac{1}{T}\frac{\partial l}{\partial T} - \frac{1}{T^2}l$

On multiplie par T $\frac{\partial C_V}{\partial V} = \frac{\partial l}{\partial T} - \frac{1}{T}l$ (2)

(1) = (2) $\Rightarrow \frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial l}{\partial T} - \frac{1}{T}l$ $\qquad l = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)V$

$dH = C_P dT + (h + V)dP$ $\qquad \frac{\partial C_P}{\partial P} = \frac{\partial h}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial T}$ (1) $\qquad dH = \frac{C_P}{T}dT + \frac{h}{T}dP$

$$\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{C_P}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{h}{T}\right) \Rightarrow \frac{1}{T}\frac{\partial C_P}{\partial P} + C_P\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial P} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right) + h\frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial T} \Rightarrow \frac{1}{T}\frac{\partial C_P}{\partial P} = \frac{1}{T}\frac{\partial h}{\partial T} - \frac{1}{T^2}h$$

$\frac{\partial C_P}{\partial P} = \frac{\partial h}{\partial T} - \frac{h}{T}$ (2)

(1) - (2) $\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{\partial h}{\partial T} - \frac{h}{T}$ $\qquad h = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)P$

2) déduisons *h et l* pour un gaz parfait.

Pour un gaz parfait on a : $PV = nRT$

$P = \frac{nRT}{V}$ $\quad \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V}$ $\qquad \boxed{T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) = \frac{nRT}{V} = l}$

Pour *h*

$PV = nRT$ $\quad V = \frac{nRT}{P}$ $\quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)P = \frac{nR}{P}$ $\qquad \boxed{-T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)P = \frac{nRT}{P} = h}$

3)

On a : $dS = \frac{C_V}{T}dT + \frac{l}{T}dV$ $\qquad dH = \frac{C_P}{T}dT + \frac{h}{T}dP$

$\frac{C_V}{T}dT - \frac{C_P}{T}dT = -\frac{l}{T} + \frac{h}{T} \Rightarrow (C_V - C_P)dT = -ldV + hPV \Rightarrow (C_P - C_V)dT = ldV - hdP$

$\Rightarrow (C_P - C_V)dT = \frac{nRT}{V}dV + \frac{nRT}{P}dP$

Pour $n = 1$ $\quad (C_P - C_V)dT = \frac{RT}{V}dV + \frac{RT}{P}dP \Rightarrow C_P - C_V = \frac{R}{V}\frac{dV}{dT} + \frac{RT}{P}\frac{dP}{dT}$

On a $\frac{dV}{dT} = \frac{R}{P}$ **et** $\frac{dP}{dT} = \frac{R}{V}$. Ainsi $C_P - C_V = \frac{PV}{V}\frac{R}{P} + \frac{PV}{P}\frac{R}{V} = R + R$

$\Rightarrow \boldsymbol{C_P - C_V = 2R}$

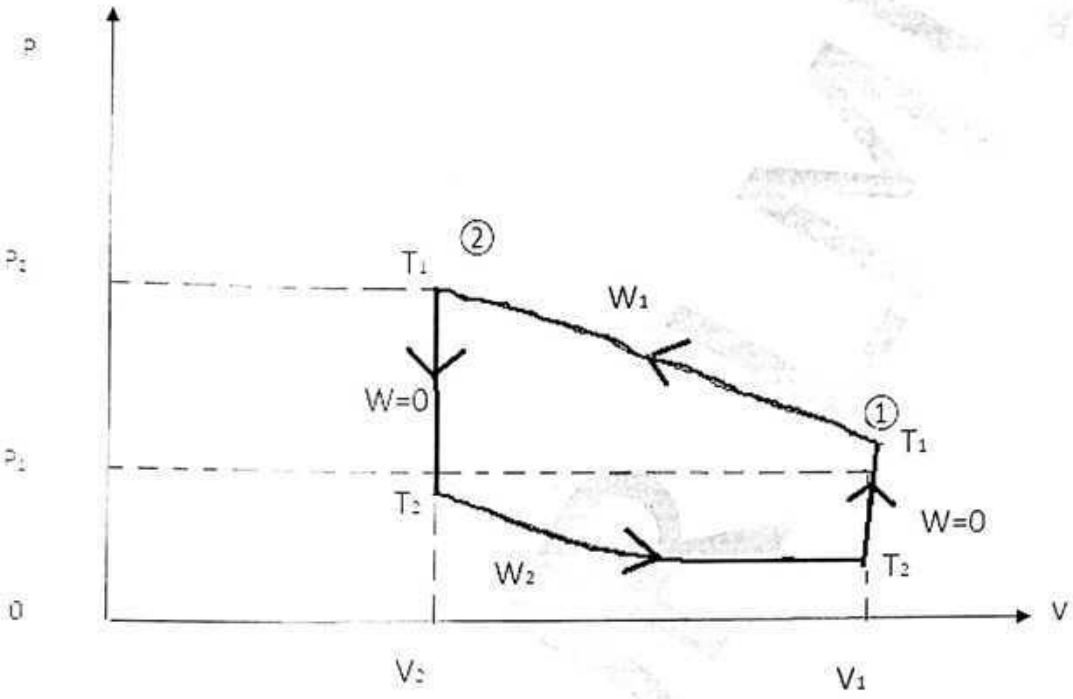
EXERCICE 1

$P(V - 1) = 0.3T$, $\frac{V_1 - 1}{V_2 - 1} = \sqrt{e}$; $\frac{T_1}{T_2} = 2$ et $W_{cycle} = 62.7J$

Scanné avec CamScanner

1) Si $M \rightarrow aigu$
Si $R \rightarrow Trigo$
Comme $W_{cycle} > 0$, alors le travail est resistant.
C'est le sens trigonométrique

2)



2) $\begin{vmatrix} T_1 = T_2 \\ V_1 \\ P_1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} T_1 = T_2 \\ V_2 \\ P_2 \end{vmatrix}$ Comme $\frac{V_1-1}{V_2-1} = \sqrt{e} > 1$ alors $V_1 > V_2$ donc $P_1 < P_2$

2) $\Rightarrow T_1 = 2T_2$

3) Les travaux $W_{1,2}$: $W_{2,1}$
$W_{1,2} = -PdV$

$(V-1) = 0.3T \Rightarrow P = \frac{0.3T}{(V-1)} \Rightarrow W_{1,2} = -\int_1^2 \frac{0.3T}{(V-1)} dV = -0.3T[\ln(V-1)]_1^2 = 0.3T_1 \ln(\sqrt{e})$

$W_{2,1} = 0.3T_2 \ln(\frac{1}{\sqrt{e}})$
$W_{cycle} = W_{1,2} + W_{2,1}$

4) $dU = SQ + SW$ à $T = cste$
$dU = 0 \Leftrightarrow SQ_{cycle} = -SW_{cycle} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Q_{cycle} = -62.7}$

EXERCICE 2

1) Lorsque l'équilibre thermique est atteint.
$T_{F_1} = T_{F_2} = T_f$

2) $SQ_1 = -\mu dT \begin{pmatrix} \mu > 0 \\ dT_1 < 0 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

$SQ_2 = -5\mu dT \begin{pmatrix} \mu > 0 \\ dT_2 > 0 \end{pmatrix}$ Or $dU = SQ + SW = 0$

$dU = SQ_1 + SQ_2$; $SW = -SQ_1 - SQ_2 < 0$; $SQ_1 + SQ_2 > 0$

$-\mu dT_1 > 5\mu dT_2 \Rightarrow dT_1 < -5dT_2 \Rightarrow \int_{T_{F_1}}^{T_{F_2}} dT_1 < \int_{T_{F_1}}^{T_{F_2}} dT_2$

$\Rightarrow T_F - T_1 < -5(T_f - T_2) \Rightarrow T_F + 5T_F < 5T_2 + T_1 \Rightarrow 6T_F < 5T_2 + T_1 \Rightarrow T_F < \frac{5}{6}T_2 + \frac{1}{6}T_1$

$2^{ième}$ *Principe*:

$\frac{SQ_1}{T_1} + \frac{SQ_2}{T_2} < 0 \Rightarrow -\frac{\mu dT_1}{T_1} - 5\frac{\mu dT_2}{T_2} < 0 \Rightarrow \frac{dT_1}{T_1} > -5\frac{dT_2}{T_2} \Rightarrow \ln\left(\frac{T_F}{T_1}\right) > -5\ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right)$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{T_F}{T_1}\right) > \ln\left(\frac{T_2}{T_f}\right)^5 \Rightarrow \frac{T_F}{T_1} > \left(\frac{T_2}{T_f}\right)^5 \Rightarrow T_f T_f^5 > T_2^5 T_1 \Rightarrow T_f^6 > T_2^5 T_1 \Rightarrow \boldsymbol{T_f > (T_2^5 T_1)^{\frac{1}{6}}}$

4)

$\boldsymbol{(T_2^5 T_1)^{\frac{1}{6}} T_f < \frac{5}{6}T_2 + \frac{1}{6}T_1}$

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

CORRECTION EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE 2019-2020

EXERCICE 1

On sait que $\partial w = -PdV$

1) Montrons que pendant une transformation réversible le travail peut

s'écrire $\partial w = A\,dP + B\,dT$

$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT$ or $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -V\chi \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP = -V\chi\, dP$

$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = V\alpha \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT = V\alpha\, dT$

$\partial w = -PdV$ or $dV = -V\chi\, dP + V\alpha\, dT \Rightarrow \partial w = VP\chi\, dP - VP\alpha\, dT$

2) Déterminons le travail

D'après la question précédente on a :

$\partial w = VP\chi\, dP - VP\alpha\, dT$

La compression est interne par conséquent : $dT = 0$

$\Rightarrow VP\alpha\, dT = 0$

$\Rightarrow \partial w = VP\chi\, dP$

$\Rightarrow w = \int_{P_2}^{P_1} V_0\, P\chi\, dP$

$\Rightarrow w = \frac{1}{2} V_0 \chi \left(P_1^2 - P_0^2\right)$

EXERCICE 2

1) Calculons h

$h = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

L'équation d'état est : $P\,(V - nb) - nRT - aP\,ln(P) = 0$

$\Rightarrow V - nb = \frac{nRT + aP\ln P}{P}$

$\Rightarrow V = \frac{nRT}{P} + a\,ln(P) + nb$

$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = nR\,\frac{P - T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_P}{P^2} + a\left(\frac{\partial [ln(P)]}{\partial T}\right)_P$

$\Rightarrow h = \frac{1}{p} nRT - \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_P}{P^2} nRT + \left(\frac{\partial [ln(P)]}{\partial T}\right)_P T$

2) Montrons que C ne dépends pas de P

On a:

$\left(\frac{\partial C}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P - \frac{h}{T}$

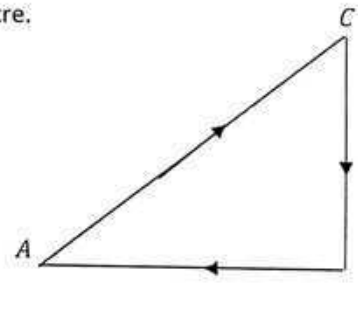
$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{P} nR - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_P \frac{nR}{P^2} + \left(\frac{\partial [\ln P]}{\partial T}\right)_P = \frac{h}{T}$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)_T = 0$; Par conséquent C ne dépend pas de P.

Etant donné que C ne dépend pas de P alors C dépend de T et de V.

EXERCICE 3

1) Le cycle doit être dans le sens horaire d'une montre.



Le moniteur fournit du travail alors que le travail du système sera négatif $w < 0$

2) Cycle moteur

a) Calculons le travail et la chaleur échangée

Le travail est l'aire délimité par le triangle ABC

$W = -\frac{AB \times BC}{2} = -\frac{V_0 \times P_0}{2}$

$$W = -\frac{V_0 P_0}{2}$$

Scanné avec CamScanner

D'après le premier principe $\Delta U = w + Q = 0$

$\Longrightarrow Q = -w \Longrightarrow Q = \frac{V_0 P_0}{2}$

3) Calculons les chaleurs échangées

Transformation BA : Isobare $(P = Cste)$
$P_A = P_B$

$w_{BA} = -P_B(V_A - V_B)$ et $Q_{BA} = n\,Cp\,dT$

$Q_{BA} = nCp(T_B - T_A)$ or $n = 1$ et $Cp = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$

$Q_{BA} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_B - T_A)$ or $PV = nRT \Longrightarrow T = \frac{PV}{nR}$

$Q_{BA} = \frac{\alpha R}{\alpha - 1}(T_B - T_A) = \frac{\alpha R}{\alpha - 1}\left(\frac{P_B V_B}{R} - \frac{P_A V_A}{R}\right)$

$Q_{BA} = \frac{\alpha P_B}{\alpha - 1}(V_B - V_A) = \frac{\gamma P_0}{\gamma - 1}(V_0)$

Transformation CB : Isochore $(V_C = V_B)$

$w_{CB} = -\int_{V_C}^{V_B} PdV = 0$ Et $Q_{CB} = n\,CvdT$

$Q_{CB} = n\,Cv(T_C - T_B)$ or $n = 1$ et $C_v = \frac{R}{\alpha - 1}$

$Q_{CB} = \frac{R}{\gamma - 1}\left(\frac{P_C V_C}{R} - \frac{P_B V_B}{R}\right)$

$Q_{CB} = \frac{V_C}{\gamma - 1}\left(\frac{P_C}{1} - P_B\right) = \frac{2\gamma P_0}{\alpha - 1}$

Transformation AC : Quelconque

$Q = Q_{BA} + Q_{CB} + Q_{AC}$

$\Longrightarrow Q_{AC} = Q - Q_{BA} - Q_{CB}$

$Q_{AC} = \frac{P_0 V_0}{2} - \frac{\gamma P_0 V_0}{\gamma - 1} - \frac{2P_0 V_0}{\gamma - 1}$

$= \frac{P_0 V_0}{2} - \frac{P_0 V_0 (2+\gamma)}{\gamma - 1}$

$Q_{AC} = P_0 V_0\left(\frac{1}{2} - \frac{2+\gamma}{\gamma - 1}\right)$

$Q_{AC} = \frac{-P_0 V_0 (\gamma + 5)}{2(\gamma - 1)}$

3) calculons le rendement de ce cycle.

Soit Q_1 la source chaude et Q_2 la source froide

On a un cycle moteur donc $Q_1 > 0$ et $Q_2 < 0$

Soit η ce rendement

On a : $\eta = \left|\frac{w}{Q_1}\right|$

$\eta = \left|\frac{w}{Q_1}\right|$

$Q_{CA} < 0$ donc $Q_{CA} = Q_2$ et $Q_1 = Q_{BA} + Q_{CB}$ car $Q_{BA} > 0$ et $Q_{CB} > 0$

$\eta = \left|\frac{w}{Q_1}\right| = \left|\frac{-(Q_1 + Q_2)}{Q_1}\right| = \left|1 + \frac{Q_1}{Q_2}\right|$

$\eta = \left|1 + \frac{Q_{CA}}{Q_{BA} + Q_{CB}}\right| = \left|1 + \frac{\frac{-P_0 V_0 (\gamma + 5)}{2(\gamma - 1)}}{\gamma - 1}\right|$

$\eta = \left|1 - \frac{\gamma + 5}{2(\gamma + 2)}\right|$

AN : $\eta = \left|1 - \frac{1{,}4 + 5}{2(1{,}4 + 2)}\right|$

$\eta = 0{,}0588$

Scanné avec CamScanner

Correction de Thermodynamique session 1

Exercice 1 2020-2021

1) Recherchons l'équation d'Etat liant V, P et T de ce liquide sous la forme $V = F(P,T)$.

Alors $\partial V = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT$

Or d'après le cours, $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ et $\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$

$dV = V\alpha dT - V\chi_T dP$

$\frac{dV}{V} = \alpha dT - \chi_T dP$

Par intégration :

$\int_{V_0}^{V} \frac{dV_1}{V_1} = \alpha \int_{T_0}^{T} dT - \chi_T \int_{P_0}^{P} dP$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = \alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0)$

2) D'après 1), $\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = \alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0)$

$\Rightarrow \ln(V) - \ln(V_0) = \alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0)$

$\Rightarrow \ln(V) = \alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0) + \ln(V_0)$

$\Rightarrow V = e^{\alpha(T-T_0)-\chi_T(P-P_0)+\ln(V_0)}$

$\Rightarrow V = e^{\alpha(T-T_0)-\chi_T(P-P_0)} \cdot e^{\ln(V_0)}$

Donc $V = V_0 e^{\alpha(T-T_0)-\chi_T(P-P_0)}$

A.N : $V = 10^{-3} \cdot e^{10^{-4}(293-293)-5.10^{-10}(1000-1)}$

3) En utilisant la question précédente à volume constant, on a :

$V = V_0 \Rightarrow e^{\alpha(T-T_0)-\chi_T(P-P_0)} = 1$

$\Rightarrow \alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0) = 0$

$\Rightarrow \alpha(T - T_0) = \chi_T(P - P_0)$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{\chi_T}(T - T_0) = (P - P_0)$

$\Rightarrow P = \frac{\alpha}{\chi_T}(T - T_0) + P_0$

Exercice 2

1) On a : $\delta Q = C_P dT + ldV = C_P dT + hdP = \lambda dP + \mu dV$

Posons $T = F(P,V)$

$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV + \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP$

donc $\begin{cases} \delta Q = C_v dT + ldV = C_v\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV + C_v\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP + ldV \ (1) \\ \delta Q = C_p\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV + C_p\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP + hdP \quad (2) \\ \delta Q = \lambda dP + \mu dV \ (3) \end{cases}$

Par identification, en utilisant (1) et (3), on a : $\lambda dP = C_v\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = C_v\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V}$

Scanné avec CamScanner

par identification, en utilisant ② *et* ③, on a :

$$\mu dV = C_P \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = C_P \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P}$$

2) a. La relation de Mayer est :

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1} \; ; \; C_P = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}$$

L'équation d'état pour ce gaz (parfait) est : $PV = nRT$ avec $n = 1$ car $(1\ mole)$

$$PV = RT \Rightarrow T = \frac{PV}{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = \frac{P}{R} \text{ et } \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \frac{V}{R}$$

D'après 1) $\lambda = C_v \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$

$$\Rightarrow \lambda = C_v \frac{V}{R}$$

$$\lambda = C_v \frac{V}{R} = \frac{R}{\gamma - 1} \times \frac{V}{R} = \frac{V}{\gamma - 1}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{V}{\gamma - 1}}$$

De même,

$$\Rightarrow \mu = C_P \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \times \frac{P}{R} = \frac{\gamma P}{\gamma - 1}$$

$$\boxed{\mu = \frac{\gamma P}{\gamma - 1}}$$

b. D'après le cours, $U = nC_v(T - T_0)$ dans ce cas, $n = 1$, $U = C_v(T - T_0)$ avec T_0 la température initiale.

$\frac{dU}{dT} = C_v$ or $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$(formule de Mayer)

$\frac{dU}{dT} = C_v = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{R}{(aT + b) - 1}$ car $\gamma = aT + b$

$$\frac{dU}{dT} = \frac{R}{(aT + b) - 1}$$

$$dU = \frac{R}{(aT + b) - 1} dT$$

Par intégration, on a :

$$U = \int \frac{R}{(aT + b) - 1} dT = \frac{1}{a} \int \frac{aR}{(aT + b) - 1} dT$$

$$U = U(T) = \frac{R}{a} \int \frac{a}{(aT + b) - 1} dT$$

$$U(T) = \frac{R}{a} \ln(aT + b - 1) + cste$$

On pose $cste = U_0$

$$\boxed{U(T) = \frac{R}{a} \ln(aT + b - 1) + U_0}$$

Scanné avec CamScanner

c. La transformation étant isentropique, $\delta Q = 0$, ce qui donne ici

$$C_v dT = -ldV = -PdV = -RT\frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow C_v dT = -RT\frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{C_v}{R}\frac{dT}{T} = -\frac{R}{(\gamma-1)R}\frac{dT}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{1}{(\gamma-1)}\frac{dT}{T} = -\frac{1}{(aT+b-1)}\frac{dT}{T}$$

En posant $z = \frac{1}{T}$,on a :

$$dz = -\frac{dT}{T^2}$$

$$dz = -\frac{dT}{T^2} \Rightarrow -Tdz = \frac{dT}{T}$$

$\Rightarrow -\frac{dz}{z} = \frac{dT}{T}$ Ainsi

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{a\left(\frac{1}{z}\right)+b-1} \times \left(-\frac{dz}{z}\right)$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dz}{a+z(b-1)}$$

En intégrant, on a : $lnV = \int \frac{dz}{a+z(b-1)}$

$$lnV = \frac{1}{b-1}\ln\big(a+z(b-1)\big) + cste$$

$$\Rightarrow lnV - \frac{1}{b-1}\ln\big(a+z(b-1)\big) = cste$$

$$\Rightarrow lnV - \ln\big(a+z(b-1)\big)^{\frac{1}{b-1}} = cste$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{V}{\big(a+z(b-1)\big)^{\frac{1}{b-1}}}\right) = cste$$

$$\Rightarrow \frac{V}{\big(a+z(b-1)\big)^{\frac{1}{b-1}}} = e^{cste} = cste$$

$$\Rightarrow \frac{V^{b-1}}{\left[\big(a+z(b-1)\big)^{\frac{1}{b-1}}\right]^{b-1}} = cste$$

$$\Rightarrow \frac{V^{b-1}}{a+\frac{1}{T}(b-1)} = cste$$

$$\Rightarrow \frac{V^{b-1}}{\frac{aT+b-1}{T}} = cste$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{TV^{b-1}}{aT+b-1} = cste}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 3

1) Il s'agit d'une machine thermique ditherme irréversible, car les deux transformations BC et CD au cours desquelles le gaz est en contact soit avec l'une, soit avec l'autre des deux sources de chaleur sont isochores et ne sont pas isothermes. La machine est motrice car dans le plan (P, V), le cycle est parcouru en sens inverse du sens trigonométrique.

2)

- $AB : \Delta_{AB}U = 0$ (Transformation isotherme)

$-Q_{AB} = W_{AB} = \int_{V_1}^{V_2} -PdV = \int_{V_1}^{V_2} -RT_1 \frac{dV}{V}$

$Q_{AB} = W_{AB} = RT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) > 0$

$\Rightarrow Q_{AB} < 0$

- $W_{BC} = 0$ (Transformation isochore)

Donc $Q_{BC} = \Delta_{BC}U = \int_{T_1}^{T_2} C_v dT$

$Q_{BC} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{R}{\gamma - 1} dT = \int_{T_1}^{T_2} \frac{R}{aT + b - 1} dT$

$Q_{BC} = \frac{R}{a} \ln\left(\frac{aT_2 + b - 1}{aT_1 + b - 1}\right) > 0 \ (T_2 > T_1)$

- $\Delta_{CD}U = 0, W_{CD} = -Q_{CD} = -\int_{V_2}^{V_1} RT_2 \frac{dV}{V}$

$W_{CD} = -Q_{CD} = -RT_2 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) < 0$

- $W_{DA} = 0$, donc $Q_{DA} = \Delta_{DA}U = -\frac{R}{a} \ln\left(\frac{aT_2+b-1}{aT_1+b-1}\right) < 0$

$Q_F = Q_{AB} + Q_{DA}$ et $Q_C = Q_{BC} + Q_{CD}$

Q_F reçoit donc $Q_F < 0$ et $Q_C > 0$.

D'après le cours, $\eta = -\frac{W}{Q_C} = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) X$.

Avec $X = \frac{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) + \frac{R}{a} \ln\left(\frac{aT_2+b-1}{aT_1+b-1}\right)}$

Scanné avec CamScanner

Examen de Thermodynamique (Licence 2-MI, Deuxième session)

Exercice 1

2020-2021

Exercice 2

1. En se rappelant de la partie du cours de Topologie qui cherche le minimum d'une fonction, on dérive :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = V_0[2a(T-T_0)+b(P-P_0)] = 0$$

est la solution de cette équation.

$V_0[2a(T_m-T_0)+b(P-P_0)] = 0$

$\Leftrightarrow T_m = T_0 - \frac{b}{2a}(P-P_0)$ qui est bien un minimum car $\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right)_P = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_P = 2aV_0 > 0$

$P = P_0$, on a : $T_m = T_0 = 277K$.

2. Calcul du coefficient thermoélastique α et χ.

$= \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

$= -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_P$

$\begin{cases} \alpha = \frac{2a(T-T_0)+b(P-P_0)}{1+a(T-T_0)^2-(k-bT)(P-P_0)} \\ \chi = \frac{k-bT}{1+a(T-T_0)^2-(k-bT)(P-P_0)} \end{cases}$

$P = 1bar = P_0$

$= \frac{2a(T-T_0)}{1+a(T-T_0)^2}$

$= \frac{k-bT}{1+a(T-T_0)^2}$

A.N

$9,9.10^{-5}K^{-1}$

$1,96.10^{-10}P_a^{-1}$

3. On prend désormais pour l'eau au voisinage de $277K$ et $1bar$ un modèle incompressible et indilatable.

a. D'après l'énoncé, α et χ sont très faibles (voir nuls)

$= 0$

$= 0$ $\Rightarrow k \approx bT$ et $T \approx T_0 \Rightarrow V = V_0 = cste$

Scanné avec CamScanner

b. $\Delta U = n \times c \times \Delta T$ or $n = \frac{m}{M_{H_2O}}$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{m}{M_{H_2O}} \times c \times \Delta T = \frac{m}{2M_H + M_O} \times c \times \Delta T$$

$$\text{A.N} : \Delta U = \frac{1}{2\times1+16} \times 4{,}18 \times (283 - 273) = 2{,}322J$$

$$\Delta U = 2{,}322J$$

Exercice 3

1.

- $k = 0$ donne $P = cte$:Transformation isobare ;
- $k = 1$ donne $PV = nRT = cte \Rightarrow T = cte$:car le système est fermé : Transformation isotherme ;
- $k = +\infty$ donne $V = cte$ (car $PV = cte$ serait une hypothèse fausse) : $Transformation\ isoch$

2. Par définition, on a tout au long de la transformation $PV^k = P_0V_0^k$ donc $P = P_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^k$.

Comme la transformation est quasi-statique, l'équilibre mécanique est atteint tout au long de la transformation et on a : $P = P_{ext}$.

Le travail entre les états $A\ (P_0, V_0, T_0)$ et $B\ (P_1, V_1, T_1)$ en fonction des pressions et des volumes est :

$$W = -\int_A^B -PdV = -\int_A^B P_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^k dV = -P_0V_0^k\int_{V_0}^{V_1}\frac{dV}{V^k}$$

$$W = -P_0V_0^k\left(\frac{V_1^{1-k} - V_0^{1-k}}{1-k}\right)$$

$$W = P_0V_0^k\left(\frac{V_1^{1-k} - V_0^{1-k}}{k-1}\right)$$

3. Le travail entre A et B en fonction des températures uniquement. En utilisant la propriété polytropique ($P_0V_0^k = P_1V_1^k$) puis celle des gaz parfaits, on obtient :
$$W = \frac{1}{k-1}(P_1V_1 - P_0V_0) = \frac{nR}{k-1}(T_1 - T_0)$$

4. D'après le premier principe appliqué au gaz parfait, $\Delta U = W + Q$
Comme le système est un gaz parfait,
$\Delta U = C_V\Delta T = C_V(T_1 - T_0)$
Ainsi $W + Q = C_V(T_1 - T_0) \Rightarrow Q = C_V(T_1 - T_0) - W$
$$\Rightarrow Q = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0) - \frac{nR}{k-1}(T_1 - T_0)$$
$$\Rightarrow Q = nR\left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{k-1}\right)(T_1 - T_0)$$

5.

- Pour $k = 0$, on a identifié une transformation isobare (voir question 1, le cas $k = 0$). On a dans ce cas (en utilisant le résultat de la question 4) :
$$Q = nR\left(\frac{1}{\gamma-1} - 1\right)(T_1 - T_0) = \frac{\gamma nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0) = C_p\Delta T.$$
- Pour $k = +\infty, Q = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0) = C_V(T_1 - T_0)$. Il s'agit donc d'une transformation isochore.
- Pour $k = \gamma, Q = nR\left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{\gamma-1}\right)(T_1 - T_0) = 0$: la transformation est adiabatique.

Scanné avec CamScanner

Corrections

SESSION 1 2021-2022

Exercice 1 : **(5 points)**

- *Différentielle de l'énergie interne dU en fonction de T et V. d'où:*

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

- *Expression de dS*
- $\delta Q = dU - \delta W$
- $\delta W = -PdV$, d'où

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + PdV$$

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]$$

- Le gaz parfait a n moles, alors $P = \frac{nRT}{V}$. On a donc:

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{nRT}{V}\right] dV$$

- L'entropie est donc:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{nR}{V}\right] dV$$

- *On déduisons et concluons*
- dS Étant une différentielle totale exacte, alors:

$$\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\right] = \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{nR}{V}\right]$$

- U Étant des variables indépendantes, alors:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} - \frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$$

- On a:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$$

- Par intégration de l'égalité trouvée, on obtient que:

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0 \quad \Longrightarrow \quad U = U(T)$$

- U donc indépendante du volume V. Elle ne dépend que de la température T pour un gaz parfait (première loi de Joule).

Exercice 2 : **(7 points)**

- *Transformation isotherme*
- La transformation étant isotherme, on a:

$$PV = RT_0 = cte \Longrightarrow P = \frac{RT_0}{V} \quad et \quad P_1V_1 = P_0V_0$$

- $T = cte \Longrightarrow dT = 0$ alors:

$$\delta Q = \frac{3R}{2}dT + PdV = \frac{5R}{2}dT - VdP \quad \Longrightarrow \quad \delta Q = PdV$$

- Par intégration, on obtient:

$$Q = \int_{V_0}^{V_1} PdV$$

Scanné avec CamScanner

Or $P = \frac{RT_0}{V}$, d'où

$$Q = RT_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = RT_0 ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$$

Or, on sait d'après l'énoncé que $Q = \frac{3RT_0}{2}$ d'où:

$$Q = RT_0 ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = \frac{3RT_0}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{V_1 = V_0 e^{\frac{3}{2}}}$$

- Sachant que $P_1V_1 = P_0V_0$, on obtient:

$$P_1 = P_0\frac{V_0}{V_1} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{P_1 = P_0 e^{-\frac{3}{2}}}$$

2. Transformation isochore

- La transformation étant isochore, on a:

$$\frac{P}{T} = \frac{R}{V_0} = cte \implies P = \frac{RT}{V_0} \quad et \quad \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_0}{T_0}$$

$V = cte \implies dV = 0$ alors:

$$\delta Q = \frac{3R}{2}dT + PdV = \frac{5R}{2}dT - VdP \qquad \Longrightarrow \qquad \delta Q = \frac{3R}{2}dT$$

Par intégration, on obtient:

$$Q = \frac{3R}{2}\int_{T_0}^{T_1} dT \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \frac{3R}{2}(T_1 - T_0) = \frac{3RT_0}{2}\left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right)$$

Or, on sait d'après l'énoncé que $Q = \frac{3RT_0}{2}$ d'où:

$$Q = \frac{3RT_0}{2}\left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right) = \frac{3RT_0}{2} \implies \frac{T_1}{T_0} - 1 = 1 \implies \boldsymbol{T_1 = 2T_0}$$

- Sachant que $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_0}{T_0}$, on obtient:

$$P_1 = P_0\frac{T_1}{T_0} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{P_1 = 2P_0}$$

3. Transformation isobare

- La transformation étant isobare, on a:

$$\frac{V}{T} = \frac{R}{P_0} = cte \implies V = \frac{RT}{P_0} \quad et \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_0}{T_0}$$

$P = cte \implies dP = 0$ alors:

$$\delta Q = \frac{5R}{2}dT - VdP \qquad \Longrightarrow \qquad \delta Q = \frac{5R}{2}dT$$

Par intégration, on obtient:

$$Q = \frac{5R}{2}\int_{T_0}^{T_1} dT \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \frac{5R}{2}(T_1 - T_0) = \frac{5RT_0}{2}\left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right)$$

Or, on sait d'après l'énoncé que $Q = \frac{3RT_0}{2}$ d'où:

$$Q = \frac{5RT_0}{2}\left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right) = \frac{3RT_0}{2} \implies \frac{T_1}{T_0} - 1 = \frac{3}{5} \implies \boldsymbol{T_1 = \frac{8}{5}T_0}$$

- Sachant que $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_0}{T_0}$, on obtient:

$$V_1 = V_0\frac{T_1}{T_0} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{V_1 = \frac{8}{5}V_0}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 3 : (8 points)

Machine N°1 (Figure 1):

1. *Calcul des chaleurs Q_{CD}, et Q_{DA} et Q_{AC} en fonction de Q_{CD}.*

Pour Q_{CD} avec $T = T_1 = cte$

On sait que

$$\frac{\delta Q}{T} \quad \Longrightarrow \quad \delta Q = T dS$$

La valeur est l'aire du rectangle sous le segment DC et limitée par l'axe des entropies. On a donc:

$$T_1(S_1 - S_2)$$

Or $S_2 \quad \Longrightarrow \quad \Delta S_{CD} = \Delta S_{21} = S_1 - S_2 < 0$, d'où

$$-T_1(S_1 - S_2) = T_1 \Delta S_{21} < 0$$

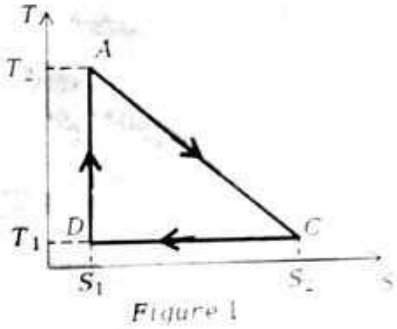


Figure 1

Pour Q_{DA} avec $S = S_1 = cte$

$$Q_{DA} = 0$$

car $S = cte \quad \Longrightarrow \quad \Delta S = 0$

Pour Q_{AC}

On sait que

$$\frac{\delta Q}{T} \quad \Longrightarrow \quad \delta Q = T dS$$

La valeur est l'aire du trapèze sous le segment AC et limitée par l'axe des entropies. On a donc:

$$\frac{(T_1 + T_2)(S_2 - S_1)}{2}$$

Or $S_2 \quad \Longrightarrow \quad \Delta S_{AC} = S_2 - S_1 > 0$

$$S_2 - S_1 = -(S_1 - S_2) = -\Delta S_{CD} = -\Delta S_{21} = -\frac{Q_{CD}}{T_1}$$

On a:

$$-\frac{(T_1 + T_2)}{2T_1} Q_{CD} > 0$$

2. *Travail W_1 du cycle.*

D'après le premier principe, on a:

$$Q_{AC} + Q_{CD} + Q_{DA} = 0 \quad \Longrightarrow \quad W_1 = -Q_{CD} - Q_{AC} \text{ car } Q_{DA} = 0$$

Donc:

$$-Q_{CD} + \frac{T_1 + T_2}{2T_1} Q_{CD} \quad \Longrightarrow \quad W_1 = \frac{T_2 - T_1}{2T_1} Q_{CD}$$

3. *En déduisons le rendement η_1 de la machine $N°1$.*

Puisque $Q_{AC} > 0$, alors la source chaude est sur le segment AC. D'où

$$\frac{W_1}{Q_{AC}} = \frac{T_2 - T_1}{2T_1} Q_{CD} \times \frac{2T_1}{(T_1 + T_2) Q_{CD}} \quad \Longrightarrow \quad \eta_1 = \frac{T_2 - T_1}{T_1 + T_2}$$

Machine N°2 (Figure 2):

1. *Calcul des chaleurs Q_{AB}, et Q_{BC} et Q_{CA} en fonction de Q_{AB}.*

Pour Q_{AB} avec $T = T_2 = cte$

On sait que

$$\frac{\delta Q}{T} \quad \Longrightarrow \quad \delta Q = T dS$$

La valeur est l'aire du rectangle sous le segment AB et limitée par l'axe des entropies. On a donc:

$$T_2(S_2 - S_1)$$

Or $S_2 \quad \Longrightarrow \quad \Delta S_{AB} = \Delta S_{12} = S_2 - S_1 > 0$, d'où

$$T_2(S_2 - S_1) = T_2 \Delta S_{12} > 0$$

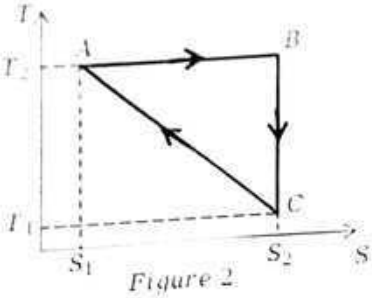


Figure 2

Scanné avec CamScanner

Car $S_2 = cte \implies \Delta S_{BC} = 0$

- Pour Q_{CA}

On sait que

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \implies \delta Q = TdS$$

La chaleur est l'aire du trapèze sous le segment CA et limitée par l'axe des entropies. On a donc:

$$Q_{AC} = \frac{(T_1 + T_2)(S_1 - S_2)}{2}$$

Or $S_1 < S_2 \implies \Delta S_{CA} = S_1 - S_2 < 0$

$$\Delta S_{CA} = S_1 - S_2 = -(S_2 - S_1) = -\Delta S_{12} = -\frac{Q_{AB}}{T_2}$$

D'où, on a:

$$\boldsymbol{Q_{CA} = -\frac{(T_1 + T_2)}{2T_2} Q_{AB} < 0}$$

2. Calculer le travail W_2 du cycle.

D'après le premier principe, on a:

$W_2 + Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 0 \implies W_1 = -Q_{AB} - Q_{CA}$ car $Q_{BC} = 0$

On a donc:

$$W_1 = -Q_{AB} + \frac{T_1 + T_2}{2T_2} Q_{AB} \implies \boldsymbol{W_1 = -\frac{T_2 - T_1}{2T_1} Q_{AB}}$$

3. En déduisons le rendement η_2 de la machine $N°2$.

Puisque $Q_{AB} > 0$, alors la source chaude est sur le segment AB. D'où

$$\eta_2 = -\frac{W_2}{Q_{AB}} = \frac{T_2 - T_1}{2T_2} Q_{AB} \times \frac{1}{Q_{AB}} \implies \boldsymbol{\eta_2 = \frac{T_2 - T_1}{2T_2}}$$

C. Comparaison des rendements des deux cycles:

On sait que:

$\eta_1 < \eta_2 \implies \eta_1 + \eta_2 < \eta_2 + \eta_2 \implies \eta_1 + \eta_2 < 2\eta_2$

On a donc:

$$\frac{1}{T_1 + T_2} > \frac{1}{2T_2} \implies \frac{T_2 - T_1}{T_1 + T_2} > \frac{T_2 - T_1}{2T_2} \implies \boldsymbol{\eta_1 > \eta_2}$$

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE THERMODYNAMIQUE DEUXIEME SESSION 2021-2022

EXERCICE1 (questions de cours)

A-2) B-4) C-1) et 2) D-2) E-3)

EXERCICE2

$\alpha = \frac{R}{PV}$; $\chi = \frac{1}{P} + \frac{a}{V}$ *avec a constant*

1)- Expression de dV en fonction de dT et dP. On sait que :

$V = f(T,P) \Rightarrow dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP$

2)- En utilisant les expressions de α *et* χ montrons que l'équation d'équation d'état de ce fluide est solution de l'équation différentielle.

$P\frac{dk(P)}{dP} + V - \frac{RT}{P} + aP = 0$ *avec* $k = f(p)$; on a :

$\alpha = \frac{R}{PV} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{R}{P} = 0$ *car* $V = f(P)$ $\quad (i)$

$\chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{P} + \frac{a}{V} \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{V}{P} - a$; l'équation devient :

$P\left(-\frac{V}{P} - a\right) + V - \frac{RT}{P} + aP = -V - aP + V - \frac{RT}{P} + aP = -\frac{RT}{P} = 0$

$d'après (i)$ *avec* $k(P) = V(P)$.

3)- Montrons que l'équation d'état est : $P\left(V + \frac{aP}{2}\right) = RT$

D'après NB, la solution de l'équation différentielle est : $k(P) = -\frac{aP}{2} + \frac{c}{P}$ lorsque *P* tend vers 0, le fluide se comporte comme un gaz parfait d'où $c = 0$, on a donc : $k(P) = -\frac{aP}{2}$ l'équation devient :

$-\frac{aP}{2} + V - \frac{RT}{P} + aP = 0 \Rightarrow \frac{aP}{2} + V = \frac{RT}{P} \Rightarrow \frac{aP^2}{2} + VP = RT \Rightarrow P\left(V + \frac{aP}{2}\right) = RT$

EXERCICE3

1)- ETAT B Calcul du travail :

$On\ a: dW = -PdV \Rightarrow W = -P_0\int_{V_0}^{V_1} dV = P_0(V_0 - V_1)\ car\ la\ pression\ est\ constante$

$W = 100000 * (2-3)10^{-3} = -100J$

Calcul de la chaleur :

$Q = C_P \int dT$ *à pression constante* . D'après la loi des gaz parfaits on a :

$PV = nRT \Rightarrow T = \frac{PV}{nR} \Rightarrow dT = \frac{P}{nR}dV\ car\ P = cte;\ Q = C_P\int_{V_0}^{V_1}\frac{P}{nR}dV = \frac{C_P P}{nR}(V_1 - V_0)$

$or\ C_P = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}\ d'où\ Q = \frac{\gamma}{\gamma - 1}P(V_1 - V_0);\ Q = \frac{1.4}{1.4-1} * 100000 * (3-2)10^{-3} = 350J$

Scanné avec CamScanner

Année Universitaire
2018/201

Université Félix H. Boigny
UFR Maths Info, filière classique
UE: Probabilités-Statistique, L2

Examen de Probabilité: Durée: 1h20

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction.

