Fomesoutra.com
ça soutra!

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET-BOIGNY DE COCODY

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union-Discipline-Travail

LE VALIDEUR LMD 2025

UFR DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE



CLASSE ETOILE 1

LICENCE 1 TRONC COMMUN

SEMESTRE 1

- Suites et fonctions et dérivables
- Calcul intégral
- Structure algébriques
- Mécanique du point
- Architecture des ordinateurs
- Outils bureautiques
- Eléments de logiques
- Economie générale

SEMESTRE 2

- Calcul matriciel
- Espaces vectoriels
- Algorithme et Python
- Probabilité
- Statistique descriptive
- Electrocinétique, Electrostatique
- Optique
- TP physique

Contact :
(+ 225) 07 69 06 39 04
(+ 225) 05 95 28 39 65

Nouvelle édition à avoir absolument
Collection Succès

Scanned with CamScanner

AVANT- PROPOS

Bien joué ! Vous êtes orienté en Maths-Info ! Vous estimez avoir franchi l'étape que vous perceviez comme la plus difficile, c'est-à-dire le Bac C, E ou D. Toutes nos félicitations… D'ailleurs, votre entourage vous a toujours dit que vous étiez « bon et même très bon en mathématiques » …

Certes, personne ne met en doute cela. Pour autant, la partie la plus importante du processus vient juste de commencer. Comme le dit le Proverbe Chinois,

« Quand on a dix pas à faire, neuf pas font la moitié du chemin » …

En d'autres termes, vous n'êtes pas au bout de vos peines. Cette dernière moitié de chemin comporte plusieurs obstacles tels que : s'adapter au système de cours universitaire, la compréhension des cours dispensés dans les amphithéâtres, validé toutes vos UE avec de bonnes mentions etc.

Le VALIDEUR LMD est un recueil d'anciens sujets du système LMD, de propositions de corrections et des conseils absolument importants à savoir. Sa mise à votre disposition vous permettra de vous imprégner des sujets auxquels vous pourriez être confrontés.

- ✓ **La première partie** de ce document présente quelques témoignages d'anciens et les opportunités qu'offre la filière.
- ✓ **La seconde partie** contient les sujets et propositions de corrections des années académiques antérieures qui sont les années universitaires (2020-2021/2022-2022/2022-2023/ 2023-2024).

S'appuyant sur l'expérience personnelle des auteurs et sur de nombreux témoignages d'étudiants, cet ouvrage se veut résolument concret et opérationnel.

Vous avez des questions au sujet du **VALIDEUR LMD** ? Un point de cours qui vous résiste ? Une erreur que vous avez croisée dans l'ouvrage ? Voulez-vous intégrer l'équipe ? Ou vous voulez juste nous laisser un petit mot gentil ? Et bien n'hésitez pas à nous contacter. Nous nous ferons un plaisir de vous répondre dans les meilleurs délais : valideurlmd.ci@gmail.com

les auteurs

Scanned with CamScanner

Sommaire

Avant propos..... 3
Maquette de l'année académique 7
Introduction 8
Les membres de l'équipe édition 2025 8
Bienvenu à l'UFR Math Info..... 9
L'Univers Math Info.....
Première partie

Témoignages des anciens.....10
Vue globale des possibilités après des études en mathématiques informatique..... 12
Quelques précieux liens absolus pour mieux vous orienter.....13
Deuxième partie

SEMESTRE 1

Examens de suites et fonctions dérivables	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2020-2021	15	22
Examen session 1 2021-2022	17	28
Examen session 2 2020-2022	18	
Examen session 1 2022-2023	19	31
Examen session 1 2023-2024	20	33
Examen session 2 2023-2024	21	
Examens de calcul intégral	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2020-2021	36	42
Examen session 2 2020-2021	37	49
Examen session 1 2021-2022	38	52
Examen session 2 2021-2022	39	
Examen session 1 2022-2023	40	53
Examen session 1 2023-2024	41	55
Examens de mécanique du point	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2020-2021	57	67
Examen session 2 2020-2021	59	70
Examen session 1 2021-2022	61	74
Examen session 1 2022-2023	63	75
Examen session 1 2023-2024	65	82
Examens d'outils bureautiques	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2020-2021	87	102
Examen session 1 2021-2022	91	
Examen session 1 2022-2023	93	
Examen session 1 2023-2024	94	
Examens d'architecture des ordinateurs	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2021-2022	106	109
Examen session 1 2022-2023	107	
Examen session 1 2023-2024	108	
Examens d'éléments de logique	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2020-2021	112	
Examen session 2 2020-2021	114	

Scanned with CamScanner

Examen session 1 2021-2022	116	121
Examen session 2 2021-2022	117	123
Examen session 1 2022-2023	118	126
Examen session 1 2023-2024	119	128
Examen session 2 2023-2024	120	129

Examens de structures algébriques	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2020-2021	131	138
Examen session 2 2020-2021	132	141
Examen session 1 2021-2022	133	143
Examen session 2 2021-2022	134	
Examen session 1 2022-2023	135	146
Examen session 1 2023-2024	136	149
Examen session 2 2023-2024	137	

Examens de technique d'expression	***154***
Examen session 1 2019-2020	154

Examens d'économie générale	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 2 2020-2021	157	168
Examen session 1 2020-2021	159	166
Examen session 2 2021-2022	162	
Examen session 1 2023-2024	164	
Examen session 2 2023-2024	165	

SEMESTRE 2

Examens de calcul matriciel	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2020-2021	172	179
Examen session 2 2020-2021	173	182
Examen session 1 2021-2022	174	
Examen session 2 2021-2022	175	184
Examen session 1 2022-2023	176	185
Examen session 1 2023-2024	177	
Examen session 2 2023-2024	178	187

Examens d'espace vectoriel		***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2020-2021		190	199
Examen session 2 2020-2021		191	201
Examen session 1 2021-2022		192	205
Examen session 2 2021-2022		193	208
Examen session 1 2022-2023		194	
Examen session 1 2022-2023	MIAGE	195	
Examen session 1 2022-2023		196	
Examen session 1 2023-2024		197	210
Examen session 2 2023-2024		198	213

Examens d'analyse réelle	***Sujets***	***Propositions de correction***
Examen session 1 2020-2021	216	226
Examen session 1 2021-2022	217	237
Examen session 2 2021-2022	219	241
Examen session 1 2022-2023	221	
Examen session 1 2023-2024	222	245
Examen session 2 2023-2024	224	

Scanned with CamScanner

Examens d'algorithme	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 2 2020-2021	249	261
Examen session 1 2021-2022	252	264
Examen session 2 2021-2022	255	
Examen session 1 2022-2023	257	
Examen session 1 2023-2024	259	266
Examen session 2 2023-2024	260	

Examens de python	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 et 2 2020-2021	271	282
Examen session 2021-2022	274	285
Examen session 1 2022-2023	276	
Examen session 1 2023-2024	279	

Examens de Probabilités	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2020-2021	286	
Examen session 1 2021-2022	288	
Examen session 2 2021-2022	289	
Examen session 1 2022-2023	290	295
Examen session 2 2022-2023	292	299
Examen session 1 2023-2024	293	303
Examen session 2 2023-2024	294	

Examens de statistique descriptive	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 + correction 2023-2021	318	
Examen session 2 2020-2021	309	322
Examen session 1 2021-2022	310	326
Examen session 2 2021-2022	311	328
Examen session 1 2022-2023	312	330
Examen session 1 + correction 2023-2024	333	
Examen session 2 2023-2024	313	340
Examen session 2 2023-2024	314	

Examens d'électricité	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2020-2021	343	357
Examen session 2 2020-2021	345	361
Examen session 2 2021-2022	347	373
Examen session 1 2021-2022	349	371
Examen session 1 2022-2023	351	379
Examen session 1 2023-2024	313	383
Examen session 2 2023-2024	355	

Examens d'optique	*Sujets*	*Propositions de correction*
Examen session 1 2020-2021	372	407
Examen session 2 2020-2021	394	411
Examen session 1 2021-2022	396	413
Examen session 2 2021-2022	397	
Examen session 1 2022-2023	399	416
Examen session 1 2022-2023 CLASSE ETOILE	401	418
Examen session 1 2023-2024	313	
Examen session 2 2023-2024	405	420

Développements Limités Usuels en 0 pages 424

Bibliographie

Scanned with CamScanner

Etablissement	Université Félix HOUPHOUET BOIGNY
UFR	Mathématiques et Informatique
Domaine	Sciences et Technologies
Grade	Licence
Mention	Mathématiques/Informatique
Parcours	Mathématiques et Applications/Mécanique/Sciences informatique
Niveau	L1