Exercice 1 Soit n un entier naturel non-nul et soit a un réel. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{an}{\pi(1+n^2x^2)}.$$

(1) Déterminer a pour que f_n soit une densité de variable aléatoire.

(2) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que chaque X_n admet pour densité f_n

(a) Étudier l'existence de moments d'ordre 1 pour X_n

(b) Montrer que la la suite (X_n) converge en loi vers la variable nulle.

(c) Étudier la convergence en probabilité de la suite (X_n) vers la variable nulle.

Exercice 2

En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires: Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés. Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés

(1) Quel est le taux global de personnes soulagées?

(2) Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé

NOTA BENE: On posera clairement les événements et les formules de calcul de leur probabilité

Exercice 3 Le couple de variables aléatoires (X,Y) prend ses valeurs dans le domaine suivant

$$D = \{(x,y),\ x>0,\ y>0,\ x+y<1\}$$

avec la densité de probabilité f définie par $f(x,y) = K(x+y)$.

(1) Déterminer la constante K.

(2) Déterminer les lois marginales de X et YX.

(3) les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

(4) On pose $U = X+Y$ et $V = X-Y$.

(a) Déterminer la fonction de densité de (U,V)

(b) En déduire la fonction de densité de U.

(c) Calculer $\mathbb{E}(V|U)$.

Scanné avec CamScanner

Université Félix H. Boigny, Cocody
UFR Maths Info
[redacted]

Année Universitaire 2018/2019

Probabilité 2

Examen ratrappage de Probabilité: Durée: 1h20

NB la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction. Les documents sont formellement interdits

Exercice 1

(1) Rappeler la définition d'une probabilité

(2) Soit $\{A, B, C\}$ une système complet d'évènements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Que signifie $\{A, B, C\}$ une système complet d'évènements

(b) Soit E un évènement tel que E est un évènement non impossible.

(i) Que signifie E est un évènement non impossible.

(ii) Ecrire la formule des probabilités totales associée à E dans le système complet $\{A, B, C\}$. En déduire la formule de Bayes reliant E et B.

(3) Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$.

(a) Donner les conditions pour que la probabilité sur Ω noté $\mathbb{P}_0$ soit la probabilité uniforme.

(b) Soit A un évènement issue de cette expérience. Donner l'expression de $\mathbb{P}_0(A)$.

Exercice 2

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches. On tire 5 boules au hasard et on note le nombre de boules rouges parmi les 5 tirées.

(1) On suppose que le tirage se fait simultanément et sans remise.

(a) Déterminer la loi de X

(b) Calculer son moment centré d'ordre 2.

(2) On suppose que le tirage se successivement fait avec replacement.

(a) Déterminer la loi de X

(b) Calculer le moment d'ordre 1 de X

Exercice 3

Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ une suite de variable aléatoire iid à une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

(1) Déterminer par recurrence que S_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$.

(2) Déterminer $\mathbb{P}(S_n \leq n)$.

(3) En appliquant le théorème central limite à S_n, démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \right) = \frac{1}{2}.$$

Scanné avec CamScanner

Université Felix H. Boigny
UFR Maths Info, Filière classique
UE: Probabilites-Statistique, L2
ECUE: Probabilites

Année Univers
2019

Examen final: Durée: 2h

NB: la clarte de la redaction sera prise en compte dans la correction.

Exercice 1

On dit qu'une variable aléatoire Y suit une loi de Gumbel si elle admet pour densité

$$f(x) = e^{-x-e^{-x}}\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x).$$

(1) Montrer qu'il existe une fonction u telle que $f(x) = u'(x)e^{-e^{-x}}$.

(2) En déduire que la fonction f est réellement une fonction de densité.

(3) Montrer que la fonction de repartition de Y est

$$F_Y(x) = e^{-e^{-x}}.$$

(4) Soit (U_i) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On note

$$M_n = \max(U_1, \cdots, U_n) \text{ et } X_n = M_n - \ln(n)$$

(a) Déterminer la fonction de densité de la loi exponentielle de paramètre 1

(b) Montrer que la fonction de ~~densité~~ répartition des U_i est

$$F_i(x) = (1 - e^{-x})\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

(c) En déduire G_n, la fonction de repartition de M_n

(d) On note H_n, la fonction de repartition de X_n

(i) Montrer que $H_n(x) = G_n(x - \ln(n))$.

(ii) Déterminer H_n

(e) Montrer que X_n converge en loi vers Y.

Exercice 2

Dans une entreprise deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier 1 fabrique en une journée trois fois plus de pièces que l'atelier 2. Le pourcentage de pièces défectueuses est 3% pour l'atelier 1 et 4% pour l'atelier 2. On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée.

(1) Déterminer la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1

(2) Déterminer la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 et est défectueuse.

Scanné avec CamScanner

3) Déterminer la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 sachant qu'elle est défectueuse.

Exercice 3

Un étudiant s'ennuie durant son cours de probabilités et passe son temps à regarder par la fenêtre les feuilles tomber d'un arbre. On admet que le nombre de feuilles tombées à la fin du cours est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Cela signifie que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

1) (a) Expliquer pourquoi les hypothèses de l'énoncé permettent de dire que pour tout $\lambda > 0$,

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

(b) Déterminer l'espérance et la variance de X.

2) A chaque fois qu'une feuille tombe par terre, l'étudiant lance une pièce qui donne pile avec une probabilité p et face avec probabilité $q = 1 - p$, $p \in]0, 1[$. On note F et P le nombre de faces et de piles obtenus respectivement.

(a) Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, expliquer de manière simple pourquoi la loi de F sachant $X = k$, est une loi binomiale dont on précisera les paramètres. En déduire l'expression de $\mathbb{P}(F = a|X = k)$.

(b) Pour $(k, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, calculer la quantité $\mathbb{P}(X = k, F = a)$.

(c) En déduire la loi de F, ainsi que son espérance.

(d) Donner, sans calculs, la loi de P.

3) Montrer que P et F sont indépendantes.

4) Calculer $\mathbb{E}[PF]$ et $Var[P + F]$.

Scanné avec CamScanner

Université Félix H.Boigny
UFR Maths Info, Filière
UE:Probabilité-Statistique, L2
ECUE: Probabilité

Année Universitaire
2020/2021

EXAMEN FINAL: Durée: 1h30

Exercice 1 (Question de cours) (7 points)

(1) Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire ε. Soit $\mathcal{F}$ une famille de sous ensemble de Ω

(a) Comment appelle t-on le couple $(\Omega, \mathcal{F})$?

(b) Donner la définition d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω.

(c) Comment appelle t-on le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

(d) Donner la définition d'une expérience équiprobable.

(e) On suppose que Ω est fini et ε est équiprobable. Donner l'expression dans ce cas de $\mathcal{P}(A)$ pour tout événement A. comment l'appelle cette probabilité.

(2) Soit X une variable aléatoire discrète à valeur dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tel que

$$\forall\, k \in E,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{k}$$

(a) Déterminer a. En déduire la loi de X, son espérance et sa variance.

(b) Déterminer la fonction de répartition X.

(3) Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire réelle à densité f d'ensemble de définition $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : 0 \leq x \leq y\}$

Scanné avec CamScanner

(a) Déterminer les lois de X et de Y. Comment les appelle t-on ?

(b) Donner la relation entre la loi conjointe et les loi marginales pour que X et Y soient deux variables indépendantes.

(c) Donner la procédure et l'expression de l'espérance du couple (X, Y).

Exercice 2 (6 points)

Une souris cherche un fromage. On suppose que le fromage se trouve dans une chambre d'une maison de 4 chambres.

(1) Donner la loi de probabilité du nombre Y de visites nécessaires dans les nombres pour découvrir le fromage s'il entre une seule fois dans une chambre. Calculer le moment d'ordre 1 de Y. Comment l'appelle t-on ?

(2) On suppose que la souris n'a pas de mémoire: il peut rentrer plusieur fois dans la même chambre. Trouver dans ce cas la loi de Y, son moment centré d'ordre 2. Comment l'appelle t-on ?

Exercice 3 (7 points)

Pour tout $n \geq 1$, on considère $(X_i)_{1 \leq n \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(1) Montrer par recurrence que S_n suit une loi de Poisson de n.

(2) Déterminer $\mathbb{P}(S_n \leq n)$.

(3) En utilisant le théorème central limit, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(e^{-n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{k!} \right) = \frac{1}{2}$$

Scanné avec CamScanner

Université Félix H. Boigny
UFR Maths Info, Filière classique: L2
UE: Probabilité

Année Universitaire
2021/2022

SESSION 1

Examen final, Durée: 1h30

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction. Au besoin on prendra $2,57 \approx \phi^{-1}(0,995)$, avec ϕ la fonction de repartition de la loi normale centré réduite.

Exercice 1

Soit $X_1, X_2, \cdots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi $\mathcal{B}(p)$ où $p \in [0,1]$.

(1) On suppose $p > 0$. On définit $N = \inf\{n \geq 1 | X_n = 1\}$ i.e N est le premier instant où la suite $(X_i)_{i\geq 1}$ prend la valeur 1.
   (a) Montrer que $\{N = +\infty\} = \bigcap_{n\geq 1} \{X_n = 0\}$.
   (b) En déduire $\mathbb{P}(N = +\infty)$.
   (c) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\{N = k\} = (X_1 = 0, X_2 = 0, \cdots, X_{k-1} = 0, X_k = 1)$
   (d) En déduire que N suit une loi usuelle dont on donnera le nom et le paramètre.
   (e) Donner l'espérance et la variance de N.

(2) Soit $n \geq 1$. On définit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$
   (a) Déterminer (sans preuve) la loi de S_n
   (b) Calculer l'espérance et la variance de S_n

Exercice 2

Théo fait du tir à l'arc sur une cible D, circulaire de rayon 1. On suppose que Théo est suffisamment maladroit pour que le point d'impact M de coordonnées (X, Y) soit uniformément distribué sur la cible i.e la loi conjointe de (X, Y) est définie par

$$f(x, y = \alpha 1_D(x, y),$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(1) Montrer que α est égale à $\frac{1}{\pi}$
(2) Déterminer les loi marginales de X et Y
(3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 3

Lors de la construction d'un collège accueillant 500 élèves, il est prévu la construction d'une cantine comprenant deux salles, chacune disposant de N places. On fait l'hypothèse que chaque élève qui mange choisit au hasard et de façon équiprobable l'une des deux salles, indépendamment les uns des autres.

Notre objectif est de déterminer la valeur de N à prévoir pour que la probabilité que chaque élève trouve une place dans la salle qu'il a choisie soit supérieure à 0,99.

Scanné avec CamScanner

Pour cela, on note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'élèves choisissant la première salle.

(1) Déterminer le nombre d'élèves ayant choisi la deuxième salle.

(2) En déduire la relation entre N et X pour que chaque élève ait la place quelque soit la salle choisie.

(3) Déterminer la loi de X.

(4) On pose $Y = \dfrac{X - 250}{\sqrt{125}}$.

(a) En utilisant le théorème de Moivre-Laplace, montrer qu'on peut approcher la loi de Y par la loi normale centré réduite.

(b) En déduire la valeur minimal de N.

Scanné avec CamScanner

Université Félix H. Boigny
UFR Maths Info, Filière classique: L2
UE: Probabilité

Année Universitaire
2021/2022

Examen de rattrapage, Durée: 1h30

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction.

Exercice 1

Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30% la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5 ans; parmi ces dernières, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75%; cette probabilité est de 40% pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

(1) Quelle est la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage?
(2) Quelle est la probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant?
(3) Soit X la variable aléatoire "nombre de machines qui tombent en panne au bout de 5 ans parmi 10 machines choisies au hasard". Quelle est la loi de probabilité de X, (on donnera le type de loi et les formules de calcul), son espérance, sa variance et son écart-type?
(4) Calculer $\mathbb{P}(X = 5)$.

Exercice 2

La densité de probabilité de la variable aléatoire Y est définie par :

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \lambda e^{-x} & \text{si} \quad x \geq \theta, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où θ est un paramètre réel strictement positif.

(1) Déterminer le paramètre λ en fonction de θ pour que f soit bien une densité.
(2) Calculer l'espérance et la variance de Y.
(3) Déterminer la fonction de répartition F de Y.
(4) On pose $Z = \ln(Y)$. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.

Exercice 3

Soit $(X_1, \cdot, \cdot\cdot, X_n)$ n variables aléatoires indépendantes ($n \geq 2$) qui suivent la loi uniforme sur $[a,b]$, $a < b$. On pose

$$Z_n = \max(X_1, \cdot, \cdot\cdot, X_n).$$

(1) Déterminer la fonction de repartition de Z_n
(2) En déduire sa fonction de densité puis son espérance.

(3) Calculer $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Z_n)$.

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE L'EXAMEN DE PROBABILITE SESSION 1 2018-2019

Exercice 1 :

$$f_n(x) = \frac{an}{\pi(1+n^2x^2)}$$

f_n est une fonction continue et positive.

$A = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{(1+n^2x^2)}dx$

$$A = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n \times \frac{1}{n}}{(1+X^2)}dX = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+X^2)}dX = \frac{a}{\pi}[\arctan(X)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{a}{\pi}(\pi) = a$$

$1 \Rightarrow a = 1$ **NB :** pour le calcul de l'intégral on a posé $X = nx$

$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$

$$\mathbb{E}(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xn}{\pi(1+n^2x^2)}dx = \frac{1}{\pi n}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xn^2}{(1+n^2x^2)}dx$$

$X = n^2x^2$, $dX = 2n^2xdx$, $dx = \frac{dX}{2xn^2}$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+X)}dX = \frac{1}{2\pi n}[\ln(1+X)]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty$$

Moment d'ordre 1 pour cette fonction n'existe pas.

Définition la fonction caractéristique $\emptyset_n(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f_n(x)dx$

$= \emptyset_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right)$, avec (X_n) une variable aléatoire de Cauchy de paramètre 0.

Suite $\emptyset_n$ converge vers sa fonction $\emptyset \equiv 1$ qui la fonction caractéristique de la variable aléatoire congru

(X_n) converge en loi vers la variable nulle.

Converge en loi vers la v.a. nulle donc converge aussi en probabilité vers la v.a. nulle.

Exercice 2

Les événements suivants :

"les patients prenant un medicament" ; A : "les patients prenant l'aspirine"

"*les patients sont soulagés*"

Données $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{5}, \mathbb{P}(M) = \frac{2}{5}, \mathbb{P}_A(S) = \frac{75}{100}, \mathbb{P}_M(S) = \frac{90}{100}$

1) Taux global des patients soulagés

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A \cap S) + \mathbb{P}(M \cap S)$$

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(S) + \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(S) = \frac{3}{5} \times \frac{75}{100} + \frac{2}{5} \times \frac{90}{100} = \frac{81}{100}$$

Scanné avec CamScanner

Le taux global des patients soulagés est : 81%

2) La probabilité demandé est $\mathbb{P}_S(A)$, d'après la formule de bayes on a :

$$\mathbb{P}_S(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{75}{100}}{\frac{81}{100}} = \frac{5}{9} \simeq 0.55$$

Donc $\simeq 55\%$ sont soulagés après avoir pris l'aspirine.

Exercice 3

$D = \{(x,y), x > 0, y > 0, x + y < 1\}$
avec la densité de probabilité f définie par $f(x,y) = K(x+y)$.

1) Déterminons la constante K.

f est une fonction positive et continue, donc on a :

Posons $A = \int_0^1 (\int_0^{1-x} f(x,y)dy)dx = K\int_0^1 (\int_0^{1-x} (x+y)dy)dx$

$$A = K\int_0^1 \left(\left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x}\right)dx = \frac{K}{2}\int_0^1 (1-x^2)dx$$

$$A = \frac{K}{2}\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{K}{3} = 1 \Longrightarrow K = 3$$

D'où $f(x,y) = 3(x+y)$

2) Déterminons les lois marginales

-Loi marginale X

Soit $x \epsilon]0,1[$; $f_X(x) = \int_{Y(\Omega)} f(x,y)dy = 3\int_0^{1-x}(x+y)dy = 3\left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x}$

$$f_X(x) = \frac{3}{2}(1-x^2)\mathbb{1}_{]0,1[}(x)$$

Loi marginale Y

Soit $y \epsilon]0,1[$; $f_Y(y) = \int_{X(\Omega)} f(x,y)dx = 3\int_0^{1-y}(x+y)dx = 3\left[xy + \frac{1}{2}x^2\right]_0^{1-y}$

$$f_Y(y) = \frac{3}{2}(1-y^2)\mathbb{1}_{]0,1[}(y)$$

3) On a $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$, alors il n'y a pas d'indépendance entre X et Y.

4) a) déterminons

$$g(U,V) = f(x,y) \times |J_\emptyset(X,Y)|^{-1}\mathbb{1}_{\Delta(u,v)}$$

On a $\begin{cases} X + Y = U & (1) \\ X - Y = V & (2) \end{cases}$

$(1)+(2) \Rightarrow 2X = U + V \Rightarrow X = \frac{1}{2}(U+V)$

$(1) - (2) \Rightarrow 2Y = U - V \Rightarrow Y = \frac{1}{2}(U-V)$

$$J_\emptyset(X,Y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow |J_\emptyset(X,Y)| = 2 \Rightarrow |J_\emptyset(X,Y)|^{-1} = \frac{1}{2}$$

Scanné avec CamScanner

On a : $g(U,V) = \frac{3}{2}(U+V+U-V) \times \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{\Delta(u,v)}$

$$g(U,V) = \frac{3}{4} \times 2U\,\mathbb{1}_{\Delta(u,v)} = \frac{3}{2}U\,\mathbb{1}_{\Delta(u,v)}$$

Avec $\Delta = \{(U,V) \in \mathbb{R}^2 | V > 0, 0 < U < 1 \; et \; 0 < V < U\}$

5) Déduisons la fonction de densité de U

$$g_u(u) = \int_0^u g(u,v)dv = \int_0^u \frac{3}{2}udv = \frac{3}{2}u^2$$

$$g_u(u) = \frac{3}{2}u^2\mathbb{1}_{]0,1[}(u)$$

Calculons $\mathbb{E}(V|U)$

$$\mathbb{E}(V|U) = \int_{\Delta} vg(v|u)\,dv$$

$$g(v|u) = \frac{g(u,v)}{g_u(u)} = \frac{\frac{3}{2}u}{\left(\frac{3}{2}\right)u^2} = \frac{1}{u}$$

$$\int_{\Delta} vg(v|u)\,dv = \int_0^u \frac{v}{u}dv = \frac{1}{u}\left[\frac{1}{2}v^2\right]_0^u = \frac{1}{u} \times \frac{1}{2}u^2 = \frac{u}{2}\,\mathbb{1}_{]0,1[}(u)$$

$$\mathbb{E}(V|U) = \frac{U}{2}\,\mathbb{1}_{]0,1[}(U)$$

Scanné avec CamScanner

CORRECTION EXAMEN RATTRAPAGE 2020/2021ROBABOLITE L2

Exercice 1

(1) Soit (Ω, f) un espace probabilisable. On appelle probabilité sur Ω l'application

$$\mathbb{P} : f \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longrightarrow \mathbb{P}(A)$$

telle que

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Pour toute famille $(A_n)_{n\geq 1}$ d'élément de f deux à deux disjoints, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)$$

(2) On considère un jeu de tir sur une cible comportant trois zone 1, 2 et 3.

(a) Pour cette expérience, déterminer Ω et f.

- $\Omega = \{1,2,3\}$
- $f = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \Omega\}$

(b) Déterminons α pour que P soit une probabilité.

Les événements $\{1\}, \{2\}$ et $\{3\}$ forment une partition de Ω. Alors P est une probabilité sur Ω si

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}) = \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\})$$

$$\Leftrightarrow 1 = 3\alpha + 2\alpha + \alpha = 6\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{6}$$

(3)

$\mathbb{P}(A \cap B) = 0,08$

$\mathbb{P}(A \cup B) = 0,52$

$\mathbb{P}(A) = 2$

(a) On pose $\mathbb{P}(A) = a$ et $\mathbb{P}(B) = b$. Montrer que le couple (a, b) est solution du système d'équation linéaire

$$\begin{cases} a + b = 0,6 \\ a - 2b = 0 \end{cases}$$

En utilisant les données on a :

$$0,52 = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \Leftrightarrow 0,5 = a + b - 0,08$$

$$\Leftrightarrow a + b = 0,6 \quad (1)$$

On a aussi $\mathbb{P}(A) = 2\mathbb{P}(B) \Leftrightarrow a = 2b \Leftrightarrow a - 2b = 0$ (2)

Scanné avec CamScanner

D'après (1) et (2) , on a le système

$\begin{cases} a+b=0{,}6 \\ a-2b=0 \end{cases}$ dont (a,b) est solution.

(b) Déterminer les probabilités des évènements A et B.

D'après (a), $\begin{cases} a+b=0{,}6 \\ a-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ 2b+b=0{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ 3b=0{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ b=0{,}2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0{,}4 \\ b=0{,}2 \end{cases}$

Ainsi, $\mathbb{P}(A)=a=0{,}4$ et $\mathbb{P}(B)=b=0{,}2$

(c) Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

On a $\mathbb{P}(A\cap B)=0{,}08$ et $\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)=0{,}2\times 0{,}4=0{,}08$

$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$. Alors A et B sont indépendants.

Exercice 2

Soit f définie par :

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<-1 \text{ ou } x>1 \\ x+a \text{ si } -1\le x\le 0 \\ \alpha x+1 \text{ si } 0\le x\le 1 \end{cases}$$

(1) Déterminer les réels a et α pour que f soit une fonction de densité.

Note : f est une densité de probabilité si et seulement si :

- f est positive
- f est continue
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1$

Supposons f est une densité. Alors f est continue et donc continue en 0.

f est continue en $0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$$\Rightarrow a=\lim_{x\to 0^-}(x+a)=\lim_{x\to 0^+}(\alpha x+1)=1\Rightarrow a=1 \qquad (1)$$

On a aussi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt+\int_{-1}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{1} f(t)dt+\int_{1}^{+\infty} f(t)dt=1$$

$$\Leftrightarrow 1=\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_{0}^{1}(\alpha x+1)dx=\int_{-1}^{0} xdx+\int_{-1}^{0} dx+\alpha\int_{0}^{1} xdx+\int_{0}^{1} dx$$

$$\Leftrightarrow 1=\frac{1}{2}[x^2]_{-1}^{0}+[x]_{-1}^{0}+\frac{\alpha}{2}[x^2]_{0}^{1}+[x^2]_{0}^{1}$$

$$\Leftrightarrow 1=-\frac{1}{2}+1+\frac{\alpha}{2}+1\Leftrightarrow -\frac{1}{2}=\frac{\alpha}{2}\Rightarrow \alpha=-1$$

Scanné avec CamScanner

Ainsi $(\alpha, a) = (-1, 1)$

(2) Soit X une variable aléatoire de densité f.

(a) Déterminer la fonction de répartition de X.

Notons F la fonction de répartition de X.

On a : $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$x \longrightarrow \mathbb{P}(X < x)$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

- $x \in]-\infty, -1[$

Alors $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$, car $\forall x \in]-\infty, -1[$ et $t \in]-\infty, x[$,

On a : $t \leq x \leq -1 \Longrightarrow t < -1 \Longrightarrow f(t) = 0$

- $x \in [-1,\ 0]$

Alors $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{x} f(t)dt$

$F(x) = 0 + \int_{-1}^{x} (t+1)dt + \int_{-1}^{x} t\, dt + \int_{-1}^{x} dt$

$$F(x) = \frac{1}{2}[t^2]_{-1}^{x} + [t]_{-1}^{x}$$

$F(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + x + 1 = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

- $x \in [0,\ 1]$

Alors $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$

$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$

$F(x) = F(0) - F(-1) + \int_{0}^{x} (-t+1)dt$

$F(0) = \frac{1}{2}(0^2 - 1) + 0 + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

$F(-1) = \frac{1}{2}((-1)^2 - 1) + (-1) + 1 = 0$

$\Longrightarrow F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[t^2]_{0}^{x} + \int_{0}^{x} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x^2 - 0) + x$

$F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

- $x \in [1, +\infty]$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt$

$F(x) = \int_{-1}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt = F(1) - F(-1) + \int_{1}^{x} 0\, f(t)dt$

Scanné avec CamScanner

$F(x) = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 0 = 1$

$F(x) = 1$

Conclusion :

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 \; si \; x \in]-1,-1[\\ \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \; si \; x \in [-1,0] \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} \; si \; x \in [0,1] \\ 1 \; si \; x > 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right) \underset{[-1,0]}{\chi}(x) + \left(-\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right) \underset{[0,1]}{\chi}(x) + \underset{[1,+\infty[}{\chi}(x)$$

(b)

* Calcul du moment d'ordre 1 $(\mathbb{E}(X))$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{-1} x\, f(x)dx + \int_{-1}^{0} x\, f(x)dx + \int_{0}^{1} x\, f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-1}^{0} x^2\, dx + \int_{-1}^{0} x\, dx + \int_{0}^{1} -x^2\, dx + \int_{1}^{+\infty} x\, dx$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}[x^2]_{-1}^{0} - \frac{1}{3}[x^3]_{0}^{1} + \frac{1}{2}[x^2]_{0}^{1}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 0$$

* Le moment centré d'ordre 2 (Variance de X)

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{-1} x^2 f(x)dx + \int_{-1}^{0} x^2 f(x)dx + \int_{0}^{1} x^2 f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

$$Var(X) = \int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{-1}^{0} x^2 dx + \int_{0}^{1} -x^3 dx + \int_{0}^{1} x^2 dx$$

Scanné avec CamScanner

$$Var(X) = \frac{1}{4}[x^4]_{-1}^{0} + \frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{0} - \frac{1}{4}[x^4]_{0}^{1} + \frac{1}{2}[x^3]_{0}^{1}$$

$$Var(X) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Donc $\boxed{Var(X) = \frac{1}{6}}$

(c)

$$\mathbb{P}(|x| > 0{,}5) = 1 - \mathbb{P}(|x| \leq 0{,}5)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5)$$

$$\mathbb{P}(|x| > 0{,}5) = 1 - \big(F(0{,}5) - F(-0{,}5)\big)$$

$$\mathbb{P}(|x| > 0{,}5) = 1 - \left[\left(-\frac{(0{,}5)^2}{2} + 0{,}5 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{(-0{,}5)^2}{2} - 0{,}5 + 0{,}5\right)\right]$$

$$\mathbb{P}(|x| > 0{,}5) = 1 - (0{,}875 - 0{,}125) = 0{,}25$$

$$\mathbb{P}(|x| > 0{,}5) = 0{,}25$$

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs entières telle que pour tout $n \geq 1$.

X_n suit la loi :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\alpha}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{k-1}, \quad k \geq 1$$

où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n > \alpha, \forall n \geq 1$. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

(1) Montrer que pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(Y_n \leq t) = \mathbb{P}(Y_n \leq [nt])$ où $[u]$ désigne la partie entière de u.

Soit $t > 0$. $\mathbb{P}(Y_n \leq t) = \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq t\right) = \mathbb{P}(X_n \leq nt)$

$[nt]$ est le plus grand nombre entier vérifiant, $[nt] \leq nt < [nt] + 1$. Alors X_n est une variable entière.

(2) Montrer que :

$$\mathbb{P}(X_n \leq [nt]) = \sum_{k=1}^{[nt]} \frac{\alpha}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{k-1} = 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{[nt]}$$

Soit $t > 0$. $\forall n \geq 1$, on a :

Scanné avec CamScanner

$$\mathbb{P}(X_n \leq [nt]) = \sum_{k=1}^{[nt]} \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{[nt]} \frac{\alpha}{n}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{k-1}$$

$$\mathbb{P}(X_n \leq [nt]) = \sum_{k=1}^{[nt]} \frac{\alpha}{n}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{k-1}$$

$$\mathbb{P}(X_n \leq [nt]) = \frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{[nt]} \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{k-1} = \frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{[nt]} q^{k-1} \text{ avec } q = 1-\frac{\alpha}{n}$$

On a : $q \in]0,1[$

$$\mathbb{P}(X_n \leq [nt]) = \frac{\alpha}{n}\left(\frac{1-q^{[nt]-1+1}}{1-q}\right) = \frac{\alpha}{n}\left(\frac{1-q^{[nt]}}{1-q}\right) = \frac{\alpha}{n}\left(\frac{1-\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt]}}{1-\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)}\right)$$

$$\mathbb{P}(X_n \leq [nt]) = \frac{\alpha}{n}\left(\frac{1}{\frac{\alpha}{n}}\left(1-\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt]}\right)\right) = 1-\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt]}$$

(3) Soit F_n la fonction de répartition de X_n

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_n(t) = \mathbb{P}(Y_n \leq t) = \begin{cases} 1-\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt]} & \text{si } t > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt]}$

On a :

$$\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{[nt]} = e^{[nt]\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e^{-\frac{\alpha[nt]}{n}}$$

On a : $nt - 1 < [nt] \leq nt \Rightarrow t - \frac{1}{n} < \frac{[nt]}{n} \leq t$

$$\Rightarrow \alpha\left(t-\frac{1}{n}\right) < \frac{\alpha[nt]}{n} \leq \alpha t \quad \text{car } \alpha > 0$$

$$\Rightarrow -\alpha t \leq -\frac{\alpha[nt]}{n} < -\alpha\left(t-\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-\alpha t} \leq e^{-\frac{\alpha[nt]}{n}} < e^{-\alpha\left(t-\frac{1}{n}\right)}$$

car la fonction exponentielle est croissante.

Par passage à la limite, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\alpha t} \leq \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\alpha[nt]}{n}} \leq \lim_{n\to+\infty} e^{-\alpha\left(t-\frac{1}{n}\right)} = e^{-\alpha t}$$

Scanné avec CamScanner

$$e^{-\alpha t} \leq \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\alpha[nt]}{n}} \leq e^{-\alpha t}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\alpha[nt]}{n}} = e^{-\alpha t}$$

$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} F_n(t) = 1 - e^{-\alpha t} = F(t)$ qui est fonction répartie d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre α.

$$Y_n \overset{loi}{\rightarrow} X$$

Scanné avec CamScanner

CORRECTION PROBABILITE SESSION 1 ANNEE 2021-2022 L2

EXERCICE1

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ une suite de variable aléatoire IID de la loi $B(P) ou\ P\epsilon[0,1]$

1 - $N = inf\{n \geq 1, X_n = 1\}$; a – Montrons que $\{N = +\infty\} = \cap_{n\geq 1}\{X_n = 0\}$

$\{N=+\infty\} = \{w, N(w) = +\infty\}$.

Soit $w \in \{N = +\infty\} <=> X_n(w) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$; $w \in \{N = +\infty\} <=> w \in \cap_{n\geq 1}\{X_n = 0\}$

b – Déduisons P (N=+∞)

P (N=+∞) =P $(\cap_{n\geq 1}\{X_n = 0\})$ puisque les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes alors

$P(N = +\infty) = \cap_{n\geq 1} P(X_n = 0) = \cap_{n\geq 1}(1-p) = \cap_{n=1}^{+\infty}(1-p) = \lim_{n\to+\infty}(1-p)^N = 0$

car $0 < 1 - p < 1$

C – Montrons que$\forall \in \mathbb{N}^*$,

N est le premier instant où $X_n = 1$ $Ainsi, \{N = k\}$ signifie qu'au k instant, $X_n = 1$ et que tout les autres instants (n) avant k, $X_n = 0$ Par conséquent,

$\{N = k\} = \{\cap_{n=1}^{k-1}\{X_n = 0\} \cap \{X_k = 1\}\}$

$\{N = k\} = \{X_1 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1\}$

d – Déduisons que N suit une loi usuelle

$P(\{N = k\})$ =P$\{X_1 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1\}$ =P$(\cap_{n=1}^{k-1}\{X_n = 0\} \cap \{X_k = 1\}$

=P$(\cap_{n=1}^{k-1}\{X_n = 0\})P(\{X_k = 1\})$

$= \cap_{n=1}^{k-1} P(\{X_n = 0\})P(\{X_k = 1\})$ car les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes

$= \prod_{n=1}^{k-1}(1-p)p$

$\boxed{P(\{N = k\}) = (1-p)^{k-1}p}$ Par conséquent, N suit une loi Géométrique de paramètre :

$P(N \rightsquigarrow G(p))$

e – Donnons l'Esperance et la variance de N $E(N) = \frac{1}{p}$; $Var(N) = \frac{1-p}{p^2}$

2 – Soit $n \geq 1$, on définit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

a – Donnons sans preuve la loi de S_n

Puisque $(X_n)_{n\geq 1} \rightsquigarrow$ B(p) alors $S_n\ suit\ B(n,p)$ donc P$(S_n = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

b – Esperance et Variance de S_n

$E(S_n) = np$ $Var(S_n) = np(1-p)$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2

Indication

1. Lire attentivement l'énoncé.
2. Appliquer la formule du cours.
3. Trouver deux intervalles I et J tels que

$$P(X \in I,\ Y \in J) \neq P(X \in I)P(X \in J).$$

Corrigé

1. D'après l'énoncé, on a

$$p_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_D(x,y)$$

la constante $1/\pi$ permettant de normaliser cette densité (son intégrale vaut 1).

2. On applique la formule du cours :

$$p_X(x) = \int p_{(X,Y)}(x,y)dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}1$$

Par symétrie du rôle joué par X et Y, on a aussi

$$p_Y(x) = \int p_{(X,Y)}(x,y)dx = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}1$$

3. Soit $I = J = [3/4, 1]$. Il est clair que $P(X \in I) > 0$ et que $P(Y \in J) > 0$. D'autre part, puisque $(3/4)^2 + (3/4)^2 < 1$, on a aussi

$$P(X \in I,\ Y \in J) = 0.$$

Ainsi,

$$P(X \in I,\ Y \in J) \neq P(X \in I)P(Y \in J)$$

et donc les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

EXERCICE 3

Corrigé

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'élèves choisissant la première salle. Alors tous les élèves trouvent une place si $X \leq N$ et si $500 - X \leq N$, soit

$$500 - N \leq X \leq N.$$

De plus, X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(500, 1/2)$. On a $500 > 30$ et $n \times 1/2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \geq 5$. On est donc dans les conditions où on peut approcher la loi de X par la loi normale $\mathcal{N}\left(500 \times \frac{1}{2}, \sqrt{500 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}\right)$ ie $\mathcal{N}(250, \sqrt{125})$. Posons

$$Y = \frac{X - 250}{\sqrt{125}}.$$

On peut considérer que Y suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, et on cherche N tel que

$$P\left(\frac{500 - N - 250}{\sqrt{125}} \leq Y \leq \frac{N - 250}{\sqrt{125}}\right) \geq 0$$

Or,

Or,

$$P\left(\frac{500 - N - 250}{\sqrt{125}} \leq Y \leq \frac{N - 250}{\sqrt{125}}\right) = P\left(\frac{250 - N}{\sqrt{125}} \leq Y \leq \frac{N - 250}{\sqrt{125}}\right)$$

C'est une valeur bien connue des tables de la loi normale qui dit que, si $a = 2,58$ alors

$$P(-a \leq Y \leq a) = 0,99.$$

Il suffit donc que

$$\frac{N - 250}{\sqrt{125}} \geq 2,58$$

soit $N \geq 279$. Si on ne connait pas la valeur de a précédente, il est possible de la retrouver à partir de la table de la loi normale, en remarquant que

$$P\left(\frac{500 - N - 250}{\sqrt{125}} \leq Y \leq \frac{N - 250}{\sqrt{125}}\right) = P\left(\frac{250 - N}{\sqrt{125}} \leq Y \leq \frac{N - 250}{\sqrt{125}}\right)$$
$$= \phi\left(\frac{N - 250}{\sqrt{125}}\right) - \phi\left(\frac{250 - N}{\sqrt{125}}\right)$$
$$= 2\phi\left(\frac{N - 250}{\sqrt{125}}\right) - 1$$

où ϕ désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On cherche donc N tel que

$$2\phi\left(\frac{N - 250}{\sqrt{125}}\right) - 1 \geq 0,99 \iff \phi\left(\frac{N - 250}{\sqrt{125}}\right) \geq 0,995$$

Ceci est vérifié dès que $\frac{N - 250}{\sqrt{125}} \geq 2,575$, c'est à dire dès que $N \geq 279$.

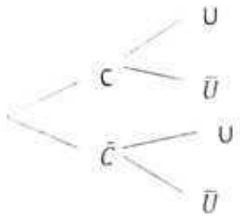
Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE PROBABILITE DEUXIEME SESSION ANNEE 2021-2022

EXERCICE 1

Soit U<< l'evènement la machine devient hors d'usage>>

C<< l'evènement la machine tombe en panne >>



1-) Il s'agit de calculer $P(U)$

$P(U) = P(C \cap U) + P(\bar{C} \cap U) = P(C) \cdot P_C(U) + P(\bar{C}) \cdot P_{\bar{C}}(U) = 0{,}3 \cdot 0{,}75 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}505$

2-) Il s'agit de calculer $P_U(\bar{C})$; $P_U(\bar{C}) = \frac{P(\bar{C} \cap U)}{P(U)} = 0{,}554$

3-) $X \in \{1,2,3 \ldots,10\}$

Soit p= probabilité du succès : la machine tombe en panne, Alors P(C)=0,3 et q=1-p=0.7

On voit clairement qu'on a un schéma de Bernoulli. Comme il y a répétition et que cela se passe de manière et indépendante avec $X \rightsquigarrow B(10;0{,}3) = B(n,p)$

Ainsi $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall k \in \{0,1,2,\ldots,10\}$

$E(X) = np$; $Var(X) = npq$ et $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

4-) $P(X = 5) = C_{10}^5 \cdot (0{,}3)^5 \cdot (1-0{,}3)^{10-5} = 0{,}102$

EXERCICE 2

La densité de probabilité de la variable aléatoire Y est définie par $f(x,\theta) = \begin{cases} \lambda e^{-x} & si\ x \geq \theta \\ 0 & sinon \end{cases}$ ou θ est un paramètre réel strictement positif.

1-) Déterminons le paramètre λ en fonction de θ pour que f soit bien une densité

$f(x,\theta)$ est la fonction continue sur IR et $\forall x \in IR$, si $\lambda \geq 0$; on a: $f(x,\theta) \geq 0$. Donc f est une densité si $\int_{IR} f(x,\theta)dx = 1$

On a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\theta)dx = \int_{-\infty}^{\theta} f(x,\theta)dx + \int_{\theta}^{+\infty} f(x,\theta)dx = \int_{\theta}^{+\infty} f(x,\theta)dx = 1$

$\int_{\theta}^{+\infty} \lambda e^{-x}\,dx = 1 \Rightarrow \int_{\theta}^{+\infty} \lambda e^{-x}\,dx = \lambda\left[-e^{-x}\right]_{x=\theta}^{x=+\infty} = \lambda(\lim_{x \to +\infty} -e^{-x} + e^{-\theta}) = \lambda e^{-\theta} = 1$

$\lambda = e^{\theta}$; $\forall \theta > 0$

2-) Calculons l'espérance de Y

On a: $E(y) = \int x e^{\theta} \cdot e^{-x}\,dx = e^{\theta} \cdot \int x e^{-x} dx = \theta + 1$

Scanné avec CamScanner

3-) Déterminons la fonction de répartition F de Y

On a : $F_Y(y) = P(Y < y) = \int_{-\infty}^{y} f(x,\theta)dx = \int_{-\infty}^{\theta} f(x,\theta)dx + \int_{\theta}^{y} f(x,\theta)dx = \int_{\theta}^{y} f(x,\theta)dx$

$\int_{\theta}^{y} f(x,\theta)dx = \int_{\theta}^{y} e^{\theta} * e^{-x}\,dx = -e^{\theta-y} + 1$; $Alors\ F_Y(y) = -e^{\theta-y} + 1 \quad \forall\theta \in IR_+^*\ et\ y \geq \theta$

4-) On pose $Z = \ln(Y)$. Déterminons la loi de Z

$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\ln(Y) \leq z) = P(Y \leq e^z) = F(e^z) = -e^{\theta-e^z} + 1\ ; \quad \forall z > 0$

$F_Z(z)$ est la fonction croissante sur IR. De plud on a : $\lim_{z\to+\infty} F_Z(z) = \lim_{z\to+\infty} -e^{\theta-e^z} + 1 = 1$

Et $\lim_{z\to-\infty} F_Z(z) = \lim_{z\to-\infty} 0 = 0$

D'où $F_Z(z)$ est la fonction de répartition d'une densité de probabilité. Et cette densité de probabilité est $F_Z{}'(z)$. On a : $F_Z{}'(z) = e^z e^{\theta-e^z} = e^{\theta+z-e^z} \quad \forall z > 0$ D'où la loi de Z est :

$f(z) = e^{\theta+z-e^z} \quad \forall z > 0\ et\ \theta > 0$

EXERCICE 3

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ n variables aléatoires indépendantes $(n \geq 2)$ qui suivent la loi uniforme sur [a,b], a< b. On pose $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

1-) Déterminons la fonction de répartition de Z_n

On a : $F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leq x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2, \leq x, \dots, X_n \leq x)$

$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x)$ Car les X_i sont indépendantes

$= \prod_{i=1}^{n} P(X_1 \leq x)$ Car les X_i ont même loi

$F_{Z_n}(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_1}(x) = \left(F_{X_1}(x)\right)^n$; Or la fonction de répartition d'une loi Uniforme [a,b] est :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si\ x\epsilon[a,b] \\ 1 & si\ x > b \end{cases}$$

$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a} 1(t)_{[a,b]} dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$

Alors $F_{Z_n}(x) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n \quad \forall x \in [a,b]$ D'où $F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq a \\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n & si\ x\epsilon[a,b] \\ 1 & si\ x \geq b \end{cases}$

2-) En déduisons la fonction F_{Z_n} est continue et croissante sur IR et on a :

$\lim_{x\to+\infty} F_{Z_n}(x) = 1 \quad et \quad \lim_{x\to-\infty} F_{Z_n}(x) = 0$ D'où F_{Z_n} est la fonction de répartition d'une densité de probabilité. Et cette densité est définie par : $f(x) = F'_{Z_n}(x) = \frac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n} \quad \forall x \in [a,b]$

L'Esperance de Z_n

$E(Z_n) = \int_{IR} xf(x)dx = b - \frac{1}{n+1}(b-a)$

3-) Calculons $\lim_{n\to+\infty} E(Z_n)$; $\lim_{n\to+\infty} E(Z_n) = b - \frac{1}{n+1}(b-a) = b$

Scanné avec CamScanner

UFHB,UFRMI, Licence 2 Année Universitaire
01 Statistique inférentielle SESSION 1 2018/2019

ECUE: Statistique inférentielle

Durée: 1 h 20 mn

Exercice 1 On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une loi de densité

$$f(x,\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} x^2 e^{-x^2/\theta}$$

où $\theta > 0$.