SEMESTRE 1

Code UE	Intitulé des Unités d'Enseigne	Code EC	Eléments constitutifs	Masse Horaire Semestrielle des EC CM	TD	TP	Sem.	Sortie T	HE	HE	TPE	TPE		CTT	Coef	CECT UE	Fonctionnalité
				UE Fondamentale													
FVR2111	Fonctions d'une variable réelle	FVR21111	Suites et fonctions dérivables	15	15	0		0	30	30	45	45		75	3	5	Obligatoire
		FVR21112	Calcul intégral	10	10	0		0	20	20	30	30		50	2		
				50%	50%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		5		
STA2111	Structure Algébriques	STA21111	TD Structure algébriques	20	20	0		0	40	40	60	60		100	4	4	Obligatoire
				50%	50%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		4		
MNP2111	Mécanique du point	MNP21111	Outils Mathématiques	6	6	0		0	12	12	18	18		30	1,2	6	Obligatoire
		MNP21112	Cinématique du point	15	9	0		0	24	24	36	36		60	2,4		
		MNP21113	Dynamique du point	15	9	0		0	24	24	36	36		60	2,4		
				60%	40%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C				
IAN2111	Initiation à l'informatique	IAN21111	Architecture des ordinateurs	10	10	5		0	25	25	37,5	37,5		62,5	3	6	Obligatoire
		IAN21112	Outils bureautiques	10	0	15		0	25	25	37,5	37,5		62,5	3		
				40%	20%	40%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		6		
				UE de Méthodologie													
ELG2111	Eléments de logique	ELG21111	Eléments de logique	24	16	0		0	40	40	60	60		100	4	4	Obligatoire
				60%	40%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C				
TEX2111	Technique d'expression	TES21111	Techniques d'expression	18	12	0		0	30	30	45	45		75	2	2	Obligatoire
				60%	40%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		3		
				UE de Culture Générale													
ECG2111	Economie Générale	ECG2111	Economie Générale	18	12	0		0	30	30	45	45		75	3	3	Obligatoire
				60%	40%	0%		0%	0%	40%	40%	60%	C		3		
	Total Semestre								300		450			750		30	

SEMESTRE 2

Code UE	Intitulé des Unités d'Enseigne	Code EC	Eléments constitutifs	Masse Horaire Semestrielle des EC CM	TD	TP	Sem.	Sortie T	HE	HE	TPE	TPE		CTT	Coef	CECT UE	Fonctionnalité
				UE Fondamentale													
EAL2112	Eléments d'Algèbre linéaire	EAL21121	Calcul Matriciel	15	15	0		0	30	20	30	30		50	2	5	Obligatoire
		EAL21122	Espaces vectoriels	10	10	0		0	20	30	45	45		75	3		
				50%	50%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		5		
ANR2112	Analyse réelle	ANR21121	Analyse réelle	20	20	0		0	40	40	60	60		100	4	4	Obligatoire
				50%	50%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		4		
APG21112	Algorithme et Programme	APG211121	Algorithme	10	10	0		0	20	20	30	30		50	2	5	Obligatoire
		APG211122	Programmation Python	10	0	20		0	30	30	45	45		75	3		
				40%	20%	40%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		5		
PRS2112	Probabilité Statistique	PRS21121	Statistique descriptive	10	10	10		0	30	30	45	45		75	3	5	Obligatoire
		PRS21122	Probabilités	10	10	0		0	20	20	30	30		50	2		
				40%	40%	20%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		5		
ELT2112	Electricité	ELT2112	Electricité	24	16	0		0	40	40	60	60		100	4	4	Obligatoire
				60%	40%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C				
OPT2112	Optique	OPT2112	Optique	24	16	0		0	40	40	60	60		100	4	4	Obligatoire
				60%	40%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		3		
				UE de Methodologique													
TPP2111	Travaux Pratiques de Physique 1	TPP2111	Travaux Pratiques de Physique 1	0	0	30		0	30	30	45	45		75	3	3	Obligatoire
				0%	0%	100%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	C		3		
	Total Semestre								300		450			750		30	

Scanned with CamScanner

Introduction

L'**Equipe VALIDEUR LMD** vous souhaite la bienvenue dans la filière mathématique informatique (MI). Comme vous le constatez c'est une filière scientifique. En effet elle fait partie du domaine des **sciences et technologies** qui regroupent en outre les Unités de Formations et de Recherche (UFR) Sciences des Structures de la Matière et Technologie (SSMT), Biosciences (CBG), sciences de la terre et des ressources minières (STRM). Si vous êtes orientés en MI, cela dit votre profil est compatible. Ah oui car titulaire d'un BAC scientifique (C, D, E), vous êtes aptes à entamer les études dans ladite UFR. **Ici en MI c'est le courage rien que le courage.** L'année académique se fait en 2 semestres dont chacun d'eux est composé d'unités d'enseignements (UE) qui s'évaluent à 30 crédits. Ainsi l'année se compose de 60 crédits dont 80% des 60 crédits soit **48 crédits au moins** permettent à l'étudiant de s'inscrire s'il le désire en deuxième année toute fois en revenant composer les UE qui n'ont pas été validées.

La conséquence liée au passage avec au moins 80% des crédits (pour ceux qui n'ont pu avoir 100% des crédits soit les 60 crédits) est que vous payez les frais d'inscription de la deuxième année puis la moitié de ceux de la première année.

L'étudiant a le choix de rester en première année puis valider tous ses crédits avant l'entame de ces études en deuxième année.

Les cours sont donnés en AMPHI par un professeur ; c'est ce que l'on qualifie de **Cours Magistral (CM)**. Celui-ci fait un briefing de son polycopié s'il en dispose dans le cas contraire il vous fait copié comme cela a été les années antérieures dans l'ancien système. À la fin d'un certain nombre de CM terminés, les **Travaux Dirigés**(TD) sont programmés Pendant ces Travaux Dirigés l'enseignant est autorisé à
faire des interrogations, des devoirs qui par la suite seront pris en compte dans le calcul de moyenne de la note de **contrôle continu.**

Ainsi à la fin des TD il faut penser à un **contrôle final** qui représente un examen comme au baccalauréat.

L'équipe **VALIDEUR LMD** organise chaque année depuis 2015 des cours de soutien (cours de renforcement de capacités) pour aider les étudiants de ladite UFR d'aborder sereinement l'année académique. En outre **l'équipe VALIDEUR LMD 2025** se compose de :

MEMBRE VALIDEUR LMD 2025	**ASSOUMOU TANOH R. MARTIAL**	ENSEA/ABIDJAN
MEMBRE VALIDEUR LMD 2025	**KOUASSI KONAN DAVID**	MI/UFHB
MEMBRE VALIDEUR LMD 2025	**MOUSSA K. A. KADER ANDERSON**	MI/UFHB
MEMBRE VALIDEUR LMD 2025	**DOUMBOUYA AMADOU**	MI/UFHB
MEMBRE VALIDEUR LMD 2025	**KOUASSI GNAMIEN N. J. MICHEL E.**	MI/UFHB
MEMBRE VALIDEUR LMD 2025	**ZANA TOURE SERGE MALICK**	PSAV/UFHB
MEMBRE VALIDEUR LMD 2025	**ASY ABY**	MI/UFHB

Scanned with CamScanner

Bienvenu à l'Unité de Formation et de Recherche de Mathématique et Informatique (UFR Math Info)

➢ Dès l'arrivée d'un nouvel étudiant à l'UFR

L'étudiant s'il connait un ami bien avant sa venue à l'UFR, prend contact avec celui-ci pour qu'il lui donne quelques directives afin de voir son département. Si possible lui demander quelques conseils. Aussi l'étudiant doit s'informer sur la rentrée académique. Celui-ci peut par curiosité écouter les dires de plusieurs étudiants qui s'y trouvent déjà. Ensuite se diriger au **bureau M** de l'UFR pour prendre de plus amples informations du fait de la présence des conseillers disposés à nous fournir de vraies informations.

➢ L'étudiant lors d'un cours magistral (CM)

Lorsque vous suivez un cours magistral SVP soyez concentré car la moindre distraction peut vous compter chère dans la compréhension du polycopié du professeur.
En effet, il y a des professeurs qui mettent l'accent sur des points du cours qui sont à 99% susceptibles de sortir à l'examen (faites aussi attention aux 1% restant).
Ne prenez en aucun cas à la légère les cours magistraux. Votre présence à un CM est certes non obligatoire mais doit être pour vous une obligation. C'est en cela que vous comprendrez certaines démonstrations du cours.

➢ L'étudiant pendant les travaux dirigés (TD)

En TD il faut le signaler ; c'est comme si vous étiez dans une classe comme en terminale. Donc l'appel est fait (sous forme de liste de présence), les absences sont **marquées** et sont comptabilisées pour la note de contrôle continu qui compte un tiers dans la validation de l'UE.
La participation à la correction des exercices qui vous sont proposés sur la fiche de TD vous apportes un plus à la compréhension du cours.

➢ La phase de préparation d'un examen

Un examen comme vous l'avez constaté en terminal ne se prépare pas à la veille de la composition. Vous devez vous dire pendant que vous assistez aux CM et aux TD que c'est le moment de comprendre pour bien faire la composition.

➢ Les conséquences liées à la TRICHERIE

La Tricherie est une perte de dignité. Alors ôtez cette idée dans votre pensée. En voulant s'adonner à une telle pratique vous vous embrouiller et en fin de compte, vous avez un doute sur ce que vous avez appris. Eviter donc la tricherie **(Rester donc digne dans la douleur : disait un prof de CM).**

Scanned with CamScanner

PREMIERE PARTIE
TÉMOIGNAGE DES ANCIENS

Bienvenu dans cette première partie innovante du document VALIDEUR LMD. Dans cette partie, il s'agira pour nous de vous donner cette propulsion à **votre projet professionnel**. Omniprésentes dans l'industrie aérospatiale, imagerie, cryptographie..., ou dans les services banques, assurances..., les mathématiques et l'informatique apparaissent aussi dans de nombreux autres secteurs : sondages, gestion des risques, protection des données...Elles interviennent dans notre vie quotidienne télécommunication, transports, médecine, météorologie, musique...et contribuent à la résolution de problématiques actuelles : énergie, santé; environnement, climatologie, développement durable...Pour renchérir de cette diversité des mathématiques informatiques auprès des étudiants de l'Université Félix Houphouët Boigny ; voici ci après des témoignages d'anciens ayant effectués des études à l'UFR Math Info de ladite Université.

ASSOUMOU Tanoh Raoul Martial

Je suis ASSOUMOU Tanoh Raoul Martial étudiant en cycle ingénieur à l'ENSEA d'Abidjan. Malheureusement après mon BAC j'échoue au concours post bac donc j'opte pour la licence en mathématiques et applications à l'université Félix Houphouët Boigny. Je n'y connaissais rien de l'université et comment les compositions se déroulaient. Mais grâce au VALIDEUR LMD j'ai pu me familiariser avec le format des examens . Ce document représente une ressource précieuse pour tous les étudiants et je tiens à motiver chacun à l'utiliser dans les périodes des examens afin de maximiser ses chances de réussir aux examens.

KANGÓNE Bi Kangone Habib Trésor Zah

Je suis Kangone Bi Kangone Habib Tresor Zah, étudiant en Master 2 de Sécurité Informatique et Technologie du Web à l'ESATIC. Après l'obtention de mon BAC D en 2020, j'ai intégré le département de Math-Info. J'avais très peur au début, et je ne connaissais pratiquement personne (aucun grand frère ayant fait Math-Info...), mais j'avais les conseils de mon père en tête et l'amour du travail dans le cœur, alors je me suis dit : allons-y ! Mon parcours en Math-Info, je peux dire que c'est une grâce de Dieu et la peur d'échouer qui m'ont poussé. En L1, je suis arrivé au département avec un peu de retard, et le début a été difficile, d'autant plus que les professeurs avançaient rapidement dans les cours. Alors il fallait travailler dur. Lorsque les phases du Kosso sont arrivées, je n'ai pas hésité à dormir dans les amphithéâtres, comme Léon Robert, ou dans la salle 204 du département, qui fut même fermée les soirs à cause du grand nombre de personnes qui y restaient pour réviser. Ce fut une belle expérience, surtout grâce à un ancien étudiant qui avait pris l'initiative de créer le document Le VALIDEUR LMD. Ce document nous a beaucoup aidés, car il répertoriait tous les anciens sujets avec des corrections. Cela nous permettait de simuler les examens et de nous préparer efficacement. Aujourd'hui, je remercie toutes les personnes que j'ai pu rencontrer durant ces trois années passées en Math-Info, et je suis fier de faire partie de ceux qui ont validé leur Licence en réussissant le 111.

Scanned with CamScanner

TOURE Zana Serge Malick

Je suis Zana TOURE, étudiant en Master 2 de probabilités et statistiques appliquées aux vivants. Je suis titulaire d'un bac D. Après l'obtention de mon bac D, j'ai postulé pour le concours de l'INPHB, et malheureusement, j'ai échoué à ce concours. J'ai cru au début que c'était la fin d'une bonne carrière universitaire pour moi, mais je me suis ressaisi. Peu de temps après, je me suis inscrit en licence 1 de mathématiques et informatiques. C'était très difficile au début pour moi parce que je n'arrivais pas à m'adapter au rythme et à la cadence dans cette filière. Mais avec du recul et du travail, j'ai pu m'adapter et j'ai validé mes années jusqu'à l'obtention de ma licence avec un parcours sans faute par la grâce de Dieu. Il faut dire que le document m'a beaucoup aidé ,ce document était pour moi une aide précieuse pour me préparer aux examens. Je vous le recommande vivement.

N'GUESSAN Koffi Joule Kevin

Je suis N'GUESSAN KOFFI JOULE KEVIN actuellement élève à l'école Centrale Casablanca au Maroc.

J'ai fais un Bac C au Lycée Classique de Bouaké.

Etant donné que j'ai toujours nourri l'envie d'être Pilote, mes devanciers m'ont informé que la meilleure filière à l'université pour cela est Mathématiques et Informatique. Mais plusieurs m'avait fait peur en me disant que la filière était trop difficile et aussi assez lente.

Mais à mon arrivé j'ai pu avoir la chance d'avoir le document VALIDEUR LMD qui m'a beaucoup aidé pour les révisions afin de mieux préparer les examens. Je vous encourage vivement à travailler sérieusement et avec constance surtout.

ASSO Luc Carlos

Bonjour à tous,

Je m'appelle Asso Luc Carlos et je suis actuellement étudiant en cycle ingénieur en sciences exactes et modélisation (ISEM) à l'Institut Polytechnique de Yamoussoukro (INP-HB). Comme vous, j'ai commencé au département de mathématiques. Vous pourriez penser que cela signifie que je suis naturellement fort et intelligent, et je ne vous contredirais pas. Mais ce qui m'a vraiment façonné, c'est la solide base que j'ai acquise dès ma première année, grâce au document VALIDEUR LMD.

Ce document renferme des résumés de cours plus explicites et pour couronner, des anciens sujets dont quelques uns corrigés. Ce document est un document de prépa aux examens de l'ufr mathématiques et informatiques de cocody. Il vous donne plus ou moins, de voir comment un tel prof compose ses sujets, donc va vous emmener à optimiser votre bosse.

Je vous le recommande, car ce document m'a servi énormément à faire une bonne prépa lorsque j'étais encore à l'ufr.

Merci beaucoup.

REMERCIEMENTS

Nous remercions Dieu pour la réalisation de cette belle œuvre. Nous remercions également les Professeurs de l'UFR Mathématiques et Informatique de l'Université Félix Houphouët Boigny de Cocody.

Scanned with CamScanner

Pour une vue globale des possibilités après des études en mathématiques informatique

Etant en licence 1 math info	• Procédure CAMPUS France • Concours AS de l'ENSEA, TS de l'EAMAC • Des bourses pour les étudiants de L1
Etant en licence 2 math info	• Cycle ingénieur EAMAC sous réserve • ISFA, EURIA, ISUP...(BECEAS)
Etant en licence 3 math info	• Concours ENS • ISE de l'ENSEA sous réserve • Cycle ingénieur Centrale Casablanca
Une L3 math info validée	• Concours cycle ingénieur INPHB, ISE • Concours Master IFORD, IIA, Big Data, ESATIC, PSAV • Concours écoles de commerce HEC, ESSEC, ESCP...

Qui peut le plus, peut le moins. Cela dit que si vous être de niveau sup vous avez la possibilité de postuler à tous les opportunités de niveaux inférieurs.

Scanned with CamScanner

Allez sur un navigateur (google, Microsoft Edge) puis saisissez :

Campus France Côte d'Ivoire :
- https://www.ivoire.campusfrance.org (site d'informations)

Concours Centrale Casablanca :
- http://www.centrale-casablanca.ma/fr/ (site info et concours cycle ingénieur)

Concours INPHB Yamoussoukro (Bourse du gouvernement après admission) :
https://www.inphb.ci/concours/ingenieur

Concours ENSEA Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :
- http://ensea.ed.ci/ (site info)
- http://capesa.ensai.fr (site concours cycle AS/cycle ingénieur)

Concours HEC Paris (Bourse du gouvernement après admission) :
- https://www.hec.edu/fr
- https://www.hec.edu/fr/grande-ecole-masters/programme-grande-ecole/admissions

Concours ENS Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :
- http://www.ensabidjan.ci/ (site de l'école)
- https://ens.laatech.com/ (site concours)

Concours IIA Yaoundé :
- http://www.iiayaounde.com/ (site de l'école)
- http://www.iiayaounde.com/linstitut/conditions-dadmission/ (admission)

Concours X polytechnique de Paris (Bourse du gouvernement après admission) :
- https://www.polytechnique.edu/ (site de l'école)
- https://www.polytechnique.edu/admission-cycle-ingenieur/fr/voie-universitaire-univ-filière-universitaire-internationale-fui (page admission)