(1) Vérifier que f est une densité de probabilité.

(2) Déterminer un estimateur $\hat{\theta}_n$ du paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

(3) Examiner les qualités suivantes de $\hat{\theta}_n$: biais, efficacité, convergence.

Exercice 2 QCM

Dans cet exercice, une bonne réponse est notée 1 point, une mauvaise réponse enlève 0.5 point.

(1) Dans un problème de test de l'hypothèse nulle H_0 contre l'hypothèse alternative H_1, le risque de deuxième espèce est

A la probabilité de rejeter H_0 alors que H_1 est vraie

B la probabilité d'accepter H_0 alors que H_0 est fausse.

C la probabilité de rejeter H_1 alors que H_1 est vraie.

D Aucune des réponses n'est correcte.

(2) On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu de la loi de Bernouilli $\mathcal{B}(1,p)$. Le risque quadratique de la moyenne empirique est

A $\dfrac{p(1-p)}{n}$

B $\dfrac{p(1-p)}{n^2}$

C $\dfrac{p}{n}$

D $\dfrac{p^2(1-p)}{n^2}$

(3) On interroge 100 personnes salariées dans une entreprise et on note $X_1, \ldots, X_{100}$ les salaires supposés issus de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de moyenne μ et de variance σ^2, paramètres inconnus. Le salire moyen pour ces 100 personnes est noté $\overline{X}$. Un intervalle de confiance pour μ au niveau de confiance $1-\alpha$ est

A $\left[\overline{X} - t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ où $t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

B Aucune des autres réponses n'est correcte.

C $\left[\overline{X} - t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right]$ où $t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

D $\left[\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ où $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite.

(4) Qu'est ce que le risque quadratique d'un estimateur $\widehat{\theta}$ d'un paramètre θ?

A La somme de la variance de $\widehat{\theta}$ au carré et de son biais au carré.

Scanné avec CamScanner

B La somme de l'écart-type de $\widehat{\theta}$ au carré et de son biais au carré

C La somme de la variance de $\widehat{\theta}$ et de son biais

D La somme de l'écart-type de $\widehat{\theta}$ et de son biais.

(5) Si un estimateur $\widehat{\theta}$ est sans biais pour estimer un paramètre θ et que sa variance tend vers 0 quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini, on peut dire que:

A L'estimateur $\widehat{\theta}$ n'est pas un estimateur convergent de θ.

B Le paramètre θ converge en loi vers $\widehat{\theta}$.

C L'estimateur $\widehat{\theta}$ converge en probabilité vers θ.

D Aucune des autres réponses n'est correcte.

(6) On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où la moyenne m et la variance sont inconnues. La borne de Cramer-Rao pour l'estimation sans biais de la moyenne est:

A $\frac{n}{S_n^2}$ où $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$.

B $\frac{n}{\sigma^2}$

C Aucune des réponses n'est correcte.

D $\frac{\sigma^2}{n}$

(7) On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où la moyenne m et la variance sont inconnues. Un intervalle de confiance bilatéral de niveau $1-2\alpha$ pour la moyenne m est:

A $\left[\overline{X} - t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$ où $t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

B $\left[\overline{X} - t^*_{1-\alpha}\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t^*_{1-\alpha}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$ où $t^*_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de Student à n degrés de liberté.

C Aucune des réponses n'est correcte.

D $\left[\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ où $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite.

(8) On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où la moyenne m et la variance sont inconnues. On considère le problème de test de $H_0 : m \leq m_0$ contre $H_1 : m > m_0$ au niveau α. La région critique est:

A $\left]-\infty, t^*_{1-\alpha}\right[$ où $t^*_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

B $\left]-\infty, -t^*_{\alpha}\right[$ où t^*_{α} est le quantile d'ordre α de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

C Aucune des réponses n'est correcte.

D $\left]t^*_{1-\alpha}, +\infty\right[$ où $t^*_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

Exercice 3

(1) Définir et interprèter la borne de Cramer-Rao.

(2) Définir et interprèter un estimateur efficace.

(3) Définir et interprèter un estimateur asymptotiquemnt normal.

Scanné avec CamScanner

d,UFRMI, Licence 2 Année Universitaire
Statistique inférentielle SESSION 2 2018/2019

ECUE: Statistique inférentielle

Durée: 1 h 20 mn

Exercice 1 On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$ avec

1) Déterminer un estimateur $\hat{\theta}_n$ du paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance.
2) Examiner les qualités suivantes de $\hat{\theta}_n$: biais, efficacité, convergence.

Exercice 2 QCM

cet exercice, une bonne réponse est notée 1 point, une mauvaise réponse enlève 0.5 point.

1. Dans un problème de test de l'hypothèse nulle H_0 contre l'hypothèse alternative H_1, le risque de première espèce est
   A la probabilité de rejeter H_1 alors que H_0 est vraie
   B la probabilité d'accepter H_1 alors que H_1 est fausse.
   C la probabilité de rejeter H_0 alors que H_0 est vraie.
   D Aucune des réponses n'est correcte.
2. On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Le risque quadratique de la moyenne empirique est
   A $\frac{\sigma^2}{n}$
   B $\frac{\sigma^2}{n^2}$
   C $\frac{\sigma^2}{n}$
   D $\frac{n}{\sigma^2}$
3) On interroge 100 personnes salariées dans une entreprise et on note $X_1, \ldots, X_{100}$ les salaires supposés issus de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de moyenne μ et de variance σ^2, paramètres inconnus. Le salaire moyen pour ces 100 personnes est noté $\overline{X}$. Un intervalle de confiance pour μ au niveau de confiance $1-\alpha$ est
   A $\left[\overline{X} - t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{10}, \overline{X} + t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{10}\right]$ où $t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.
   B Aucune des autres réponses n'est correcte.
   C $\left[\overline{X} - t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma^2}{10}, \overline{X} + t^*_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma^2}{10}\right]$ où $t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.
   D $\left[\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{10}, \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{10}\right]$ où $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite.
4) Qu'est ce que le risque quadratique d'un estimateur $\widehat{\theta}$ d'un paramètre θ?
   A La somme de la variance de $\widehat{\theta}$ au carré et de son biais au carré.
   B La somme de l'écart-type de $\widehat{\theta}$ au carré et de son biais au carré
   C La somme de la variance de $\widehat{\theta}$ et de son biais
   D La somme de l'écart-type de $\widehat{\theta}$ et de son biais.

Scanné avec CamScanner

(5) Si un estimateur $\widehat{\theta}$ est sans biais pour estimer un paramètre θ et que sa variance tend vers 0 quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini, on peut dire que

A L'estimateur $\widehat{\theta}$ n'est pas un estimateur convergent de θ

B Le paramètre θ converge en loi vers $\widehat{\theta}$.

C L'estimateur $\widehat{\theta}$ converge en probabilité vers θ.

D Aucune des autres réponses n'est correcte.

(6) On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où la moyenne m et la variance sont inconnues. La borne de Cramer-Rao pour l'estimation sans biais de la moyenne est:

A $\frac{n}{S_n^2}$ où $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$.

B $\frac{n}{\sigma^2}$

C Aucune des réponses n'est correcte.

D $\frac{\sigma^2}{n}$

(7) On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où la moyenne m et la variance sont inconnues. Un intervalle de confiance bilatéral de niveau $1-2\alpha$ pour la moyenne m est:

A $\left[\overline{X} - t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$ où $t^*_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

B $\left[\overline{X} - t^*_{1-\alpha}\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t^*_{1-\alpha}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$ où $t^*_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

C Aucune des réponses n'est correcte.

D $\left[\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ où $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite.

(8) On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où la moyenne m et la variance sont inconnues. On considère le problème de test de $H_0 : m \geq m_0$ contre $H_1 : m < m_0$ au niveau α. La région critique est:

A $\left]-\infty, t^*_\alpha\right[$ où t^*_α est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

B $\left]-\infty, -t^*_\alpha\right[$ où t^*_α est le quantile d'ordre α de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

C Aucune des réponses n'est correcte.

D $\left]t^*_{1-\alpha}, +\infty\right[$ où $t^*_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

Exercice 3

(1) Qu'est ce qu'un estimateur efficace?

(2) Qu'est ce qu'un estimateur convergent?

(3) Qu'est ce qu'un estimateur asymptotiquement normal?

Scanné avec CamScanner

Année Universitaire 2019/2020

Licence 2

Examen: Statistique inférentielle

Durée: 1 heures 20

Documents non autorisés

ercice 1. On dipsose d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon issu d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\lambda}_n$ de λ.
2. Montrer $\widehat{\lambda}_n$ est une statistique exhaustive.
3. Montrer $\widehat{\lambda}_n$ est efficace.
4. Montrer $\widehat{\lambda}_n$ est un estimateur convergent de λ.
5. Montrer $\widehat{\lambda}_n$ est un estimateur asymptotiquement normal de λ.
6. On désire estimer $e^{-\lambda}$. Interprèter comme la probabilité d'un évènement.
7. On désire estimer $e^{-\lambda}$.
   (a) Interprèter comme la probabilité d'un évènement.
   (b) Montrer que $e^{-\widehat{\lambda}_n}$ est un estimateur convergent de $e^{-\lambda}$.
   (c) Montrer que $e^{-\widehat{\lambda}_n}$ est un estimateur asymptotiquement normal de $e^{-\lambda}$.

ercice 2. On a observé un échantillon de 200 étudiants adolescents de 15 ans, dans lequel 40 entent un surpoids.

1. Donner un intervalle de confiance pour la proportion d'adolescents présentant un surpoids au niveau 0.95
2. Combien d'adolescents de 15 ans devrait-on réaliser pour connaître la proportion d'adolescents de 15 ans qui présentent un surpoids avec une précision de plus ou moins 1%, au niveau 0.95

ercice 3. Le staff meédical estime que plus de 25% des employés de l'entreprise ont un taux cholestérol supérieur à 260 cg. On tire un échantillon aléatoire simple de 200 employés. On state que 60 d'entre eux ont un taux de cholestérol supérieur à 260 cg. Au vu de cet échantillon, on conclure, au seuil de signification 5%, que le staff médical a raison.

EXTRAIT TABLE DE LA LOI NORMALE REDUITE

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	08621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	08830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	090147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169

Scanné avec CamScanner

Année Universitaire
2020/2021
UFHB-UFRMI:Licence 2
Examen: Statistique inférentielle
Durée: 1 heure 30

Exercice 1 **Questions de cours**

(1) Donner la définition d,un échantillon de taille n.
(2) Qu'est ce qu'un modèle identifiable ?
(3) Donner et expliquer le théorème de factorisation.
(4) Donner les deux formules de l'information de Fisher. Que représente l'information de Fisher ?
(5) Qu'appelle t-on borne de Cramer-Rao pour l'estimation sans biais d'un paramètre inconnu θ ?
(6) Qu'est ce qu'un estimateur efficace ?
(7) Qu'appelle t-on estimateur convergeant ?
(8) Un individu se présente à un laboratoire pour un test de COVID19. Il subit le test suivant: H_0 : le test en positif contre H_1 : le test est négatif. Donner les risques de première et de deuxième espèce et leurs conséquences respectives.
(9) Expliquer la méthode du maximum de vraisemblance.
(10) Quelles sont les différentes étapes d'un test d'hypothèses ?

Exercice 2 On souhaite estimer la proposition p de personnes au chômage dans un quartier. Pour cela, on prévoit de sonder n personnes. On note K la variable aléatoire donnant le nombre de personnes au chômage parmi les n sondées ($n \geq 100$)

(1) En expliquant votre raisonnement, déterminer la loi de K.
(2) Sur $n = 121$ personnes sondées, 25 déclarent être au chômage. Donner un intervalle de confiance pour p au niveau 95%.
(3) Combien de personnes faudrait-il interroger afin d'obtenir un intervalle à 95% de longueur inférieure à 10% ?

Exercice 3 On considère un échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ issu d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, 2)$.
(1) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\mu}$ de μ.
(2) Déterminer les propriétés non asymptotiques et asymptotiques de $\hat{\mu}$.
(3) On considère le test d'hypothèse suivant: $H_0 : \mu = 20$ contre $H_1 : \mu < 20$. Un échantillon de taille $n = 50$ fournit une moyenne de 19.4
   (a) Quelle est la statistique de décision ? Quelle est sa loi sous H_0.
   (b) Au niveau $\alpha \in (0, 1)$, donner la région critique.
   (c) Si $\alpha = 0.05$, quelle est votre conclusion ?

Scanné avec CamScanner

- Le quantile d'odre 0.975 est 1.96
- Le quantile d'ordre 0.95 est 1.645
- Le quantile d'ordre 0.99 est 2.33

Scanné avec CamScanner

Année Universitaire
2020 2021
Licence 2
Statistique inférentielle
Durée: 1 heure 30

Exercice 1

1. Donner les deux formules de l'information de Fisher. Que représente l'information de Fisher ?
2. Qu'appelle-t-on risque quadratique d'un estimateur θ ?
3. Qu'appelle-t-on borne de Cramer-Rao ?
4. Qu'appelle-t-on puissance d'un test? Comment compare-t-on deux tests ?
5. Quelles sont les différentes étapes d'un test d'hypothèses ?

Exercice 2. On considère un échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ issu de la loi uniforme sur $[0, \theta]$ avec $\theta > 0$.

1. Déterminer un estimateur $\hat{\theta}_n$ par la méthode du maximum de vraisemblance
2. $\hat{\theta}_n$ est-il sans biais? $\hat{\theta}_n$ est-il sans efficace?
3. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$. En déduire un estimateur $\hat{\theta}$ de θ par la methode des moments.
4. Déterminer les propriétés de $\hat{\theta}$ par méthode des moments.

Exercice 3. on a pesé 10 palettes de briques de la meme fabrication et on a obtenu les résultats suivants (en kg): 759, 750, 755, 756, 761, 765, 770, 752, 760, 76
On suppose que les résultats ci-dessus sont issus d'une loi normale de moyenne m et de variance σ^2 inconnues.

1. Déterminer l'intervalle de confiance de m de niveau 0.95
2. Au niveau $\alpha = 0.05$, tester $H_0 : \theta = 760$ contre $H_1 : \theta < 760$.

le quantile d'ordre 0.975 de la loi de Student à 9 degrés de liberté est 2.26
le quantile d'ordre 0.95 de la loi de Student à 9 degrés de liberté est 1.83

Bonne chance
Eviter de tricher car la reputation est préférable à de grandes richesses

Scanné avec CamScanner

Année universitaire 2021-2022
Licence 2 : Examen de Statistique inférentielle
Session 1
Durée : 1 heure 30
LES FEUILLES 2 ET 3 SONT A RENDRE

Exercice 1. On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une loi exponentielle $\mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ avec $\lambda > 0$. On suppose que le paramètre λ est inconnu.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\lambda}$ de λ..
2. A partir du moment d'ordre 2, déterminer un estimateur $\overline{\lambda}$ de λ par la méthode des mements.
3. Déterminer les propriétés asymptotiques de $\widehat{\lambda}$.
4. Déterminer les propriétés non asymptotiques de $\widehat{\lambda}$.
5. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$. Préciser les différentes étapes.

Exercice 2 : On veut tester si une pièce d'or est bien en or ou si elle a été fraudée (par un mélange avec un autre métal). On sait qu'une pièce en or pèse exactement $m_0 = 19.3$ grammes. La balance sur laquelle on pèse donne le poids de la pièce avec une erreur gaussienne d'espérance nulle (pas de biais) et d'écart-type 0.2 (il dépend de la précision de la balance). On effectue avec la même pièce dix mesures que l'on peut supposer indépendantes. Les résultats sont les suivants :

18.83 19.03 18.61 19.46 18.80 18.96 19.37 19.20 18.88 19.34.

1. Déterminer un intervalle de confiance de niveau 0.95 pour m. Interpréter.
2. Tester au niveau $\alpha = 0.05$, $H_0 : m = m_0$ contre $m \neq m_0$. Interpréter.
3. Déterminer la puissance du test au point $m = 25$.

1

Scanné avec CamScanner

LES FEUILLES 2 ET 3 SONT A RENDRE.
NE PAS INSCRIRE VOTRE NOM OU VOS PRENOMS

Exercice 3 : Une mauvaise réponse entraîne une pénalité de 0.25.

1. Si un estimateur $\widehat{\theta}$ est sans biais pour estimer un paramètre θ et que sa variance tend vers 0 quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini, on peut dire que :
   - A L'estimateur $\widehat{\theta}$ n'est pas un estimateur convergent de θ.
   - B Le paramètre θ converge en loi vers $\widehat{\theta}$.
   - C L'estimateur $\widehat{\theta}$ converge en probabilité vers θ.
   - D Aucune des autres réponses n'est correcte.
2. On considère le test d'hypothèse

   H_0 : le test du COVID est positif contre H_1 : le test du COVID est négatif.

   Le risque de deuxième espèce est de déclarer
   - A le test positif alors qu'en réalité, il est négatif
   - B le test négatif alors qu'en réalité, il est positif
   - C négatif quand il est négatif.
   - D Aucune des autres réponses n'est correcte.
3. Qu'est ce que le risque quadratique d'un estimateur $\widehat{\theta}$ d'un paramètre θ ?
   - A La somme de la variance de $\widehat{\theta}$ et de son biais au carré.
   - B La somme de l'écart-type de $\widehat{\theta}$ au carré et de son biais au carré
   - C La somme de la variance de $\widehat{\theta}$ et de son biais
   - D La somme de l'écart-type de $\widehat{\theta}$ et de son biais.
4. On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu de la loi de Bernouilli $\mathcal{B}(1, p)$. Le risque quadratique de la moyenne empirique est
   - A $\dfrac{p(1-p)}{n}$
   - B $\dfrac{p(1-p)}{n^2}$
   - C $\dfrac{p}{n}$
   - D $\dfrac{p^2(1-p)}{n^2}$

Scanné avec CamScanner

5. On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$ inconnu. L'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est

   A $\dfrac{1}{\overline{X}_n}$

   B $\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$

   C $\overline{X}_n$

   D $\sqrt{\overline{X}_n}$

6. Un estimateur $\widehat{\theta}$ d'un paramètre θ est dit asymptotiquement normal si

   A $\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta)$ converge en loi vers θ

   B $\widehat{\theta} - \theta$ converge en probabilité vers 0

   C $\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta)$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance $\sigma_\theta^2 > 0$

   D Aucune des autres réponses n'est correcte.

7. On considère le test d'hypothèse

   H_0 : le test du COVID est positif contre H_1 : le test du COVID est négatif.

   Le risque de première espèce est de déclarer

   A le test positif alors qu'en réalité, il est négatif

   B le test négatif alors qu'en réalité, il est positif

   C positif alors quand il est positif

   D Aucune des autres réponses n'est correcte.

Scanné avec CamScanner

La fonction de répartition de la loi de Student

n | P	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,999	0,9995
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
32	0,256	0,530	0,853	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
34	0,255	0,529	0,852	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
36	0,255	0,529	0,852	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582
38	0,255	0,529	0,851	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
70	0,454	0,527	0,847	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
90	0,254	0,526	0,846	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,316
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Student à n degrés de liberté, notée $X \sim t_n$.
La table donne les valeurs $t_{n;P}$ telles que

Scanné avec CamScanner

Scanné avec CamScanner

Fonction de répartition de la loi de normale $N(0, 1)$

Exemple : $P(N(0,1) \leq 1{,}33) = 0{,}9082$.

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,5
	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000

Licence 2
Examen de Statistique inférentielle
Session 2
Durée : 2 heure 00
La qualité de la redaction sera prise en compte dans la correction

Exercice 1. On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu de la loi de Bernouilli $\mathcal{B}(1, p)$ avec $p \in]0, 1[$ inconnu.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{p}_n$ de p
2. Calculer la borne de Cramer-Rao pour l'estimation sans biais de p.
3. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance est efficace.
4. Montrer que $\hat{p}_n$ est un estimateur convergent de p.
5. Montrer que $\hat{p}_n$ est un estimateur asymptotiquement normal de p.

Exercice 2. La force de compression d'un type de béton est modélisée par une variable gaussienne d'espérance μ et de variance σ^2. L'unité de mesure est le psi (pound per square inch). On supposera la variance σ^2 connue et égale à 1000. Sur un échantillon de 12 mesures, on a observé une moyenne empirique de 3250 psi.

1. Donner un intervalle de confiance de niveau 0.95 pour μ. Donner un intervalle de confiance de niveau 0.99 pour μ. Comparer les longueurs des intervalles puis interpréter.
2. On souhaite maintenant estimer μ avec une précision de ± 15 psi, avec un niveau de confiance de 0.95. Quelle taille minimum doit avoir l'échantillon ?

Exercice 3. On désire tester si la durée de vie moyenne d'un tube électronique est égale à 1600 heures ou si elle est plutôt inférieure à cette valeur. Les observations sur un échantillon de taille 16 suivent une loi normale $\mathcal{N}(\mu, 900)$. La moyenne estimée est $\bar{X}_{16} = 1590$.

1. Donner les hypothèses nulle H_0 et alternative et H_1.
2. Quelle est la région critique du test ?
3. Peut-on rejeter H_0 au seuil de $\alpha = 1\%$?
4. Calculer l'erreur de deuxième espèce et la puissance du test pour $\mu = 1570$.

Scanné avec CamScanner

Fonction de répartition de la loi de normale $\mathcal{N}(0,1)$

Exemple : $P(\mathcal{N}(0,1) \leq 1{,}33) = 0{,}908\,2$.

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 8	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 6	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
P	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Scanné avec CamScanner

Correction de l'examen de statistique inférentielle session 1 2018-2019

Exercice 1

$$f(x,\theta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}x^2e^{-\frac{x^2}{\theta}}$$

1) f est une fonction positive et continue.

Posons $A=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\theta)dx$

$A=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}x^2e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$

Posons $U=x, U'=1$ et $V'=xe^{-\frac{x^2}{\theta}}, V=-\frac{\theta}{2}e^{-\frac{x^2}{\theta}}$.

$A=\frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}\left(\left[-\frac{x\theta}{2}e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{\theta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}\left(\left[-\frac{x\theta}{2}e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{\theta}{2}\sqrt{\pi}\theta\right.\right.$

$A=\frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}\times\frac{\theta}{2}\sqrt{\pi\theta}=1\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\theta)dx=1.$

Par conséquent f est une densité de probabilité.

2) Déterminons $\widehat{\theta_n}$ par la méthode du maximum de vraisemblance.

$$L(X_1,\dots,X_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}x_i^2e^{-\frac{x_i^2}{\theta}}$$

$$L(X_1,\dots,X_n,\theta)=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}\right)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^2\,e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

Logarithme de la vraisemblance

$$\ln\big(L(X_1,\dots,X_n,\theta)\big)=\ln\left(\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}\right)^n\right)+\ln\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$\ln\big(L(X_1,\dots,X_n,\theta)\big)=n\ln(2)-nln(\sqrt{\pi}\,\theta^{\frac{3}{2}})+\ln\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$\ln\big(L(X_1,\dots,X_n,\theta)\big)=n\ln(2)-nln(\sqrt{\pi})-nln(\theta^{\frac{3}{2}})+\ln\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$\ln\big(L(X_1,\dots,X_n,\theta)\big)=n\ln\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)-\left(\frac{3n}{2}\right)ln(\theta)+\ln\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

Condition du premier ordre

$$\frac{\partial\ln\big(L(X_1,\dots,X_n,\theta)\big)}{\partial\theta}=0\Leftrightarrow-\frac{3n}{2\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$$

$$-\frac{3n}{2\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0\Leftrightarrow\frac{-3n\theta+2\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta^2}=0\Leftrightarrow-3n\theta+2\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0\Leftrightarrow\theta=\frac{2}{3n}\sum$$

Condition du second ordre

$$\frac{\partial^2\ln(L(X_1,\dots,X_n,\theta))}{\partial\theta^2}=\frac{3n}{2\theta^2}-\frac{2\theta}{\theta^4}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\frac{3n}{2\theta^2}-\frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\frac{3n\theta-4\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta^3}=\frac{3n\theta-6n\theta}{\theta^3}$$

$$\frac{\partial^2\ln(L(X_1,\dots,X_n,\theta))}{\partial\theta^2}=\frac{-3n}{2\theta^3}<0.$$ **Par conséquent** $\widehat{\theta_n}=\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$.

3) Le biais

Scanné avec CamScanner

$\mathbb{E}(\widehat{\theta_n}) = \mathbb{E}(\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2) = \frac{2}{3n}\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2) = \frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{3}\mathbb{E}(X^2)$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,\theta)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}} x^4 e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 x e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx.$$

Posons $B = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 x e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx$.

Soit $U = x^3, U' = 3x^2$ et $V' = xe^{-\frac{x^2}{\theta}}, V = \left(-\frac{\theta}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{\theta}}$

$$B = \left[\left(-\frac{\theta x^3}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{3\theta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx$$

$$B = \frac{3\theta}{2} \times \frac{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}{2} A = \frac{3\theta}{2} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta^{\frac{3}{2}} \Longrightarrow \mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}} \times \frac{3\theta}{2} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta^{\frac{3}{2}} = \frac{3\theta}{2}$$

Ainsi $\mathbb{E}(\widehat{\theta_n}) = \frac{2}{3}\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{3}\frac{3\theta}{2} = \theta$

Donc $\widehat{\theta_n}$ est sans biais.

Efficacité de $\widehat{\theta_n}$

$Var(\widehat{\theta_n}) = Var(\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2) = \frac{4}{9n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X^2) = \frac{4}{9n}Var(X^2)$.

$Var(X^2) = \mathbb{E}((X^2)^2) - \left(\mathbb{E}(X^2)\right)^2$

$$\mathbb{E}(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x,\theta)dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^6 e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx.$$

Posons $C = \int_{-\infty}^{+\infty} x^6 e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x x^5 e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx$.

Soit $U = x^5, U' = 5x^4$ et $V' = xe^{-\frac{x^2}{\theta}}, V = \left(-\frac{\theta}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{\theta}}$

$$C = \left[\left(-\frac{\theta x^5}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{5\theta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \frac{5\theta}{2}B = \frac{5\theta}{2} \times \frac{3\theta}{2} \times \sqrt{\pi}\,\theta^{\frac{3}{2}}$$

Donc $\mathbb{E}(X^4) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}} \times \frac{5\theta}{2} \times \frac{3\theta}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta^{\frac{3}{2}} = \frac{15\theta^2}{4} \Longrightarrow Var(X^2) = \frac{15\theta^2}{4} - \frac{9\theta^2}{4} = \frac{6\theta^2}{4} = \frac{3}{2}\theta^2$

$(\widehat{\theta_n}) = \frac{4}{9n} \times \frac{3}{2}\theta^2 = \frac{2}{3n}\theta^2$.

$BRC(\widehat{\theta_n}) = \frac{1}{I_n(\theta)}$ On a $I_n(\theta) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln(L(X_1,\ldots,X_n,\theta))}{\partial\theta^2}\right) = -\mathbb{E}\left(-\frac{3n}{2\theta^2}\right) = \frac{3n}{2\theta^2}$

$$\Longrightarrow BRC(\widehat{\theta_n}) = \left(\frac{1}{\frac{3n}{2\theta^2}}\right) = \frac{2}{3n}\theta^2 = Var(\widehat{\theta_n})$$

Donc $\widehat{\theta_n}$ est un estimateur efficace.

...vergence de $\widehat{\theta_n}$

$\lim_{n\to+\infty} Var(\widehat{\theta_n}) = \frac{2}{3n}\theta^2 = 0$ et $\mathbb{E}(\widehat{\theta_n}) = \theta$ Donc $\widehat{\theta_n} \to \theta$. **D'où la convergence de $\widehat{\theta_n}$.**

...ercice 2

1. B, C ; 2. A ; 3. A,D ; 4. B ; 5. C ; 6. D ; 7. B ; 8. C .

Exercice 3 (Voir cours)

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE STATISTIQUE SESSION 2 LICENCE 2 2021-2022

Exercice1

On considère un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ issu de la loi de Bernoulli B (1, p) avec p∈]0,1[inconnue.

1- Déterminons l'estimateur de vraisemblance $\widehat{p_n}$ de p.

La vraisemblance est :

$L(X_1, \dots, X_n, p) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, p)$ avec

$f(X_i, p) = p^{X_i}(1-p)^{1-X_i} 1_{\{0,1\}}(X_i)$

$\Rightarrow LX_1, \dots, X_n, p) = \prod_{i=1}^{n} p^{X_i}(1-p)^{1-X_i} 1_{\{0,1\}}(X_i)$

$= p^{\sum_{i=1}^{n} X_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} 1}(1-p)^{-\sum_{i=1}^{n} X_i} 1_{(X_i)}\{0,1\}$

$= p^{\sum_{i=1}^{n} X_i}(1-p)^{n}(1-p)^{-\sum_{i=1}^{n} X_i} = (1-p)^{n}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} 1_{\{0,1\}}(X_1)$

Un estimateur du maximum de vraisemblance maximise le logarithme de vraisemblance.

Et on a : $\forall p \in]0,1[\,; l(X_1, \dots X_n, p) > 0$. Le logarithme de vraisemblance est :

$\ln(l(X_1, \dots, X_n, p) = nln(1-p) + \sum_{i=1}^{n} X_i\,(\ln(p) - \ln(1-p))$

$= (n\sum_{i=1}^{n} X_1)\ln(1-p) + \sum_{i=1}^{n} \ln(p)$

Condition de premier ordre

$\ln\big(l(X_1, \dots, X_n, p)\big)$ Est une fonction dérivable pour tout $p \in]0,1[$ *et on a*: $\forall p \in$ $]0,1[$; $\frac{\partial \ln(l(X1__X_n,p)}{\partial p} = -(n - \sum_{i=1}^{n} X_i)\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} X_i = -\frac{n}{1-p} + \frac{1}{p(1-p)}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Ainsi on a : $\frac{\partial \ln(l(X_1,\dots,X_n,p)}{\partial p} = 0 <=> -\frac{n}{1-p} + \frac{1}{p(1-p)}\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 <=> \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 <=>$ $\widehat{p_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. $\forall X_i \in \{0,1\}$.

Condition du second ordre

On a: $\frac{\partial^2 \ln(l(X_1,\dots,X_n,p)}{\partial^2} = \frac{\partial\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} X_1 - (n-\sum_{i=1}^{n} X_i)*\frac{1}{1-p}\right)}{\partial p} = -\frac{1}{p^2}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{(n-\sum_{i=1}^{n} X_i)}{(1-p)^2} \leq 0 =>$ $\frac{\partial^2 \ln(l(X_1,\dots,X_n)(\widehat{p_n})}{\partial p^2} \leq 0$, D'ou $\widehat{p_n} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} X_i$ maximise le logarithme de vraisemblance d'où l'estimateur du maximum de vraisemblance de p est: $\widehat{p_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

2- Calculons la borne de Cramer-Rao pour l'estimateur sans biais de p.

Montrons que $\widehat{p_n}$ est un estimateur sans biais de p.

On a : $E(\widehat{p_n} = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

On sait que les variables $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont indépendantes identiquement distribuées donc

$E(X_1) = E(X_i)\ \forall i = \overline{1, \dots, n}$ on a donc $E(\widehat{p_n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p = \frac{n*p}{n}$ d'où $E(\widehat{p_n}) = p$.

On en déduit que $\widehat{p_n}$ est un estimateur sans biais de p.

3- Déterminons l'information de Fisher contenue dans cet échantillon

On a : $In(p) = -E_p\left[\frac{\partial^2 \ln\big(l(X_1,\dots,X_n,p)\big)}{\partial p^2}\right] = -E_p\left[-\frac{1}{p^2}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{(n-\sum_{i=1}^{n} X_i}{(1-p)^2}\right] = \frac{1}{p^2}E_p(\sum_{i=1}^{n} X_1) +$ $\frac{n}{(1-p)^2} - \frac{1}{(1-p)^2}E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{np}{p^2} + \frac{n}{(1-p)^2} - \frac{np}{(1-p)^2} = \frac{n}{p} + \frac{n}{(1-p)} = n\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right) = \frac{n}{p(1-p)}$

Scanné avec CamScanner

Calcul de la borne de Cramer-Rao. La borne de Cramer-Rao est $BCR(p) = \frac{1}{In(p)} = \frac{p(1-p)}{n}$ d'où $BCR(p) = \frac{p(1-p)}{n}$

4- Montrons que l'estimateur du maximum de vraisemblance est efficace

D'après 2) l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{p_n}$ de p est sans biais, de plus on a : $var(\widehat{p_n}) = E(\widehat{p_n}^2) - (E(p_n)^2 = var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2} var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} X_1)$ *car les* X_i *sont independantes et identiquement distribuees.*

$var(\widehat{p_n}) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} p(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$ Ainsi on a $var(\widehat{p_n}) = \frac{p(1-p)}{n} = BCR(p)$ on en déduit que l'estimateur du maximum de vraisemblance est efficace.

5- Montrons que $\widehat{p_n}$ est un estimateur convergent de p.

On a : $\widehat{p_n} = \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_1$, *les* $(X_i)_{1 \le i \le n}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que $E(X_1) = p < +\infty$ *et* $var(X_i) = p(1-p) > 0$.

Alors d'après la loi des grands nombres ;

$\overline{X_n} \xrightarrow{p} E(X_1) = p$ *d'ou* $\widehat{p_n} \xrightarrow{p} E(X_1) = p$ On en déduit que $\widehat{p_n}$ est un estimateur convergent de p.

6- Montrons que $\widehat{p_n}$ est un estimateur asymptotiquement normal de p.

On a : $E(\widehat{p_n}) = p <=> \lim_{n \to +\infty} E(\widehat{p_n}) = p$ *d'ou* $E(\widehat{p_n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} p$. $\widehat{p_n}$ est un estimateur asymptotiquement normal de p.

Exercice2

Soit $(X_1, \ldots, X_{12})$ l'échantillons mesuré tel que les variables $(X_i)_{1 \le i \le 12}$ suivent une loi gaussienne d'Esperance μ et de varianceσ^2.

Données : $n = 12, \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 3250$ *et* $\sigma^2 = 1000$.

1- Donnons un intervalle de niveau $1 - \alpha$ pour μ.

L'intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ de la moyenne μ lorsque σ^2 est connue est :

$\left[\overline{X_n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X_n} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ *ou* $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ désigne le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi normal centrée réduite. Ainsi :

-pour $\alpha = 0{,}05$, c'est-à-dire au niveau $0{,}95 = 1 - \alpha$,l'intervalle de confiance de la moyenne μ lorsque σ^2 est connue est :

$\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \overline{X_n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}}$ avec $t_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}975} = 1{,}960$.

$X = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3250 - 1{,}960 * \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}} = 3232{,}1$

$\bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3250 + 1{,}960 * \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}} = 3267{,}89$

D'où l'intervalle de confiance au niveau 0,95 de la moyenne μ est:

Scanné avec CamScanner

$I_1 = [3232{,}10; 3267{,}89]$

-pour $\alpha = 0{,}01$ c'est-à-dire au niveau $1-\alpha = 0{,}99$ l'intervalle de confiance de la moyenne μ est :

$\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3250 - z_{0{,}995}\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}}$ Avec $z_{0{,}995} = 2{,}576 = 3226{,}48$

$\subseteq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3250 + 80{,}995\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}} = 3273{,}52$ D'où l'intervalle de confiance du niveau 0,99 de la moyenneμ est: $I_2 = [3226{,}48; 3273{,}51]$.

*Comparons les longueurs des intervalles, puis interprétons.

On a : $L(I_1) = 3267{,}89 - 3232{,}10 = 35{,}79$; $L(I_2) = 3273{,}51 - 3226{,}48 = 47{,}03$, Ainsi on a : $L(I_2) > L(X_1)$.

2- On souhaite maintenant estimer μ avec une precision de $\pm 15psi$ avec un niveau de niveau de confiance de 0,95.

Quelle taille minimum doit avoir l'échantillon ?

Soit $M_E = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ la marge d'erreur.

Pour $\varepsilon = 15psi$. Nous cherchons à choisir une taille d'échantillons telle que $M_E \leq \varepsilon$. Ainsi on cherche la taille n telle que :

$|\mu - \overline{X_n}| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon \Rightarrow M_E \leq \varepsilon \Rightarrow (z_{1-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})^2 \leq \varepsilon^2$ Car les quantités sont positives.

3- On a : $|\mu - \overline{X_n}| \leq M_E \leq \varepsilon \Rightarrow z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma^2}{n} \leq \varepsilon^2 \Rightarrow \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\varepsilon^2} \leq n$ avec $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}975} = 1{,}96$ et $\sigma^2 = 1000$

AN: on a:$\frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{1{,}96^2 * 1000}{15^2} = 17{,}07 \Rightarrow 17{,}07 \leq n$ $d'ou$ $n_{min} = N_1 = 18$

Conclusion : la taille minimale que doit avoir l'échantillon est : n=18.

Exercice3

Données : taille de l'échantillon n=16, les variables sont indépendantes identiquement distribuées et suivent la loi normale $\mathcal{N}(\mu, 900)$.

La moyenne estimée est $\overline{X_{16}} = 1590$.

1- Donnons les hypothèses nulles H_0 et alternative H_1.

-Hypothèse nulles $H_0: \mu > 1600$

-Hypothèse alternative $H_1: \mu \leq 1600$.

On veut donc vérifier : $H_0: \mu > 1600$ $contre$ $H_1: \mu \leq 1600$

2- Quelle est la région critique du test ?

La région critique au niveau α du test $H_0: \mu > 1600$ contre $H_1: \mu \leq 1600$ lorsque σ^2 est connue est :

Scanné avec CamScanner

$W = \left\{\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-1600}{\sigma} < q_\alpha\right\}$ Ou q_α désigne le quantile d'ordre α de la loi centrée réduite.

3- Peut-on rejeter H_0 au seuil $\alpha = 1\%$?

Au seuil$\alpha = 1\%$, la région critique :

$W = \left\{\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-1600}{\sigma} < q_{0,01}\right\}$.

$\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-1600)}{\sigma} = \frac{\sqrt{16}(1590-1600)}{\sqrt{900}} = -1{,}33$. Et $q_{0,01} = -2{,}326$.

On a: -2,326< $-1{,}33$ => $q_\alpha = q_{0,01} < \frac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-1600)}{\sigma}$

D'où on accepte H_0 et on rejette H_1.

4- Calculons l'erreur de deuxième espèce et la puissance du test pour $\mu = 1570$

- Calcul de l'erreur de deuxième espèce.

Soit β le risque de deuxième espèce.

On a : $q_\beta = \frac{x_\alpha - \bar{x}}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{\sqrt{n}(x_\alpha - \bar{x})}{\sigma}$

Ou x_α désigne le seuil α traduit en valeur brute par la formule

$q_\alpha = \frac{\sqrt{n}(x_\alpha - \mu)}{\sigma}$

$x_\alpha = q_\alpha\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) + \mu$

Dans notre cas $q_\alpha = q_{0,1} = -2{,}326$.

Ainsi q_β peut-être calculer.

On retrouve β en observant le tableau des quantiles de la loi normale centrée réduite.

- Calcul de la puissance du test :

P=1-β

Scanné avec CamScanner

Licence Master Doctorat <<Tout est possible à celui qui croit.>> ***VALIDEUR LMD EDITION

Université Félix Houphouet-Boigny Abidjan Cocody
UFRMI

Année 2016-2017

Licence 2
UE : Fonctions de plusieurs variables réelles
ECUE : Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
Première Session. Décembre 2017
Durée : 2 Heures
(Sujet sur deux pages)

Exercice 1
Soient N et ν définies par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} N(x,y) &= \sup_{t\in[0,2\pi]} |x\cos t + y\sin t| \\ \nu(x,y) &= \sup_{t\in[0,1]} |(1-t)x + ty| \end{aligned}$$

1) a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que ν est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2) a) Montrer que $N = \|\|_2$ où $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.
(On pourra utiliser les coordonnées polaires).

b) Montrer que $\nu = \|\|_\infty$ où $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\|_\infty = \sup(|x|, |y|)$.

c) Dessiner la boule ouverte de centre $(0,0)$ et de rayon 1 pour la distance d asso à la norme ν.

d) Démontrer que N et ν sont équivalentes.

3) Soit $a \in \mathbb{R}^2$.

a) Soit $X \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|X-a\|_2 = r$. Montrer que $\forall \epsilon > 0$, $B(X,\epsilon) \not\subseteq B_f(a,r)$
Pour cela déterminer un point $Y \in B(X,\epsilon)$ tel que $Y \notin B_f(a,r)$ en calculant $\|X-$ et $\|Y-a\|_2$.

b) En déduire que $\overset{\circ}{\overbrace{B_f(a,r)}} = B(a,r)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\|_2)$.