Concours ESATIC Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :
- https://esatic.ci/presentation/ (site de l'école)
- https://esatic.ci/admission/ (page admission)

Concours ISFA Lyon (Actuariat) :
- https://isfa.univ-lyon1.fr/ (site de l'école)
- https://isfa.univ-lyon1.fr/formation/actuariat/admission-a-la-formation-d-actuaire-a-l-isfa-803812.kjsp (page admission)

Bourse du Japon (Bourse du gouvernement Japonais après admission) :
- https://www.ci.emb-japan.go.jp/files/000475798.pdf (PDF d'information à télécharger)
- https://www.ci.emb-japan.go.jp/itpr_ja/11_000001_00848.html (site officiel de la bourse)
- https://www.studyinjapan.go.jp/en/planning/scholarship/application/examination/ (anciens sujets)

Bourse Russie (Bourse du gouvernement Russe après admission) :
- https://studyinrussia.ru/fr/study-in-russia/scholarships/

M2PSAV de l'UFR Math Info (Possibilité de Bourse du gouvernement après admission) :
- http://m2psav.master.edu-math.org/ (site officiel)
- http://m2psav.master.edu-math.org/?page_id=18 (page de candidature)

Concours IFORD Yaoundé (Bourse du gouvernement après admission) :
- http://www.iford-cm.org/
- http://www.iford-cm.org/index.php/formation/mpd

Concours EAMAC de Niamey (Bourse d'organisme Aéronautique(ANAC,SODEXAME ...) après admission) :
- http://www.eamac.ne/ (site officiel de l'EAMAC)

Scanned with CamScanner

DEUXIEME PARTIE

SEMESTRE 1

www.gvivaservices.com

Scanned with CamScanner

VALIDEUR LMD-2025

Université Félix Houphouet-Boigny 2020 – 2021
UFRMI 2 heures

Examen de suites et fonctions dérivables

Exercice 1 (1 + 2 + 2 points)

1. Soient $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

2. Déduire de ce qui précède que

$$inf\{2^x + 2^{\frac{1}{x}}; x \in \mathbb{R}_+^*\} = 4.$$

3. Déterminer la borne inférieure et la borne supérieure de

$$A = \{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m}; n, m \in \mathbb{N}^*\}$$

Exercice 2 (1,5 + 2 + 1,5). On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = \sqrt{2}$ et $v_0 = \frac{3}{2}$ puis, pour $n \geq 0$ entier naturel donné,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) v_n}.$$

1. Montrer que pour tout n, on a $0 < u_n < v_n$.

2. Etudier la variation des deux suites.

3. Justifier que les deux suites convergent et ont la même limite.

Exercice 3 (2 + 1,5 + 1,5 points). Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1) = 0$. On suppose que f est dérivable en 0 et en 1 et que $f'(0) = f'(1) = 0$.

Scanned with CamScanner

1. Montrer que la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :
$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1} & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$ est continue sur $[0,1]$.

2. Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}$.

3. Déduire de ce qui précède que l'équation $f(x) - x = 0$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.

Exercice 4 $(2,5+2,5$ points). Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1} - x + 2.$$

1. Donner le developpement limité à l'ordre 3 de f en 1. Déduire de ce developpement l'équation et la position relative de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

2. Donner le developpement limité à l'ordre 3 de f en $+\infty$. Que dire de la branche infinie de la courbe de f en $+\infty$?

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny 2021-2022
UFRMI-L1 Session 1 - 2 heures

Examen de suites et fonctions dérivables

Exercice 1. *Recopier sur votre feuille de composition les assertions* a, b, c *et* d *de chaque question, et répondre par vraie ou fausse à chacune d'elles. Toute réponse juste donne droit à 0,75 point et pour toute réponse fausse on perd 0,25 pt.*

1. Soit la fonction $g(x) = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x)$ est du signe de $x^2 + x - 2$
   (b) Le developpement limité de g au voisinage de -2 est
   $$g(x) = e^{\frac{1}{2}}(-4 - 2(x+2) - \frac{3}{4}(x+2)^2) + o((x+2)^3).$$
   (c) Le developpement limité de g au voisinage de -2 est
   $$g(x) = e^{\frac{1}{2}}(-4 - \frac{3}{4}(x+2)^2) + o((x+2)^3).$$
   (d) g n'admet pas de limite en 0..
2. Soit $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$. On note C la courbe representative de f dans un repère orthonormé.
   (a) La fonction $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ admet une limite en $-\infty$.
   (b) Le developpement limité à l'ordre 2 de h en $-\infty$ est $h(x) = -1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$
   (c) En $-\infty$, C admet pour asymptote la droite d'équation $y = -x - 2$.
   (d) En $-\infty$, C est en dessous de son asymptote.
3. Soit $f(x) = \text{Arcsin}(\sin x) + \text{Arccos}(\cos x)$. On notera D_f le domaine de définition de f.
   (a) $D_f = [-1, 1]$ (b) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x$
   (c) $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[, f(x) = 0$ (d) $\forall x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}], f(x) = -\pi - 2x$

Exercice 2 (5 points). On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n \times v_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $0 < v_n < u_n$ puis que $u_{n+1} - v_{n+1} < \frac{u_n - v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 3 (6 points). On désigne par a un réel strictement positif, et par f_a la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_a(x) = ae^{-x}$.

1. Justifier que l'équation $f_a(x) = x$ admet une unique solution dans $[0, +\infty[$. On note x_a cette solution.
2. Comparer a et x_a.
3. Justifier que pour tout $x \in [0, +\infty[$,
   $$|f_a(x) - x_a| \leq a|x - x_a|.$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

2021-2022
Licence 1 — 2 heures

Examen de suites et fonctions dérivables - session 2

ln désigne le logarithme népérien, Arcsin et Arctan respectivement les fonctions réciproques de sin et tan sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1 (6 points). Questions de cours :

1. Chacune des fonctions f, g et h représente le développement limité en $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$. Recopier chaqu'une d'elles sur votre feuille et dire quelle peut être la valeur de x_0 et la plus grande valeur possible de n pour celle-ci.
$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}\cos x, \qquad g(x) = 2x - 4x^3 + x^5 e^x, \qquad h(x) = (x - \frac{\pi}{2})^3(\sin x - 1)$$
2. f est une fonction d'une variable réelle définie sur $[-1,1]$ telle que $f(1) = 1$ et $f(-1) = -1$. Former en utilisant **le moins d' expressions possible uniquement parmi celles ci-dessous**, 3 assertions différentes et vraies. Attention, une expression peut être utilisée dans plusieurs assertions.
si f est continue sur $[-1,1]$; alors ; et ; dérivable sur $]-1,1[$; strictement monotone sur $[-1,1]$; il existe $x_0 \in]-1,1[$ tel que $f(x_0) = 0,5$; $|f'(x)| \leq 1$ pour tout $x \in]-1,1[$; $|f(x) - 1| \leq |x - 1|$ pour tout $x \in [-1,1]$; $f([-1,1]) = [-1,1]$.

Exercice 2 (5 points). On considère les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par
$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \text{ et } b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n.$$
1. Etudier les variations de (a_n) et de (b_n).
2. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ.

Exercice 3 (4 points). 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a l'équation
$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = a \qquad (E)$$
admet-elle une unique solution dans $\mathbb{R}$? Soit x_a cette solution ; déterminer x_a en fonction de a.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que si x_a et x_b existent alors on a
$$\frac{x_b - x_a}{b - a} \geq 1.$$

Exercice 4 (5 points). On considère la fonction de la variable réelle x définie sur $]-1,1[$ par :
$$f(x) = \text{Arcsin}(\frac{2x}{1+x^2}) + \text{Arctan}(\frac{2x}{1-x^2}).$$
1. Montrer que la dérivée de f sur $]-1,1[$ est $f'(x) = \frac{4}{x^2+1}$, et en déduire le développement limité de f en 0 à l'ordre 5.
2. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 et donner sa position relative par rapport à la courbe de f.

VALIDE 2025

Scanned with CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny 2022-2023
UFR-MI-L1 2 heures

Examen de suites et fonctions dérivables

Calculatrices et documents interdits.

Exercice 1. Soit $a > 0$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par

$$u_n = (1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n), \qquad v_n = a + a^2 + \cdots + a^n.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer v_n.
   (b) En déduire que si $0 < a < 1$, alors la suite (v_n) est majorée.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe $c \in [0, x]$ tel que
$$e^x - 1 = xe^c,$$
puis en déduire que $1 + x \leq e^x$.
4. En déduire que si $0 < a < 1$, alors la suite (u_n) est convergente.