Scanné avec CamScanner

Exercice 2

1) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

c) f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

d) Calculer les dérivées partielles secondes de f au point $(0,0)$.
f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

2) On veut déterminer les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que :

$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2g(x,y). \quad (E)$$

a) Montrer que la fonction f définie au 1) est une solution de l'équation (E).

b) On effectue le changement de variables

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = x + y \end{cases}$$

On pose $\varphi(x,y) = (u,v)$ et $g(x,y) = G(u,v)$.

Exprimer $J_g(x,y)$ en fonction de $J_G(u,v)$ et $J_\varphi(x,y)$.

Que devient alors l'équation (E) par le changement de variables ?

c) Résoudre l'équation (E_1) obtenue et en déduire les solutions de l'équation (E).

d) Montrer que la fonction f définie au 1) a bien la forme, que vous avez obtenue, des solutions de l'équation (E).

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny Abidjan Cocody
UFRMI

Année 2016-2017

Licence 2
UE : Fonctions de plusieurs variables réelles
ECUE : Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
2ème Session. Février 2018
Durée : 2 Heures. (Sujet sur une page)

Exercice 1 (10 points)
Soit (E,d) un espace métrique. Pour toute partie A de E, on pose

$$\alpha(A) = \overline{\overset{\circ}{A}} \text{ et } \beta(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$$

Soient A et B deux parties de E.
1) Montrer que si $A \subset B$ alors $\alpha(A) \subset \alpha(B)$ et $\beta(A) \subset \beta(B)$.

2) Montrer que $\overset{\circ}{A} \subset \alpha(A) \subset \overline{A}$ et $\overset{\circ}{A} \subset \beta(A) \subset \overline{A}$.

3) Montrer que
a) si A est ouvert alors $A \subset \alpha(A)$

b) si A est fermé alors $\beta(A) \subset A$.

4) Montrer qu'on toujours $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ et $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.

5) a) Montrer que si A est ouvert alors $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

b) Montrer que si A et B sont ouverts alors $\alpha(A \cap B) = \alpha(A) \cap \alpha(B)$.

Exercice 2 (10 points)
Soit $(p,q,r) \in (\mathbb{R}_+)^3$ tels que $p+q+r > 1$ et soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
1) Soit f l'application définie par $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \setminus (0,0,0)$

$$f(x,y,z) = \frac{x^p y^q z^r}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Calculer $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$.

2) Soit g l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$g(x,y,z) = ax + by + cz + |x|^p |y|^q |z|^r$$

Montrer que g est différentiable en $(0,0,0)$ et calculer $dg(0,0,0).(h_1,h_2,h_3)$ pour tout $(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$.

3) Soit h l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$h(x,y,z) = x^2y^2 + (x^2-y^2)z - 4z$$

Déterminer les points critiques de h et préciser l'existence d'extrema en ces points, ainsi que le type d'extrema.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny Abidjan Cocody
UFR Mathématiques et Informatique Année 2017-2018

Licence 2

UE : Fonctions de plusieurs variables réelles

ECUE : Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$

2ème Session. Mars 2019

Durée : 2 Heures. (Sujet sur une page)

Exercice 1 (10 points)

1) Dans $\mathbb{R}^2$ muni de l'une de ses distances usuelles, on pose

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x+2| + |y-2| \leq 9\right\},\ B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy = 1\right\}$$

et

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x-3| > 4 \text{ ou } |y-5| > 4\right\}$$

La partie A, B respectivement C est-elle ouverte, fermée, compacte ? Justifier votre réponse.

(On admettra que dans $\mathbb{R}^2$ muni de l'une de ses distances usuelles, une partie non vide et distincte de $\mathbb{R}^2$ ne peut être à la fois ouverte et fermée).

2) Soit D une partie de $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses distances usuelles. On note $Fr(D)$ la frontière de D.

a) Montrer que $\overset{\circ}{D} \cap Fr(D) = \emptyset$.

b) Montrer que si D est fermée, alors $D = \overset{\circ}{D} \cup Fr(D)$.

c) Montrer que si D est ouverte ou fermée, alors $\overbrace{Fr(D)}^{\circ} = \emptyset$.

3) Soient E et G deux parties de $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses distances usuelles.
Montrer que $Fr(E \cup G) \subset Fr(E) \cup Fr(G)$.

Exercice 2 (10 points)

1) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2 \ln(1+y)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

a) Calculer l'ensemble de définition U de f.

b) Etudier la continuité de f sur U.

c) Etudier la différentiablité de f sur U.

d) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

e) La différentielle seconde de f existe-elle au point $(0,0)$?

2) Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$g(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy^2 + 6x^2 - 6y^2$$

Déterminer les points critiques de g et préciser l'existence d'extrema en ces points, ainsi que le type d'extrema.

Scanné avec CamScanner

Félix Houphouet Boigny Abidjan Cocody
Mathématiques et Informatique

Année 2017-2018

Licence 2
UE : Fonctions de plusieurs variables réelles
EC : Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
Première Session . Juin 2018
Durée : 2 Heures.

Exercice 1

1) Dans $\mathbb{R}^2$ muni de l'une de ses distances usuelles, on pose

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x-1| + |y+2| \leq 9\right\}, \ B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > x\right\}$$

et

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x-1| \geq 2 \text{ ou } |y-1| \geq 2\right\}$$

La partie A, B respectivement C est-elle ouverte, fermée, compacte ? Justifier votre réponse.

(On admettra que dans $\mathbb{R}^2$ muni de l'une de ses distances usuelles, une partie non vide et distincte de $\mathbb{R}^2$ ne peut être à la fois ouverte et fermée).

2) Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}^2$. On note $\delta(D)$ le diamètre de D.
Montrer que si D est bornée alors $\overline{D}$ est bornée et $\delta\left(\overline{D}\right) = \delta(D)$.

3) Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses distances usuelles.

a) Montrer que si $E \subset F$ alors $\overset{\circ}{E} \subset \overset{\circ}{F}$.

b) Montrer que $\overset{\circ}{E} \cap \overset{\circ}{F} = \overset{\circ}{\overbrace{E \cap F}}$.

c) En déduire que $\overline{E} \cup \overline{F} = \overline{E \cup F}$ par passage au complémentaire.

Exercice 2

1) Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$g(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } g(0,0) = 0$$

a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b) g est-elle dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur ?
c) g est-elle différentiable en $(0,0)$?
d) Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0)$.

2) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

Déterminer les points critiques de f et préciser l'existence d'extrema en ces points, ainsi que le type d'extrema.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny Abidjan Cocody Année 2017-2018
UFR Mathématiques et Informatique
Département

Licence 2
UE : Fonctions de plusieurs variables réelles
EC : Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
Deuxième Session . Septembre 2018
Durée : 2 Heures.

Exercice 1

1) Dans $\mathbb{R}^2$ muni de l'une de ses distances usuelles, on pose

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x+2| + |y-2| < 4\}, \ B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq y\}$$

et

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x-3| > 2 \text{ ou } |y-5| > 2\}$$

La partie A, B respectivement C est-elle ouverte, fermée, compacte ? Justifier votre réponse.
(On admettra que dans $\mathbb{R}^2$ muni de l'une de ses distances usuelles, une partie non vide distincte de $\mathbb{R}^2$ ne peut être à la fois ouverte et fermée).

2) Soit D une partie de $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses distances usuelles. On note $Fr(D)$ la frontière de D.

a) Montrer que $\overset{\circ}{D} \cap Fr(D) = \emptyset$.

b) Montrer que si D est fermée, alors $D = \overset{\circ}{D} \cup Fr(D)$.

c) Montrer que si D est ouverte ou fermée, alors $\overset{\circ}{\overbrace{Fr(D)}} = \emptyset$.

3) Soient E et G deux parties de $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses distances usuelles.
Montrer que $Fr(E \cup G) \subset Fr(E) \cup Fr(G)$.

Exercice 2

1) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \frac{x(\sin y - y)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Etudier la différentiablité de f sur $\mathbb{R}^2$.

c) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

d) La différentielle seconde de f existe-elle au point $(0,0)$?

2) Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$g(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

Déterminer les points critiques de g et préciser l'existence d'extrema en ces points, ainsi que le type d'extrema.

Scanné avec CamScanner

Année 2018-2019

Université Félix Houphouet-Boigny Abidjan Cocody
UFR Mathématiques et Informatique

Licence 2
UE : Fonctions de plusieurs variables réelles
ECUE : Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
2ème Session. Mars 2019
Durée : 2 Heures. (Sujet sur deux pages)

Exercice 1 (10 points)

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses distances usuelles. On note $Fr(A)$ la frontière de A.

1) a) Montrer que $\overset{\circ}{A} \cap Fr(A) = \emptyset$.

b) Montrer que si A est fermée, alors $A = \overset{\circ}{A} \cup Fr(A)$.

c) Montrer que si A est ouverte ou fermée, alors $\overbrace{Fr(A)}^{\circ} = \emptyset$.

d) Montrer que $Fr\left(\complement_{\mathbb{R}^n}^{A}\right) = Fr(A)$.

e) Dans cette question e) on considère $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle, et on pose $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Déterminer $\overset{\circ}{A}$ et $Fr(A)$.

2) a) Montrer que si A est ouverte, alors $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

b) Montrer que si $Fr(A) \cap Fr(B) = \emptyset$, alors

i) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

ii) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = \overbrace{A \cup B}^{\circ}$.

Exercice 2 (10 points)

1) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

c) f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

d) Calculer les dérivées partielles secondes de f au point $(0,0)$.
f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Scanné avec CamScanner

2) On veut déterminer les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que :

$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2g(x,y). \qquad (E)$$

a) Montrer que la fonction f définie au 1) est une solution de l'équation (E).

b) On effectue le changement de variables

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = x + y \end{cases}$$

On pose $\varphi(x,y) = (u,v)$ et $g(x,y) = G(u,v)$.

Exprimer $J_g(x,y)$ en fonction de $J_G(u,v)$ et $J_\varphi(x,y)$.

Que devient alors l'équation (E) par le changement de variables ?

c) Résoudre l'équation (E_1) obtenue et en déduire les solutions de l'équation (E).

d) Montrer que la fonction f définie au 1) a bien la forme, que vous avez obtenue, des solutions de l'équation (E).

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny Abidjan Cocody Année 2019-2020
UFRMI

Licence 2
UE : Fonctions de plusieurs variables réelles
ECUE : Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
Session Unique. Décembre 2020
Durée : 2 Heures. (Sujet sur une page)

Exercice 1

Soit (E, d) un espace métrique. Pour toute partie A de E, on pose

$$\alpha(A) = \overset{\circ}{A} \text{ et } \beta(A) = \overline{A}$$

Soient A et B deux parties de E.

1) Montrer que si $A \subset B$ alors $\alpha(A) \subset \alpha(B)$ et $\beta(A) \subset \beta(B)$.

2) Montrer que $\overset{\circ}{A} \subset \alpha(A) \subset \overline{A}$ et $\overset{\circ}{A} \subset \beta(A) \subset \overline{A}$.

3) Montrer que

a) si A est un ouvert alors $A \subset \alpha(A)$

b) si A est un fermé alors $\beta(A) \subset A$.

4) Montrer qu'on toujours $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ et $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.

5) a) Montrer que si A est un ouvert alors $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

b) Montrer que si A et B sont des ouverts alors $\alpha(A \cap B) = \alpha(A) \cap \alpha(B)$

Exercice 2

1) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^\lambda} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0$$

où λ est un paramètre réel.

a) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

c) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

d) Montrer que si $\lambda = 1$, alors f est dérivable en $(0, 0)$ suivant tout vecteur sans être différentiable en ce point.

2) Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$g(x, y) = (x^2 - y^2)\, e^{(-x^2 - y^2)}$$

Déterminer les points critiques de g et préciser l'existence d'extrema en ces points, ainsi que le type d'extrema.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny Abidjan Cocody 2020 – 2021
UFR Mathématiques et Informatique

Licence 2

UE: Fonctions de plusieurs variables réelles
ECUE: Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
Première Session. Août 2021
Durée: 2 Heures. (Sujet sur une page)

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses normes usuelles, on considère une partie A. On note $\delta(A)$ le diamètre de A de $Fr(A)$ la frontière de A. On note $||\ ||$ la norme de d la distance associée.

1)a) Montrer que si A est bornée, alors $\overline{A}$ est bornée et $\delta(\overline{A}) = \delta(A)$.

b) Montrer que si A est bornée, alors $\overset{\circ}{A}$ est bornée et $\delta(\overset{\circ}{A}) \leq \delta(A)$. A-t-on l'égalité ? justifier votre réponse.

2)a) Montrer que $Fr\left(\overset{\circ}{A}\right) \subset Fr(A)$. A-t-on l'égalité ? Justifier votre réponse.

b)Montrer que $Fr(\overline{A}) \subset Fr(A)$. A-t-on l'égalité ? Justifier votre réponse.

3) On rappelle que
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, [x, y] = \{z \in \mathbb{R}^n / \exists t \in [0,1] : z = (1-t)x + ty\}$.
On dit que A est convexe si $\forall x, y \in A, [x, y] \subset A$.

a) Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Montrer que $B(a, r)$ est convexe.

b) Montrer que si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

c) Montrer que si A est convexe, alors $\overset{\circ}{A}$ est convexe.

Exercice 2

1) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par
$f(x, y) = xy \sin[\frac{\pi}{2}(\frac{y-x}{x+y})]$ si $x + y \neq 0$ et $f(x, y) = 0$ si $x + y = 0$.

a) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
b) Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.
c) Calculer les dérivées partielles secondes de f en $(0, 0)$.

2) Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
$g(x, y) = 2x^2 - 2x(e^y - y + 1) + e^{2y} + (y-1)^2$.
Déterminer les points critiques de g et préciser l'existence d'extrema en ces points, ainsi que le type d'extrema.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny Abidjan Cocody $2020-2021$
UFR Mathématiques et Informatique

Licence 2
UE: Fonctions de plusieurs variables réelles
ECUE: Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
Deuxième Session. Octobre 2021
Durée: 2 Heures. (Sujet sur une page)

Exercice 1

1) On considère $\mathbb{R}^2$ muni de l'une de ses distances usuelles. On pose $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 4\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \text{ et } y > 0\}$ et $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x+1| > 5 \text{ ou } |y-2| > 5\}$.

La partie A, B respectivement C est-elle ouverte, fermée, compacte ? Justifier votre réponse.
(On admettra que dans $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses distances usuelles, une partie non vide et distincte de $\mathbb{R}^n$ ne peut être ouverte et fermée).

2) Soit D une partie de $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses distances usuelles. Montrer que $Fr(\overline{D}) \subset Fr(D)$ et $Fr\left(\overset{\circ}{D}\right) \subset Fr(D)$.
Donner un exemple où les inclusions réciproques sont fausses.

3) Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}^n$ muni de l'une de ses distances usuelles.
   a) Montrer que si $E \subset F$ alors $\overset{\circ}{E} \subset \overset{\circ}{F}$.
   b) Montrer que $\overset{\circ}{E} \cap \overset{\circ}{F} = \overset{\circ}{\overbrace{E \cap F}}$.
   c) En déduire que $\overline{E} \cup \overline{F} = \overline{E \cup F}$ par passage au complémentaire.

Exercice 2

1) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy \sin[\frac{\pi}{2}(\frac{y-x}{x+y})]$ si $x+y \neq 0$ et $f(x,y) = 0$ si $x+y = 0$.

a) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
b) Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.
c) Calculer les dérivées partielles secondes de f en $(0,0)$.

2) Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $g(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$.
Déterminer les points critiques de g et préciser l'existence d'extrema en ces points, ainsi que le type d'extrema.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny Abidjan Cocody Année 2021-2022
UFR Mathématiques et Informatique

Licence 2
UE : Fonctions de plusieurs variables réelles
ECUE : Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
Première Session. Juin 2022
Durée : 2 Heures. (Sujet sur une page)

Exercice 1
1) On pose $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\forall y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$d(x,y) = \sqrt{\frac{1}{4}(x_1 - y_1)^2 + \frac{1}{9}(x_2 - y_2)^2 + \frac{1}{25}(x_3 - y_3)^2}.$$

a) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que d est équivalente à la distance euclidienne δ_2 sur $\mathbb{R}^3$.

c) Dessiner la boule fermée de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1 pour la distance d.

2)
a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de points de $(\mathbb{R}^3, d)$.
Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}^3, \delta_2)$.
En déduire que l'espace $(\mathbb{R}^3, d)$ est complet.

b) Soit Ω un ouvert de $(\mathbb{R}^3, \delta_2)$. Montrer que Ω est un ouvert de $(\mathbb{R}^3, d)$.

Exercice 2
1) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2} \text{ si } x^2 - y^2 \neq 0 \text{ et } f(x,y) = 1 \text{ si } x^2 - y^2 = 0.$$

a) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

b) Etudier la différentiabilié de f sur $\mathbb{R}^2$.

c) Calculer les dérivées partielles secondes de f en $(0,0)$.

2) Déterminer les points les plus proches de l'origine sur la surface S d'équation

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny Abidjan Cocody
UFR Mathématiques et Informatique

Année 2021-2022

Licence 2
UE : Fonctions de plusieurs variables réelles
ECUE : Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
Deuxième Session. Août 2022
Durée : 2 Heures. (Sujet sur une page)

Exercice 1

1) On pose $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$d(x,y) = \sqrt{\frac{1}{4}(x_1 - y_1)^2 + \frac{1}{16}(x_2 - y_2)^2}.$$

a) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que d est équivalente à la distance euclidienne δ_2 sur $\mathbb{R}^2$.

c) Dessiner la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon 1 pour la distance d.

2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de points de $(\mathbb{R}^2, d)$.
Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}^2, \delta_2)$.
En déduire que l'espace $(\mathbb{R}^2, d)$ est complet.

Exercice 2

1) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2} \text{ si } x^2 - y^2 \neq 0 \text{ et } f(x,y) = 1 \text{ si } x^2 - y^2 = 0.$$

a) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

b) Etudier la différentiabilié de f sur $\mathbb{R}^2$.

c) Calculer les dérivées partielles secondes de f en $(0,0)$.

2) Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$g(x,y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}.$$

Déterminer les points critiques de g et préciser l'existence d'extrema en ces points, ainsi que le type d'extrema.

Scanné avec CamScanner

EXAMEN DE TOPOLOGIE ET CALCUL DIFFERENTIEL SESSION 1
2016-2017

Exercice 1

Soient N et ν définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} N(x,y) &= sup_{t\in[0,2\pi]} \mid x\cos t + y\sin t \mid \\ \nu(x,y) &= sup_{t\in[0,1]} \mid (1-t)x + ty \mid \end{aligned}$$

1. (a) Montrons que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. N(x,y) = sup_{t\in[0,2\pi]} \mid x\cos t + y\sin t \mid$

- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
$\forall t \in [0,2\pi], \mid x\cos t + y\sin t \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid$
Alors l'ensemble $\{x\cos t + y\sin t \ / \ t \in [0,2\pi]\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieur dans $\mathbb{R}$. De plus $0 \leq \mid x\cos t' + y\sin t' \mid \leq sup_{t\in[0,2\pi]} \mid x\cos t + y\sin t \mid$
Par conséquent $N(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, N(x,y) = 0 \Leftrightarrow \mid x\cos t + y\sin t \mid = 0, \forall t \in [0,2\pi]$
$t = 0 \Rightarrow x = 0. \ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0.$
Alors $N(x,y) = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$
Réciproquement $(x,y) = (0,0) \Rightarrow N(x,y) = 0.$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}. \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda(x,y)) = \mid \lambda \mid \ N(x,y).$
- $\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2. \ \forall t \in [0,2\pi],$

$$\begin{aligned} \mid (x+x')\cos t + (y+y')\sin t \mid &\leq \mid x\cos t + y\sin t \mid + \mid x'\cos t + y'\sin t \mid \\ \mid x\cos t + y\sin t \mid + \mid x'\cos t + y'\sin t \mid &\leq sup_{t\in[0,2\pi]} \mid x\cos t + y\sin t \mid \\ &\quad + sup_{t\in[0,2\pi]} \mid x'\cos t + y'\sin t \mid \\ sup_{t\in[0,2\pi]} \mid (x+x')\cos t + (y+y')\sin t \mid &\leq sup_{t\in[0,2\pi]} \mid x\cos t + y\sin t \mid \\ &\quad + sup_{t\in[0,2\pi]} \mid x'\cos t + y'\sin t \end{aligned}$$

Donc $N[(x,y) + (x'y')] \leq N(x,y) + N(x'y')$.
Finalement N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrons que ν est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Même résolution que la question précédente

11/2022

Scanné avec CamScanner

2. (a) Montrons que $N = ||\ ||_2 o\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, ||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2}$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, N(x,y) = sup_{t\in[0,2\pi]} \mid x\cos t + y\sin t \mid$

$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$ $avec r \in \mathbb{R}^+ \ et\ \theta \in [0, 2\pi]$.
Alors $\mid x\cos t + y\sin t \mid = r \mid \cos(\theta - t) \mid \leq r, \forall t \in [0, 2\pi]$.
Si t $= \theta$ alors $\mid x\cos t + y\sin t \mid = r = \sqrt{x^2+y^2}$
Donc $sup_{t\in[0,2\pi]} \mid x\cos t + y\sin t \mid = \sqrt{x^2+y^2}$

Ainsi $N(x,y) = ||(x,y)||_2$

(b) Montrons que $\nu = ||\ ||_\infty o\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, ||(x,y)||_\infty = sup(\mid x \mid, \mid y \mid)$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \nu(x,y) = sup_{t\in[0,1]} \mid (1-t)x + ty \mid$
Soit $f(t) = (1-t)x + ty, \forall t \in [0,1]$.
$f'(t) = y - x$ qui a un signe constant.
Alors f est croissante et ou décroissante.
Donc $\nu(x,y) = sup(\mid f(0) \mid, \mid f(1) \mid) = sup(\mid x \mid, \mid y \mid)$.
Ainsi $\nu(x,y) = ||(x,y)||_\infty$

(c) Déssinons la boule ouverte de centre $(0,0)$ et de rayon 1 pour la distance d associée à la norme ν
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \nu(x,y) = ||\ ||_\infty$
$Alors (x,y) \in B^d((0,0),1) \Leftrightarrow sup(\mid x \mid, \mid y \mid) \leq 1$
$\Leftrightarrow \mid x \mid + \mid y \mid$

(d) Demontrons que N et ν sont équivalentes

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \leq x^2+y^2 \Rightarrow \mid x \mid \leq \sqrt{x^2+y^2}$.
  De même $\mid y \mid \leq \sqrt{x^2+y^2}$
  Alors $sup(\mid x \mid, \mid y \mid) \leq \sqrt{x^2+y^2}$.
  Donc $\nu(x,y) \leq N(x,y)$.
- Si $sup(\mid x \mid, \mid y \mid) = \mid x \mid \ alors \ \mid y \mid \leq \mid x \mid \ donc\ y^2 \leq x^2$.
  $\Rightarrow x^2+y^2 \leq 2x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \sqrt{2} \mid x \mid = \sqrt{2}\ sup(\mid x \mid, \mid y \mid)$
  De même si $sup(\mid x \mid, \mid y \mid) = \mid y \mid$ alors
  $\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2}\ sup(\mid x \mid, \mid y \mid)$
  . Donc N et ν sont équivalentes.

3. (a) Montrons que $\forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \not\subseteq B_f(a,r)$.

Scanné avec CamScanner

Soit $Y = X + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{X-a}{r}$; $Y - X = \frac{\varepsilon}{2} \frac{X-a}{r}$

- $||X - Y||_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow Y \in B(X, \varepsilon)$
- $||Y - a||_2 = r + \frac{\varepsilon}{2} > r \Rightarrow Y \notin B_f(a, r)$

(b) Deduisons-en que $\overset{\circ}{\overbrace{B_f(a,r)}} = B(a,r)$ dans $(\mathbb{R}^2, ||\ ||_2)$. Soit $X \in \overset{\circ}{\overbrace{B_f(a,r)}}$. Alors $X \in B_f(a,r)$ donc $||X - a||_2 \leq r$.

- Si $||X - a||_2 < r$ alors $X \in B(a,r)$

  Or $B(a,r) \subset B_f(a,r) \Rightarrow B(a,r) \subset \overset{\circ}{\overbrace{B_f(a,r)}}$ car $B(a,r)$ est un ouvert.

  Alors $X \in \overset{\circ}{\overbrace{B_f(a,r)}}$.
- $||X - a||_2 = r$ alors $\forall, \varepsilon > 0, B(X, \varepsilon) \not\subset B_f(a,r)$ d'après a).

  Donc $X \notin \overset{\circ}{\overbrace{B_f(a,r)}}$. Finalement $\overset{\circ}{\overbrace{B_f(a,r)}} = B(a,r)$.

Exercice 2

$$\begin{cases} f(x,y) = xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & si (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ car son dénominateur ne s'annule pas en $(0,0)$.

Etude en (0,0)

$$Posons \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Scanné avec CamScanner

Quand $(x,y) \to (0,0), r \to 0$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= lim_{r\to 0}\, r^2(\cos\theta\sin\theta)\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\\ &= \lim_{r\to 0} r^2(\cos\theta\sin\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\ &= f(0,0)\end{aligned}$$

Par conséquent f est continue en $(0,0)$.

Conclusion: f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrons que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

$P_1 = xy(x^2-y^2)$ est une fonction polynôme différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

$P_2 = x^2+y^2$ est une fonction polynôme différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

donc $g = \dfrac{P_1}{P_2}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

Etude en (0,0)

f est différentiable en $(0,0)$ si $lim_{H\to(0,0)}\varepsilon(H) = 0$

$\varepsilon(H) = \dfrac{f(x_0+H)-f(x_0)-L(H)}{||H||}$ $avec\, H = (h,k)$ et $x_0 = (0,0)$.

$L(H) = h\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} + k\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$ $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$

$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$

$\Rightarrow L(H) = 0$ et $f(x_0) = f(0,0) = 0$

$\varepsilon(H) = \dfrac{f(H)}{||H||}$

$\dfrac{hk(h^2-k^2)}{(h^2+k^2)} \times \dfrac{1}{(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{hk(h^2-k^2)}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$

Calculons $\lim\limits_{H\to(0,0)} \varepsilon(H)$

$$Posons \begin{cases} h &= r\cos\theta \\ k &= r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} quand (h,k)\to(0,0), r\to 0 \\ \theta \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Scanné avec CamScanner

$$\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(H) &= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta(r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta))}{(r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}})} \\
&= \frac{r^4}{r^3}\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \\
&= \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \\
&= 0 = f(0,0) \qquad \text{donc f est différentiable en } (0,0)
\end{aligned}$$

Conclusion: f est différentiable en sur $\mathbb{R}^2$

(c) f est-elle de classe C^1sur $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}) \\
&= y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) + xy\left(\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + x\left(\frac{4xy^2}{x^2+y^2}\right)\right] \\
&= y\left[\frac{(x^2-y^2)(x+y)^2+x(4xy^2)}{(x^2+y^2)^2}\right] \\
&= y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}) \\
&= x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \left(\frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)(2y)\times xy}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \left(xy\frac{(-4x^2y)}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles de f par rapport à x et y sont des fonctions continues de $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$.

Etude en $(0,0)$

Calculons $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

$$Posons \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \theta\in\mathbb{R} \quad \text{Quand}(x,y)\to(0,0), r\to 0.$$

Scanné avec CamScanner

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \lim_{r\to 0} r\sin\theta\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}+4\frac{r^5(\cos^2\theta\sin^3\theta)}{(r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2)^2}\\ &= \lim_{r\to 0} r\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+4r\ \cos^2\theta\sin^3\theta.\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 0 = f(0,0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \lim_{r\to 0} r\cos\theta\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2}-4\frac{r^5\sin^2\theta\cos^3\theta}{r^4}\\ &= \lim_{r\to 0}\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 0 = f(0,0)\end{aligned}$$

Les dérivées partielles premieres sont continues en (0.0). Par conséquent g est de classe C^1.

(d) • Calculons les dérivées secondes de f au point (0.0).

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}-\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x}}{x} = 0\\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} &= \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f(0,y)}{\partial y}-\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y}}{y} = 0\\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}-\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{x} = \frac{x}{x} = 1\\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x} &= \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f(0,y)}{\partial x}-\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}}{y} = \frac{-y}{y} = -1\end{aligned}$$

• f est-elle de classe C^2

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y} = 1 \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x} = -1$$

Alors f n'est pas de classe C^2. Sinon on aurait l'égalité d'après le théoreme de Shawrz.

2. $(E) : x\,\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\,\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2g(x,y)$

Scanné avec CamScanner

(a) Montrons que f est une solution de l'équation (E)

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & = & y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + 4\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} & = & x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 4\frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} & = & xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + 4\frac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^2} + xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 4\frac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} & = & 2xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 2f(x,y) \end{array}$$

donc f est solution de l'équation (E).

(b) On effectue le changement de variable suivant:

$$\begin{cases} X = \dfrac{y}{x} \\ y = x + y \end{cases}$$

On pose $\phi(x,y) = (X,Y)$ et $g(x,y) = G(X,Y)$

Exprimer $J_{g(x,y)}$ en fonction de $J_{G(X,Y)}$ et $J_\phi(x,y)$

On sait que $g(x,y) = G(X,Y) = Go\phi(x,y)$ où $\phi(x,y) = (X,Y)$

Alors $J_{g(x,y)} = J_{G(X,Y)} \times J_{\phi(x,y)}$

Déduisons-en $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$ et $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G(X,Y)}{\partial X} & \dfrac{\partial g(X,Y)}{\partial Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{x} & \dfrac{\partial X}{y} \\ \frac{\partial Y}{x} & \dfrac{\partial Y}{y} \end{pmatrix}$$

Tansformons l'équation (E) en une équation (E_1) n'utilisant que les dérivées partielles.

On a donc:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial G(X,Y)}{X} \times \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial G(X,Y)}{Y} \times \dfrac{\partial Y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial G(X,Y)}{X} \times \dfrac{\partial X}{\partial y} + \dfrac{\partial G(X,Y)}{Y} \times \dfrac{\partial Y}{\partial y} \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= -\dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial G(X,Y)}{\partial X} + \dfrac{\partial G(X,Y)}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial G(X,Y)}{\partial X} + \dfrac{\partial G(X,Y)}{\partial Y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= -\frac{y}{x}\frac{\partial G(X,Y)}{\partial X} + x\frac{\partial G(X,Y)}{\partial Y} \\ y\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} &= \frac{y}{x}\frac{\partial G(X,Y)}{\partial X} + y\frac{\partial G(X,Y)}{\partial Y} \end{aligned}$$

Finalement, on a:

$$x\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = (x+y)\frac{\partial G(X,Y)}{\partial Y}$$

$$\Rightarrow x\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 2g(x,y)$$

$$\Rightarrow (x+y)\frac{\partial G(X,Y)}{\partial Y} = 2g(x,y)$$

$$\Rightarrow \boxed{Y\frac{\partial G(X,Y)}{\partial Y} = 2g(x,y) \qquad (E_1)}$$

(c) Résolvons l'équation (E_1) obtenue et déduisons-en les solutions de l'

$$Y\frac{\partial G}{\partial Y} = 2G \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial Y} = \frac{2}{Y}\times G \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial Y}\times\frac{1}{G} = \frac{2}{Y}$$

$$\frac{\frac{\partial G}{\partial Y}}{G} = \frac{2}{Y} \Rightarrow \frac{\partial G}{G} = \frac{2}{Y}\partial Y \Rightarrow \ln|G| = 2\ln|Y|$$

$\Rightarrow \ln|G| = \ln|Y^2| \Rightarrow |G| = Y^2.k(X) \Rightarrow G = k(\frac{x}{y})(x+y)^2$

Alors $G(x,y) = k(\frac{x}{y})(x+y)^2$

(d) Montrons que f a bien la forme

Comme f est solution de E alors: $f(x,y) = k(\frac{x}{y})(x+y)^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow k(\frac{x}{y}) &= f(x,y) \\ &= xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\times\frac{1}{(x+y)^2} \\ &= xy\,\frac{x^2(1-\frac{y^2}{x^2})}{x^2(1+\frac{y^2}{x^2})}\times\frac{1}{(x(1+\frac{y}{x}))^2} \\ &= \frac{y}{x}\frac{1-\frac{y^2}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\times\frac{1}{(1+\frac{y}{x})^2} \\ k(X) &= \frac{X}{(1+X)^2}\times\frac{1-X^2}{1+X^2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{F(X,Y) = k(X).Y^2}$

Scanné avec CamScanner

UFR-MI Année 2016-2017

TOPOLOGIE ET CALCUL DIFFERENTIEL
SESSION 2 LICENCE 2

Exercice 1

$\alpha(A) = \overset{o}{\overline{A}}$ et $\beta(A) = \overline{\overset{o}{A}}$

Soient A et B deux parties de E.

1. Montrons que si $A \subset B$ alors $\alpha(A) \subset \alpha(B)$ et $\beta(A) \subset \beta(B)$.
   Supposons que $A \subset B$

   . $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B} \Rightarrow \overset{o}{\overline{A}} \subset \overset{o}{\overline{B}} \Rightarrow \alpha(A) \subset \alpha(B)$

   . $A \subset B \Rightarrow \overset{o}{A} \subset \overset{o}{B} \Rightarrow \overline{\overset{o}{A}} \subset \overline{\overset{o}{B}} \Rightarrow \beta(A) \subset \beta(B)$

2. Montrons que $\overset{o}{\overline{A}} \subset \alpha(A) \subset \overline{A}$ et $\overline{\overset{o}{A}} \subset \beta(A) \subset \overline{A}$, on a :

   $$\begin{cases} A \subset \overline{A} \Rightarrow \overset{o}{A} \subset \overset{o}{\overline{A}} \quad (1) \\ A \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A} \Rightarrow \overset{o}{\overline{A}} \subset \overline{A} \quad (2) \end{cases}$$

   De (1) et (2), on a : $\overset{o}{A} \subset \overset{o}{\overline{A}} \subset \overline{A} \Rightarrow \overset{o}{A} \subset \alpha(A) \subset \overline{A}$

   Donc $\overset{o}{A} \subset \alpha(A) \subset \overline{A}$

   On a aussi : $\overset{o}{A} \subset \overset{o}{A} \Rightarrow \overset{o}{A} \subset \overline{\overset{o}{A}} \Rightarrow \overset{o}{A} \subset \beta(A) \quad (1)$

   $\overset{o}{A} \subset A \Rightarrow \overline{\overset{o}{A}} \subset \overline{A} \Rightarrow \beta(A) \subset \overline{A} \quad (2)$

   De (1) et (2), on a : $\overset{o}{A} \subset \beta(A) \subset \overline{A}$

3. Montrons que :

Scanné avec CamScanner

a) Si A est ouvert alors $A \subset \alpha(A)$

A ouvert alors $A = \overset{o}{A}$, or $A \subset \overline{A} \Rightarrow \overset{o}{A} \subset \overline{A} \Rightarrow \overset{o}{A} \subset \overline{\overset{o}{A}} \Rightarrow \overset{o}{A} \subset \alpha(A)$

b) si $A = \overline{A}$ alors $\beta(A) \subset A$

$\overset{o}{A} \subset A \Rightarrow \overline{\overset{o}{A}} \subset \overline{A} \Rightarrow \beta(A) \subset \overline{A}$ or $\overline{A} = A$ Donc $\beta(A) \subset A$

On pourrait aussi faire une déduction à partir du 2). On sait que $\overset{o}{A} \subset \alpha(A) \subset \overline{A}$

Comme $A = \overset{o}{A}$, en utilisant la prémière inclusion, on a : $\overset{o}{A} = A \subset \alpha(A)$.

De même $\overset{o}{A} \subset \beta(A) \subset \overline{A}$ uniforme $\beta(A) \subset \overline{A} = A$ donc $\beta(A) \subset A$ car A est un fermé.

4. Montrons qu'on a toujours $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ et $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$

D'une part $\alpha(A)$ est ouvert donc d'après 3 a) $\alpha(A) \subset \alpha(\alpha(A))$ (1)

D'autre part, $\overline{\overset{o}{A}} \subset \overline{A} \Rightarrow \alpha(A) \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{\alpha(A)} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A}$

$\Rightarrow \overline{\overset{o}{\alpha(A)}} \subset \overset{o}{\overline{A}} \Rightarrow \alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$ (2)

Aussi (1) et (2) nous donne $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$

D'une part $\beta(A)$ est fermé donc d'après 3.b), on a :

$\beta(A) \subset A \Rightarrow \beta(\beta(A)) \subset \beta(A)$ (1)

D'autre part, On a : $\overset{o}{A} \subset \beta(A)$ d'après 2, on a :

$\Rightarrow \overset{o}{A} = \overset{o}{\overset{o}{A}} \subset \overset{o}{\beta}(A)$

$\Rightarrow \overline{\overset{o}{A}} \subset \overline{\overset{o}{\beta}}(A) \Rightarrow \beta(A) \subset \beta(\beta(A))$ (2)

Donc de (1) et (2) $\Rightarrow \beta(\beta(A)) = \beta(A)$

5. a) Montrons que si $A = \overset{o}{A}$ alors $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

Soit $x \in A \cap \overline{B}$.

$x \in A \cap \overline{B} \Rightarrow x \in A$ et $x \in \overline{B}$. $\exists$ donc r_0 tel que $B(x, x_0) \subset A$ (car A est un ouvert) et alors $B \cap B(x, r_0) \neq \emptyset$ car $x \in \overline{B}$. D'où,

Scanné avec CamScanner

$$B(x,r_0)\cap(A\cap B) = (B(x,r_0)\cap A)\cap B$$
$$= B(x,r_0)\cap B \neq \varnothing$$

Soit $r>0$ quelconque.
. Si $r_0 \leq r$, $B(x,r_0)\subset B(x,r)$: alors , on a : $B(x,r)\cap(A\cap B)\neq\varnothing$
. Si $r < r_0$: $B(x,r_0)\subset B(x,r)$: alors. on a : $B(x,r)\cap A = B(x,r)$: donc
$B(x,r)\cap(A\cap B) = B(x,r)\cap B \neq \varnothing$ (car x$\in \overline{B}$)
Ainsi$\forall r>0\ B(x,r)\cap(A\cap B)\neq\varnothing$ d'où $x\in\overline{A\cap B}$.
En resumé $\forall x,\ x\in A\cap\overline{B}\Rightarrow x\in\overline{A\cap B}$: D'où $A\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$
On peut même donner un exemple dans $\mathbb{R}$ où cette inclusion n'est pas vérifiée lorsque A n'est pas un ouvert.
Dans $\mathbb{R}$ soit 3 réels $a<b<c$.
Prenons $A=]a,b]$ non ouvert et $B=]b,c]$.
On a : $A\cap\overline{B}=]a;b]\cap[b;c]=\{b\}$.
$A\cap\overline{B}=\overline{\varnothing}=\varnothing$ et il n'ya pas inclusion

b) Montrons que si A et B sont des ouverts alors $a(A\cap B)=a(A)\cap a(B)$

Soit $x\in a(A\cap B)$
$x\in a(A\cap B)\Rightarrow x\in a(A)$ et $x\in a(B)\Rightarrow a\in a(A)\cap a(B)$ (1)
Soit $x\in a(A)\cap a(B)$.

Exercice 2

$$f(x,y,z)=\frac{x^p y^q z^r}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \text{ et } p+q+r>1$$

1. Calculons $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$

Posons $\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\cos\varphi \\ z = R\sin\varphi \end{cases}$ $\theta,\varphi,R\in\mathbb{R}$. Si $(x,y,z)\to(0,0,0)$, $R\to 0$

$x^2+y2+z^2=R^2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2}=R$

Scanné avec CamScanner

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{R\to 0} \frac{R^{p+q+r}}{R}\left((\cos\theta\cos\varphi)^p(\sin\theta\cos\varphi)^q(\sin\varphi)^r\right)$$
$$= \lim_{R\to 0} R^{p+q+r-1}\left((\cos\theta\cos\varphi)^p(\sin\theta\cos\varphi)^q(\sin\varphi)^r\right)$$
$$= R^\alpha\left((\cos\theta\cos\varphi)^p(\sin\theta\cos\varphi)^q(\sin\varphi)^r\right) \text{ avec } \alpha = p+q$$
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$$

2. Soit $g(x,y,z) = ax + by + cz + |x|^p|y|^q|z|^r$
Montrons que g est différentiable en $(0,0,0)$
$\varepsilon(H) = \dfrac{g(x_0+H) - g(x_0) - L(H)}{||H||}$ avec $H = (h_1,h_2,h_3)$ et
$x_0 = (0,0,0)$
$L(H) = L(h_1,h_2,h_3) = h_1\dfrac{\partial g(0,0,0)}{\partial x} + h_2\dfrac{\partial g(0,0,0)}{\partial y} + h_3\dfrac{\partial g(0,0,0)}{\partial z}$
$\dfrac{\partial g(0,0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{g(x,0,0) - g(0,0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{ax}{x} = a$
$\dfrac{\partial g(0,0,0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\dfrac{g(0,y,0) - g(0,0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\dfrac{by}{y} = b$
$\dfrac{\partial g(0,0,0)}{\partial z} = \lim_{z\to 0}\dfrac{g(0,0,z) - g(0,0,0)}{z} = \lim_{z\to 0}\dfrac{cz}{z} = c$
$\Leftrightarrow L(H) = a\,h_1 + b\,h_2 + c\,h_3$ et $g(0,0,0) = 0$
$\varepsilon(H) = \dfrac{g(H) - L(H)}{||H||} = \dfrac{ah_1 + bh_2 + c_3 + |h_1|^p|h_2|^q|h_3|^r - (ah_1 + bh_2 + c\,h_3)}{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2 + (h_3)^2}}$
$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \varepsilon(H) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{|h_1|^p|h_2|^q|h_3|^r}{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2 + (h_3)^2}} = 0$ d'après la question 1. Par conséquent g est différentiable en $(0,0,0)$.

3. Soit $h(x,y,z) = x^2y^2 + (x^2 - y^2)z - 4z$
Déterminons les points critiques de h
$\dfrac{\partial h(x,y,z)}{\partial x} = 2xy^2 + 2xz$
$\dfrac{\partial h(x,y,z)}{\partial y} = 2yx^2 - 2yz$
$\dfrac{\partial h(x,y,z)}{\partial z} = x^2 - y^2 - 4$
$$\begin{cases} 2xy^2 + 2xz = 0 \\ 2yx^2 - 2yz = 0 \\ x^2 - y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = -z \\ x^2 = z \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Les points critiques sont : $A(2,0,0)$ et $B(-2,0,0)$

Soit H la matrice de h telle que :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial z^2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow H = \begin{pmatrix} 2y^2+2y & 4xy & 2x \\ 4xy & 2x^2-2z & -2y \\ 2x & -2y & 0 \end{pmatrix}$$

* Pour $A(2.0.0)$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les mineurs principaux diagonaux sont :$M_1 = |0| = 0$ et $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} =$

0 et $M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -128 < 0$

Par suite, on en déduit que le point A est un point col.

* Pour $B(-2.0.0)$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les mineurs principaux diagonaux sont :$M_1 = |0| = 0$ et $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} =$

0 et $M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -128 < 0$

Par suite, on en déduit que le point B est un point col.

Scanné avec CamScanner

Exercice 2

$f(x,y,z) = \frac{x^p y^q z^r}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ et p+q+r > 1

1- Calculons $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$

Posons $\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\cos\varphi \\ z = R\sin\varphi \end{cases}$ θ, φ , R $\in \mathbb{R}$. si $(x,y,z) \to (0,0,0)$. $R \to 0$.

$x^2+y^2+z^2 = R^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} = R$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{R\to 0} \frac{R^{p+q+r}}{R}((\cos\theta\cos\varphi)^p(\sin\theta\cos\varphi)^q(\sin\varphi)^r)$$
$$= \lim_{R\to 0} R^{p+q+r-1}((\cos\theta\cos\varphi)^p(\sin\theta\cos\varphi)^q(\sin\varphi)^r)$$
$$= R^{\alpha}((\cos\theta\cos\varphi)^p(\sin\theta\cos\varphi)^q(\sin\varphi)^r) \; avec \; \alpha = p-q-r$$
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0.$$

2- Soit $g(x,y,z) = ax+by+cz+|x|^p|y|^q|z|^r$

Montrons que g est différentiable en (0,0,0)

$\varepsilon(H) = \frac{g(x_0+H)-g(x_0)-L(H)}{\|H\|}$ avec $H = (h_1,h_2,h_3)$ et $x_0 = (0,0,0)$

L(H) = $L(h_1,h_2,h_3) = h_1\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial x} + h_2\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial y} + h_3\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial z}$

$\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x,0,0)-g(0,0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{ax}{x}$ a

$\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\frac{g(0,y,0)-g(0,0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{by}{y}$ b

$\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial z} = \lim_{z\to 0}\frac{g(0,0,z)-g(0,0,0)}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{cz}{z}$ c

$\Leftrightarrow$ L(H) = $ah_1+bh_2+ch_3$ et g(0,0,0) = 0

Scanné avec CamScanner

$\varepsilon(H) = \frac{g(H)-L(H)}{\|H\|} = \frac{ah_1+bh_2+ch_3+|h_1|^p|h_2|^q|h_3|^r-(ah_1+bh_2+ch_3)}{\sqrt{(h_1)^2+(h_2)^2+(h_3)^2}}$

$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \varepsilon(H) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{|h_1|^p|h_2|^q|h_3|^r}{\sqrt{(h_1)^2+(h_2)^2+(h_3)^2}} = 0$ d'après la question 1. Par conséquent g est différentiable en (0,0,0).

3- Soit $h(x,y,z) = x^2y^2 + (x^2-y^2)z - 4z$

Déterminons les points critiques de h

$\frac{\partial h(x,y,z)}{\partial x} = 2xy^2 + 2xz$

$\frac{\partial h(x,y,z)}{\partial y} = 2yx^2 - 2yz$

$\frac{\partial h(x,y,z)}{\partial x} = x^2 - y^2 - 4$

$$\begin{cases} 2xy^2 + 2xz = 0 \\ 2yx^2 - 2yz = 0 \\ x^2 - y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = -z \\ x^2 = z \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$$

Les points critiques sont A(2,0,0) et B(-2,0,0)

Soit H la matrice de h telle que :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 h(x,y,z)}{\partial z^2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow H = \begin{pmatrix} 2y^2+2y & 4xy & 2x \\ 4xy & 2x^2-2z & -2y \\ 2x & -2y & 0 \end{pmatrix}$$

* Pour A(2,0,0)

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les mineurs principaux diagonaux sont : $M_1 = |0| = 0$ et $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 0$

et $M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -128 < 0.$

Par suite , on en déduit que le point A est un point col.

* Pour B(-2,0,0)

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Scanné avec CamScanner

Les mineurs principaux diagonaux sont : $M_1 = |0| = 0$ et $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 0$

et $M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -128 < 0$

Par suite , on en déduit que le point B est un point col.

VALIDEUR

Scanné avec CamScanner

CORRECTION DE L'EXAMEN DE TOPOLOGIE 2018-2019_SESSION 1

ercice 1

pose $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, N(x,y) = \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}}$

1)

a) Montrons que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

- Montrons que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ N(x,y) \in \mathbb{R}^+$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \ et \ y^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}} \geq 0$

$\Rightarrow N(x,y) \geq 0$

$N(x,y) \in \mathbb{R}^+$

- Montrons que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, N(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$
- Supposons que $N(x,y) = 0$ et montrons que $(x,y) = (0,0)$

$N(x,y) = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}} = 0$

$\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{3}x = 0 \ et \ \frac{1}{2}y = 0$

$\Rightarrow x = 0 \ et \ y = 0 \ car \ \frac{1}{3} \neq 0 \ et \ \frac{1}{2} \neq 0$

d'ou $N(x,y) = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

- Supposons que $(x,y) = (0,0)$ et montrons que $N(x,y) = 0$

$(x,y) = (0,0) \Rightarrow x = 0 \ et \ y = 0$

$\Rightarrow x^2 = 0 \ et \ y^2 = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{3}x = 0 \ et \ \frac{1}{2}y = 0$

$\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}} = 0$

Finalement $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, N(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

- Montrez que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}^2, N[\lambda(x,y)] = |\lambda| N(x,y)$

On a : $N[\lambda(x,y)] = N(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{\frac{(x\lambda)^2}{9} + \frac{(\lambda y)^2}{4}} = |\lambda| \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}}$

Donc $N[\lambda(x,y)] = |\lambda| N(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}^2$

- Montrez que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ et \ \forall (x',y') \in \mathbb{R}^2, N[(x,y) + (x',y')] \leq N(x,y) + N(x',y')$

On a : $N(x,y) + N(x',y') = N[(x+x'),(y+y')]$

$= \sqrt{\frac{1}{9}(x+x')^2 + \frac{1}{4}(y+y')^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x'\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y'\right)^2}$

Scanné avec CamScanner

D'après l'inégalité de Minkowski, on a :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{h}(a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

Pour n=2, l'inégalité de Minkowski devient :

$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2} + \sqrt{b_1^2+b_2^2}$. Donc

$$N[(x,y)+(x',y')] = \sqrt{\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x'\right)^2+\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y'\right)^2} \leq \sqrt{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}} + \sqrt{\frac{(x')^2}{9}+\frac{(y')^2}{4}}$$
$$= N(x,y)+N(x',y')$$

- Donc $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \; et \; \forall(x',y')\in\mathbb{R}^2, N[(x,y)+(x',y')] \leq N(x,y)+N(x',y')$

Conclusion : *N*est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrons que N est équivalente à la norme équivalente,
N équivalent à N_2 si et seulement si, on a :
$\alpha N_2 \leq N \leq \beta N_2$

- On a $\frac{1}{9} \leq \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)$ donc $\frac{x^2}{9} \leq \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)x^2$ ①
- On a $\frac{1}{4} \leq \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)$ donc $\frac{y^2}{4} \leq \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)y^2$ ②

$$①+② \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \leq \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)x^2 + \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)y^2$$
$$\leq \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)(x^2+y^2)$$
$$\leq \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)N_2(x+y) \; (**)$$

- On a aussi $\frac{1}{9} \geq \min\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)$ donc $\frac{x^2}{9} \geq \min\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)x^2$ ③

- On a $\frac{1}{4} \geq \min\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)$ donc $\frac{y^2}{4} \geq \min\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)y^2$ ④

$$③+④ \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \geq \min\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)N_2(x+y) \quad (***)$$

D'après $(**)$ et $(***)$ on en déduit que

$$\min\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)N_2(x+y) \leq N(x,y) \leq \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)N_2(x+y)$$

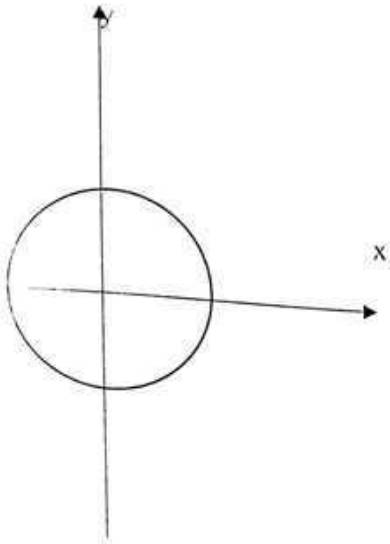
Conclusion : N et N_2 sont équivalente avec $\alpha = \min\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)$ et $\beta = \max\left(\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right)$

c) Désignons $B_f(0,1)$ par la boule unité associée
On a : $(x,y)\in B_f(0,1) \Leftrightarrow N(x,y) \leq 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}} \leq 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \leq 1 \text{ est une équation d'une Helipse de centre } (0,0) \text{ et de rayon}$$
$$x=0 \Rightarrow \frac{1}{4}y^2 = 1 \Rightarrow y = 2 \; ou \; y = -2$$
$$y=0 \Rightarrow \frac{1}{9}x^2 = 1 \Rightarrow x = 3 \; ou \; x = -3$$

Représentation

Scanné avec CamScanner



2)

a) montrons que $B_f(0,1) = \overline{B(0,1)}$

- Montrons que $\overline{B(0,1)} \subset B_f(0,1)$

$\forall x \in B(0,1), \|x-0\| < 1$

On sait que $B(0,1) \subset B_f(0,1) \Rightarrow \overline{B(0,1)} \subset \overline{B_f(0,1)}$

Comme la boule $B_f(0,1)$ est un fermé alors

$\overline{B(0,1)} \subset B_f(0,1)$

- Montrons que $B_f(0,1) \subset \overline{B(0,1)}$

Soit $x \in B_f(0,1)$. Ainsi on a $\|x-0\| \leq 1$

Si $\|x-0\| < 1 \Rightarrow x \in B(0,1)$

$\Rightarrow x \in \overline{B(0,1)}$

Si $\|x-0\| = 1$ alors posons $X_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)x$

Montrons que $X_n \in \overline{B(0,1)}$

$\|X_n - 0\| = \left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)x - 0\right\|$ or $\left(1-\frac{1}{n}\right) < 1$ et $\|x-0\| = 1$

$\|X_n - 0\| < 1 \Rightarrow X_n \in B(0,1) \subset \overline{B(0,1)}$

$\Rightarrow X_n \in \overline{B(0,1)}$

Montrons que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

$$\lim_{n\to+\infty} \|X_n - x\| = \lim_{n\to+\infty} \left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)x - x\right\|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\|x\| \text{ or } \|x\| = 1$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$\lim_{n\to+\infty} \|X_n - x\| = 0$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x d'où $x \in \overline{B(0,1)}$. *Donc* $B_f(0,1) \subset \overline{B(0,1)}$

Conclusion : De tout ce qui précède $B_f(0,1) = \overline{B_f(0,1)}$ et la distance, on a N équivalent à d alors d'après le cours $(\mathbb{R}^2, d)$ est un espace complet.

Exercice 2

$f(x,y) = \frac{x^3 e^{xy}}{x^2+y^2}$ Si $(x,y) \neq (0,0)$ *et* $f(0,0) = 0$

a) $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} e^{xy}$

Scanné avec CamScanner

- Déterminons l'ensemble de définition
  $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
  Etudions la continuité sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
  En (0,0)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 e^{xy}}{x^2+y^2} \text{ avec } e^{(xy)} \approx 1$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

Posons $x = rcos(\theta)$ et $y = rsin(\theta)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{(rcos(\theta))^3}{(rcos(\theta))^2 + (rsin(\theta))^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} rcos^3(\theta)$$

On a $|rcos^3(\theta)| \leq r$ or $\lim_{r\to 0} r = 0$

Donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$, f est continue en (0,0).

Posons $f_1(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ et $f_2(x,y) = e^{xy}$, f_1 est une fonction rationnelle donc continue sur

f_2 est une fonction exponentielle continue sur $\mathbb{R}^2$.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.De tout ce qui précède on en déduit que f est continue sur

b) Etudions la dérivabilité en (0,0).

f est dérivable en (0,0) suivant tout vecteur v si et seulement si : $\lim_{t\to 0}\left(\frac{f((0,0)+tv)-f((0,0)}{t}\right)$

Soit $v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f((0,0)+tv)-f((0,0)}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t^3 v_1^3 e^{t^2 v_1 v_2}}{t^2(v_1^2+v_2^2)}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t v_1^3 e^{t^2 v_1 v_2}}{(v_1^2+v_2^2)}\right) = 0$$

$$\lim_{t\to(0,0)}\left(\frac{f((0,0)+tv)-f((0,0)}{t}\right) = 0$$

$soit\ v = (v_1, v_2) = (0,0)$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f((0,0)+t(0,0))-f((0,0)}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{0}{t}\right) = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

Conclusion : f est dérivable suivant tout vecteur.

c) Différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$f(x,y) = \frac{x^3 e^{xy}}{x^2+y^2}$ avec $f_1(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ et $f_2(x,y) = e^{xy}$

f_1 est une fonction rationnelle donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
f_2 est une fonction exponentielle différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
Conclusion : f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Scanné avec CamScanner

$(0,0)$

$$= \frac{1}{\|h\|}[f(a+h) - f(a) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)]$$

$$) = \frac{x^3 e^{xy}}{x^2+y^2} \; si \; (x,y) = (0,0) et \; f(0,0) = 0$$

$$(0,0) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x^3}{x^2}-0}{x}\right)$$

$$,0) = 1$$

$$,0) \lim_{y\to 0}\left(\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\frac{0}{y^2}-0}{y-0}\right)$$

$$,0) = 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}[\frac{h_1^3 e^{h_1 h_2}}{h_1^2+h_2^2} - h_1] \text{ avec } \quad e^{h_1 h_2} \approx 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}[\frac{h_1^3 - h_1^3 - h_1 h_2^2}{h_1^2+h_2^2}]$$

$$= \frac{-1}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}(h_1 h_2^2)$$

$\text{ons } h_1 = h_2 \Rightarrow \varepsilon(h) = \frac{-1}{(2h_1^2)^{\frac{3}{2}}}(h_1^3) = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Ainsi $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) \neq 0$

$\text{ors } f$ n'est pas différentiable en $(0,0)$.

2) Dérivée partielle seconde

$$(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}$$

$$,y) = \frac{x^4 e^{xy}(x^2+y^2) - 2yx^7 e^{xy}}{(x^2+y^2)^2}$$

$$,0) = x^2. \text{ Donc } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = 0$$

$$(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}$$

$$,y) = \frac{(3x^2 e^{xy} + yx^3 e^{xy})(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$,y) = 0. \; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$ alors d'après l'égalité de Schwartz les différentielles seconde existe.

Scanné avec CamScanner

$$g(x,y) = (x^2 + y^2) - 8xy$$

- Déterminons les points critiques

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x(x^2 + y^2) - 8y$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4y(x^2 + y^2) - 8x$$

Résolvons le système donné par ses dérivées

$$\begin{cases} 4x(x^2 + y^2) - 8y = 0 \ (1) \\ 4y(x^2 + y^2) - 8x = 0 \ (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x^2 + y^2) = 2y \ (1) \\ y(x^2 + y^2) = 2x \ (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2) = \frac{2}{x}y \ (1) \\ (x^2 + y^2) = \frac{2}{y}x \ (2) \end{cases}$$

$(1)=(2) \Rightarrow \frac{2y}{x} = \frac{2x}{y}$

$\Rightarrow y^2 - x^2 = 0$

$\Rightarrow (y - x)(y + x) = 0$

$\Rightarrow x = y \ ou \ x = -y$

$1^{er} \ cas \ x = y$

$(1) \Rightarrow x \times 2x^2 = 2x$

$\Rightarrow 2x^3 - 2x = 0$

$\Rightarrow 2x(x^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \ ou \ x = 1 \ ou \ x = -1$

Les points critiques correspondant sont :

$A(1,1), B(-1,-1) \ et \ C(0,0)$

$2^{eme} \ cas$

$(2) \Rightarrow y \times 2y^2 = -2y$

$\Rightarrow 2y^3 + 2y = 0$

$\Rightarrow 2y(y^2 + 1) = 0$

$\Rightarrow y = 0 \ ou \ y^2 + 1 = 0$ est impossible.

Le point critique est : $D(0,0)$.

Conclusion : Les points critique sont : $A(1,1), B(-1,-1) \ et \ C(0,0)$.

- Existence d'extrema

g est une fonction polynôme donc elle est de classe C^∞. En particulier, g est de classe C^2.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 + 4y^2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 + 4x^2$$

Scanné avec CamScanner

$(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) = 8xy - 8$

- Le type d'extrema
- Au point $A(1,1)$

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1) = 16 \\ t = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,1) = 16 \\ s = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,1) = 0 \end{cases}$$

$s^2 - rt = -256 < 0$, g présente un extremum relatif strict en $(1,1)$.

- Au point $B(-1,-1)$

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(-1,-1) = 16 \\ t = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(-1,-1) = 16 \\ s = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(-1,-1) = 0 \end{cases}$$

$s^2 - rt = -256 < 0$, g présente un extremum relatif strict en $(-1,-1)$.

- Au point $C(0,0)$

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) = 0 \\ t = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0) = 0 \\ s = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) = -8 \end{cases}$$

$s^2 - rt = 64 > 0$, g ne présente pas d'extremum en $(0,0)$. Mais il existe un point col.

Scanné avec CamScanner

Université FHB - Cocody Année Universitaire 2018-2019
UFR Mathématique-Informatique

LICENCE 2
UE : Fonction de plusieurs variables réelles
ECUE : Topologie et Cacul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
Examen Seconde Session

Exercice 1 (10 points)

1. a) $\mathring{A} \cap F_r(A) = \mathring{A} \cap (\overline{A} \cap C_{\mathbb{R}^n}^{\mathring{A}}) = \overline{A} \cap (A \cap C_{\mathbb{R}^n}^{\mathring{A}}) = \overline{A} \cap \emptyset = \emptyset$

   b) $\mathring{A} \cup F_r(A) = \mathring{A} \cup (\overline{A} \cap C_{\mathbb{R}^n}^{\mathring{A}}) = (\mathring{A} \cup \overline{A}) \cap (\mathring{A} \cup C_{\mathbb{R}^n}^{\mathring{A}}) = (A \cup \overline{A}) \cap \mathbb{R}^n =$
   $= \mathring{A} \cup \overline{A} = \overline{A}$ car $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$
   Si A est fermée, alors $\overline{A} = A$. Donc $\mathring{A} \cup F_r(A) = A$

   c) $F_r(\mathring{A}) = \overline{A} \cap \overline{C_{\mathbb{R}^n}^{\mathring{A}}} = \overline{A} \cap \overline{C_{\mathbb{R}^n}^{\mathring{A}}}$.
   ⋆ Supposons A ouverte. Alors $C_{\mathbb{R}^n}^{A}$ est fermé.
   Donc $F_r(\mathring{A}) = \overline{\mathring{A}} \cap C_{\mathbb{R}^n}^{\mathring{A}} = \overline{\mathring{A}} \cap C_{\mathbb{R}^n}^{\mathring{A}}$.
   Or $\mathring{A} \subset \overline{A} \Rightarrow F_r(\mathring{A}) \subset \overline{A} \cap C_{\mathbb{R}^n}^{A} = \emptyset \Rightarrow F_r(A) = \emptyset$.
   ⋆ Supposons A fermée. Alors, $\overline{A} = A$
   Donc $F_r(\mathring{A}) = \mathring{A} \cap \overline{C_{\mathbb{R}^n}^{\mathring{A}}} = \mathring{A} \cap C_{\mathbb{R}^n}A$. Or $C_{\mathbb{R}^n}A \subset C_{\mathbb{R}^n}^{A}$.
   Alors $F_r(\mathring{A}) \subset \mathring{A} \cap C_{\mathbb{R}^n}^{A} = \emptyset \Rightarrow F_r(A) = \emptyset$.

   d) $F_r(C_{\mathbb{R}^n}^{A}) = \overline{C_{\mathbb{R}^n}^{A}} \cap \overline{A} = \overline{A} \cap \overline{C_{\mathbb{R}^n}^{A}} = F_r(A)$

   e) $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$
   $\star \mathring{A} = [0,1] \cap \mathring{\mathbb{Q}} =]0,1[\cap \mathring{\mathbb{Q}}$.
   Or $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall r > 0,]x - r, x + r[\not\subseteq \mathbb{Q}$ car contient des irrationnels.
   Donc $\mathring{Q} = \emptyset$.
   Alors $\boxed{\mathring{A} = \emptyset.}$
   $\star F_r(A) = \overline{A} \cap C_{\mathbb{R}}^{A} = \overline{A} \cap \mathbb{R} = \overline{A}$
   $\overline{A} = \overline{[0,1] \cap \mathbb{Q}} \subset \overline{[0,1]} \cap \overline{\mathbb{Q}} = [0,1] \cap \mathbb{R} = [0,1]$: et $\forall x \in [0,1], \forall r > 0,]x - r, x + r[\cap ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \neq \emptyset$ car contient des rationnels éléments de $[0,1]$. Alors $x \in \overline{A}$. Donc $[0,1] \subset \overline{A}$.
   Finalement $\overline{A} = [0,1]$ et $\boxed{F_r(A) = [0,1]}$

2. a) Soit $x \in A \cap \overline{B}$.
   $\forall V \in V(x), A \cap V \in V(x)$ car A ouvert contenant x est aussi un voisinage de x.
   Comme $x \in \overline{B}$, alors $(A \cap V) \cap B \neq \emptyset$. Donc $(A \cap B) \cap V \neq \emptyset$.
   Ainsi $x \in \overline{A \cap B}$. Donc $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

   b) (i) $A \cap B \subset A \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A}$
   $A \cap B \subset B \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{B}$

Scanné avec CamScanner

Donc $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$ (1)
$F_r(A)\cap F_r(B)=\emptyset\Leftrightarrow(\overline{A}\cap\overline{C^A_{\mathbb{R}^n}})\cap(\overline{B}\cap\overline{C^B_{\mathbb{R}^n}})=\emptyset\Leftrightarrow(\overline{A}\cap\overline{B})\cap(\overline{C^A_{\mathbb{R}^n}}\cap\overline{C^B_{\mathbb{R}^n}})=\emptyset$
Soit $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$.
Alors $x\notin\overline{C^A_{\mathbb{R}^n}}\cap\overline{C^B_{\mathbb{R}^n}}=C^{\mathring{A}}_{\mathbb{R}^n}\cap C^{\mathring{B}}_{\mathbb{R}^n}=C^{\mathring{A}\cup\mathring{B}}_{\mathbb{R}^n}$. Donc $x\in\mathring{A}\cup\mathring{B}$.
⋆ Si $x\in\mathring{A}$, comme $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$, alors $x\in\mathring{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}\subset\overline{A\cap B}$
⋆ Si $x\in\mathring{B}$, alors $x\in\mathring{B}\cap\overline{A}\subset\overline{B\cap A}\subset\overline{B\cap A}$.
Donc $x\in\overline{A\cap B}$.
Ainsi $\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$ (2)
(1) et (2) $\Rightarrow\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cap B}$ si $F_r(A)\cap F_r(B)=\emptyset$.

(ii) $F_r(A)\cap F_r(B)=\emptyset\Rightarrow F_r(C^A_{\mathbb{R}^n})\cap F_r(C^B_{\mathbb{R}^n})=\emptyset$
$\Rightarrow\overline{C^A_{\mathbb{R}^n}}\cap\overline{C^B_{\mathbb{R}^n}}=\overline{C^A_{\mathbb{R}^n}\cap C^B_{\mathbb{R}^n}}\Rightarrow C^{\mathring{A}}_{\mathbb{R}^n}\cap C^{\mathring{B}}_{\mathbb{R}^n}=\overline{C^{A\cup B}_{\mathbb{R}^n}}$
$\Rightarrow C^{\mathring{A}\cup\mathring{B}}_{\mathbb{R}^n}=C^{A\cup B}_{\mathbb{R}^n}\Rightarrow\mathring{A}\cup\mathring{B}=A\cup B$.

Exercice 2 (10 points)

1) $f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$
a) * Sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ f est continue car est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas **(0.5 points)**
* Au point $(0,0)$
En coordonnées polaires $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$
$f(x,y)=r^2\cos\theta\sin\theta\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=F(r,\theta)$
$|F(r,\theta)|\leq 2r^2\Rightarrow\lim_{r\to0}F(r,\theta)=0$
Alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$
Donc f est continue au point $(0,0)$ **(0.5 points)**
Finalement f est continue sur $\mathbb{R}^2$
b) * Sur $\mathbb{R}\{(0,0)\}$ f est différentiable car fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas **(0.5 points)**
*Au point $(0,0)$
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$ **(0.25 points)**
$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$ **(0.25 points)**
Soit $\varepsilon(h)=\frac{f(0+h)-f(0,0)-h_1\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-h_2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\|h\|}$ où $h=(h_1,h_2)$
$\varepsilon(h)=\frac{f(h)}{\|h\|}=h_1h_2\frac{h_1^2-h_2^2}{h_1^2+h_2^2}\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ avec $\|h\|=\sqrt{h_1^2+h_2^2}$
En coordonnées polaires $\begin{cases}h_1=r\cos\theta\\h_2=r\sin\theta\end{cases}$
$\varepsilon(h)=r\cos\theta\sin\theta\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)$
$|\varepsilon(h)|\leq 2r$ et $\lim_{r\to0}2r=0$
Alors $\lim_{h\to0}\varepsilon(h)=0$. Donc f est différentiable en $(0,0)$ **(0.5 points)**
Finalement f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$

Scanné avec CamScanner

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + 4\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ **(0.25 points)**

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2} = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 4\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ **(0.25 points)**

* Sur $\mathbb{R}^2\{(0,0)\}$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues car fonctions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas. **(0.5 points)**

* En $(0,0)$. En coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = r\sin\theta(\cos^4\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta - \sin^4\theta)$

$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 6r$ et $\lim_{r\to 0} 6r = 0$

Alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue au point $(0,0)$ **(0.25 points)**

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -r\cos\theta(\sin^4\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta - \cos^4\theta)$

$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq 6r$ et $\lim_{r\to 0} 6r = 0$

Alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue au point $(0,0)$ **(0.25 points)**

Finalement $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

d)

$\frac{\partial f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x} = 0$ **(0.5 points)**

$\frac{\partial f}{\partial y^2}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = 0$ **(0.5 points)**

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = -1$ **(0.5 points)**

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 1$ **(0.5 points)**

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ donc f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ d'après le **théorème de schwarz (0.5 points)**

2) a)

$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}(2x^4 - 2y^4) = 2\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}(x^2+y^2)(x^2-y^2) = 2\frac{xy}{x^2-y^2}(x^2-y^2) = 2f(x,y)$

Donc f est une solution de (E) **(0.25 points)**

b) $\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = x + y \end{cases}$

$g(x,y) = G(u,v) = (Go\varphi)(x,y)$ où $\varphi(x,y) = (u,v)$

Donc $J_g(x,y) = J_G(\varphi(x,y)) \times J_\varphi(x,y) = J_G(u,v) \times J_\varphi(x,y)$ **(0.25 points)**

Alors $\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{x}\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial v} \end{cases}$

En remplaçant dans l'équation (E), on obtient :

$\boxed{v\frac{\partial G}{\partial v}(u,v) = 2G(u,v)}$ (E_1) **(1.5 points)**

Scanné avec CamScanner

c) $(E_1) \Leftrightarrow \frac{dG}{G} = \frac{2}{v} \Rightarrow \ln|G| = \ln(v^2) \Rightarrow \boxed{G(u,v) = k(u) \times v^2}$ **(0.5 points)**

Donc $\boxed{g(u,v) = k\left(\frac{u}{v}\right) \times (x+y)^2}$ **(0.5 points)**

d) $f(x;y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \left(\frac{y}{x}\right)\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \times x^2$

$f(x,y) = k\left(\frac{y}{x}\right) \times (x+y)^2$ où $\boxed{k(u) = u \times \frac{1-u^2}{1+u^2} \times \frac{1}{(1+u)^2}}$ **(0.5 points)**

Scanné avec CamScanner

Topologie et Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$: 2019 – 2020

Exercice 2

1) a) Déterminons les valeurs de λ pour lesquelles f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Les fonctions $x \to f(x,y)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Etude en $x_0 = (0,0)$.

f est continue x_0 si et seulement si :

$\lim_{(x,y)\to x_0} f(x,y) = f(0,0) = 0.$

Posons $\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsin(\theta) \end{cases}$ .Alors quand $(x,y) \to x_0, r \to 0$ alors,

$\lim_{(x,y)\to x_0} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r,\theta)$

$\lim_{(x,y)\to x_0} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{(rcos\theta)(r^2 \sin^2\theta)}{(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^\lambda}$

$\lim_{(x,y)\to x_0} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r^{3-2\lambda} cos\theta \sin^2\theta.$

car $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Et $\lim_{r\to 0} r^{3-2\lambda} cos\theta \sin^2\theta = 0$ si :

$3 - 2\lambda > 0 \Rightarrow \frac{3}{2} > \lambda \Rightarrow \lambda \in]-\infty; \frac{3}{2}[$

Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si $\lambda \in]-\infty; \frac{3}{2}[$

b) La fonction $x \to f(x,y)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Etude en $x_0 = (0,0)$

f est différentiable en x_0 s'il existe une application linéaire continue L de $\mathbb{R}^2$ dans
Telle que $\forall\, h \in \mathbb{R}^2, f(x_0+h) - f(x_0) = L(h) + \|h\|e(h)$ avec $\lim_{h\to 0} e(h) = 0.$

C'est-à-dire :

$$\lim_{h\to(0,0)} e(h) = \lim_{h\to(0,0)} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)}{\|h\|}\right) = 0$$

Posons $h = (l,k)$ alors

$f(x_0+h) = f(l,k)$ et $f(x_0) = 0$

Ainsi pour que : f soit différentiable, il faut que :

$$\lim_{h\to(0,0)} \left(\frac{f(l+h) - L(h)}{\|h\|}\right) = 0$$

Déterminons $L(h)$

$L(h) = J_f h$ avec $J_f = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \quad \frac{\partial f(x_0)}{\partial y}\right)$

Où J_f est la matrice jacobienne de f en x_0.

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)}{x} = 0$$

Scanné avec CamScanner

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y} = 0$$

d'où $L(h) = 0$.

Alors : $\lim\limits_{(l,k)\to x_0} e(l,k) = \lim\limits_{(l,k)\to x_0}\left(\frac{f(l,k)}{\sqrt{l^2+k^2}}\right)$

Posons $\begin{cases} l = r\cos(\theta) \\ k = r\sin(\theta) \end{cases}$

Quand $(l,k)\to x_0, r\to 0$

Donc $\lim\limits_{(l,k)\to x_0}\left(\frac{f(l,k)}{\sqrt{l^2+k^2}}\right) = \lim\limits_{r\to 0}\left(\frac{lk^2}{(l^2+k^2)\sqrt{l^2+k^2}}\right)$

$$\lim_{(l,k)\to x_0}\left(\frac{f(l,k)}{\sqrt{l^2+k^2}}\right) = \lim_{r\to 0}\left(\frac{r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{r^{2\lambda+1}}\right)$$

$$\lim_{(l,k)\to x_0}\left(\frac{f(l,k)}{\sqrt{l^2+k^2}}\right) = \lim_{r\to 0}\cos(\theta)\sin^2(\theta)\ r^{2-2\lambda}$$

Pour que : $\lim\limits_{r\to 0}\cos(\theta)\sin^2(\theta)\ r^{2-2\lambda} = 0$, il faut que :

$$2-2\lambda > 0 \Rightarrow 2 > 2\lambda \Rightarrow \lambda \in]-\infty, 1[$$

...nclusion : f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Si $\lambda \in]-\infty; 1[$

...) **Déterminons les valeurs de λ pour lesquelles f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.**

On a :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y^2(x^2+y^2)^\lambda - 2\lambda x^2y^2(x^2+y^2)^{\lambda-1}}{(x^2+y^2)^{2\lambda}}$$

...près calcul on a :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x^2y^2+y^4-2\lambda x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\lambda+1}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2x^3y+2xy^3-2\lambda xy^3}{(x^2+y^2)^{\lambda+1}}$$

...dérivées partielles de f par rapport à x et y sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0,0\}$

...ude en (0,0)

...lculons $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

Posons $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ $\theta \in \mathbb{R}$

Quand $(x,y)\to(0,0)$, $r\to 0$

$$\lim_{(0,0)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{r\to 0}\left(\frac{r^4(\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta-2\lambda\cos^2\theta\sin^2\theta)}{r^{2\lambda+2}}\right)$$

Scanné avec CamScanner

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{r\to 0}\left(r^{1-\lambda}(\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta - 2\lambda\cos^2\theta\sin^2\theta)\right)$$

Pour que :

$$\lim_{r\to 0}\left(r^{1-\lambda}(\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta - 2\lambda\cos^2\theta\sin^2\theta)\right) = 0$$

Il faut que :

$$1-\lambda > 0 \Rightarrow 1 > \lambda \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{r\to 0}\left(r^{1-\lambda}(2\cos^3\theta\sin\theta + 2\cos\theta\sin^3\theta - 2\lambda\cos\theta\sin^3\theta)\right)$$

Pour que $\lim_{r\to 0}\left(r^{1-\lambda}(2\cos^3\theta\sin\theta + 2\cos\theta\sin^3\theta - 2\lambda\cos\theta\sin^3\theta)\right) = 0$

Il faut que : $1-\lambda > 0 \Rightarrow 1 > \lambda \quad (2)$

De (1) et (2), on déduit que :

f est de classe C^1 si $\lambda \in]-\infty; 1[$.

d) **Montrons que si $\lambda = 1$ alors f est dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur sans être différentiable en ce point.**

Pour $\lambda = 1$, $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

Soit $V = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^{*2}$

On a : $\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(0,0)+tv)-f(0,0)}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(tp_1,tp_2)}{t}\right)$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{t^3p_1p_2^2}{t(t^2(p_1^2+p_2^2))}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{p_1p_2^2}{(p_1^2+p_2^2)}\right) = \frac{p_1p_2^2}{(p_1^2+p_2^2)}$$

donc, f est dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur mais d'après 2) , $1 \notin]-\infty; 1[$. Alors f n'est pas différentiable.

Conclusion : f est dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur sans être différentiable en $(0,0)$.

Scanné avec CamScanner

Licence2 : 2018-2019

ECUE : Calcul Intégral dans $\mathbb{R}^n$

UE : Fonctions de plusieurs variables réelles

2è session, mars 2020, Durée : 01H15

Exercice 1)

Considère les domaines D_1 et D_2 définis par :
$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq x,\ x^2+y^2 \leq 4\}$; $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y) \in [0,2]^2,\ y \geq x,\ x^2+y^2 \geq 4\}$.

1) Dessiner et hachurer D_1 et D_2.

2) Calculer les intégrales $I_1 = \iint_{D_1} \frac{x}{1+x^2+y^2} dxdy$ et $I_2 = \iint_{D_2} \frac{x}{1+x^2+y^2} dxdy$

3) Calculer l'intégrale $J = \iiint_{\Delta} e^{-x-y-z} dxdydz$ où $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z) \in [0,\ln 2]^3\}$

Exercice 2

La forme différentielle ω définie par : $\omega(x,y) = \frac{x-y}{x} dx + dy$.

1) Déterminer le domaine de définition U de ω. U est-il étoilé ? Justifier.

2) Calculer la différentielle extérieure $d\omega$ de ω. ω est-elle fermée ? Justifier.

3) Déterminer la fonction f telle que la forme $\alpha(x,y) = f(x)\omega(x,y)$ soit fermée et $f(1) = 2$. La forme α est-elle exacte ? Justifier.

4) Déterminer une fonction g telle que $dg = \alpha$ sur un sous-ensemble ouvert de U.

5) Calculer $\int_\gamma \alpha$ l'intégrale curviligne de α le long de la courbe parametrée γ définie par : $\gamma : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}^2$; $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

Scanné avec CamScanner

Licence 2 : 2019-2020

Examen : Calcul Intégral dans $\mathbb{R}^n$

UE : Fonction de plusieurs variables réelles
Session de décembre 2020, Durée : 01H15

Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes, répondre par Vrai ou Faux.
NB : Une bonne réponse apporte 1 point, une mauvaise réponse -0,5 point et une absence de répone 0 p

1°) Toute forme exacte est fermée.

2°) L'intégrale curviligne d'une forme différentielle le long d'une courbe fermée est nulle.

3°) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0.0)\}$ est étoilé.

Exercice 2

Soit la forme différentielle ω définie par :
$\omega(x,y,z) = yzdx + xzdy + xydz$.

1°) Déterminer le domaine de définition U de ω. U est-il convexe ? U est-il étoilé ? Justifier.

2°) Montrer que ω est fermée.

3°) En déduire que ω est exacte et déterminer f telle que $df = \omega$.

4°) Calculer $\int_\gamma \omega$ où $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)\,; t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ par deux méthodes différentes.

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

1°) $I = \iint_D x^2 y dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0,\ y \leq x,\ x+y \leq 1\}$

2°) $J = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

3°) $K = \iiint_D z dxdydz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 \leq 2,\ z \geq 0\}$.

Scanné avec CamScanner

Université FHB UFR Maths-Informatique

Licence 2: 2020-2021

ECUE: Calcul Intégral dans $\mathbb{R}^n$

UE: Fonction de plusieurs variables réelles
1ère session, 09 août 2021, Durée : $01H15$

Exercice 1

On considère les domaines D_1 et D_2 définis par:
$D_1 = \{(x,y) \in [0,1]^2 / x^2 + y^2 \geq 1\}$; $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1) Dessiner et hachurer D_1 et D_2.

2) Calculer les intégrales $I_1 = \iint_{D_1} \frac{y}{1+x^2+y^2} dxdy$ et $I_2 = \iint_{D_2} \frac{y}{1+x^2+y^2} dxdy$

Exercice 2

Calculer le volume de la demi-sphère de rayon R définie par

$$\mathcal{L} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ z \geq 0\}.$$

Exercice 3

On considère la forme différentielle de degré 1 définie par
$\omega(x,y,z) = (\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2})dx + (\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2})dy + (\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2})dz$

1) Déterminer le domaine de définition U de ω. U est-il convexe ?
2) La forme ω est-elle fermée ? exacte ? Justifier.
3) Déterminer une fonction f telle que $df = \omega$ sur $V = (\mathbb{R}_+^*)^3$.
4) Calculer $\int_\gamma \omega$ l'intégrale curvilligne de ω le long de la courbe parametrée γ définie par : $\gamma : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}^3$; $\gamma(t) = (1-t, 1+t, 1+t^2)$.

Scanné avec CamScanner

Université FHB UFR Maths-Informatique

Licence 2: 2020-2021

ECUE: Calcul Intégral dans $\mathbb{R}^n$

UE: Fonction de plusieurs variables réelles
2ème session, 12 octobre 2021, Durée : $01H15$

Exercice 1

On considère les domaines D_1 et D_2 définis par:
$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 1, 0 \leq y \leq x,\ x^2+y^2 \geq 1\}$:
$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq x,\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

1) Dessiner et hachurer D_1 et D_2.

2) Calculer les intégrales $I_1 = \iint_{D_1} \frac{y}{1+x^2+y^2} dxdy$ et $I_2 = \iint_{D_2} \frac{y}{1+x^2+y^2} dxdy$

Exercice 2

Calculer le volume de la demi-sphère de rayon R définie par

$$\mathcal{L} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ z \leq 0\}.$$

Exercice 3

On considère la forme différentielle de degré 1 définie par
$\omega(x,y,z) = (\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2})dx + (\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2})dy + (\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2})dz$
1) Déterminer le domaine de définition U de ω. U est-il convexe ?
2) La forme ω est-elle fermée ? exacte ? Justifier.
3) Déterminer une fonction f telle que $df = \omega$ sur $V = (\mathbb{R}_+^*)^3$.
4) Calculer $\int_\gamma \omega$ l'intégrale curvilligne de ω le long de la courbe paramétrée γ définie par : $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$; $\gamma(t) = (1+\cos 2t, 1+\sin 2t, 1+\sin 2t \cos 2t)$.

Scanné avec CamScanner

Université FHB UFR Maths-Informatique

Licence 2 : 2021-2022

Calcul Intégral dans $\mathbb{R}^n$

UE : Fonction de plusieurs variables réelles
1ère Session, Durée : 01H15

Exercice 1

On considère les formes différentielles :
$w_1(x,y,z) = x^2yzdy\wedge dz + y^2xzdx\wedge dz + z^2xydx\wedge dy$
$w_2(x,y,z) = (x+\frac{z}{x^2y})dx + (y+\frac{z}{y^2x})dy + (z-\frac{1}{xy})dz$

1°) Les formes différentielles w_1 et w_2 sont-elles fermées ? exactes ? Justifier.