Exercice 2. On définit une suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin\left(\frac{u_n}{2}\right) \end{cases}$$

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$|\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{y}{2}\right)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n|$.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est 1−périodique, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x).$$

1. Rappeler la définition de la continuité de f en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. Justifier que f est bornée sur l'intervalle $[0, 1]$.
3. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier.
4. On suppose en plus que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 4.
1. Enoncer la formule de Taylor-Young pour une fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^n, au point 0.
2. Ecrire les développements limités à l'ordre 3, au point 0, des fonctions
$$e^x, \qquad \cos(x), \qquad \ln(1+x).$$
3. Montrer que le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $\ln(\cos(x))$, au point 0, s'écrit
$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$
avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
4. En posant $x = 1/n$, en déduire la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\cos(\frac{1}{n})\right)^{n^2}.$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Année académique 2023-2024
UE : Fonction d'une variable réelle
ECUE : Suites et fonctions dérivables 2 heures
Resp de l'UE: Prof [illegible]

Exercice 1 Remplacer les pointillés par le mot ou bien l'expression qui convient pris dans la "Liste des mots et expressions ci-dessous. Recopier la phrase complétée sur votre feuille de composition. 1 point pour chaque phrase juste et 0 pour chaque phrase fausse.

1. Soient a et b deux réels. Si $0 < a$ et.....alors ils existent $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que .....
2. Soient a et b deux réels. Si .....et $a < b$ alors ....
3. Soient a et b deux réels. Si $a < b$, $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ dérivable et $f'(x)$ est.....pour tout $x \in]a,b[$, alors g : .... $\to \mathbb{R}$ est strictement croissante.
4. Si la fonction $h :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ est telle que $\frac{1}{x}h(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$ au voisinage de $+\infty$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ alors .....est l'équation de .....à la courbe de h.

Liste des mots et expressions : $a < b$; $a \leq b$; $a \leq b-1$; $a < b-1$; $a < \frac{p}{q} < b$; $b < \frac{p}{q} < a$; > 0 ; < 0 ; $\neq 0$; $f(]a,b[)$; $]a,b[$; $\mathbb{R}$; $a,b \in \mathbb{Z}$; $y = ax+b$; $y = bx+a$; l'asymptote ; la tangente

Exercice 2 (6 points) Recopier le tableau suivant sur votre feuille et compléter les cases vides par "oui"ou "non ". Justifier les réponses des cases colorées. Dans le tableau,
T/C = La courbe de la fonction admet une tangente au point d'abscisse 0 et est en dessous de celle-ci;
C/T = La courbe de la fonction admet une tangente au point d'abscisse 0 et est au-dessus de celle-ci;
A/C = La courbe de la fonction admet une asymptote en $+\infty$ et est en dessous de celle-ci;
C/A =La courbe de la fonction admet une asymptote en $+\infty$ et est au- dessus de celle-ci;

	T/C	C/T	A/C	C/A
$f(x) = e^{2x}(-x+1)+1$	non			
$g(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$		non	non	
$h(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$	non			

Exercice 3 (5 points) On définit les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2;\ v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{v_{n+1}u_n} \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que $0 < v_n < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Etudier les variations des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont convergentes.
4. Justifier que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

Exercice 4 (5 points)On veut étudier le signe de la fonction $f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$ dans $[0, \frac{\pi}{2}]$

1. Justifier que l'équation $\cos x = \frac{2}{\pi}$ admet au moins une solution dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Etudier la variation de f' (fonction dérivée de f) sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Déduire de ce qui précède le signe de f.

Scanned with CamScanner

Année académique 2023-2024

UE : Fonction d'une variable reelle

ECUE : Suites et fonctions dérivables 2 heures

Resp. de l'UE : Prof. Justin PEUTO

EXERCICE 1 (6 points) Les deux questions de cet exercice sont indépendantes

1. Soient E la fonction partie entière dans $\mathbb{R}$, r et s deux nombres réels, et n un entier strictement positif.
   (a) Montrer que si $r < s$ alors $E(r) \leq E(s)$.
   (b) Montrer que $E\left(\frac{E(nr)}{n}\right) = E(r)$.

2. Soient G un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et a, b deux nombres réels vérifiant $0 < a < b$. On considère une application $f : G \to \mathbb{R}$ qui vérifie la relation $a < f(x) < b$, pour tout $x \in G$. Montrer que

$$\sup_{x \in G}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\inf_{x \in G} f(x)}.$$

EXERCICE 2 (7 points)

1. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs.
   (a) Montrer que si $x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n = 1$ alors $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$. (*On pourra utiliser le fait que* $a + b = ab + 1 + (1-a)(b-1)$.)
   (b) On pose $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Déduire de ce qui précède que $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. (*On pourra appliquer* (a) *aux réels* $X_j = \frac{x_j}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}}$, *avec* $j = 1, \ldots, n$).

2. On considère les deux suites de nombres réels (u_n) et (v_n) définies par les relations de récurrence:
   $0 < u_0 < v_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt[3]{v_n^2 v_n}$; $v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$.
   (a) En utilisant la question 1., montrer que $0 < u_n \leq v_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

EXERCICE 3 (7 points)On considère la fonction f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x) - \frac{3x^2}{1+3x^2}\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que pour tout réel $x < 0$,

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

3. En utilisant la question précédente, donner le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ au voisinage de $-\infty$.
4. En déduire l'équation et la position de l'asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

CORRECTION EXAMEN SUITE ET FONCTION DERIVABLE 2021
SESSION 1

EXERCICE 1

1) Soient $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

On a : $\forall a > 0$ et $b > 0$, $0 \leq \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{ab} + a \Rightarrow 0 \leq a + b - 2\sqrt{ab}$

$$\Rightarrow 2\sqrt{ab} \leq a + b \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

2) Déduire de ce qui précède que $inf\left\{2^x + 2^{\frac{1}{x}} ; x \in \mathbb{R}_+^*\right\} = 4$

Posons $A = \left\{2^x + 2^{(1/x)} ; x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$.

En posant $a = 2^x$ et $b = 2^{(1/x)}$, la question 1) nous donne que :

$$\frac{2^x + 2^{(1/x)}}{2} \geq \sqrt{2^x \times 2^{(1/x)}} = \sqrt{2^{x+\frac{1}{x}}} = \sqrt{2^{\frac{x^2+1}{x}}}$$

$$\Rightarrow 2^x + 2^{(1/x)} \geq 2\sqrt{2^{\frac{x^2+1}{x}}} \qquad (1)$$

$\forall x > 0, x^2 > 0$ alors en posant $a = x^2$ et $b = 1$, on a : $\frac{x^2+1}{2} \geq \sqrt{x^2} = x$

$\Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x$. Comme $x > 0$, en divisant le tout par x, on a : $\frac{x^2+1}{x} \geq \frac{2x}{x} = 2$

En remplaçant ce résultat dans (1), on a :

$$2^x + 2^{(1/x)} \geq 2\sqrt{2^{\frac{x^2+1}{x}}} \geq 2\sqrt{2^2} = 2 \times 2 = 4$$

Alors $\forall \alpha \in A, \alpha \geq 4 \Rightarrow 4$ est un minorant de A.

- Montrons que $inf(A) = 4$.

Considérons $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow 2^x + 2^{(1/x)}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \left(2^x + 2^{(1/x)}\right)' = (2^x)' + \left(2^{(1/x)}\right)'$$

$$f'(x) = \left(e^{x\ln 2}\right)' + \left(e^{\frac{1}{2}\ln(2)}\right)' \text{ car } 2^x = e^{x\ln 2} \text{ et } 2^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln(2)}$$

VALIDEUR LMD - 2025

Scanned with CamScanner

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \ln 2 \left[2^x - \frac{1}{x^2}\, 2^{(1/x)}\right]$

On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln 2 \left[2^x - \frac{2^{(1/x)}}{x^2}\right] = 0$

$$2^x - \frac{2^{(1/x)}}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{2^{(1/x)}}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow x\ln(2) = \frac{1}{x}\ln(2) - 2\ln(x)$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)\ln(2) = -2\ln(x) \qquad (2)$$

En posant $X = \ln(x)$, on a :

$x = e^x$ et (2) devient $e^{2X}\ln(2) + 2 \times e^x - \ln(2) = 0 \Longrightarrow X = 0$

Or $x = \ln(x) \Longrightarrow 0 = \ln(x) \Longrightarrow x = 1$

Alors le point $x = 1$ est un point critique.

- Déterminons la nature du point $x = 1$

On a : $f''(x) = \ln(2)\left[\ln(2) \times 2^x - \left[\frac{2}{x^3}\, 2^{(1/x)} - \frac{1}{x^4}\, 2^{(1/x)}\right]\right]$

$$f''(x) = \ln(2)\left[2^x \ln(2) + \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) 2^{(1/x)}\right]$$

On a : $f''(1) = \ln(2)\left[2^1 \ln(2) + \left(\frac{2}{1^3} + \frac{1}{1^4}\right) 2^{(1/1)}\right]$

$$f''(1) = \ln(2)(2\ln(2) + 6) > 0$$

$f''(1) > 0 \Longrightarrow f(1) = 4$ est le minimum de f.

$$\boxed{\inf_{x \in \mathbb{R}_+^*}(A) = \inf_{x \in \mathbb{R}_+^*}(f) = 4}$$

3) Déterminer la bonne inférieure et la bonne supérieure de :

$$A = \left\{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m}\ ; n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$$

- Déterminons si elle existe $inf(A)$.