2°) Soit w_3 la restriction de w_2 à l'ouvert $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x>0, y>0\}$.
Montrer que w_3 est exacte et déterminer f telle que $df = w_3$ et $f(1,1,0) = 0$.

3°) Calculer de deux manières différentes l'intégrale curviligne $\int_\gamma w_3$ de w_3 le long de la courbe paramétrée $\gamma(t) = (t,t^2,t^3)$; $t \in [1,3]$.

Exercice 2

Soit le domaine $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq x,\ x+y \leq 2\}$.

1°) Représenter graphiquement et hachurer le domaine Δ.

2°) Calculer l'intégrale $I = \iint_\Delta xydxdy$.

3°) Calculer le volume du domaine $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ R \in \mathbb{R}\}$.

Scanné avec CamScanner

Licence 2 : 2021-2022

ECUE : Calcul Intégral dans $\mathbb{R}^n$

UE : Fonction de plusieurs variables réelles

2è Session, Durée : 01H15

Exercice 1

On considère les formes différentielles :

$w_1(x,y,z) = xyzdy \wedge dz + yxzdx \wedge dz + zxydx \wedge dy$

$w_2(x,y,z) = (\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2})dx + (\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2})dy + (\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2})dz$

1°) Les formes différentielles w_1 et w_2 sont-elles fermées ? exactes ? Justifier.

2°) Soit w_3 la restriction de w_2 à l'ouvert $V = (\mathbb{R}_+^*)^3$.
Montrer que w_3 est exacte et déterminer f telle que $df = w_3$ et $f(1,1,1) = 0$.

3°) Calculer l'intégrale curviligne $\int_\gamma w_3$ de w_3 le long de la courbe paramétrée γ définie par γ : $\gamma(t) = (1-t, 1+t, 1+t^2)$.

Exercice 2

Soit le domaine $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \geq x,\ x+y \leq 2\}$.

1°) Représenter graphiquement et hachurer le domaine Δ.

2°) Calculer l'intégrale $I = \iint_\Delta ydxdy$.

3°) Calculer le volume du domaine $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z \leq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ R \in \mathbb{R}\}$.

Scanné avec CamScanner

Licence2 : 2018-2019

ECUE : Calcul Intégral dans $\mathbb{R}^n$

UE : Fonctions de plusieurs variables réelles
2è session, mars 2020, Durée : 01H15
CORRECTION + BAREME

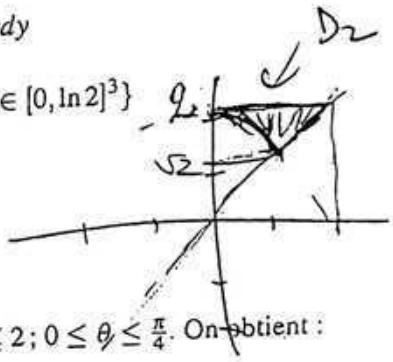
Exercice 1 (08 points)

On considère les domaines D_1 et D_2 définis par :
$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq x,\ x^2+y^2 \leq 4\}$; $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y) \in [0,2]^2,\ y \geq x,\ x^2+y^2 \geq 4\}$.

1) Dessiner et hachurer D_1 et D_2.

2) Calculer les intégrales $I_1 = \iint_{D_1} \frac{x}{1+x^2+y^2} dxdy$ et $I_2 = \iint_{D_2} \frac{x}{1+x^2+y^2} dxdy$

3) Calculer l'intégrale $J = \iiint_{\Delta} e^{-x-y-z} dxdydz$ où $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z) \in [0,\ln 2]^3\}$



Correction :

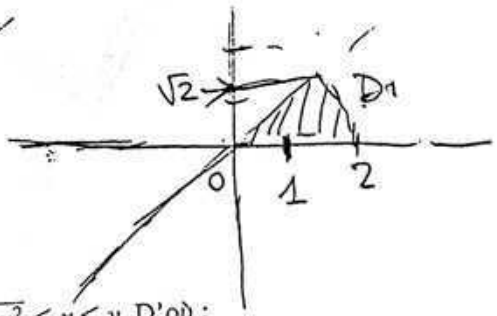
1) Dessiner et hachurer D_1 et D_2. (0,5pt +0,5pt)

2) • $I_1 = \iint_{D_1} \frac{x}{1+x^2+y^2} dxdy$

En coordonnées polaires, on pose $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$. On a : $0 \leq r \leq 2$; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. On obtient :

$$I_1 = \int_0^2 \frac{r^2}{1+r^2} dr \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta d\theta$$
$$= \int_0^2 (1 - \frac{1}{1+r^2}) dr \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta d\theta$$
$$= \left[r - arctan(r)\right]_0^2 \times \left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2 - arctan(2)\right)} \text{ (02pts)}$$



• $I_2 = \iint_{D_2} \frac{x}{1+x^2+y^2} dxdy$

On fixe $y \in [\sqrt{2};2]$; on a alors $\sqrt{4-y^2} \leq x \leq y$. D'où :

$$I_2 = \int_{\sqrt{2}}^2 \left[\int_{\sqrt{4-y^2}}^y \frac{x}{1+x^2+y^2} dx\right] dy.$$

Par ailleurs, $\int_{\sqrt{4-y^2}}^y \frac{x}{1+x^2+y^2} dx = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2+y^2)\right]_{\sqrt{4-y^2}}^y = \frac{1}{2}\ln(1+2y^2) - \frac{1}{2}\ln 5$. Donc

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^2 \ln(1+2y^2) dy - \frac{1}{2}\ln 5 \int_{\sqrt{2}}^2 dy.$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\boxed{I_2 = \ln(\tfrac{9}{5}) + \sqrt{2} - 2 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(arctan(2\sqrt{2}) - arctan(2)\right)} \text{ (03pts)}$$

Scanné avec CamScanner

3°) Licence Master Doctorat $\iiint_\Delta e^{-x-y-z}dxdydz$ où $\Delta = \{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / (x;y;z)\in[0;\ln 2]^3\}$ >>

D'après le théorème de Fubini,

$J = \int_0^{\ln 2} e^{-x}dx \times \int_0^{\ln 2} e^{-y}dy \times \int_0^{\ln 2} e^{-z}dz = \left(\int_0^{\ln 2} e^{-x}dx\right)^3$

$\boxed{J = (1-\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{8}$ (02pts)

Exercice 2 (12 points)

Soit la forme différentielle ω définie par : $\omega(x,y) = \frac{x-y}{x}dx + dy$.

1°) Déterminer le domaine de définition U de ω. U est-il étoilé ? Justifier.

2°) Calculer la différentielle extérieure $d\omega$ de ω. ω est-elle fermée ? Justifier.

3°) Déterminer la fonction f telle que la forme $\alpha(x,y) = f(x)\omega(x,y)$ soit fermée et $f(1) = 2$. La forme est-elle exacte ? Justifier.

4°) Déterminer une fonction g telle que $dg = \alpha$ sur un sous-ensemble ouvert de U.

5°) Calculer $\int_\gamma \alpha$ l'intégrale curviligne de α le long de la courbe parametrée γ définie par : $\gamma : [0, \frac{\pi}{4}] \to$ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

Correction :

1°) $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \setminus (OJ)$ (0,5pt)

U est non étoilé car aucun point de $\mathbb{R}^2$ ne peut être relié à tous les autres sans intersecter (OJ). (0,5pt)

2°) La différentielle extérieure de ω est :

$d\omega(x,y) = d(\frac{x-y}{x}) \wedge dx + d(1) \wedge dy = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-y}{x})dx + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{x-y}{x})dy\right] \wedge dx + 0 = -\frac{1}{x}dy \wedge dx.$

D'où $d\omega(x,y) = \frac{1}{x}dx \wedge dy$ (01,5pt)

On a $d\omega \neq 0$. Donc ω n'est pas fermée par définition. (0,5pt)

3°) $\alpha(x,y) = f(x)\frac{x-y}{x}dx + f(x)dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ avec $P(x,y) = f(x)\frac{x-y}{x}$ et $Q(x,y) = f(x)$.

$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{x}f(x)$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = f'(x)$.

α est fermée $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x}f(x) = f'(x) \Leftrightarrow f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = 0.$

Par suite

$\ln|f(x)| = -\ln x + C ; x > 0 ; C \in \mathbb{R}$. D'où $f(x) = \frac{K}{x} ; K \in \mathbb{R} ; x > 0.$

Comme $f(1) = 2$ on obtient $\boxed{f(x) = \frac{2}{x}}$ (03pts).

α est fermée sur U qui n'est pas étoilé. Le théorème de poincaré ne peut donc s'appliquer. Mais comme $f(x)$ est défini pour $x > 0$, α est donc fermée en particulier sur $V =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ qui est étoilé. α est donc exacte sur V d'après le théorème de Poincaré. (01pt).

4°) $dg = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{2(x-y)}{x^2} \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{2}{x} \end{cases}$ On obtient $g(x,y) = 2\ln x + 2\frac{y}{x} + c ; c \in \mathbb{R} ; x > 0 ; y \in \mathbb{R}.$

Ainsi, $dg = \alpha$ sur $V \subset U$. (03pts).

5°) Comme α est exacte, son intégrale curviligne ne dépend que des extrémités de la courbe γ qui sont $\gamma(0) = (1,0)$ et $\gamma(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Ainsi, $\int_\gamma \alpha = g\left(\gamma(\frac{\pi}{4})\right) - g\left(\gamma(0)\right) = g(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) - g(1,0)$.

Finalement, $\boxed{\int_\gamma \alpha = 2\ln(\frac{1}{\sqrt{2}}) + 2}$ (02pts).

$= 2 - 2\ln(\sqrt{2}) = 2 - \ln 2 = \ln(\frac{e^2}{2})$.

Scanné avec CamScanner

Correction Calcul Intégral Session 1

Exercice 1

On considère les domaines D_1 et D_2 définis par :

$D_1 = \{(x,y) \in [0;1]^2 / x^2 + y^2 \geq 1\}$

$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

1) Dessinons et hachurons D_1 et D_2

Pour D_1

On a :

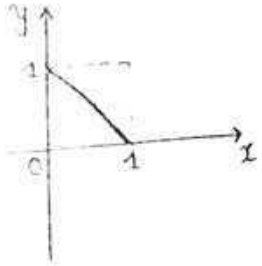
$x, y \in [0;1]^2$

Donc on a la représentation suivante :

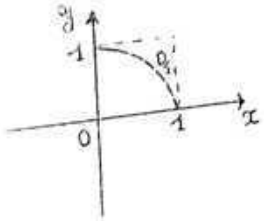


$x^2 + y^2 = 1$ est l'équation du cercle de centre de coordonnée (0,0) et de rayon $UI = 1$.

On obtient la représentation suivante



Comme $x^2 + y^2 \geq 1$ alors on obtient



Pour D_2

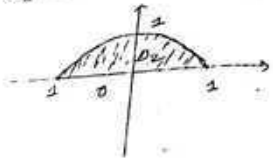
Ici, $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}^+$.

Donc nous sommes dans le plan (Oxy) avec $y > 0$.

$x^2 + y^2 = 1$ est l'équation du cercle de centre O et de rayon 1.

Comme $x^2 + y^2 \leq 1$.

D_2 est un demi-cercle de centre O et de rayon 1



Scanné avec CamScanner

2) Calculons les intégrales

$$I_1 = \iint_{D_1} \frac{y}{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

Fixons x

$0 \le x \le 1$

$0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$

$$I_1 = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{1+x^2+y^2}\,dy\right] dx$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 [\ln(1+x^2+y^2)]_0^{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 (\ln(2) - \ln(x^2+1))\,dx$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(2)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\ln(2)\,[x]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx$$

Posons $K = \int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx$

Intégration par partie

Posons $U(x) = \ln(1+x^2) \Rightarrow U'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

$V'(x) = 1 \Rightarrow V(x) = x$

$$K = [x\ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$K = \ln(2) - 2\int_0^1 \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$K = \ln(2) - 2\int_0^1 dx + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$K = \ln(2) - 2 + 2[\arctan(x)]_0^1$$

$$K = \ln(2) - 2 + 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$$

$$K = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\left(\ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{I_1 = \frac{4-\pi}{4}}$$

Scanné avec CamScanner

$$I_2 = \iint_{D_2} \frac{y}{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

Changement en coordonnée polaire

Posons $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

$dxdy = rdrd\theta$

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^1 \int_0^{\pi} \left(\frac{r\sin\theta}{1+(r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta)}\right) rdrd\theta$$

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^{\pi} \left(\frac{r^2\sin\theta}{1+r^2}\right) drd\theta$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}dr . \int_0^{\pi} (\sin\theta)d\theta$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{r^2+1-1}{1+r^2}dr . [-\cos\theta]_0^{\pi}$$

$$I_2 = (-1-1)\int_0^1 \left(\frac{r^2+1}{r^2+1} - \frac{1}{1+r^2}\right)dr$$

$$\boxed{I_2 = \frac{4-\pi}{2}}$$

Exercice 2

Calculons le volume de la demi-sphère de rayon R définie par :

$\varphi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0\}$

Ici nous sommes en coordonnée sphérique avec $z \ge 0$.

On a le changement suivant :

$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$

$0 \le r \le R$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ car $z \ge 0$

$dxdydz = r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$

$$\Rightarrow v = \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$v = \int_0^R r^2dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$v = \int_0^R r^2dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$v = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R . [-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} [\theta]_0^{2\pi}$$

Scanné avec CamScanner

$$v = \frac{2\pi R^3}{3}$$

Exercice 3

On considère la forme différentielle de degré 1 définie par :

$$\omega(x,y,z) = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)dz$$

1) Déterminons le domaine de définition de U de ω.

$U = (\mathbb{R}^*)^3$

2) Vérifions si ω est fermée

ω est sous la forme de $\omega = adx + bdy + cdz$

$$\omega \text{ fermée } \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial z} \\ \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} \end{cases}$$

On a : $a = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)$

$b = \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)$

$c = \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)$

$$① \begin{cases} \frac{\partial c}{\partial y} = -\frac{1}{z^2} \\ \frac{\partial b}{\partial z} = -\frac{1}{z^2} \end{cases}$$

$$② \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial z} = -\frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial c}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \end{cases}$$

$$③ \begin{cases} \frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \end{cases}$$

De ①,② et ③ ω est un fermé.

3) Déterminons une fonction f telle que $D_f = \omega$ sur $U = (\mathbb{R}_+^*)^3$

$df = \omega$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2} \text{ ①} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2} \text{ ②} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} \text{ ③} \end{cases}$$

$① \Rightarrow f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \varphi(y,z)$

Scanné avec CamScanner

$$② \Rightarrow \frac{-x}{y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y,z) = \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y,z) = \frac{1}{z}$$
$$\Rightarrow \varphi(y,z) = \frac{y}{z}$$
$$\Rightarrow \varphi(y,z) = \frac{y}{z} + \psi(z)$$

Donc

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \psi(z)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} + \frac{\partial \psi(z)}{\partial z}$$

$$③ \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} + \frac{\partial \psi(z)}{\partial z} = \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \psi(z)}{\partial z} = 0$$
$$\Rightarrow \psi(z) = K \text{ avec } K \in \mathbb{R} \text{ d'où}$$
$$\boxed{f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + K \text{ avec } K \in \mathbb{R}}$$

4) Calculons $\int_j \omega$

L'intégrale curviligne de ω le long de la courbe parametrée γ définie par :

$$\gamma: \left[0; \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = (1-t, 1+t, 1+t^2)$$

On a :

$$\int_j \omega = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{y(t)} - \frac{z(t)}{x(t)^2}\right) x'(t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z(t)} - \frac{x(t)}{y(t)^2}\right) y'(t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x(t)} - \frac{y(t)}{z(t)^2}\right) z'(t)dt$$

On a :

$$\gamma(t) = (1-t, 1+t, 1+t^2)$$

Donc

$$x(t) = 1 - t \Rightarrow x'(t) = -1$$
$$y(t) = 1 + t \Rightarrow y'(t) = 1$$
$$z(t) = 1 + t^2 \Rightarrow z'(t) = 2t$$

D'où

$$\int_j \omega = -\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1+t^2}{(1-t)^2}\right) dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1-t}{(1+t)^2}\right) dt + 2\int_0^{\frac{1}{2}} t\left(\frac{1}{1-t} - \frac{1+t}{(1+t^2)^2}\right) dt$$
$$\int_j \omega = -2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{(1+t)^2}\right) dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1 + \frac{2}{(1-t)^2}\right) dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-2t}{(1+t^2)}\right) dt$$
$$\int_j \omega = 2\left|\frac{1}{1+t}\right|_0^{\frac{1}{2}} + \left|-t - \frac{2}{1-t}\right|_0^{\frac{1}{2}} + [\arctan(t)]_0^{\frac{1}{2}} - [\ln(1+t^2)]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$\int_j \omega = -\frac{19}{6} + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny **Année académique 2018-2019**
UFR MI

Examen de mécanique quantique – Licence 2 MI (2ème session)
02 heures (aucun document n'est autorisé)

Exercice 1

Une cellule photoélectrique de potentiel extraction $V_0 = 4{,}125 Volts$ est éclairée par u source lumineuse monochromatique de puissance 0,33kW et de fréquence $\nu = 10^{10} MH$

1- Déterminer la fréquence seuil de cette cellule et justifier s'il y a ef photoélectrique.
2- Calculer le nombre de photons émis par cette source pendant une seconde ?
3- On suppose à présent que le seuil en fréquence de cette cellule vaut $\nu_0 = 10^{1}$ Calculer la puissance correspondante au seuil en fréquence pendant un interval de temps $\Delta t = 1s$. Cette valeur représente-t-elle un seuil en puissance ? Justifi votre réponse.
4- Calculer l'énergie et l'impulsion des électrons éjectes de la cellule. En déduir longueur d'onde associée à ces électrons. Le comportement de ces électrons peu il être révélé par la mécanique classique ? Justifier votre réponse.
5- La mesure de la position de ces électrons fournit une incertitude absolue égal 1Å. Calculer l'incertitude absolue minimale sur la mesure de son impulsio Conclure.

Exercice 2

On considère une particule décrite par la fonction d'onde $\psi(x)$ définie par :

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}} \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right)$$

où A, p *et* ε sont des constantes réelles.

1- Quelle propriété la fonction $\psi(x)$ doit-elle vérifier ? Déterminer A.
2- Donner l'expression de la fonction densité de présence et représenter son allu
3- On mesure la position de cette particule, quelle est la probabilité pour qu'elle s trouvée dans l'intervalle $\left[-\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}; \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right]$.

Exercice 3

Soit $|\varphi\rangle$ un ket défini dans l'espace des états d'un système physique de dimension tro rapporté à la base orthonormée $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ tel que :

$$|\varphi\rangle = |e_1\rangle + (1+i)|e_2\rangle + |e_3\rangle$$

1- Le ket $|\varphi\rangle$ est-il un vecteur d'état ? Justifier votre réponse.
2- Calculer dans la base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$, la matrice représentant l'opérateur projecteu P_φ sur le ket $|\varphi\rangle$. Ce projecteur est-il hermitique ? Justifier votre réponse.
3- On considère à présent l'hamiltonien H du système dont les vecteurs propres son les vecteurs de la base associés tous à la même valeur propre $\mathcal{E}_0 = \hbar\omega_0$.

Scanné avec CamScanner

Sachant à $t = 0$, le système se trouve dans l'état normalisé $|\varphi\rangle$, déterminer l'état du système à l'instant t, noté $|\phi(t)\rangle$.

Les états du système aux instants $t = 0$ *et* $t > 0$ sont-ils physiquement discernables ? Justifier votre réponse.

4- Soit A une grandeur physique indépendante du temps associée au système.

a- Montrer que sa valeur moyenne n'évolue pas dans le temps.

b- A partir d'un théorème du cours que l'on précisera, justifier que les grandeurs A *et* H peuvent-être mesurées simultanément.

On donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} = \Big[\arctan z\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \pi;\ \arctan(-z) = -\arctan z \ \textit{et}\ \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Charge de l'électron : $-e = 1{,}6.10^{-19}\text{C}$; masse de l'électron : $m = 9{,}1.10^{-31}\text{kg}$; constante de Planck : $h = 6{,}626.10^{-34}\text{J.s.}$; vitesse de la lumière : $c = 3.10^{8}\text{m/s}$

On rappelle que le projecteur P_μ sur un ket $|\mu\rangle$ normé à l'unité est défini par :

$P_\mu = |\mu\rangle\langle\mu|$

NB : Le non-respect des notations de l'énoncé annule la réponse

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny
UFR MI

Année académique 2019-202

Licence 2 de Mathématiques et Informatique

Examen de Mécanique Quantique

Durée : 02 heures (Aucun document n'est autorisé)

Exercice 1

A- Calculer les commutateurs suivants : $\left[\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial^n}{\partial y^n}\right]$, $\left[\frac{\partial}{\partial y}, y^n\right]$

B- On considère un opérateur Q tel que :

$$Q = -i\hbar\frac{d}{dy}$$

1- Déterminer la fonction propre $\varphi(y)$ de Q associée à la valeur propre k.

2- La fonction $\varphi(y)$ est une fonction périodique de période p. Montrer que la valeur propre de l'opérateur Q est quantifiée.

Exercice 2

Deux radiations électromagnétiques de longueur d'onde $\lambda_1 = 2537\text{Å}$ *et* $\lambda_2 = 5890\text{Å}$ illuminent une plaque métallique. Les énergies maximales des électrons éjectés pour chaque radiation ont respectivement pour valeurs $3{,}14eV$ *et* $0{,}36eV$.

1- Déterminer la valeur de la constante de Planck $\hbar$

2- Calculer en joule l'énergie minimale susceptible d'extraire les électrons de la plaque métallique et déduire la valeur de la longueur d'onde maximale notée λ_{max} qui permet de produire le phénomène de l'effet photoélectrique.

3- Définir la longueur d'onde.

Exercice 3

On considère un système quantique dont l'espace des états est rapporté à une base orthonormée $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$. Dans cet espace, l'hamiltonien H et un opérateur K sont définis comme suit :

$$H = \hbar\omega(|e_2\rangle\langle e_3| + |e_3\rangle\langle e_2|)$$
$$K|e_1\rangle = |e_1\rangle \;\; ; \;\; K|e_2\rangle = 0; \;\; K|e_3\rangle = |e_3\rangle$$

1- Déterminer la matrice associée à H (on calculera l'action de H sur les vecteurs de la base)

2- A l'instant $t = 0$, le système est dans l'état

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|e_1\rangle + |e_2\rangle + |e_3\rangle)$$

a- Quelles valeurs une mesure de l'énergie donnera-t-elle et avec quelles probabilités ? calculer la moyenne de H.

b- On suppose que la mesure donne la valeur ayant la plus grande probabilité de présence. Quel est le résultat d'une nouvelle mesure de l'énergie immédiatement après. Justifier la réponse.

3- Calculer l'état du système $|\psi(t)\rangle$ à l'instant $t > 0$.

4- Le système étant toujours dans l'état $|\psi(t)\rangle$, on mesure la grandeur physique K.

a- Quelles sont les probabilités des différents résultats possibles ?

b- On mesure la plus grande valeur, quel est son degré de dégénérescence ? déterminer l'état du système immédiatement après la mesure.

c- Calculer la valeur moyenne de $\langle K\rangle(t)$ en fonction du temps. Quelle interprétation physique peut on tirer pour la grandeur physique K.

On donne : $1\text{Å} = 10^{-10}m$; $1eV = 1{,}6.10^{-19}J$; $e = 1{,}6.10^{-19}C$; $c = 3.10^8 m/s$

NB : le non-respect des notations de l'énoncé annule la réponse

Scanné avec CamScanner

niversité Félix Houphouët-Boigny
FR MI

Année académique 2020-2021

Examen de mécanique quantique-Licence 2 MI (1ère session)
02 heures (aucun document n'est autorisé)

xercice 1

xpression de la fonction d'onde d'une particule de masse m est :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \; si \; < 0 \\ Ae^{-x}(1-e^{-x}) \;\; si \; x \geq 0 \end{cases} \; avec \; A \; une \; constante$$

1- Déterminer la valeur de A pour que la fonction $\varphi(x)$ soit normalisée.
2- a) Déterminer la densité de probabilité de présence de cette particule.
b) Déduire la valeur de sa position pour laquelle cette densité de probabilité est maximale.
3- Calculer de la valeur moyenne de la position de cette particule notée $\langle x \rangle$.

xercice 2

1- En quoi le phénomène de la diffusion d'un faisceau de rayons X par un électron cible est-elle différente du phénomène de l'effet photoélectrique ?
2- Au cours d'une expérience de diffusion Compton, le photon diffusé une énergie de 120 keV et l'électron de recul a reçu une énergie cinétique de 40 keV.
a- Calculer l'énergie du photon incident et en déduire sa longueur d'onde.
b- Quel est l'angle θ de diffusion du photon d'énergie 120 keV ?
3- Définir les termes suivants : Effet photoélectrique ; Fréquence seuil ; Energie seuil ; Potentiel d'arrêt.

xercice 3

On considère un système physique dont l'espace des états est rapporté à la base orthonormée formée par les ecteurs propres $|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle$ de l'hamiltonien H. Les valeurs propres de H associées à ces vecteurs ropres sont respectivement $E_1 = E_0 - h\omega, E_2 = E_0 \; et \; E_3 = E_0 + h\omega$.
On considère par ailleurs les opérateurs A, B et C tels que :

$$A|e_1\rangle = 0, \qquad A|e_2\rangle = \sqrt{2}|e_1\rangle, \qquad A|e_3\rangle = \sqrt{2}|e_2\rangle$$

1- Ecrire les matrices représentant C et H. Peut-on mesurer simultanément C et H? Justifier
2- On définit l'opérateur Q par la relation : $Q = \frac{1}{2}(A + B)$. Déterminer les états propres (valeurs et vecteurs propres) de Q.
3- Le système se trouve dans l'état où la valeur propre de C est égale à 1. Donner l'expression d'un vecteur correspondant à cet état. (on le notera $|\varphi\rangle$).
On mesure la grandeur physique associée à Q, quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ?
4- On suppose à présent (à l'instant $t = 0$) que le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle$) tel que :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|e_1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|e_2\rangle + \frac{1}{2}|e_3\rangle$$

Déterminer l'état $|\psi(t)\rangle$ du système à un instant t ultérieur. Calculer les valeurs moyennes $\langle Q\rangle(t)$ et $\langle H\rangle(t)$. Laquelle de ces observables est une constante du mouvement ? Justifier.
On donne: charge de l'électron: $-e = 1{,}6.10^{-19}C$; masse de l' électron : $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg: constante de Planck : $6{,}626.10^{-34} j.s$; vitesse de la lumière : $c = 3.10^8 \; m/s$; $1eV = 1{,}6.10^{-19} j$

valeur moyenne d'un opérateur K: $\langle K\rangle_\varphi = \langle\varphi|K|\varphi\rangle = \int_\tau \varphi' K \varphi d\tau$

NB : Le non-respect des notations de l'énoncé annule la réponse

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR MI

Année académique 2021-2022

Licence 2 de Mathématiques et Informatique
Examen de mécanique quantique (1ère session)
Durée : 02heures
(Aucun document n'est autorisé)

Exercice 1

On dispose de trois cellules photoémissives dont les cathodes sont recouvertes de césium (Cs), potassium (K) et de lithium (Li). Les énergies d'extraction des électrons W_0 de ce métaux électronvolts sont respectivement 1,19 ; 2,29 et 2,39. On éclaire successivement ces trois cellules une radiation de longueur d'onde $\lambda = 0{,}60\mu m$.

1- Nommer le phénomène étudié.
2- Faire un schéma soigné du phénomène qui peut être engendré lors de cette expérience.
3- Définir l'énergie d'extraction.
4- Définir la longueur d'onde seuil.
5- Avec quelle(s) cellule(s) (Cs, K ou Li) observe-t-on ce phénomène ? Justifier.
6- Calculer en électronvolt l'énergie transportée par un photon incident.
7- Calculer en joules l'énergie cinétique maximale des électrons à la sortie de la cathode.

Exercice 2

On considère l'opérateur $K = ih\frac{d}{dx}$ de valeur propre a_n.

1- Déterminer l'expression de la fonction propre $f_n(x)$ de l'opérateur K associée à a_n.
2- On suppose que $f_n(x)$ est une fonction périodique de période λ.
   a- Montrer que la valeur propre a_n de l'opérateur K est quantifiée.
   b- Ecrire la nouvelle expression de la fonction propre $f_n(x)$.

Exercice 3

L'espace des états d'un système physique à trois dimensions est rapporté à une base orthonormée $(|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle)$. Dans cette base, l'hamiltonien H et l'opérateur B sont définis comme suit :

$$H = \hbar\omega(|2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2|) \quad et \quad \begin{cases} B|1\rangle = |1\rangle \\ B|2\rangle = 0 \\ B|3\rangle = |3\rangle \end{cases}$$

1- Déterminer la matrice associée à H (on calculera l'action de H sur les vecteurs de la base).
2- On prépare le système) l'instant $t = 0$ dans l'état $|\varphi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle)$.
   a- Quelles valeurs une mesure de l'énergie donnera-t-elle et avec quelles probabilités ? En déduire la valeur moyenne de H.
   b- On suppose que la mesure de l'énergie donne la valeur ayant la plus grande probabilité. Quel est le résultat d'une nouvelle mesure de l'énergie immédiatement après ? Justifier.
3- Calculer l'état $|\varphi(t)\rangle$ du système à l'instant $t > 0$.
4- Le système étant dans l'état $|\varphi(t)\rangle$, on mesure B.
   a- Quelles sont les probabilités des différents résultats possibles ?
   b- On mesure la valeur 1. Dans quel état se trouve le système immédiatement après la mesure ?
   c- Calculer la valeur moyenne $\langle B\rangle(t)$ à l'instant $t > 0$. Quelle interprétation physique peut on tirer pour B?

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR MI

Année académique 2021-2022

Licence 2 de Mathématiques et Informatique
Examen de mécanique quantique (2e session)
Durée : 02heures
(Aucun document n'est autorisé)

Exercice 1

On dispose de trois cellules photoémissives dont les cathodes sont recouvertes de césium (Cs), de potassium (K) et de lithium (Li). Les énergies d'extraction des électrons W_0 de ce métaux en électronvolts sont respectivement 1,19 ; 2,29 et 2,39. On éclaire successivement ces trois cellules avec une radiation de longueur d'onde $\lambda = 0{,}60\mu m$.

1- Nommer le phénomène étudié.
2- Faire un schéma soigné du phénomène qui peut être engendré lors de cette expérience.
3- Définir l'énergie d'extraction.
4- Définir la longueur d'onde seuil.
5- Avec quelle(s) cellule(s) (Cs, K ou Li) observe-t-on ce phénomène ? Justifier.
6- Calculer en électronvolt l'énergie transportée par un photon incident.
7- Calculer en joules l'énergie cinétique maximale des électrons à la sortie de la cathode.

Exercice 2

On considère l'opérateur $K = ih\frac{d}{dx}$ de valeur propre a_n.

1- Déterminer l'expression de la fonction propre $f_n(x)$ de l'opérateur K associée à a_n.
2- On suppose que $f_n(x)$ est une fonction périodique de période λ.
   a- Montrer que la valeur propre a_n de l'opérateur K est quantifiée.
   b- Ecrire la nouvelle expression de la fonction propre $f_n(x)$.

Exercice 3

L'espace des états d'un système physique à trois dimensions est rapporté à une base orthonormée $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. Dans cette base, l'hamiltonien H et l'opérateur W sont définis comme suit :

$$H = \hbar\omega(|2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2|) \quad et \quad \begin{cases} W|1\rangle = |1\rangle \\ W|2\rangle = 0 \\ W|3\rangle = |3\rangle \end{cases}$$

1- Calculera l'action de H sur les vecteurs de la base et déduire la matrice associée à H.
2- On prépare le système à l'instant $t = 0$ dans l'état $|\varphi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle)$.
   a- Quelles valeurs une mesure de l'énergie donnera-t-elle et avec quelles probabilités ? en déduire la valeur moyenne de H.
   b- On suppose que la mesure de l'énergie donne la valeur ayant la plus grande probabilité. Quel est le résultat d'une nouvelle mesure de l'énergie immédiatement après ? Justifier.
3- Calculer l'état $|\varphi(t)\rangle$ du système à l'instant $t > 0$.
4- Le système étant dans l'état $|\varphi(t)\rangle$, on mesure la grandeur physique associée à W.
   a- Quelles sont les probabilités des différents résultats possibles ?
   b- On mesure la valeur 1. Dans quel état se trouve le système immédiatement après cette mesure ?
   c- Calculer la valeur moyenne $\langle W\rangle(t)$ à l'instant $t > 0$. Quelle interprétation physique peut-on tirer pour W?

Scanné avec CamScanner

UFR-MI : L2 Année 2018-2019

CORRECTION : MECANIQUE QUANTIQUE SESSION 2 et 1

EXERCICE 1 (session 1 et 2)

Données : $V = 4,125 Volts$, $P = 0,33 KW$ et $\nu = 10^{10} MHz$

1. Déterminons la fréquence seuil.
   $W_0 = h\nu_0 = eV_0 \Rightarrow \boxed{\nu_0 = \frac{eV_0}{h}}$
   AN : $\nu_0 = \frac{1.6.10^{-19} \times 4,125}{6,626.10^{-34}} = 10^{14} Hz$
   Justification : On a $\nu = 10^{16} Hz$ et $\nu_0 = 10^{14} Hz$ donc $\nu > \nu_0$
   La fréquence seuil est inférieur à la fréquence des photons donc il y a effet photoélectrique.
2. Le nombre de photons
   On sait que $P = \frac{E_T}{\Delta T}$ et $E_T = nh\nu$ donc $P = \frac{nh\nu}{\Delta T}$
   Soit $N = \frac{n}{\Delta T}$. Ainsi $P = Nh\nu \Rightarrow \boxed{N = \frac{P}{h\nu}}$
   AN : $N = \frac{0,33.10^3}{6,626.10^{-34} \times 10^{16}} = 5.10^{19}$.
   Il y a 5.10^{19} photons émis par seconde.
3. $\nu_0 = 10^{15} Hz$
   $P = \frac{n}{\Delta T} h\nu_0 = Nh\nu_0$ AN : $P = 5.10^{19} \times 6,626.10^{-31} \times 10^{15}$
   $\boxed{P = 33,13 W}$
   Il n'y a pas de puissance seuil en mécanique quantique.
4. Énergie et l'impulsion des électrons éjectés de la cellule.
   $h\nu = W_0 + E_c \Rightarrow E_c = h\nu - W_0 = h\nu - h\nu_0 = h(\nu - \nu_0)$.
   AN : $E_c = 6,626.10^{-34}(10^{16} - 10^{15}) = 5,96.10^{-18} J$.
   $E_c = \frac{P^2}{2m} \Rightarrow P = \sqrt{2mE_c}$
   AN : $P = \sqrt{2 \times 9,1.10^{-31} \times 5,96.10^{-18}} = 3,89.10^{-24} Kg.ms^{-1}$
   $P = \frac{h\nu}{c}$ avec $\nu = \frac{h}{\lambda}$ d'où $P = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{P}$
   AN : $\lambda = \frac{6,626.10^{-34}}{3,89.10^{-24}} = 2.10^{-10} m$
   Le comportement des électrons ne peut être relevé par la mécanique classique car λ est très faible.
5. Calculons l'incertitude absolue minimale.
   Cela revient à calculer $\Delta X \Delta P = \frac{h}{2} \Rightarrow \Delta P = \frac{h}{2\Delta X}$ avec $\Delta X = 1 A$.
   AN : $\Delta P = \frac{6,626.10^{-34}}{2.10^{-10}} = 3,89.10^{-24} Kg.ms^{-1}$
   Conclusion : Les deux valeurs ΔP et P sont identiques.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2 (session 1 et 2)

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}} \exp(\frac{ipx}{\hbar})$$

1. La fonction d'onde ψ doit être continue et de carré sommable,c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

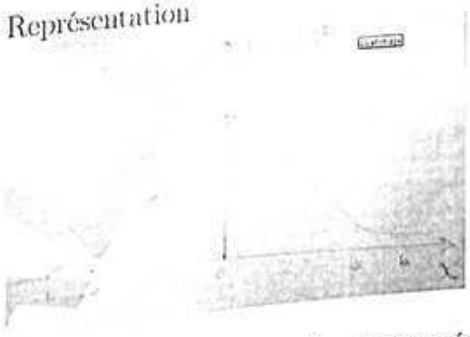
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx &= A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+\varepsilon^2} dx \quad \text{car} \quad |\exp(\frac{ipx}{\hbar})| = 1 \\
&= A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} (\frac{1}{1+(\frac{x}{\varepsilon})^2}) dx \\
&= \frac{A^2}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} \quad \text{en fesant le changement de variable } u = \frac{x}{\varepsilon} \\
&= \frac{A^2}{\varepsilon} \times \pi = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}.
\end{aligned}$$

2. $\psi(x) = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}} \exp(\frac{ipx}{\hbar})$

   - Densité de présence

$$|\psi(x)| = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$$

   - Représentation



3. La probabilité que la particule soit trouvée dans l'intervalle $[-\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}; \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}]$

Scanné avec CamScanner

$$\mathbb{P}(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}) = \int_{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}} |\psi(x)|dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon\pi} \int_{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{1+(\frac{x}{\varepsilon})^2} \quad \text{posons } u = \frac{x}{\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \times 2\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{\pi} \times 2 \times \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

EXERCICE 3 (Session 1)

Soit

$$|\varphi\rangle = \sqrt{2}|e_1\rangle + i|e_2\rangle + |e_3\rangle$$

1. On a $\langle\varphi|\varphi\rangle = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ i\\ 1\end{pmatrix} = 4 \neq 1$

   Donc le ket $|\varphi\rangle$ n'est pas un vecteur d'état.

   Nommons alors $|\varphi\rangle$: $|\varphi\rangle = \frac{1}{|\langle\varphi|\varphi\rangle|}|\varphi\rangle = \frac{1}{2}|\varphi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|e_1\rangle + \frac{i}{2}|e_2\rangle + \frac{1}{2}|e_3\rangle$

2. Déterminons la matrice associée

   $P_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$

   - $P_\varphi|e_1\rangle = |\varphi\rangle\langle\varphi|e_1\rangle = (\frac{\sqrt{2}}{2}|e_1\rangle + \frac{i}{2}|e_2\rangle + \frac{1}{2}|e_3\rangle)(\frac{\sqrt{2}}{2})$
     $P_\varphi|e_1\rangle = \frac{1}{2}|e_1\rangle + \frac{i\sqrt{2}}{4}|e_2\rangle + \frac{\sqrt{2}}{4}|e_3\rangle$
   - $P_\varphi|e_2\rangle = |\varphi\rangle\langle\varphi|e_2\rangle = (\frac{\sqrt{2}}{2}|e_1\rangle + \frac{i}{2}|e_2\rangle + \frac{1}{2}|e_3\rangle)(\frac{-i}{2})$
     $P_\varphi|e_2\rangle = \frac{-i\sqrt{2}}{4}|e_1\rangle + \frac{1}{4}|e_2\rangle - \frac{i}{4}|e_3\rangle$
   - $P_\varphi|e_3\rangle = |\varphi\rangle\langle\varphi|e_3\rangle = (\frac{\sqrt{2}}{2}|e_1\rangle + \frac{i}{2}|e_2\rangle + \frac{1}{2}|e_3\rangle)(\frac{1}{2})$
     $P_\varphi|e_3\rangle = \frac{\sqrt{2}}{4}|e_1\rangle + \frac{i}{4}|e_2\rangle + \frac{1}{4}|e_3\rangle$

   Ainsi $P_\varphi = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -i\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ i\sqrt{2} & 1 & i\\ \sqrt{2} & -i & 1\end{pmatrix}$ $\quad {}^tP_\varphi = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & i\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ -i\sqrt{2} & 1 & -i\\ \sqrt{2} & i & 1\end{pmatrix}$

   $\Rightarrow P_\varphi^\dagger = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -i\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ i\sqrt{2} & 1 & i\\ \sqrt{2} & -i & 1\end{pmatrix} = P_\varphi$ d'où ce projecteur est hermétique.

Scanné avec CamScanner

3. $M = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix}$

Équation au valeur propre :
$H|e_1\rangle = \varepsilon_0|e_1\rangle$; $H|e_2\rangle = \varepsilon_0|e_2\rangle$; $H|e_3\rangle = \varepsilon_0|e_3\rangle$
On a $|\phi(t)\rangle = \sum_{n\geq 1}^{3} c_n(t)\exp(-\frac{i}{\hbar}E_n t)|e_n\rangle$ avec $c_n(t_0) = \langle e_n|\varphi'\rangle$.
$c_1(t_0) = \langle e_1|\varphi'\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$c_2(t_0) = \langle e_2|\varphi'\rangle = \frac{i}{2}$
$c_3(t_0) = \langle e_3|\varphi'\rangle = \frac{1}{2}$
On obtient alors

$$|\phi(t)\rangle = \exp(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_0 t)(\frac{\sqrt{2}}{2}|e_1\rangle + \frac{i}{2}|e_2\rangle + \frac{1}{2}|e_3\rangle)$$

à une phase près $|\phi(t)\rangle = |\varphi'\rangle$
D'où les états $|\phi(t)\rangle$ et $|\varphi'\rangle$ sont physiquement indiscernable

4.
$\langle A\rangle(t) = \langle\phi(t)|A|\phi(t)\rangle = \langle\varphi'|A|\varphi'\rangle = \langle A\rangle(t=0)$

- $\frac{d\langle A\rangle(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle[H,A]\rangle + \langle\frac{\partial A}{\partial t}\rangle$
Or $\langle\frac{\partial A}{\partial t}\rangle = 0$, de plus $\frac{d\langle A\rangle(t)}{dt} = 0$
Donc

$$\frac{1}{\hbar}\langle[H,A]\rangle = 0 \Rightarrow [H,A] = 0$$

Scanné avec CamScanner

Université FHB
MATHS-INFO L2

Année 2020-2021

CORRECTION MECANIQUE QUANTIQUE
Session 1

Exercice 1

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ Ae^{-x}(1 - e^{-x}) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Déterminons la valeur de A pour que la fonction φ soit normalisée.

Condition de normalisation $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1$, on a:

$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{0} |\varphi(x)|^2\, dx + \int_{0}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\, dx$ car $\varphi(x) = 0$ si $x \in]-\infty, 0[$

$\int_{0}^{+\infty} A^2 e^{-2x}(1 - e^{-x})\, dx = \frac{A^2}{12}$. D'après la condition de normalisation

$\frac{A^2}{12} = 1 \Rightarrow \underline{A = 2\sqrt{3}}$

2)a- Déterminons la densité de probabilité de présence de cette particule.
La densité de probabilité de présence par unité de longueur est égale au carré du module de la fonction d'onde.
Il vient alors $\frac{dp}{dx} = |\psi(x)|^2 = 12\, e^{-2x}(1 - e^{-x})^2$

b- Déduisons-en la valeur de sa position pour laquelle elle est maximale.
Etude de $12\, e^{-2x}(1 - e^{-x})^2 \Rightarrow$ le maximum de cette fonction est atteinte en $x = \ln 2$ alors la valeur de sa position pour laquelle cette densité de probabilité est maximale est $x = \ln 2$

3) Calculons la valeur moyenne

$$< x >= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, x\, \varphi(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} x\, \varphi^2(x)\, dx$$

$$< x >= \int_{0}^{+\infty} 12x\, (e^{-2x} - 2e^{-3x} + e^{-4x})\, dx$$

$< x >= -12 \left[\frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{2}{9}e^{-3x} + \frac{1}{16}e^{-4x}\right]_{x=0}^{x=+\infty}$ à l'aide d'une intégration par partie

$$< x >= \frac{13}{12}$$

Exercice 2

1) L'effet photoélectrique et l'effet Compton sont deux types d'interactions entre la lumière et la matière.

Scanné avec CamScanner

En effet, photoélectrique, toute l'énergie du photon incident est acquise par un seul électron, mais dans l'effet Compton, le photon incident ne transfère qu'une partie de son énergie à un électron.
L'effet photoélectrique est un phénomène de faible énergie et les photons en intéraction disparaissent juste après avoir fourni leur énergie aux électrons.
L'effet Compton, en revanche est un phénomène de moyenne énergie et les photons en intéraction sont dispersés par les électrons. C'est la différence principale entre l'effet photoélectrique et l'effet Compton.

2)a- Calculons l'énergie du photon incident et sa longueur d'onde.
Etat initial:
Energie du photon incident: $E_1 = h\nu = hc/2$
Energie de l'électron: $E_2 = mc^2$

Etat final:
Energie du photon diffusé: $E_1' = h\nu' = hc/\lambda'$
Energie de l'électron diffusé: $E_2' = Xmc^2$

Conservation de l'énergie:

$$\boxed{E_1 + E_2 = E_1' + E_2'}$$

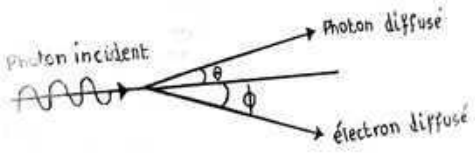
$$E_1 = E_1' + E_2' - E_2 \begin{cases} E_2' = 40k2V \\ E_2 = mc^2 \\ E_1' = 120k2V \end{cases}$$

$$\boxed{E_1 = E_2' = 40k2V - mc^2 + 120k2V}\ \text{J}$$

Or $E_1 = \dfrac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \dfrac{hc}{E_1}$

$$\boxed{\lambda = \frac{\lambda c}{180k2V - mc^2}}$$

b) L'angle θ de diffusion du photon.



θ : angle de diffusion du photon
ϕ : angle de diffusion de l'électron

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

λ' : longueur d'onde du photon diffusé
λ : longueur d'onde du photon incident

Scanné avec CamScanner

$$\boxed{\theta = Arc\cos(1 - \frac{mc}{h}(\lambda' - \lambda))}$$

3) Effet photoélectrique (question 1)

Fréquence seuil: C'est la fréquence minimale que doit posseder un photon incident pour extraire un électron du métal.

Energie seuil: valeur limite au dela de laquelle un phénomène physique, chimique ou biologique peut provoquer un effet donné.

Potentiel d'arrêt: la valeur au dessous de laquelle on n'observe pas l'effet photoélectrique (l'énergie cinétique des électrons n'est pas suffisante).

Exercice 3

1) Ecrivons les matrices C et H

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} E_0 - \hbar\omega & 0 & 0 \\ 0 & E_0 & 0 \\ 0 & 0 & E_0 + \hbar\omega \end{pmatrix}$$

On peut mésurer simultanement C et H car $CH = HC$

2) Déterminons $Q = \frac{1}{2}(A + B)$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminons les états propres.

- Les valeurs propres

$$\text{Soit } P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\lambda & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda\,(1 - \lambda)(1 + \lambda)$$

Alors les valeurs propres de Q sont : $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 1$

-Déterminons les vecteurs propres associés aux valeurs propres.

Soit $\{|\phi_n>_{n=1,2,3}\}$ les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\{\lambda_n\}_{n=1,2,3}$ de façon respectivement, tels que $\{|\phi_n> = a_n|e_1> + b_n|e_2> + c_n|e_3>\}_{n=1,2,3}$ avec $\{a_n, b_n, c_n\}$ des réels.

pour $n = 1$

$|\phi_1> = a_1|e_1> + b_1|e_2> + c_1|e_3>$; $\lambda_1 = -1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} b_1 = 0 & (1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} a_1 + b_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} c_1 = 0 & (2) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} b_1 + c_1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

L'objectif n'est pas de trouver les valeurs des inconnus a_1, b_1 et c_1 mais trouver une combinaison entre ces inconnus, ces inconnus servirons à normer les vecteurs propres.

(1) $\Rightarrow b_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}a_1$

(2) $\Rightarrow b_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}c_1$

de (1) et (2), on a:$a_1 = c_1$ d'où $|\phi_1> = a_1\,|e_1> - \frac{\sqrt{2}}{2}a_1\,|e_2> + a_1\,|e_3>$

$<\phi_1| = a_1\,<e_1| - \frac{\sqrt{2}}{2}a_1\,<e_2| + a_1\,<e_3|$

$<\phi_1|\phi_1> = a_1^2 + 2a_1^2 + a_1^2 = 4a_1^2$ or $<\phi_1|\phi_1> = 1 \Rightarrow 4a_1^2 = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$

$|\phi_1> = \frac{1}{2}\,|e_1> - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|e_2> + \frac{1}{2}\,|e_3>$

Pour $n = 2$

$|\phi_2> = a_2|e_1> + b_2\,|e_2> + c_2\,|e_3>;\ \lambda_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = 0 \\ a_2 = -c_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow |\phi_2> = c_2\,|e_1> - c_2\,|e_3>$

$|\phi_2> = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|e_1> - \frac{1}{2}\,|e_3>$

Pour $n = 3$

$|\phi_3> = \frac{1}{2}\,|e_1> + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|e_2> + \frac{1}{2}\,|e_3>$

3) Le système se trouve dans l'état où la valeur prpopre de c est égale 1

$|\varphi> = |e_1>$ (Car $|e_1>$ est le vecteur propre de l'opérateur c associé à la valeur propre qui est 1)

D'après le postulat 3, on obtient l'une des valeurs propres de la matrice Q.

Soit $\lambda_1 = -1$ avec pour probabilité.

D'après le postulat 4

$$P(\lambda_1) = P(-1) = |<\phi_1|\varphi>|^2 = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{4}$$

Soit $\lambda_2 = 0$ avec $P(\lambda_2) = P(0) = |<\phi_2|\varphi>|^2 = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}$

Soit $\lambda_3 = 1$ avec $P(\lambda_3) = P(1) = |<\phi_3|\varphi>|^2 = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{4}$

4) On suppose à présent (à l'instant $t = 0$) que le système est dans l'état $|\varphi(0)>$ tel que $|\psi(0)> = \frac{1}{2}\,|e_1> + \frac{\sqrt{2}}{2}\,|e_2> + \frac{1}{2}\,|e_3>$

Déterminons $|\psi(t)>$ à $t \neq 0$

D'après le postulat 6, on a: $|\psi(t)> = \sum_n C_n(t_0)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)}\,|e_n>$ avec

Scanné avec CamScanner

$C_n(0) =< e_n|\psi(0) >$

$C_1(0) =< e_1|\psi(0) >= \frac{1}{2}$

$C_2(0) =< e_2|\psi(0) >= \frac{\sqrt{2}}{2}$

$C_3(0) =< e_3|\psi(0) >= \frac{1}{2}$

$|\psi(t) >= C_1(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_1(t)}\,|e_1 > + C_2(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2(t)}\,|e_2 > + C_3(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_3(t)}\,|e_2 >$

$|\psi(t) >= \frac{1}{2}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_0(t)}\left[e^{iwt}\,|e_1 > + \sqrt{2}\,|e_2 > + e^{-iwt}\,|e_3 >\right]$

* Les valeurs moyennes

$< Q >_{(t)} =< \psi(t)|\, Q\,|\psi(t) >$

$$Q\,|\psi(t) >= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 - \hbar w)t} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 - \hbar w)t} \\ \frac{1}{2}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 - \hbar w)t} \end{pmatrix}$$

$< \psi(t)| = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 - \hbar w)t} < e_1| + \frac{1}{2}\, e^{\frac{i}{\hbar}(E_0 + \hbar w)t}$

$< Q >_{(t)} = \frac{1}{4}e^{-iwt} + \frac{1}{2}e^{iwt} + \frac{1}{2}e^{-iwt} + \frac{1}{4}e^{iwt}$

$< C >_{(t)} =< \psi(t)|\, C\,|\psi(t) >= 0$

On a: $[C, H] = 0$ et C ne dépend pas explicitement du temps donc $\frac{\partial C}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} < C >_{(t)} \Rightarrow C$ est une constante de mouvement. (Théorème d'Ehrenfest)

$\frac{d}{dt} < C >_{(t)} = -\frac{iw}{4}e^{-iwt} + \frac{iw}{2}e^{iwt} + \frac{iw}{4}e^{iwt} \neq 0$ alors Q n'est pas une constante du mouvement.

Scanné avec CamScanner

CORRECTION MECANIQUE QUANTIQUE (SESSION 1&2) 2021-2022

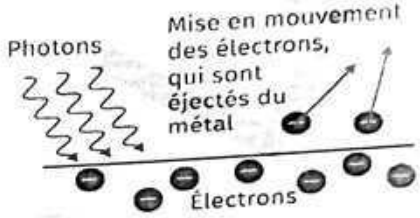
EXERCICE 1

1 – nous sommes dans un cas de phénomène d'effet photo électrique.

2- schéma(voir figure)

3- l'énergie d'extraction c'est l'énergie minimale qu'il faut à un photon déclencher l'effet photo electrique.

4- la longueur d'onde seuil est la longueur d'onde maximale qui au-dessus de laquelle il ne peut y avoir effet photo électrique.



5- calculons $h\nu$

$h\nu = \frac{h*c}{\lambda} = \frac{6,626*10^{-34}*3*10^{8}}{0,6*10^{-6}} = 3,313 * 10^{-19}$

$1eV \rightarrow 1,602 * 10^{-19}J$

$x\ ? \rightarrow 3,313 * 10^{-19}J$ $\quad Alors\ x = 2,07eV$ D'où $h\nu = 2,07eV$ Alors on observe ce phenomène avec le Césium (CS)

6 – L'énergie précédente

$h\nu = 2,07eV$ (Voir question précédente)

7 – Calculons en joule l'énergie cinétique maximale des électrons

D'après l'équation bilan de la conservation de l'énergie.

On a: $h\nu = w_0 + EC$ => $\quad EC = 2,07 - 1,19 = 0,88eV$

EXERCICE 2

$K = ih\frac{d}{dx}$ De valeur propre a_n

1 – Déterminons l'expression de la fonction propre $f_n(x)$ *de l'opérateur* K associé à a_n

D'après l'équation aux valeurs propres,

On a: $Kf_n(x) = a_n f_n(x)$

$ih\frac{d}{dx}(f_n(x)) = a_n f_n(x)$ => $\frac{d}{dx}(f_n(x)) - \frac{1}{ih}a_n f_n(x) = 0$ => $\frac{d}{dx}(f_n(x)) + \frac{i}{h}a_n f_n(x) = 0$

Est une équation différentielle du premier degré sans second membre, alors la solution est de la forme $f_n(x) = Ae^{-\int \frac{ia_n}{h}dx}$, $avec\ A \in R$

$f_n(x) = Ae^{-\frac{ia_n}{h}x}$, $avec\ A \in R$

2 –a) Montrons que l'opérateur est quantifié

p est la période de $f_n(x)$ Alors on a : $f_n(x+p) = f_n(x)$

$f_n(x+p) = Ae^{-\frac{ia_n}{h}(x+p)} = Ae^{-\frac{ia_n}{h}x}$

Scanné avec CamScanner

$Ae^{-\frac{ia_n}{\hbar}x} * e^{-\frac{ia_n}{\hbar}p} = Ae^{-\frac{ia_n}{\hbar}x}$

$e^{-\frac{ia_n}{\hbar}p} = 1$

D'après Euler

$e^{i\pi} = -1$

$e^{-i\pi} = -1$

$e^{-2i\pi} = 1$

$e^{-3i\pi} = -1$

$e^{-4i\pi} = 1$

$\vdots$

$e^{-2ni\pi} = 1 \quad n \in Z^*$

$e^{-\frac{ia_n}{\hbar}p} = e^{-i2n\pi} \Rightarrow \frac{a_n}{\hbar}p = 2n\pi$ D'où $a_n = \frac{2\pi n\hbar}{p}$

b - $f_n(x) = Ae^{\frac{-i2\pi n}{p}x}$, $A \in R$

EXERCICE 3

1 – Déterminons H

$H|1\rangle = \hbar w(|2\rangle\langle 3|1\rangle + |3\rangle\langle 2|1\rangle) = 0$

$H|2\rangle = \hbar w(|2\rangle\langle 3|2\rangle + |3\rangle\langle 2|2\rangle) = \hbar w(|3\rangle)$ $\Rightarrow H = \hbar w\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$H|3\rangle = \hbar w(|2\rangle\langle 3|3\rangle + |3\rangle\langle 2|3\rangle) = \hbar w(|2\rangle)$

La base $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ est orthonormée, Le produit scalaire $\langle 1|2\rangle=\langle 1|3\rangle=\langle 2|3\rangle=0$ et $\langle 1|1\rangle=\langle 2|2\rangle=\langle 3|3\rangle=1$

2 - $P(X) = \begin{vmatrix}-X & 0 & 0\\ 0 & -X & \hbar w\\ 0 & \hbar w & -X\end{vmatrix}$ Alors $E_1 = -\hbar w\,; E_2 = 0\,;\ E_3 = \hbar w$ sont les énergies de H

- Vecteurs propres

Soit $\{|\psi_n\rangle_{n=1,2,3}\}$ Les vecteurs propres de H associés aux valeurs propres $(E_n)_{n=1,2,3}$ de façon respectifs tels que $|\psi_n\rangle = a_n|1\rangle + b_n|2\rangle + c_n|3\rangle$

Pour n=1, $|\psi_1\rangle = a_1|1\rangle + b_1|2\rangle + c_1|3\rangle$ et $E_1 = -\hbar w$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \hbar w\\ 0 & \hbar w & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\\ c_1\end{pmatrix} = -\hbar w\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\\ c_1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow a_1 = 0\,;\ c_1 = -b_1$

$|\psi_1\rangle = b_1|2\rangle + c_1|3\rangle$ Et $\langle\psi_1| = b_1\langle 2| - b_1\langle 3|$

$\langle\psi_1|\psi_1\rangle = b_1^2$ Or $\langle\psi_1|\psi_1\rangle = 1$ Alors $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Finalement

$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - |3\rangle)$ et $E_1 = -\hbar w$

Même démarche et on obtient

$|\psi_2\rangle = |1\rangle$ et $E_2 = 0$

$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |3\rangle)$ et $E_3 = \hbar w$

- Probabilité

$P(E_1) = \left|\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\right|^2 = 0$

$P(E_2) = \frac{1}{3}\,;\quad P(E_3) = \frac{2}{3}$

- Valeur moyenne

$\langle H\rangle = \sum_{n=1}^{3} P(E_n) * E_n = \frac{2}{3}\hbar w$

b – Une nouvelle mesure donnera $E_3 = \hbar w$. Car l'état du système après la mesure est $|\psi\rangle = |\psi_3\rangle$ et $P(E_3) = \left|\langle\psi_3|\psi_3\rangle\right|^2 = 1$ La probabilité d'obtenir E_3 est 1

3 – Calculons l'état $|\varphi(t)\rangle$ du système à l'instant $t > 0$

Scanné avec CamScanner

D'après le postulat 6 on a : $|\varphi(t)\rangle = \sum_n C_n(t_0) e^{\frac{-i}{\hbar}E_n(t-t_0)} |\psi_n\rangle$ avec $t_0 = 0$ et $C_n(0) = \langle\psi_n|\varphi(0)\rangle$

D'où $$C_1(0) = \langle\psi_1|\varphi(0)\rangle = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix} = 0$$

$$C_2(0) = \langle\psi_2|\varphi(0)\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix} = 1/\sqrt{3}$$

$$C_3(0) = \langle\psi_3|\varphi(0)\rangle = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix} = 2/\sqrt{6}$$

Finalement on obtient $|\varphi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\rangle + e^{-iwt}|2\rangle + e^{-iwt}|3\rangle\right)$

4 –a) D'après l'équation aux valeurs propres

On a : Vecteurs propres $|u_1\rangle = |1\rangle$, et valeurs propres $\lambda_1 = 1$;

$$|u_2\rangle = |2\rangle \; et \; \lambda_2 = 0; \quad |u_3\rangle = |3\rangle \text{ et } \lambda_3 = 1$$

- Probabilité

$$P(\lambda_1) = \left|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\e^{-iwt}/\sqrt{3}\\e^{-iwt}/\sqrt{3}\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{3} \;;$$

$$P(\lambda_2) = \left|\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\e^{-iwt}/\sqrt{3}\\e^{-iwt}/\sqrt{3}\end{pmatrix}\right|^2 = \left|\frac{e^{-iwt}}{\sqrt{3}}\right|^2 = \frac{e^{-iwt}*e^{iwt}}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(\lambda_3) = \left|\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\e^{-iwt}/\sqrt{3}\\e^{-iwt}/\sqrt{3}\end{pmatrix}\right|^2 = \left|\frac{e^{-iwt}}{\sqrt{3}}\right|^2 = \frac{e^{-iwt}*e^{iwt}}{3} = \frac{1}{3}$$

4-b) L'état du système immédiatement après la mesure

D'après le postulat 5 On a : $|\varphi'\rangle = \frac{P_n|\varphi\rangle}{\sqrt{\langle\varphi|P_n|\varphi\rangle}}$ $avec$ $P_n = |u_n\rangle\langle u_n| = |1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|$

$$P_n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \; ; \; P_n|\varphi\rangle = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\0\\e^{-iwt}/\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

$\langle\varphi| = \frac{1}{\sqrt{3}}(\langle 1| + e^{-iwt}\langle 2| + e^{-iwt}\langle 3|)$ D'où $\langle\varphi|P_n|\varphi\rangle = \frac{2}{3}$

Finalement $|\varphi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + e^{-iwt}|3\rangle\right)$; * La valeur moyenne de B dans le temps $\langle B\rangle(t) = \frac{2}{3}$

$\frac{d\langle B\rangle(t)}{dt} = 0$, Alors B est une constante de mouvement.

Scanné avec CamScanner

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET-BOIGNY D'ABIDJAN-COCODY
UFR MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
(Année universitaire 2018 2019)

Examen de la deuxième session des Logiciels Latex et Scilab
LICENCE 2 (2ème année)
(Durée : 2 heures)
Documents et outils informatiques non autorisés
Les 3 exercices sont indépendants. Rédiger avec soin.

Exercice 1 (LATEX)
En s'aidant éventuellement des fichiers de documentation

- *du package amsmath*
- *du package amsthm (ou, ntheorem)*
- *du package babel*

et en écrivant dans le préambule

```
\theoremstyle{plain}
\newtheorem{thm}{Théorème}
\theoremstyle{definition}
\newtheorem{defi}[thm]{Définition}
\theoremstyle{remark}
\newtheorem{exe}{Exemple}
\newtheorem{rmq}{Remarque}
```

donner le code qui reproduit le texte suivant, en utilisant au cas échéant, des macros personnelles appropriés :

Définition 1 (Base hilbertienne) . Soit $(H, <\cdot,\cdot>)$ un espace de Hilbert. On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilberteinne de H si elle est orthogonale, normée et totale.

Définition 2 Un espace métrique (E, d) est dit séparable si tout ouvert non vide de E contient au moins un point d'une partie dénombrable de E.

Exemple 1 $\mathbb{R}^n$ est séparable.

Théorème 1 (Caractérisation) . Soit $(H, <\cdot,\cdot>)$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de H. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *La famille orthonormée $(e_n)_n$ est une base hilbertienne.*
2. *Pour tout $x \in H$,*

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} < x, e_n > e_n \qquad \text{(égalité de Parseval)}$$

Scanné avec CamScanner

3. On a (1)

$$(e_n,\ n \in \mathbb{N})^{\perp} = \{0\}.$$

Remarque 1 Le théorème 1 s'étend au cas des espaces de Hilbert non séparables.

Exercice 2 (SCILAB)

1. *Il y a combien d'érreur dans la fonction Scilab ci-dessous ; déterminer les et les corriger.*

```
function [X] = resol(A, b)
%%ce programme resourd l'équation
%%AX = b
tol ← 1e − 3;
[n, m] ← size(A);

if n = m then
 X(m) ← b(n)/A(n, m);
 for k = m − 1 : -1:1
     S ← 0;
     for p = k + 1 : m
       S ← S + A(k, p) * X(p);
     end;
     X(k) ← (b(k) − S)/A(k, k);
 end;
elseif n > m,
    if norm(b(n + 1 : m)) >= tol then
      X ←' pas de solution';
    end,
else
  X ←' pas de solution unique';
end;
endfunction
```

Reprendre la fonction corrigée en remplaçant la boucle interne par une instruction matricielle.

Scanné avec CamScanner

Exercice 3 (SCILAB)

1. *Écrire une fonction SCILAB qui prend en entrée les 3 coefficients a, b et c d'un polynôme de dégré 2 (i.e $aX^2 + bX + c$) et qui détermine ses racines dans $\mathbb{C}$*

2. *Construire une fonction SCILAB (en utilisant une seule boucle et non deux) qui resout le système linéaire*

$$AX = b$$

où $A = \begin{bmatrix} A(1,1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A(2,1) & A(2,2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A(n,1) & A(n,2) & \cdots & \cdots & A(n,m) \end{bmatrix}$ *est une matrice triangulaire inférieur ayant des coefficients nulles sur sa diagonale et* $b = \begin{pmatrix} b(1) \\ b(2) \\ \vdots \\ b(p) \end{pmatrix}$ *est vecteur de longeur p.*

N.B.: Considerez les cas ou le nombre de lignes de la matrice est différent de la longueur du vecteur b ; et celui ou la matrice n'est pas néssairement carrée.

Bonne chance

Scanné avec CamScanner

Licence Master Doctorat*

<<Tout est possible à celui qui croit.>> ***VALIDEUR LMD EDITION 2023***

Université Félix Houphouët Boigny
UFR Mathématique et Informatique
Niveau : Licence 2

Année Académique
2019-2020
Session 1

EXAMEN
SCILAB ET LATEX
Durée : 02H 00

I Scilab

EXERCICE 1 : (5 points)

1. Ecrire le code scilab de chacun des vecteurs lignes suivants :
   a) I est constitué de la suite des entiers de 1 à n ;
   b) J est constitué de la suite des entiers de 1 à m ;
   c) $x = 2I - 5$ et $y = J^3 + 9$
2. Soit la variable z codée en scilab par : $z = (x') * y$
   a) La variable z est-elle une matrice ou un scalaire ? Justifier votre réponse.
   b) Ecris le code scilab pour déterminer la taille de la variable z et préciser les résultats obtenus.
3. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ et la matrice A de taille $n \times m$ dont l'élément de la ligne i et de la colonne j est donnée par $A_{ij} = (2i - 5)(j^3 + 9)$.
   a) Construire sans utiliser la boucle "for", une fonction nommée "creatmatrice" prenant en arguments d'entrée les entiers n et m et qui renvoi (comme argument de sortie) la matrice A.
   b) Ecrire sur votre feuille le code scilab de la matrice obtenue en supprimant la première ligne de A.

VALIDEUR LMD

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2 : (5 points)

1. Soit l'algorithme :

```
function [C] = algo1(n)
if n >= 0 & int(n)==n then
C = zeros(1, n + 1);
for k=0 :n
 C(k+1) = factorial(n)/ (factorial(k)*factorial(n-k)) ;
end
else
disp( 'n doit etre un entier positif ou nul' );
end
endfunction
```

(a) Quelle formule mathématique est-elle codée en scilab par l'algorithme 1 ? Préciser les éléments du vecteur C résultat de l'algorithme 1 pour $n = 3$ (c'est à dire [C] = algo1(3)).

(b) En utilisant l'algorithme (1), écrire la fonction nommée "algo2" qui prend en entrée d'entrée deux réels x, y et un entier n et qui renvoie la valeur $r = (x + y)^n$ donnée $r = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$.

2. Soit la fonction $f(x) = 0.75x(1 - x)$.

a) Définir le vecteur x de 101 nombres allant de 0 à 1 grace à la commande "linspace" de scilab.

b) En déduire le code scilab de la création du vecteur $y = f(x)$.

c) Trace la courbe (x,y=f(x)) en rouge, ligne continue et utilisant la fonction "plot" par la commande "xtitle" de scilab,
- nommer l'axe des abscisse par "x",
- l'axe des ordonnées par "y=f(x)"
- et donner le titre "courbe de $f(x) = 0.75x(1 - x)$"

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny
UFR Mathématique et Informatique
Niveau : Licence 2

Année Académique
2021-2022
Session 1

EXAMEN
SCILAB ET LATEX
Durée : 02H 00

Scilab

EXERCICE 1 : (5 points)

1. Ecrire le code scilab de la fonction nommée "EuclideBezout" qui calcul le PGCD de deux nombres entiers naturels a_0 et b_0 et les coefficients u et v de l'Algorithme d'Euclide-Bézout ci-dessous :

fonction [PGCD, u,v]=EuclideBezout(a_0, b_0)
//Initialisation
$n = 1$;
$a(1) = max(a_0, b_0), b(1) = min(a_0, b_0), u(1) = 1; s(1) = 0;$
//Itérations
tant que $(b(n) \neq 0)$, faire
$a(n) \equiv r\ [b(n)]; q = E(a(n)/b(n));$
$a(n+1) = b(n); b(n+1) = r;$
$u(n+1) = s(n); s(n+1) = u(n) - q * s(n);$
$n = n + 1;$
// Résultats
$u = u(n);$
si $b(1) = 0$ alors $v = 0;$
sinon $v = (a(n) - a(1) * u)/b(1);$
$PGCD = a(1) * u + b(1) * v;$

où, $E(x)$ est la partie entière de x et $a \equiv r\ [b]$ signifie que r est congru à a modulo b.

2. Pour cette question, Répondre par **VRAI ou FAUX**. La commande affiche la matrice $A = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq 10}$ telle que $\begin{cases} A_{ij} = 1 \text{ si } j = i+1, \\ A_{ij} = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

a)☐ $A = [zeros(9,1), eye(9,9), zeros(1,10)]$

b)☐ $A = toeplitz([0, 1, zeros(1,8)])$

c)☐ for i=1 :10, for j=1 :10, if j==i+1 then A(i,j)=1 else A(i,j)=0 end end end

d)☐ $A = toeplitz(zeros(10,1), [0, 1, zeros(1,8)])$.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2 : (5 points)

1. Soit l'algorithme :

```
function [C] = algo1(n)
if n >= 0  & int(n)==n then
C = zeros(1, n + 1);
for k=0 :n
 C(k+1) = factorial(n)/ (factorial(k)*factorial(n-k));
end
else
disp( 'n doit etre un entier positif ou nul' );
end
endfunction
```
(1)

(a) Quelle formule mathématique est-elle codée en scilab par l'algorithme (1) ? Préciser les éléments du vecteur C résultat de l'algorithme (1) pour $n = 4$ (c'est à dire [C] = algo1(4)).

(b) En utilisant l'algorithme (1), écrire la fonction nommée "algo2" qui prend en arguments d'entrée deux réels x, y et un entier n et qui renvoie la valeur $r = (x + y)^n$ donnée par $r = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$.

2. Soit la fonction $f(x) = 0.75x(1 - x)$.

a) Définir le vecteur x de 101 nombres allant de 0 à 1 grace à la commande "linspace" de scilab.

b) En déduire le code scilab de la création du vecteur $y = f(x)$.

c) Trace la courbe (x,y=f(x)) en rouge, ligne continue, en utilisant la fonction "plot" puis par la commande "xtitle" de scilab,
- nommer l'axe des abscisse par "x",
- l'axe des ordonnées par "y=f(x)"
- et donner le titre "courbe de $f(x) = 0.75x(1 - x)$."

Scanné avec CamScanner

2 LATEX

EXERCICE 3 : (5 points)

...ur cet exercice, répondre par VRAI ou FAUX.

1. VRAI ou FAUX.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2+ab+ab+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

Les égalités ci-dessus sont alignées et numérotées grâce à l'environnement :

a)☐ eqnarray* b)☐ eqnarray c)☐ equation d)☐ equation*

2. VRAI ou FAUX.

a)☐ sous la classe "article", \chapter { } n'est pas disponible.

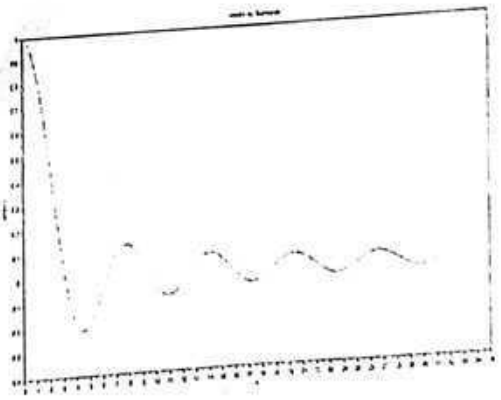
b)☐ les packages fontenc et babel permettent l'écriture convenable de toute langue ayant des caractères accentués.

c)☐ La saisie du contenu d'un document commence toujours par "\documentclass" et se termine par "\end {*document*}"

d)☐ la command "array" aussi bien que "tabular" permet de créer un tableau dans l'environnement mathématique.

EXERCICE 4 : (5 points)

Nom	sexe	Scilab	Latex
Mariam	F	12	8
TIA	M	5	13
DIGBEU	M	7	4
KOUASSI	M	15	18
AYA	F	2	18
YAPO	M	14	14
VANESSA	F	10	11
ZAMBLE	M	10	6



1. Créer un document d'une page contenant le tableau ci-dessus intitulé : 'Note des étudiants' dans un environnement "table" de Latex et préciser le "documentclass" et les "packages" nécessaires pour la création du document intitulé "TRAVAUX DIRIGES".

2. Créer dans le même document, une nouvelle page contenant la figure ci-dessus intitulée : TPLatexfig1.png, dans un environnement "figure" de Latex. Cette figure importée porte le titre "courbe de $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$" et un cadran de dimensions : [width=18 cm, height=10cm] en utilisant le package "graphicx"

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny
UFR Mathématique et Informatique
Niveau : Licence 2

Année Académique
2021-2
Session

EXAMEN
SCILAB ET LATEX
Durée : 02H 00

1 Scilab

EXERCICE 1 : (5 points)

Dans cet exercice, répondre par **VRAI** ou **FAUX**.

1. **VRAI ou FAUX.** La commande affiche la matrice $A = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq 10}$ telle que $\begin{cases} A_{ij} = 1 \text{ si } j = i+1, \\ A_{ij} = 0 \text{ sinon .} \end{cases}$

   a)☐ $A = [zeros(9,1), eye(9,9), zeros(1,10)]$

   b)☐ $A = toeplitz([0, 1, zeros(1,8)])$

   c)☐ for i=1 :10, for j=1 :10, if j==i+1 then A(i,j)=1 else A(i,j)=0 end end end

   d)☐ $A = toeplitz(zeros(10,1), [0, 1, zeros(1,8)])$.

2. **VRAI ou FAUX.** La commande affiche la somme : $I = \sum_{i=1}^{n-1} y_{i+1}(x_{i+1} - x_i)$ où $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$

   a)☐ $n = length(x); I = sum((x([2:n]) - x([1:n-1])) * y([2:n]))$

   b)☐ $n = length(x); I = sum((x([2:n]) - x([1:n-1])) .* y([2:n]))$

   c)☐ n=length(x) ; I=0 ; for i=1 : length(x)-1, I = I + (x(i+1)-x(i))*y(i + 1) end

   d)☐ n=length(x) ;I=0 ; for i=1 :length(x), I = I + (x(i + 1)-x(i))*y(i+1) ; end ; I

3. **VRAI ou FAUX.** La commande affiche la courbe de la fonction $f(x) = 1./sin(x)$, $x \in [0, 2\pi]$.

   a)☐ $e = 0.1; x = linspace(e, 2 * \%pi - e, 200); y = (1) ./sin(x); plot2d(x, y, style = 5)$

   b)☐ $e = 0.1; x = linspace(e, 2 * \%pi - e, 200); y = 1/sin(x); plot2(x, y, style = 5)$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2 : (5 points)

1. Ecrire un programme qui saisie N entiers et affiche leur somme S et leur moyenne P.
2. Soit $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{1+e^x}$ et $g(x) = x^3 - 4x + 3$
   a) Définir le code scilab du vecteur x qui donne la subdivision de l'intervalle $[0, 5]$ en 100 sous-intervalles d'égales longueurs.
   b) En déduire le code scilab de la création du vecteur $y = f(x)$ et $z = g(x)$.
   c) Ecrire le code scilab du Tracé des courbes (x, y=f(x), z=g(x))
   avec (C_f) en rouge, (C_g) en vert, en utilisant la fonction "plot2d" puis par les commandes
   - "style" pour les couleurs,
   - "leg" pour la legende de scilab,
   - nommer l'axe des abscisses par "x",
   - l'axe des ordonnées par "y=f(x),"
   - et donner le titre "courbe de $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{1+e^x}$ et $g(x) = x^3 - 4x + 3$."

Scanné avec CamScanner

2 LATEX

EXERCICE 3 : (4 points)

Dans cet exercice, répondre par VRAI ou FAUX.

1. VRAI ou FAUX.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2+ab+ab+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

Les égalités ci-dessus sont alignées et numérotées grâce à l'environnement :

a)☐ eqnarray* b)☐ eqnarray c)☐ equation d)☐ equation*

2. VRAI ou FAUX.

a)☐ sous la classe "article", \chapter { } n'est pas disponible.

b)☐ les packages fontenc et babel permettent l'écriture convenable de tous les langages ayant des caractères accentués.

c)☐ La saisie du contenu d'un document commence toujours par "\documentclass" et se termine par "\end {*document*}"

d)☐ la command "array" aussi bien que "tabular" permet de créer un tableau dans l'environnement mathématique.

EXERCICE 4 : (6 points)

Créer un document de Latex intitulé "SUITEAout2021" et préciser le "documentclass" et les "packages" nécessaires. En utilisant les packages (amsmath et amsfonts) puis " \newtheorem reproduire le texte suivant dans le même document intitulé "SUITEAout2021".
(N.B : utiliser la notation "prop" pour designer "proposition"
en appliquant le code " \newtheorem " de latex).

Proposition 2.1. *Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$. Alors on a*

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration. Par définition,

$$S_n = 1+2+\cdots+(n-1)+n.$$

Alors

$$\begin{aligned}2S &= 1+2+\cdots+(n-1)+n\\ &+ n+n-1+\cdots+2+1\\ &= (1+n)+(2+n-1)+\cdots+(n-1+2)+(n+1)\\ &= \underbrace{(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n\,fois}\\ 2S_n &= n(n+1).\end{aligned}$$

Ce qui par multiplication par $\frac{1}{2}$ prouve l'égalité (4).

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouet Boigny d'Abidjan Année universitaire 2018-2019

UFR de Mathématiques et Informatique Niveau : Licence 2 Session : 1

Examen : Statistique avec R Durée : 01 heure

EXERCICE 1 : Questions à choix multiples (10 points)

NB : Vous écrirez le numéro de la question suivi du numéro de la bonne réponse(exemple 1 a)

1. Pour télécharger le logiciel R, il faut se rendre sur le site :
   a) *http ://www.r.com* ; b) *http ://www.r-project.org* ; c) *http ://www.r-project.com.*
2. Une interface graphique de R est :
   a) *spyder* ; b) *Rgraphic* ; c) *Rcmdr.*
3. Le code R permettant de créer la variable "age" contenant la valeur 17 et d'afficher son contenu est :
   a) *(age<-17)* ; b) *print(age)* ; c) *print(age(17)).*
4. Pour afficher le type d'un objet, on utilise la fonction :
   a) *mode()* ; b) *type()* ; c) *Mod().*
5. On considère la variable "poids" définie par : poids<-c(18, 20, 47, NA, 19, 57, 18).
   Quel est le résultat de l'instruction : **which(is.na(poids))** ?
   a) *TRUE* ; b) 4 ; c) *NA.*
6. Pour connaitre la structure d'un objet, on peut utiliser la fonction :
   a) *class()* ; b) *str()* ; c) *factor().*
7. Soit A une matrice. L'instruction : A[1 : 2,] donne
   a) *les deux premières lignes de A* ;
   b) *l'élément de la première ligne et la deuxième colonne de A* ;
   c) *les deux premières colonnes de A.*
8. On considère la liste "y" définie par
   y<-list(taille=c(188, 168), etudiant=c("Pierre", "Paul"), new=c("TRUE", "FALSE")).
   Quel est le résultat du code : length(y)
   a) 3 ; b) 6 ; c) 9.
9. Soit la variable "profession" définie par
   profession<-factor(c("cadre", "ouvrier", "artisan", "cadre", "paysan", "ouvrier", "artisan", "cadre")). Quel est le résultat du code : **nlevels(profession)** ?
   a) *"artisan" "cadre" "ouvrier" "paysan"* ; b) 4 ; c) 2 3 2 1.
10. On veut importer un fichier situé sur le disque D nommé "plan" au format csv dont le séparateur de champ est le point-virgule. On utilise l'instruction suivante :
    a) *read.csv("D :/plan.csv")* ;
    b) *read.csv2("D :/plan.csv")*
    c) *write.csv("D :/plan.csv").*

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2 : (10 points)

NB : Vous écrirez des codes en langage R permettant de répondre aux questions posées.

1. Créer les vecteurs suivants :
   a) x est constitué de la suite des entiers de 1 à 30 ;
   b) y contient trois fois la valeur 5, quatre fois la valeur 8 puis sept fois valeur 12.
   c) z contient 11 chiffres compris entre 1 et 30 avec un intervalle constant.
2. On considère la variable "poids" définie par : poids<-c(18, 20, 47, NA, 19, 57, 18, NA, 35) Créer le vecteur nommé "poidsNA" contenant les valeurs de la variable "poids" sauf les valeurs manquantes à l'aide d'une seule commande.
3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix}$.
   a) A l'aide du vecteur "vec" définie par vec<-c(3,-1,0,-1,3,-1,0,-1,3), créer la matrice A.
   b) Pour chaque ligne et chaque colonne de la matrice A, calculer la moyenne de leurs éléments à l'aide des fonctions **apply** et **mean**.
   c) Calculer la trace, le déterminant puis l'inverse de la matrice A.
   d) Créer le vecteur b.
   e) Résoudre le système linéaire : AX=b.
4. On considère le data frame nommé "etudiant" dont les lignes et les colonnes sont données dans le tableau ci-dessous.

Nom	sexe	Analyse Numérique	Scilab
Mariam	F	12	8
TIA	M	5	13
DIGBEU	M	7	4
KOUASSI	M	15	18
AYA	F	2	18
YAPO	M	14	14
VANESSA	F	10	11
ZAMBLE	M	10	6

   a) Créer une variable nommée "genre" contenant les valeurs de la colonne "sexe" et une variable nommée "ananum" contenant les valeurs de la colonne "Analyse Numérique"
   b) Construire le tableau des effectifs puis le tableau des fréquences de la variable "genre"
   c) Calculer le mode de la variable "ananum".
   d) Déterminer les valeurs des principaux paramètres de position de la variable "ananum" à l'aide d'une seule commande.
   e) On souhaite comparer les notes des filles et des garçons. Construire un data frame nommé "hom" contenant uniquement les étudiants de sexe masculin et un data frame nommé "fem" contenant uniquement les étudiants de sexe féminin.

Scanné avec CamScanner

Université Felix Houphouët Boigny d'Abidjan Année universitaire 2018-2019

UFR de Mathématiques et Informatique Niveau : Licence 2 Session : 2

Examen : Statistique avec R Durée : 01 heure

EXERCICE 1 : Questions à choix multiples (10 points)

Vous écrirez le numéro de la question suivi du numéro de la bonne réponse(exemple 1 a)

Pour consulter l'aide en ligne de la fonction sum, on utilise l'instruction :

a) *help("sum")*; b) *?sum*; c) *help(sum).start*

Pour supprimer la variable b, on peut utiliser la commande :

a) *suppram(b)*; b) *NULL(b)*; c) *rm(b)*.