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*, \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} = \frac{m^2 + 4n^2}{n\,m} \geq \frac{4n\,m}{n\,m} = 4$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Car $(m-2n)^2 = m^2 + 4n^2 - 4m\,n \geq 0 \Rightarrow m^2 + 4n^2 \geq 4m\,n$

Ainsi 4 est un minorant de A et donc A admet une borne inférieure notée $inf(A) = \alpha$

Comme α est le plus grand des minorant de A et que 4 est un minorant de A, on a :

$4 \leq \alpha$. De plus, pour $m = 2n$, on a : $\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} = 4 \in A$. Alors $4 \geq \alpha$.

Ainsi $4 \leq \alpha$ et $\alpha \leq 4 \Rightarrow \alpha = 4$. Par conséquent $inf(A) = 4$.

- Déterminons si elle existe $sup(A)$.

On a : $\forall m, n \in \mathbb{N}^*, m^2 + 4n^2 \geq 4n\,m > n\,m$

Donc $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ ou \\ m\to+\infty}} \left(\frac{m}{n} + \frac{4n}{m}\right) = \lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ ou \\ m\to+\infty}} \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} = +\infty$

Par conséquent A n'étant pas majorant et donc A n'admet pas de borne supérieure.

EXERCICE 2 (Voir session 1 de l'année 2017 - 2018)

EXERCICE 3 (Cet exercice comporte des erreurs)

EXERCICE 4

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1} - x + 2$.

1) Donner le développement limité à l'ordre 3 de f en 1.

Posons $X = x - 1$. quand $x \longrightarrow 1, X \longrightarrow 0$ et $x = X + 1$

$$f(X) = \sqrt{(X+1)^2 + 2(X+1) - 1} - (X+1) + 2$$

$$= \sqrt{X^2 + 2X + 1 + 2X + 2 - 1} - X + 1$$

$$f(X) = \sqrt{X^2 + 4X + 2} - X + 1$$

Posons $g(X) = \sqrt{X^2 + 4X + 2} = \sqrt{2\left(1 + 2X + \frac{X^2}{2}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \left(2X + \frac{X^2}{2}\right)}$

Posons $t = 2X + \frac{X^2}{2}$. Alors quand $X \longrightarrow 0, t \longrightarrow 0$

$$g(t) = \sqrt{2}\sqrt{1+t} = \sqrt{2}\,(1+t)^{1/2}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$g(t) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}t + \left(\frac{\frac{1}{2}}{1} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2}\right)t^2 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{1} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-2}{3}\right)t^3 + 0(t^3)\right)$$

$$g(t) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{t}{2}t - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + 0(t^3)\right)$$

On a : $t^2 = \left(2X + \frac{X^2}{2}\right)^2 = (2X)^2 + 2(2X)\left(\frac{X^2}{2}\right) + 0(X^3) = 4X^2 + 2X^3 + 0(X^3)$

$$t^3 = \left(2X + \frac{X^2}{2}\right)^2\left(2X + \frac{X^2}{2}\right) = (4X^2 + 2X^3) + 0(X^3)$$

$$t^3 = 8X^3 + 0(X^3)$$

$$\Longrightarrow g(X) = \sqrt{2}\left(1 + X + \frac{X^2}{4} - \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{4} + 0(X^3)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(1 + X - \frac{X^2}{4} - \frac{X^3}{4} + 0(X^3)\right)$$

On a : $\begin{cases} X = x - 1 \Longrightarrow X^2 = x^2 - 2x + 1 \\ X^3 = (x^2 - 2x + 1)(x - 1) = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1 \\ X^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 0(x^3) \end{cases}$

Alors $g(x) = \sqrt{2}\left(1 + x - 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{x^3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{3x}{4} + \frac{1}{4} + 0(x^3)\right)$

$$g(x) = \sqrt{2}\left(x + \frac{x}{2} - \frac{3x}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{4} + 0(x^3)\right)$$

$$g(x) = \sqrt{2}\left(\frac{3x}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + 0(x^3)\right)$$

Alors $f(x) = g(x) - x + 2$

$$f(x) = \sqrt{2}\left(\frac{3x}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4}\right) - x + 2 + 0(x^3)$$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

$$f(x) = \frac{-4+3\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^3 + 2 + 0(x^3)$$

$$f(x) = 2 + \frac{-4+3\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^3 + 2 + 0(x^3)$$

L'équation de la tangente à la courbe de f est donc $y = 2 + \frac{-4+3\sqrt{2}}{4}x$

On a : $f(x) - \left(2 + \frac{-4+3\sqrt{2}}{4}x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}x^3 + 0(x^3)$

On regarde le signe du monôme $\frac{\sqrt{2}}{2}x^2$.

On a bien $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 \geq 0$. Alors la courbe de f est au-dessus de la tangente au point d'abscisse 1.

2) Donner le développement limité de f en $+\infty$. Que dire de la branche infinie de la courbe en $+\infty$?

On a : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1} - x + 2$

$$f(x) = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} - x + 2 = |x|\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} - x + 2$$

Au voisinage de $+\infty, x > 0 \Rightarrow |x| = x$

$$f(x) = x\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} - x + 2$$

Posons $h(x) = \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}$

En posant $X = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$, on a : $X \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$

$$h(x) = \sqrt{1+X} = (1+X)^{1/2}$$

$$h(x) = 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + \frac{X^3}{16} - \frac{5}{128}X^4 + 0\left(\frac{1}{X^4}\right)$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

On a : $\begin{cases} X^2 = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^2 = \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4} + 0\left(\frac{1}{x^4}\right) \\ X^3 = \frac{8}{x^3} - \frac{8}{x^4} - \frac{4}{x^4} + 0\left(\frac{1}{x^4}\right) \\ X^4 = \frac{16}{x^4} + 0\left(\frac{1}{x^4}\right) \end{cases}$

$$h(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{8}{x^3} - \frac{8}{x^4} - \frac{4}{x^4}\right) - \frac{5}{128} \times \frac{16}{x^4} + 0\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$h(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{8x^4} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{2x^4} - \frac{1}{4x^4} - \frac{5}{8x^4} + 0\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$h(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{2x^4} + 0\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Ainsi $f(x) = x\,h(x) - x + 2$

$$f(x) = x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x^3} - x + 2 + 0(x^3)$$

$$\boxed{f(x) = 3 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x^3} + 0\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x^3} = 3$

Alors la courbe représentative de f admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y' = 3$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

CORRECTION SUITE ET FONCTIONS DERIVABLES SESSION 1 ANNEE 2021-2022

EXERCICE 1 QUESTION DE COURS. Dans cet exercice, il est demandé de recopier les assertions avant de répondre : Nous ne le ferons pas ici

1 - a) VRAI b) FAUX c) FAUX d) VRAI

2 – a) VRAI b) FAUX c) FAUX d) FAUX

3 – a) FAUX b) VRAI c) FAUX d) FAUX

EXERCICE 2

On considère les suites (U_n) *et* (V_n) définie par $U_0 = 2$, $V_0 = 1$ et $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \\ V_{n+1} = \sqrt{U_n * V_n} \end{cases}$, $\forall n \in N$

1 – Montrons que $0 < V_n < U_n$

Soit P_n la proposition « $U_n > 0$ *et* $V_n > 0$, $\forall n \in N$»

On a $U_0 = 2 > 0$ *et* $V_0 = 1 > 0$ Donc P_0 *est vraie*

$U_1 = \frac{3}{2} > 0$ *et* $V_n = \sqrt{2} > 0$ *Donc* P_1 *est vraie*

Soit$n \geq 1$. Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} *est vraie.* On rappelle P_{n+1} :

P_{n+1}: « $U_{n+1} > 0$ *et* $V_{n+1} > 0$, $\forall n \geq 1$ »

D'après l'hypothèse de récurrence, On a : « $U_n > 0$ *et* $V_n > 0$, $\forall n \geq 1$

$\forall \geq 1, On\ a : \begin{cases} U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} > 0 \\ V_{n+1} = \sqrt{U_n * V_n} > 0 \end{cases}$ *Donc* P_{n+1} *est vraie.* *Ainsi* $\forall \in n , U_n > 0$ *et* $V_n > 0$

- Montrons à présent que $\forall n \in N, V_n < U_n$ C'est montrer que $U_n - V_n > 0$ *ou* $V_n - U_n < 0$

On a $U_0 = 2 > 1 = V_0 \Rightarrow U_0 > V_0$

$\forall n \in 1, \ U_n - V_n = \frac{U_{n-1} + V_{n-1}}{2} - \sqrt{U_{n-1} * V_{n-1}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{U_{n-1}} - \sqrt{V_{n-1}}\right)^2 > 0, car\ U_{n-1} > V_{n-1}$

Ainsi $\forall n \in N, \ V_n < U_n$ *et finalement* $0 < V_n < U_n$ *Pour tout* $n \in N$

- Montrons que $\forall n \in N, \ U_{n+1} - V_{n+1} < \frac{U_n - V_n}{2}$

Il s'agit de montrer que $\forall n \in N, \ U_{n+1} - V_{n+1} - \left(\frac{U_n - V_n}{2}\right) < 0$ *ou* $\forall n \in N$

$\forall n \in N, \ U_{n+1} - V_{n+1} - \frac{U_n - V_n}{2} = \frac{U_n + V_n}{2} - \sqrt{U_n * V_n} - \left(\frac{U_n - V_n}{2}\right) = V_n - \sqrt{U_n * V_n}$

$V_n \geq 0, On\ a\ V_n = \left(\sqrt{V_n}\right)^2$ Ainsi $\forall n \in N, \ U_{n+1} - V_{n+1} - \left(\frac{U_n - V_n}{2}\right) = \sqrt{V_n}\left(\sqrt{V_n} - \sqrt{U_n}\right) < 0$

Car $V_n > 0$ *et* $V_n < U_n$ D'où le résultat

2 – Montrons que (U_n)*et* (V_n) sont adjacentes.

$U_{n+1} - U_n = \frac{V_n - U_n}{2} < 0$ *car* $V_n - U_n < 0$ D'où (U_n) est strictement décroissante

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$V_{n+1} - V_n = \sqrt{V_n}(\sqrt{V_n} - \sqrt{U_n}) > 0$ D'où (V_n) est strictement croissante

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = U_n - V_n$ $(la\ différence\ des\ deux\ suites)$.

$\forall n \in \mathbb{N}, on\ a: 0 < y_{n+1} < \frac{y_n}{2}$. D'après la question 1,

On a : $0 < y_1 < \frac{y_0}{2}$

$0 < y_2 < \frac{y_1}{2} < \frac{\frac{y_0}{2}}{2} = \frac{y_0}{4}$

$0 < y_2 < \frac{y_0}{2^2}$

$0 < y_3 < \frac{y_2}{2} < \frac{y_0}{2^3}$

$\vdots \qquad \vdots$

$0 < y_n < \frac{y_0}{2^n}$ $or,\ y_0 = U_0 - V_0 = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < y_n < \frac{1}{2^n}$

Le théorème de Gendarmes donne,

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} y_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n - V_n = 0$

Finalement (U_n) *et* (V_n) *sont adjacentes.*

EXERCICE 3

1 – soit $a \in]0;+\infty[$

Posons $g : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_a(x) - x$

$\forall x \in [0;+\infty[, g(x) = ae^{-x} - x$, g est une fonction de classe C^∞ sur $[0;+\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont.

$\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = -ae^{-x} - 1$

$= -(ae^{-x} + 1)$

$= -(ae^{-x} + 1) < 0$

Alors

g est continue et strictement décroissante

Sur $[0;+\infty[$.Alors elle réalise une bijection de $[0;+\infty[$ dans $g([0;+\infty[)$

Avec $g([0;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x); g(0)\right]$

$g([0;+\infty[) =]-\infty;a]$ avec $a > 0$. Or $0 \in]-\infty;a[$. Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0;+\infty[$ c'est-à-dire l'équation $f_a(x) = x$ admet une unique solution dans $[0;+\infty[$ que l'on note x_a.

2 – comparons a *et* x_a

On a : $g(x_a) = 0$

$g(a) = f_a(a) - a = ae^{-a} - a$

$g(a) = a(e^{-a} - 1)$.

Or $a > 0 \Rightarrow -a < 0 \Rightarrow e^{-a} < e^0 = 1$

$\Rightarrow e^{-a} < 1$

$\Rightarrow e^{-a} - 1 < 0$

D'après le tableau, $x_a < a$.

x	0	x_a	a	$+\infty$
$g'(x)$	—			
$g(x)$	a ↘	$g(x_a)$ ↘	$g(a)$ ↘	$-\infty$

3 – Posons $\forall x \in [0;+\infty[, h(x) = ax$

On a : $\forall x \in]0;+\infty[, \begin{cases} f'_a(x) = -ae^{-x} \\ h'(x) = a \end{cases}$

$|f'_a(x)| = |-ae^{-x}| = ae^{-x}$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

On a $x \in [0;+\infty[\Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0 \Rightarrow e^{-x} \leq e^0 = 1 \Rightarrow e^{-x} \leq 1$

Donc $|f'_a(x)| = ae^{-x} \leq a = h'(x) = |h'(x)|$

$$|f'_a(x)| \leq |h'(x)|.$$

Comme f_a et h sont définis sur $[x; x_a]$ si $x \leq x_a$ et $[x_a; x]$ si $x \geq x_a$, l'inégalité des accroissements finis nous donne que $|f_a(x) - f_a(x_a)| \leq |h(x) - h(x_a)|$ or $f_a(x) = x_a$ d'après la question 1.

Ainsi $|f_a(x) - x_a| \leq |ax - ax_a|$

$$|f_a(x) - x_a| \leq a|x - x_a|$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

PROPOSITION DE CORRECTION DU SUJET DE SUITES ET FONCTIONS DERIVABLES SESSION 1 2022-2023

EXERCICE 1 :

1-) Soit $a > 0$, on définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_n = (1+a)(1+a^2)\dots.(1+a^n)$

$$v_n = a + a^2 + \cdots + a^n$$

On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(1+a)(1+a^2)\dots.(1+a^n)(1+a^{n+1})}{(1+a)(1+a^2)\dots.(1+a^n)} = 1 + a^n \quad or\ a > 0\ d'où\ \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

Donc la suite (u_n) est croissante.

2-a) $\forall n \epsilon \mathbb{N}^*\ v_n = \sum_{i=1}^{n} a^i = a\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)$ (somme des termes d'une suite géometrique de raison a)

2-b) on a $0<a<1 \Rightarrow 0<a^n<1 \Rightarrow -1<-a^n<0 \Rightarrow 0<1-a^n<1$

On a $a>0$ et $0<1-a<1$ alors $\frac{a}{1-a} > 0$

Donc $0 < \frac{a}{1-a} * (1-a^n) < \frac{a}{1-a} * 1 \Rightarrow a\frac{(1-a^n)}{1-a} < \frac{a}{1-a} \Rightarrow \forall n \epsilon \mathbb{N}^*, v_n < \frac{a}{1-a}$

Donc la suite (v_n) est majorée.

3-) * soit $f : [0\ ;x] \to \mathbb{R},\ t \longmapsto e^t$ la fonction f est continue sur [0 ;x] et dérivable sur [0 ;x], d'après le théorème des accroissements finis : $\exists c \epsilon [0\ ;x]$ tel que $f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Ainsi on a : $e^c = \frac{e^x-1}{x} \Rightarrow xe^c = e^x - 1\ d'où\ e^x - 1 = xe^c$.

*on a $e^x - 1 = xe^c \Rightarrow e^x = 1 + xe^c \Rightarrow 1 + x \leq e^x$.

4-) on $0 < a < 1$, $d'après\ 3)\ \forall x \epsilon \mathbb{R}_+, 1 + x \leq e^x$.

Comme $\forall i \epsilon \{1, \dots, n\}, a^i \epsilon \mathbb{R}_+$ *en prenant* $x = a^i$, *on a* $\forall i \epsilon \{1, \dots, n\}, 1 + a^i \leq e^{a^i}$.

On a : pour i=1 $1 + a \leq e^a$

i=2 $1 + a^2 \leq e^{a^2}$

$\vdots$

i=n $1 + a^n \leq e^{a^n}$.

En faisant le produit membre à membre on obtient :

$$(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n) \leq e^a * e^{a^2} * \dots * e^{a^n}$$

$$u_n \leq e^{v_n}$$

Comme $\forall n \epsilon \mathbb{N}, v_n \leq \frac{a}{1-a} \Rightarrow u_n \leq e^{v_n} \leq e^{\frac{a}{1-a}} \Rightarrow u_n \leq e^{\frac{a}{1-a}}$.

La suite (u_n) *est une suite croissante et majorée donc elle est convergente.*

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

EXERCICE2 :

1-) Soit $f(t) = \sin(\frac{t}{2})$ la fonction continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur [y ;x] et dérivable sur]y ;x[avec y<x.