Pour convertir une variable d du type double en une variable du type integer, j'utilise l'instruction :

a) *as.integer(d)*; b) *integer(d)*; c) *as.integer(d)*.

On pose v<-5; w<--6. Quel est le résultat du code $v == w$? :

a) *FALSE*; b) *TRUE*; c) -6.

On pose h<-c("maman", "papa"). Quel est le résultat du code : class(h) ?

a) *"maman" "papa"*; b) "character"; c) 9.

On donne le vecteur z<-c("bleu", "blanc", "vert"). Quel est le résultat du code : sort(z, decreasing=TRUE) ?

a) *"bleu" "blanc" "vert"*; b) *"vert" "blanc" "bleu"*; c) *"blanc" "bleu" "vert"*.

On pose $x <- c(12, -5, 7, 8.30)$. Quel est le résultat de l'instruction : which(x>7) ?

a) *1 4 5*; b) *12 8 30*; c) *FALSE*.

On considère la liste "y" définie par

y<-list(taille=c(174, 165, 195), classe=c("L1", "L2", "L3"), UFR=c("CBG", "SSMT", "STRM"))

Quel est le résultat du code : y[[3]] ?

a) 195; b) "L3"; c) "CBG" "SSMT" "STRM".

Soit la variable z définie par z<-list(poids=c(75, 90), profession=c("artisan", "enseignant"))

Le code suivant : z[[2]]<-NULL

a) *ajoute l'élément NULL à la liste z*

b) *supprime le deuxième élément de la liste z*

c) *remplace le deuxième élément de la liste z par NULL*.

On considère un data frame nommé dafr. Le code suivant : dimnames(dafr) donne

a) *le nom des lignes et des colonnes du data frame*

b) *le nom des colonnes du data frame*

c) *les dimensions du data frame*.

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2 : (10 points)

NB : Vous écrirez des codes en langage R permettant de répondre aux questions posées

1. Soit vec un vecteur de nombres réels contenant éventuellement des valeurs manquantes

   a) Ecrire un code permettant de tester la présence de valeurs manquantes dans ce vecteur. Commenter le résultat de ce test.

   b) On suppose que vec contient des valeurs manquantes. Ecrire un code permettant de donner la position des ces valeurs manquantes.

   c) Ecrire un code permettant d'afficher le nombre de valeurs manquantes du vecteur vec

   d) On suppose que vec contient des valeurs manquantes. Ecrire un code permettant de calculer la valeur moyenne du vecteur.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 10 \\ -12 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   A l'aide du vecteur "mat" définie par mat<-c(3,-1,10,-12,3,-7,0,-1,3), créer la matrice A

3. On considère le data frame nommé satishop contenant les résultats d'un sondage portant sur les prestations d'un hôpital.

   a) Ecrire un code permettant d'obtenir la structure générale des colonnes de ce data frame

   b) La colonne nommée profession contient assez de valeurs manquantes. Ecrire un code permettant de supprimer cette colonne.

   c) La structure chargée d'analyser ces données souhaite ajouter une colonne nommée IMC portant sur l'indice de masse corporelle. Ecrire un code permettant de réaliser ce vœu

   d) Cette structure souhaite partager ce data frame en plusieurs groupes en fonction de l'âge. Ecrire un code permettant de créer un data frame nommé satishop40 contenant uniquement les personnes de 40 ans ou plus.

   e) On souhaite déterminer le nombre de patients possédant une assurance. La colonne nommée assurance, prenant deux valeurs, permet de savoir si un patient possède une assurance(1 : personne assurée ou 0 : personne non assurée). Cette colonne ne contient pas de valeurs manquantes. Ecrire un code permettant d'extraire cette colonne que vous nommerez assur puis calculer le nombre de personnes possédant une assurance.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny **UFR de Mathématiques et Informatique**

Examen de statistique avec R **Niveau : Licence 2** **Durée : 01h15min**

SESSION UNIQUE 2019-2020

Exercice 1 : (10 points)

1. On donne les valeurs suivantes : **4 ; NA ; -7 ; 1 ; 10 ; -5 ; 11,8 ; 3 ; 9 ; NA**.
   a) Ecrire un code permettant de créer le vecteur **vec** contenant les valeurs précédentes.
   b) Donner les résultats des codes suivants :
      - *vec[3 : 5]*,
      - *vec[c(1, 4)]*,
      - *vec[-c(2, 3, 5)]*.
   c) Que font les codes suivants :
      - *vec[1 : 3]<-6* ,
      - *vec[which(is.na(vec))]<-0* ?
2. On donne les vecteurs x=(1200 ; 1180 ; 1750 ; 2100), y=(1450 ; 1870 ; 1690 ; 0) et z=(4; 2 ; 3 ; 2).
   a) Créer les vecteurs x, y et z.
   b) Créer la matrice A dont les colonnes sont les éléments respectifs de x, y et z.
   c) Nommer les colonnes de la matrice **A** avec les noms suivants : conjoint1, conjoint2, nb_personnes.
   d) Que font les codes suivants :
      - *dim(A)*,
      - *A[2 :3,]* ?
3. En réalité, les colonnes de la matrice **A** représentent respectivement les revenus des deux conjoints et le nombre de personnes de quatre ménages. Ecrire un code permettant de calculer
   a) le revenu total de chaque ménage ;
   b) le revenu par personne de chaque ménage.
4. On donne la liste appelée **LSE** dont les éléments sont nommés : **nom**, **taille** et **new** et prennent respectivement les valeurs (Pierre, Paul), (188, 168) et (FALSE, TRUE).
   a) Ecrire un code permettant de créer cette liste.
   b) Quel est le résultat du code suivant : *length(LSE)* ?
   c) Ecrire un code permettant d'ajouter à la liste **LSE** l'élément nommé **poids** et prenant la valeur (75, 80).
   d) Que fait le code suivant : *LSE$nom[2]<-"Sam"* ?

Scanné avec CamScanner

Exercice 2 : (10 points)

On considère le fichier **tele.csv** situé sur le disque E de votre ordinateur et contenant informations d'un sondage réalisée à Abidjan auprès des individus regard quotidiennement la télévision. C'est un fichier au format **csv** dont le séparateur de cha est une virgule et contenant les variables : **genre** (prenant les valeurs homme et femm **niveau** (niveau d'étude), **temps** (durée moyenne quotidienne devant la télévision minutes), etc.

Ecrire un code permettant :

1) d'importer ce fichier dans votre session de travail sous le nom **TV**.
2) de vérifier que le fichier est du type data frame.
3) de donner la structure générale des variables de ce data frame.
4) d'obtenir uniquement les noms des lignes et des colonnes.
5) de transformer la variable **genre** en facteur grâce à la fonction **factor**.
6) d'obtenir le résumé numérique des variables du data frame.
7) de construire le tableau des effectifs puis des fréquences de la variable **niveau**.
8) de construire un data frame nommé **TVF** constitué uniquement des do concernant les femmes à partir du data frame **TV**.
9) de supprimer la colonne **genre** du data frame **TVF**.
10) de déterminer le temps moyen passé devant la télévision par les femmes.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny **UFR de Mathématiques et Informatiques**

Examen de statistique avec R **Niveau : Licence 2** **Durée : 01h15 min**

Première session **Année 2020/2021**

Exercice 1 : (10 points)

1) Soit **note** = (7 ; 9 ; 13 ; 8 , *NA* ; 2 ; 16 ; 1 : 6; 19 ; 15; *NA* ; 19 ; 14 ; 8 ; 2 ; 19 ; 11 ; 18 ; 7).
   a) Ecrire un code permettant de créer le vecteur **note.**
   b) Donner les résultats des codes suivants :
      - $length(note)$;
      - $which(is.na(note))$;
      - $note[c(5, 11,13)]$;
      - $sum(note)$;
   c) Que font les codes suivants :
      - $note[note > 10]$;
      - $note \leftarrow na.omit\ (note)$;
      - $sort(note,\ decreasing = TRUE)$?

2) Soit **EL** $\leftarrow list\ (nom = c\ ('Aya', 'Florent', 'Paul'), tail = c(174,180,168), niv = c\ ('L3', 'L1', 'L2'))$
   a) Quel type de structure de données représente **EL** ?
   b) Que fait le code suivant : **EL[3]** ?
   c) Quel est le résultat du code suivant **: length(EL)** ?
   d) Ecrire un code qui permet d'ajouter à **EL** un élément nommé **age** et prenant les valeurs 20, 24 et 40.
   e) Ecrire un code permettant de remplacer la valeur **Paul** par **Emilie** dans **EL.**
   f) Ecrire un code permettant de supprimer l'élément **tail** de **EL** .

3) On donne le vecteur **b**= (7 ; 9 ; 13 ; 8 ; 2 ; 16 ; 1 ; 6 ; 19 ; 15 ; 19 ; 14 ; 8 ; 2 ; 19 ; 11 ; 18 ; 7)
   a) Ecrire un code permettant de créer une matrice **B** de trois lignes dont la première ligne contient les six premiers éléments de b, la deuxième ligne contient les six éléments suivants et la troisième ligne contient les six derniers éléments de **b**.
   b) Ecrire un code qui permet de nommer respectivement les lignes de **B** par L1, L2 et L3 et les colonnes C1, C2, C3, C4, C5, C6.
   c) Ecrire un code qui permet de créer un vecteur nommé **LIGNE** contenant la somme des éléments de chaque ligne de **B**.
   d) Ecrire un code permettant d'extraire les deux premières colonnes de la matrice **B**.
   e) Remplacer la valeur 14 de la matrice **B** par 17.

Exercice 2 : (10 points)

On considère le fichier **habitat.csv** situé sur le disque F de votre ordinateur et contenant des informations sur les caractéristiques des habitations à Abidjan. C'est un fichier au format csv dont le séparateur de champ est une virgule.

1) Ecrire un code R permettant d'importer ce fichier dans votre session de travail sous le nom **maison.**
2) On souhaite obtenir la structure générale des variables de ce data frame.
   a) Quel est le code à saisir pour obtenir ces informations ?
   b) Quel est le code à saisir pour obtenir le nom des variables ?
3) Un aperçu de ce fichier est donné ci - dessous après transformation des variables **natmaison** et **model.**

Scanné avec CamScanner

nbpieces	*: int 2 5 2 3 4 3 3 7 1 2 5 5.....*
superficie	*: num 150 225 125.78 289.8 964 548.8 NA 300.25....*
natmaison	*: Factor w / 3 levels " bas ", " dup ", " dup ", " bas " " tpx " : 1 2 2 1 3 1...*
model	*: Factor w / 2 levels " A", "A ", " B ", "A " NA, "B" : 1 1 2 1 NA 2.....*

a) Quelle est la nature de la variable **natmaison** ? Quelles sont ses modalités ?
b) Quel est le code qui a permis de transformer la variable **natmaison** en facteur ?
c) Ecrire un code permettant d'obtenir le tableau des effectifs de la variable **natmaison**.
d) Ecrire un code permettant de vérifier la présence de valeurs manquantes dans la variable **natmaison** puis un code permettant d'obtenir son nombre de valeurs manquantes.

4) On considère la variable **superficie**.
a) On souhaite calculer la valeur moyenne de cette variable. Un étudiant a saisi le code suivant ***mean(maison$superficie)*** Quel est le résultat de ce code ? comment contourner cette difficulté ?
b) Ecrire un code permettant d'obtenir le résume numérique de cette variable.
c) On regroupe les données de cette variable en classes de même amplitude. Ecrire un code permettant d'obtenir l'histogramme de cette variable.
d) Ecrire un code permettant de déterminer la variance et l'écart type de cette variable.

5) On s'intéresse aux variables **model** et **superficie**.
a) Ecrire un code permettant d'obtenir, à partir du data frame **maison.csv**, un data frame nommé **modelA** contenant uniquement le modèle " A " et un data frame nommé **modelB** contenant uniquement le modèle " B ".
b) Ecrire un code permettant de calculer la moyenne de la variable **superficie** dans le data frame **modelA** et dans le data frame **modelB**.
c) Ecrire un code permettant d'obtenir la boîte à moustaches de la variable **superficie** en fonction des modalités de la variable **model.**

Scanné avec CamScanner

Université FHB
MATHS-INFO.

Année 2020-2021

EXAMEN DE STATISTIQUE AVEC R
Session 2 ;L2; durée:1H15

Exercice 1:(10 points)

1) On donne les valeurs:7; 9; 13; 8; NA; 2; 16; NA; 6; 19; 15; NA; 19; 14; 8; 19; 11; 18.
a) Ecrire un code permettant de créer le vecteur **dev** contenant les valeurs précédentes.
b) Donner les résultats des codes suivants:
- *length(which(is.na(dev)))*;
- *all(dev> 10)*;

c) Que font les codes suivants:
- *dev<-na.omit(dev)*;
- *which.max(dev)*.

2) On donne $x = (45; 21; 23; 32)$, $y = (450; 870; 690; 580)$ et $z = (187; 180; 170; 190)$.
a) Créer la matrice **B** dont les colonnes sont les éléments respectifs de x, y et z.
b) Nommer les lignes de **B** avec les noms: paul, jeanne, Marc, Marie.
c) Nommer les colonnes de **B** avec les noms: age, revenu, taille.
d) Que font les codes suivants:
- *mean (B[, 2])*;
- *apply (B,MARGIN= 2,max)*;

3) On considère les vecteurs suivants:
nom prenant les valeurs Konan, Kassi, Soro,
prenom dont les valeurs sont Paul, Romeo, Emilie,
annee_naissance dont les valeurs sont 2000, 2002, 1998.
a) Créer une liste nommée **MOI** dont les éléments sont **nom, prenom** et **annee_naissance**
b) Extraire le prenom de la liste **MOI** de deux manières différentes en utilisant:
- l'indice;
- le nommage.

c) On suppose qu'il existe une liste nommée **TOI** et présentant la même structure que celle de la liste **MOI**. Créer la liste nommée **personnes** qui contient les listes **TOI** et **MOI** dans cet ordre.

Exercice 2 (10 points)

On considère le fichier **etudiant.csv** situé sur le disque **E** de votre ordinateur

2/11/2022

Scanné avec CamScanner

et contenant les informations d'un sondage portant sur les sports pratiqués par les étudiants d'une université d'Abidjan. C'est un data frame au format **csv** dont le séparateur de champ est une virgule et contenant les variables: **genre** (prenant les valeurs homme et femme), **temps** (durée de pratique du sport chaque jour en minutes), **type** (football, basketball, tennis, natation, karaté...), **age** (âge en années des étudiants), etc. On suppose que les **variables age** et **temps** contiennent des valeurs manquantes.

Ecrire un code permettant:

1) d'importer ce fichier dans votre session de travail sous le nom **Sport**;
2) d'obtenir uniquement les noms des individus;
3) d'afficher les 6 premières lignes du fichier **sport**;
4) de transformer les variables **genre** et **type** en facteur;
5) d'obtenir le resumé numérique de toutes les variables du data frame;
6) de construire le diagramme en barres de la variable **type**;
7) de construire la boîte à moustaches de la variable **temps**;
8) de déterminer l'âge moyen des étudiants;
9) de renommer la variable **type** en **sport_prefere**;
10) de déterminer la durée minimale de temps passé au sport.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny **UFR de Mathématiques et Informatique**

Examen de statistique avec R **Niveau : Licence 2** **Durée : 01h30min**

Première session **2021/2022**

Exercice 1 : 10 points (Questions de cours)

1) On donne le vecteur nommé vec dont les éléments sont les suivants :

4 ; NA ; 7 ; 2 ; -5 ; 3 ; 9 ; NA ; 14. Donner les résultats des codes suivants :

a) *vec[2 : 4]*
b) *vec[-c(2, 5, 7)]*
c) *which(is.na(vec))*
d) *na.omit(vec)*

2) On donne la liste appelée **LST** dont les éléments sont nommés : **nom**, **taille** et **profession** et prennent respectivement les valeurs (Pierre, Paul, Jean), (188, 168, 170) et (Etudiant, Enseignant, Artisan). Que font les codes suivants ?

a) *length(LST)*
b) **LST$poids<-c(75,83,65)**
c) *LST$nom[3]<-"Thomas"*

3) On donne la matrice **B** suivante : $B = \begin{pmatrix} 12 & 17 & 9 & 5 \\ 11 & 16 & 18 & 4 \\ 4 & 7 & 8 & 13 \end{pmatrix}$

Donner les résultats des codes suivants :

a) **ncol(B)**
b) **B[1,]**
c) **apply(B, MARGIN=2, sum)**

Exercice 2 : 10 points (Applications)

La matrice **A** suivante contient les notes de six UE de quatre étudiants de la licence 2 de l'UFR MATH-INFO:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 7 & 10 & 15 & 14 \\ 18 & 5 & 14 & 7.5 & 12.5 & 10 \\ 10 & -1 & 12 & 11 & -1 & 9 \\ 9 & 13 & 9.5 & 5 & 13.5 & 15 \end{pmatrix}$$

1) Ecrire un seul code permettant d'obtenir le nombre de lignes et de colonnes de la matrice **A**.

Scanné avec CamScanner

2) Ecrire un code permettant de renommer les colonnes en UE1, UE2, UE3, UE4, UE5 et UE6.
3) Ecrire un code permettant de renommer les lignes en Pierre, Aline, Solange, Jean.
4) En réalité, la valeur **-1** signifie que l'étudiant a validé l'UE. Ecrire un code permettant de remplacer les **-1** en **NA**.
5) Ecrire un seul code permettant de calculer la moyenne de chaque étudiant pour les six UE.
6) Ecrire un seul code permettant d'obtenir les moyennes par UE.
7) Ecrire un code permettant de transformer la matrice A en un data frame nommé DFA.
8) Une erreur a été signalée dans la saisie des notes. Ecrire un code permettant de remplacer la note 5 de l'UE2 par 15.
9) Ecrire des codes permettant de remplacer les valeurs manquantes de l'UE2 et de l'UE5 par leurs moyennes respectives.
10) Ecrire un code permettant d'ajouter une colonne nommée UE7 contenant les valeurs 12; 11; 10 et 13.

Scanné avec CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny **UFR de Mathématiques et Informatique**

Examen de statistique avec R **Niveau : Licence 2 MI** **Durée : 01h10min**

Deuxième session **2021/2022**

On considère le data frame nommé **dataexam2.csv** situé sur le disque **C** de votre ordinateur dont les colonnes sont séparées par un point-virgule.

1) Ecrire un code permettant d'importer les données dans un data frame intitulé **exam2**

2) Un étudiant a obtenu un aperçu du fichier **exam2** :

```
'data.frame'  : 40 obs. of 7 variables:
Gender        : int 0 1 1 1 0 0 0 0 1 1 ...
FSIQ          : int 133 140 139 133 137 99 138 92 89 133 ...
VIQ           : int 132 150 123 129 132 90 136 90 93 114 ...
PIQ           : int 124 124 150 128 134 110 131 98 84 147 ...
Weight        : int 118 NA 143 172 147 146 138 175 134 172 ...
Height        : num 64.5 72.5 73.3 68.8 65 69 64.5 66 66.3 68.8 ...
MRI_Count     : int 816932 1001121 1038437 965353 951545 928799 991305 854258 904858 ...
```

a) Quel code a-t-il saisi ?

b) Donner le nombre d'individus et le nombre de variables de ce data frame.

c) Donner les différents types des variables de ce data frame.

3) En réalité la variable **Gender** est une variable qualitative dont les modalités sont **man** et **woman** et codées respectivement **0** et **1**. Ecrire un code permettant de :

a) remplacer la valeur **0** par **man** et **1** par **woman**.

b) transformer la variable **Gender** en facteur.

c) déterminer le tableau des effectifs de la variable **Gender.**

d) représenter la variable **Gender** par un diagramme en barres.

4) On considère la variable **VIQ** du data frame **exam2**.

a) Ecrire un code permettant d'obtenir le résumé numérique de la variable **VIQ.**

b) Le code précédent a donné le résultat suivant :

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
71.0	90.0	113.0	112.3	129.8	150.0

Que représente la valeur **129.8** pour la variable **VIQ** ?

c) Ecrire un code permettant de créer une variable nommée **VIQcat** du data frame **exam2** contenant les valeurs de la **VIQ** regroupées dans les classes suivantes : [70, 90[, [90, 120[, [120, 130[, [130, 150[.

d) Ecrire un code permettant de construire l'histogramme de la variable **VIQcat.**

Scanné avec CamScanner

5) Un résumé numérique des variables du data frame **exam2** est donné ci-dessous :

```
  Gender        FSIQ            VIQ            PIQ          Weight
man   :20   Min.   : 77.00   Min.   : 71.0   Min.   : 72.00   Min.   :106.0
woman :20   1st Qu.: 89.75   1st Qu.: 90.0   1st Qu.: 88.25   1st Qu.:135.2
            Median :116.50   Median :113.0   Median :115.00   Median :146.5
            Mean   :113.45   Mean   :112.3   Mean   :111.03   Mean   :151.1
            3rd Qu.:135.50   3rd Qu.:129.8   3rd Qu.:128.00   3rd Qu.:172.0
            Max.   :144.00   Max.   :150.0   Max.   :150.00   Max.   :192.0
                                                              NA's   :2
     Height        MRI_Count
 Min.   :62.00   Min.   : 790619
 1st Qu.:66.00   1st Qu.: 855919
 Median :68.00   Median : 905399
 Mean   :68.53   Mean   : 908755
 3rd Qu.:70.50   3rd Qu.: 950078
 Max.   :77.00   Max.   :1079549
 NA's   :1
```

a) Quel code saisi a permis d'obtenir ce résumé numérique ?

b) Donner les variables possédant des valeurs manquantes ainsi que leurs nombres de valeurs manquantes.

c) Un étudiant a écrit les codes suivants :

```
exam2$Weight[which(is.na(exam2$Weight))]<-mean(exam2$Weight, na.rm=TRUE)
exam2$Height[which(is.na(exam2$Height))]<-mean(exam2$Height, na.rm=TRUE)
```

A quoi servent ces deux codes ?

6) On s'intéresse aux variables **Weight** et **Height**.

a) Ecrire un code permettant de créer une variable du data frame **exam2** nommée taille égale au quotient de la variable **Height** par 10.

b) Ecrire un code permettant de créer une variable du data frame **exam2** nommée IMC égale au quotient de la variable **Weight** par le carré de la variable **taille**.

c) Ecrire un code permettant de représenter graphiquement la variable **Weight** en fonction de la variable **IMC**.

d) Ecrire un code permettant de calculer le coefficient de corrélation linéaire entre ces deux variables.

e) Les coefficients de la droite de régression de **Y=Weight** en fonction de X=IMC notée ($D_{Y/X}$) sont donnés ci-dessous :

```
(Intercept)         IMC
   15.88389    42.11085
```

Ecrire l'équation de la droite de régression ($D_{Y/X}$).

Scanné avec CamScanner

UFR-MI : L2 Année 2018-2019

CORRECTION : STATISTIQUE AVEC R SESSION 1

EXERCICE 1 : QCM

1 – b; 2 – c; 3 – a; 4 – a; 5 – b; 6 – b; 7 – a; 8 – a; 9 – b; 10 – b

EXERCICE 2

1. a) $x = c(1:30)$
   b) $y = rep(c(5.8.12).c(3.4.7))$
   c) $z = seq(from = 1.to = 30.lenght = 11)$
2. $poidsNA = poids[-c(wich(is.na(poids)))]$
3. a) $A = matrix(vec.nrow = 3.ncol = 3)$ ou
   $A = matrix(vec.nrow = 3.byrow = TRUE)$
   b) $apply(A.MARGIN = 1.mean)$ et $apply(A.MARGIN = 2.mean)$
   c) La trace : $sum(diag(A))$; le déterminant : $det(A)$; inverse : $solve(A)$
   d) $b = matrix(c(100.0.200).nrow = 3)$
   e) $solve(A.b)$
1. a) $genre = etudiant\$sexe$ et $ananum = etudiant[[3]]$
   b) Les effectifs : $table(genre)$; les fréquences : $prop.table(table(genre))$
   c) $mode_ananum = names(table((ana))[which(table(ana) = max(table(ana)))]$
   d) $summary(ananum)$
   e)

Scanné avec CamScanner

Correction Examen Statistique avec R session 2

21 mai 2020

EXERCICE 1 : Questions A choix multiples (10 points)

NB . Vous écrivez le numéro de la question suivi du numéro de la bonne réponse(exemple : 1 a)

1. Pour consulter l'aide en ligne de la fonction sum, on utilise l'instruction :

a) help("sum") ; b)?sum

```
help( sum )

## starting httpd help server ... done
?sum
```

2. Pour supprimer la variable b, on peut utiliser la commande :

c) rm(b)

```
b<-c(2,5,3)
rm(b)
```

3. Pour convertir une variable d du type double en une variable du type integer, j'utilise l'instruction :

c) as.integer(d)

```
d<-c(2.6,5.1,3.9)
as.integer(d)

## [1] 2 5 3
```

4. On pose v<-5 ; w<— 6. Quel est le résultat du code v == w ? :

a) FALSE

```
v<-5 ; w<-6.
v == w

## [1] FALSE
```

5. On pose h<-c("maman", "papa"). Quel est le résultat du code : class(h) ?

b) "character"

```
h<-c("maman", "papa")
class(h)
```


Scanné avec CamScanner

```
## [1] "character"
```

6. On donne le vecteur z<-c("bleu", "blanc", "vert"). Quel est le résultat du code : sort(z, decreasing=FALSE) ?

c) "blanc" "bleu" "vert"

```
z<-c(                    )
sort(z, decreasing=FALSE)
```

```
## [1] "blanc" "bleu"  "vert"
```

7. On pose x < -c(12, — 5, 7, 8,30). Quel est le résultat de l'instruction : which(x>7) ?

a) 1 4 5

```
x <-c(12, -5, 7, 8,30)
which(x 7)
```

```
## [1] 1 4 5
```

8. On considère la liste "y" définie par y<-list(taille=c(174, 165, 195), classe=c("Ll", "L2", "L3"), UFR=c("CBG", "SSMT", "STRM")). Quel est le résultat du code : y[[f3]] ?

c) "CBG" "SSMT" "STRM"

```
y<-list(taille=c(174, 165, 195), classe=c("L1", "L2", "L3"), UFR=c("CBG",  ss      ,        ))
y[[3]]
```

```
## [1] "CBG"  "SSMT" "STRM"
```

9. Soit la variable z définie par z<-list(poids=c(75, 90), profession=c("artisan", "enseignant")).Le code suivant : z[[2]]<-NULL

c) remplace le deuxième élément de la liste z par NULL.

```
z<-list(poids=c(75, 90), profession=c("artisan", "enseignant"))
z
```

```
## $poids
## [1] 75 90
##
## $profession
## [1] "artisan"    "enseignant"
```

```
z[[2]]<-NULL
z
```

```
## $poids
## [1] 75 90
```


Scanné avec CamScanner

10. On considère un data frame nommé dafr. Le code suivant : dimnames(ilafr) donne

a) le nom des lignes et des colonnes du data frame

```
dafr<-data.frame(taille=c(174, 165, 195), classe=c(    ,     ,    ))
head(dafr)
```

```
##   taille classe
## 1    174     L1
## 2    165     L2
## 3    195     L3
```

```
dimnames(dafr)
```

```
## [[1]]
## [1] "1" "2" "3"
##
## [[2]]
## [1] "taille" "classe"
```

EXERCICE 2 : (10 points)

NB : Vous écrirez des codes en langage R permettant de répondre aux questions posées.

1-Soit vec un vecteur de nombres réels contenant éventuellement des valeurs manquantes.

a) Ecrire un code permettant de tester la présence de valeurs manquantes dans ce vecteur . Commenter le résultat de ce test.

```
vec<-c(3, 10 ,10,-12,3,-7,0,-1 ,3,NA,5,NA,7,NA,NA)
is.na(vec)
```

```
##  [1] FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE
## [12]  TRUE FALSE  TRUE  TRUE
```

Il s'agit d'un vecteur de boolean qui envoie False si le nombre n'es pas une valeur manquante et TRue si le nombre est une valeur manquante

b) On suppose que vec contient des valeurs manquantes. Ecrire un code permettant de donner la position des ces valeurs manquantes.

```
which(is.na(vec))
```

```
## [1] 10 12 14 15
```

c) Ecrire un code permettant d'afficher le nombre de valeurs manquantes du vecteur vec .

```
sum(is.na(vec))
```


Scanné avec CamScanner

```
## [1] 4
```

Il y a bien 1 valeurs popres dans notre vecteur vec

d) On suppose que vec contient des valeurs manquantes. Ecrire un code permettant de calculer la valeur moyenne du vecteur.

```
(vec,na.rm = TRUE)
```

```
## [1] 0.09090909
```

l'argument *na.rm=TRUE* permet de supprimer les valeurs manquantes et de faire le calcul de la moyenne.

2. Soit la matrice A

```
mat<- (3, 1 ,10, 12,3, 7,0, 1 ,3)
A<-matrix(mat,ncol= 3,byrow =TRUE)
A
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    3   -1   10
## [2,]  -12    3   -7
## [3,]    0   -1    3
```

le remplissage de la matrice se fais par defaut par colonne il faut donc lui specifié que nous voulons faire le remplissage par ligne donc *byrow==TRUE*

3. On considère le data frame nommé satishop contenant les résultats d'un sondage portant sur les prestations d'un hôpital.

a) Ecrire un code permettant d'obtenir la structure générale des colonnes de ce data frame.

```
satishop<-data.frame(genre=c(      , 'garçon', 'fille'), maladie=c("Palu", "Covid19", "diabete"),age=c
satishop
```

```
##    genre maladie age profession assurance
## 1  fille    Palu  30 Professeur         1
## 2 garçon Covid19  50       <NA>         0
## 3  fille diabete  40       <NA>         0
```

```
(satishop)
```

```
## 'data.frame':    3 obs. of  5 variables:
##  $ genre     : Factor w/ 2 levels "fille","garçon": 1 2 1
##  $ maladie   : Factor w/ 3 levels "Covid19","diabete",..: 3 1 2
##  $ age       : num  30 50 40
##  $ profession: Factor w/ 1 level "Professeur": 1 NA NA
##  $ assurance : num  1 0 0
```

b) La colonne nommée profession contient assez de valeurs manquantes. Ecrire un code permettant de supprimer cette colonne.

Scanné avec CamScanner

```
satishop<-satishop[,-4]
satishop
```

```
##    genre maladie age assurance
## 1  fille    Palu  30         1
## 2 garçon Covid19  50         0
## 3  fille diabete  40         0
```

-4 - plus la position du vecteur qu'on veut suppimer ici notre vecteur profession se trouve à la position 4.

c) La structure chargée d'analyser ces données souhaite ajouter une colonne nommée IMC portant sur l'indice de masse corporelle. Ecrire un code permettant de réaliser ce voeu.

```
IMC<-c(145,10,200)
satishop<-cbind(satishop,IMC)
satishop
```

```
##    genre maladie age assurance IMC
## 1  fille    Palu  30         1 145
## 2 garçon Covid19  50         0  10
## 3  fille diabete  40         0 200
```

d) Cette structure souhaite partager ce data frame en plusieurs groupes en fonction de l'âge. Ecrire un code permettant de créer un data frame nomme satishop40 contenant uniquement les personnes de 40 ans ou plus.

```
satishop40<-satishop[satishop['age']>=40,]
satishop40
```

```
##    genre maladie age assurance IMC
## 2 garçon Covid19  50         0  10
## 3  fille diabete  40         0 200
```

e) On souhaite déterminer le nombre de patients possédant une assurance. La colonne nommée assurance, prenant deux valeurs, permet de savoir si un patient possède une assurance(1 : personne assurée ou 0 : personne non assurée) . Cette colonne ne contient pas de valeurs manquantes. Ecrire un code permettant d'extraire cette colonne que vous nommerez assur puis calculer le nombre de personnes possédant une assurance.

```
assur<-satishop['assurance']
sum(assur)
```

```
## [1] 1
```

Dans notre cas il n'y a un seul assurer

Scanné avec CamScanner

CORRECTION Examen de statistique avec R 2019-2020

Exercice 1 : (10 points)

1-a) **Réponse** : **vec** <- c(**4 , NA , -7 , 1 , 10 , -5 , 11.8 , 3 , NA**)

- **Réponse** : -7 1 10 # Affiche les éléments compris entre le troisième et cinquième éléments inclus du vecteur **vec**.
- **Réponse** : 4 1 # Affiche le premier et quatrième élément du vecteur **vec**.
- **Réponse** : 4.0 1.0 -5.0 11.8 3.0 NA # Affiche toutes les valeurs du vecteur sauf le deuxième, le troisième et le cinquième éléments.

b)

- **Réponse** : Remplace la valeur des éléments compris entre le premier et le troisième élément inclus par **6**.
- **Réponse** : Donne la position des éléments **NA** qui se trouve dans le vecteur **vec** et remplace la valeur de ses éléments par **0**.

2-a) **Réponse** : x <- c(1200, 1180, 1750, 2100)

y <- c(1450, 1870, 1690, 0)

z <- c(4, 2, 3, 2)

b) **Réponse** : **A** <- matrix(c(x, y, z), nrow=4, ncol=3)

c) **Réponse** : **colnames(A)** <- c("conjoint1", "conjoint2", "nb_personnes")

d) Que font les codes suivants :

- **Réponse** : Donne un vecteur contenant les dimensions de la matrice **A**. (exemple : 4 3)
- **Réponse** : Affiche la deuxième et la troisième ligne de la matrice **A**.

a) le revenu total de chaque ménage:

Réponse : **apply**(A[,1:2], **MARGIN**=1, **sum**) # la somme des revenus des deux conjoints par ménage.

b) le revenu par personne de chaque ménage.

Réponse : A[1:4, 1:2] #Affiche le revenu de chaque conjoint.

a) Écrire un code permettant de créer cette liste.

Réponse : **LSE** <-list(nom = c(188, 168), taille =c("Pierre", "Paul") , new = c(FALSE, TRUE))

b) Quel est le résultat du code suivant : length(**LSE**) ?

Scanné avec CamScanner

Réponse : 3 (qui est le nombre d'éléments qui composent la liste **LSE**).

c) Écrire un code permettant d'ajouter à la liste **LSE** l'élément nommé **poids** et prenant la valeur (75, 80).

Réponse : **LSE** <- c(**LSE**, z<- list(**poids** = c(75, 80))

d) Que fait le code suivant : **LSE**$nom[2]<- "Sam" ?

Réponse : Affecte "Sam" à la deuxième valeur de l'élément **nom** dans la liste **LSE**.

Exercice 2 : (10 points)

1) **Réponse** : TV <- **read.csv**("E:/tele.csv")
2) **Réponse** : **is.data.frame**(TV) #Renvoie TRUE si le fichier est du type data frame.
3) **Réponse** : **str**(TV)
4) **Réponse** : **dimnames**(TV)
5) **Réponse** : **factor**(TV$genre)
6) **Réponse** : **summary**(TV)
7) **Réponse** : Effectif : **table**(TV$niveau)
   Fréquence : **prop.table**(**table**(TV$niveau))
8) **Réponse** : **TVF** <- **subset**(**TV**, genre == "Femme")
9) **Réponse** : TVF$genre <- **NULL**.
10) **Réponse** : **mean**(TVt$temps, **na.rm**=TRUE).

Scanné avec CamScanner

EXAMEN(1) Licence 2 Math-info 2014-2015

A - Force de Laplace

1- Donner l'expression de la force de Laplace et son expression dans le cas particulier où l'induction magnétique et l'élément de courant sont perpendiculaires.

2- a) A partir du tableau ci-dessous calculer l'induction magnétique moyenne B en sachant que l'angle et le conducteur électrique de longueur l= 8cm est égal à 90°.

I(A)	0	2	3,9	5,85	7,72	9,63	11,56	13,53	15,45	17,42	19,31
F (mN)	0	1,6	3,1	4,6	5,9	7,5	9	10,6	12,1	13,7	15,3

I: intensité du courant; F: force de Laplace

b) Tracer la courbe F = f(I) sur du papier millimétré et déterminer graphiquement l'induction magnétique B.

c) Comparer les deux valeurs de l'induction magnétique B obtenues; conclure.

B - Transformateur

1- Le transformateur est une machine statique qui se rencontre dans la plupart des appareils électroménagers et industriels: pourquoi? Quelles sont ses utilisations possibles?

2- Pendant la manipulation sur le transformateur, vous avez constaté qu'en envoyant un signal continu au primaire du transformateur doux ou dur il n'apparait aucun signal à son secondaire: expliquez ce phénomène.

3- Donner les deux lois qui caractérisent un transformateur

4- Pour étudier les lois qui caractérisent un transformateur un groupe d'étudiants a obtenu, à l'issue d'une manipulation, les résultats consignés dans le tableau ci-dessous:

Tension primaire U1(V)	Tension secondaire U2(V)	U2/U1
2	39	
6	113	
8	150	
10	192	
12	228	
14	270	
16	309	
18	351	
20	390	
22	426	

4-1 Tracé la courbe U2 en fonction de U1

4-2 Calculer la pente de la courbe et en déduire le rapport de transformation U2/U1

4-3 Calculer le rapport de transformation après avoir complété le tableau précédent (rendre le sujet après avoir compléter le tableau)

4-4 Comparer les deux rapports obtenus et conclure.

4-5 Si le nombre de spires au secondaire est égal à 5000 quel est celui du primaire?

Scanné avec CamScanner

Nom: Prénoms: 2016 - 201

Examen(1) de travaux pratiques de physique L2 Math-info

Exercice 1

Trois étudiants ont effectué la manipulation portant sur la force de Laplace. Les mesures effectuées par chacun d'eux se trouvent, respectivement, dans les tableaux 1, 2 et 3 ci-dessous:

Tableau 1: I = 15A et α = 90°

L (cm)	8	4	2	1
F (mN)	11,4	5,2	2,4	1,2
B ( )				

Tableau 2: I = 10A et α = 90°

L (cm)	8	4	2	1
F (mN)	7,4	3,5	1,8	0,9
B ( )				

Tableau 3: I = 7,5A et α = 90°

L (cm)	8	4	2	1
F (mN)	5,5	2,6	1,3	0,7
B ( )				

1) De quelle étude s'agit-il ? Que représente I, α, L, F ?

2) Donner l'expression de la force de Laplace en définissant les différents termes qui s'y trouvent.

3) - Dans chaque cas calculer le champ B (mettre les valeurs dans les tableaux ci-dessus) et en déduire la valeur moyenne obtenue par chaque étudiant.

- En comparant les valeurs moyennes obtenues par les trois étudiants, peut-on en déduire qu'ils ont travaillé sur le même dispositif expérimental?

4) A partir des données des trois tableaux, tracer la courbe F en fonction de l'intensité I du courant pour L = 4 cm. Quel type de courbe obtenez-vous ? Doit-elle passer par l'origine des axes? Justifier votre réponse.

- Déterminer graphiquement le champ magnétique à partir de cette courbe et la comparer à la valeur moyenne obtenue par le calcul dans ce cas pour seulement L = 4 cm.

Scanné avec CamScanner

Exercice 2

A- Un particulier désire acheter un transformer pour ses besoins. Mais il veut un transformateur qui va lui donner une puissance élevée au secondaire. Sachant que vous avez effectué le TP sur le transformateur, il vous demande de lui conseiller un type de transformateur. Quel type de transformateur allez-vous lui conseiller? préciser ses avantages et ses inconvénients.

B- Un étudiant a effectué la manipulation sur le transformateur. Pour chaque résistance, il a relevé la tension au primaire (V_1), l'intensité au primaire (I_1), la tension au secondaire (V_2) et l'intensité au secondaire (I_2). Les mesures sont rassemblées dans le tableau ci-dessous:

R(Ω)	5	10	20	30	35	40	50	55	60	70	80	90
I1(A)	0,346	0,191	0,110	0,079	0,072	0,064	0,056	0,053	0,050	0,046	0,043	0,041
V1(V)	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12
I2(A)	0,339	0,181	0,099	0,066	0,058	0,050	0,041	0,037	0,034	0,030	0,026	0,023
V2(V)	1,53	1,81	1,95	2,00	2,01	2,02	2,04	2,04	2,05	2,06	2,06	2,07
P1(W)												
P2(W)												
r = P2/P1												

1- Calculer les puissances P1, P2 et le rendement r = P2/P1, respectivement du primaire, du secondaire et le rendement du transformateur. Mettre les valeurs dans le tableau ci-dessus.

2- Tracer sur une même figure, les courbes résistances (R) en fonction de P1, P2 et r.

3- Commenter l'évolution de chacune de ces courbes en fonction la résistance R.

4- Dans la vie courante comment pouvez-vous appliquer les résultants obtenus de l'étude de R en fonction de P2 et R en fonction r = P2/P1?

Scanné avec CamScanner

Bibliography

[1] ENSEIGNANTS DE UFRMI, proposition de sujets d'examens et/ou proposition de corrections

[2] LE VALIDEUR LMD LICENCE 2 EDITION 2023, *sur les anciens sujets de licence 2 de mathématique et Application*

[3] mathematiques-statistiques-et-probabilites

[4] algebre *SALIOU TOURE*

[5] analyse *edmond fedida*

[6] http://www.les-mathematiques.net

[7] http://www.sesamath.net

[8] Algebre et Geometrie PC-PSI-PT

[9] les grandes classques de mathématique -algebre et geometrie

[10] Precis MP complet

[11] precis-mecanique

[12] Klub prepa

[13] H-prepa Analyse pc

[14] H-PREPAS mathematiques-1re-annee-mpsi-tout-en-un

[15] LA PHYSIQUE EN FAC

[16] jean marie monier les-m-thodes-et-exercices-de-math-matiques-mpsi

[17] EXO 7

Scanné avec CamScanner

Scanné avec CamScanner