D'après le théorème des accroissements finis $\exists c\epsilon]y;x[$ *tel que* $f'(c) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

On a : $f'(t) = \frac{1}{2}\cos(\frac{t}{2})$ => $f'(c) = \frac{1}{2}\cos(\frac{c}{2}) = \frac{\sin(\frac{x}{2})-\sin(\frac{y}{2})}{x-y}$

$$\forall c\epsilon]y;x[, |f'(c)| = \left|\frac{1}{2}\cos\left(\frac{c}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2} \quad => \left|\frac{\sin(\frac{x}{2}) - \sin(\frac{y}{2})}{x-y}\right| \leq \frac{1}{2}$$

$$=> \left|\sin(\frac{x}{2}) - \sin(\frac{y}{2})\right| \leq \frac{1}{2}|x-y|$$

2-) d'après 1-) en posant $x = u_n$ et $y = 0$ on obtient $\left|\sin(\frac{u_n}{2})\right| \leq \frac{1}{2}|u_n|$

$$donc\ pour\ tout\ n\ |u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n|$$

3-) *pour* $n = 0$ $|u_1| \leq \frac{1}{2}|u_0|$

$n = 1$ $|u_2| \leq \frac{1}{2}|u_1|$

$\vdots$

n-1, $|u_n| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1}|$

En multipliant membre à membre on obtient $|u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0|$ => $0 \leq |u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$=> 0 \leq \lim_{n\to+\infty}|u_n| \leq \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n => \lim_{n\to+\infty}|u_n| = 0 => \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

EXERCICE3 :

1-) $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0: \forall x\epsilon]x_0 - \delta; x_0 + \delta[, |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. *ie* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

2-) f est continue sur l'intervalle fermé [0 ;1] donc elle est bornée.

3-) f étant bornée sur [0 ;1] et 1-périodique, elle a le même comportement sur les intervalles de longueur 1. Ainsi f est bornée par morceaux .

Elle est bornée sur tous les intervalles du type $I_k = [k; k+1], k\epsilon\mathbb{Z}$. *alors elle est bornée* sur $\mathbb{R}$ puisque $\mathbb{R} = \cup_{k\epsilon\mathbb{Z}}[k, k+1]$.

4-) la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur [0 ;1], D'après le théorème des accroissements finis $\exists c\epsilon[0;1] tel\ que\ f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$. Comme f est 1-périodique alors $f(1) = f(0)$, d'où $f'(c) = 0$.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Suites et fonctions dérivables

session 1 2023-2024

Exercice 1

1) Soient a et b deux réels. Si $0 < a$ et $a < b$ alors ils existent $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $a < \frac{p}{q} < b$.
2) Soient a et b deux réels. Si $a, b \in \mathbb{Z}$ et $a < b$ alors $a \leqslant b - 1$
3) Soient a et b deux réels. Si $a < b$ $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $f'(x)$ est ≥ 0 pour tout $x \in]a, b[$, alors $g : f(]a, b[) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$ est strictement croissante.
4) Si la fonction $h :]a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est telle que $\frac{1}{x}h(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ alors $y = ax + b$ est l'équation de l'asymptote à la courbe de h

Exercice 2

	T/C	C/T	A/C	C/A
$f(x) = e^{2x}(-x+1)+1$		NON	NON	NON
$g(x) = \dfrac{x}{1+e^{1/x}}$	NON			OUI
$h(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$		NON	NON	NON

Figure 1:

Tustification des cases colorées
cas 1 : Le $DL_3(0)$ est $f(x) = 2 + x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$ Donc la courbe présente un point d'inflexion en $(0, 2)$.
Cas 2: La fonction g n'est pas definis en 0 par conséquent ne peut avoir de tangente en 0. g admet un prolongement en 0, mais celui-ci n'est pas dérivable en 0.
cas 3: $DL_3(+\infty)$: $\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{48x^3} + 0\left(\frac{1}{x^3}\right)$ Donc la courbe C est au-dessus de l'asymptote $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

$$g(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{48x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Cas 4: erreur dans le sujet. Le resultat est **oui**.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Exercice 3

1) Par définition, nous avons $0 < v_0 < u_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous supposons que $0 < v_n < u_n$.

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \sqrt{v_{n+1}u_n} - \frac{u_n + v_n}{2}$$

$$\cdot 0 < v_n < u_n \Rightarrow \begin{cases} v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} > 0 \\ v_{n+1}u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0 \end{cases}$$

$$\left(v_{v_{1+1}u_n}\right)^2 = v_{n+1}u_n = \frac{u_n^2 + u_n v_n}{2}$$

$$\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 = \frac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2}{4}$$

$$u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2 = \frac{u_n^2 - v_n^2}{4} > 0 \text{ car } u_n > v_n$$

Donc $u_{n+1} - v_{n+1} > 0$ Conclusion: $0 < u_n < v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+v_n}{2} - v_n = \frac{u_n-v_n}{2} > 0$

Donc (v_n) est croissante

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{v_{n+1}u_n} - u_n = (\sqrt{v_{n+1}} - \sqrt{u_n})\sqrt{u_n} < 0$$

car $\sqrt{v_{n+1}} < \sqrt{u_n}$ et $\sqrt{u_n} > 0$.

Donc (u_n) est décroissante.

3). La suite (v_n) est croissante

- $v_n < u_n$ pour tout n
- La suite (u_n) est décroissante

Donc pour $n \in \mathbb{N} : v_n < u_n < u_0 = 2$ Donc (v_n) est convergente

De même $v_0 < v_n < u_n \Rightarrow 1 < u_n$ Dore (u_n) est convergente.

4) $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont-convergentes

Soit $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $l' = \lim_{n\to+\infty} v_n$ On a

$$l' = \frac{l + l'}{2} \Rightarrow 2l' = l + l'$$

$$\Rightarrow l = l'$$

Par consequent $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

-(u_n) est décroissante

-(v_n) est croissante

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$$

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 4

1) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. $f(0) = 0$ st $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 1 = 0$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

x	0	x_0	$\pi/2$
$f'(x)$	+	0	−
f	0 ↗		↘ 0

Figure 2: tableau de variation

D'après le théorème de Rolle, il existe $x_0 \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $f'(x_0) = 0$ c'est-a-dire x_0 est solution de $f'(x) = \cos(x) - \frac{2}{\pi} = 0$.

2) $f''(x) = -\sin(x) < 0 \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ Donc f' est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

3) De la question 2, il ressort que x_0 de la question 1 est l'unique solution de $f'(x) = 0$

Donc $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (voir figure 2)

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UFHB 20_21
UFR MATHS-INFO

CALCUL INTEGRAL

Durée : 1h45min

EXERCICE 1

Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, et $y : I \to]0; +\infty[$ une solution de l'équation $(E) : y' + ay = by^m$.

1) On suppose $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$.

Montrer que par un changement convenable de fonction inconnue, (E) se transforme en équation différentielle linéaire du premier ordre.

2) On désigne par φ une primitive de la fonction $(1-m)a$.

Déterminons alors y.

3) Que se passe-t-il si $m = 1$? Donner la formule de calcul de y.

4) Résoudre le problème $\begin{cases} x^3y' + y^4 = x^2y;\ x > 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Attention ! Identifier clairement a, b et m avant de passer à la résolution.

EXERCICE 2

Préciser l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes, puis donner l'ensemble de leurs primitives.

1) $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$
2) $h(x) = \frac{4x+7}{x^2+x+2}$
3) $k(x) = \frac{x+3}{(x-1)^2(x^2+3)}$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE FHB
UFR MATHS-INFO
ECUE: Probabilité

ANNEE 2020 – 2021

CALCUL INTEGRAL
SESSION 2 (L1)
DUREE: 1H45

EXERCICE 1:

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - y' - 6y = (x-1)e^{3x}$

1) Donner la solution générale de l'équation homogène associée.

2) Expliquer pourquoi une solution particulière de (E) est de la forme $(ax^2 + bx)e^{3x}$.
Déterminer alors les nombres réels a et b.

3) Donner la solution générale de (E).

4) Donner l'unique solution f de (E) vérifiant $f(0) = 1$; $f'(0) = -\frac{6}{25}$

5) Donner le développement limité à l'ordre 4 de f au voisinage de 0. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(0, f(0))$. Etudier les positions relatives.

EXERCICE 2:

Donner l'ensemble des primitives des fonctions suivantes, après en avoir précisé les domaines de définition:

a) $g(x) = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$

b) $h(x) = \dfrac{5x - 11}{x^2 + 2x + 2}$

c) $k(x) = \dfrac{x\sqrt{2-x}}{x - \sqrt{2-x}}$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

VALIDEUR LMD-2025

UNIVERSITE FHB ANNEE 2021 - 2022
UFR MATHS - INFO

CALCUL INTEGRAL
SESSION 1
DUREE: 1 H 30

EXERCICE 1:

On considère l'équation différentielle (E): $y'' - 5y' - 14y = (-18x + 11)e^{-2x}$
1) Expliquer pourquoi une solution particulière de (E) est de la forme $(ax^2 + bx)e^{-2x}$.
Déterminer alors les nombres réels a et b.
2) Donner la solution générale de (E).
3) Donner l'unique solution f de (E) vérifiant $f(0) = -1$; $f'(0) = 1$
4) Donner un développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.
En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point $(0, f(0))$. Etudier les positions relatives

EXERCICE 2

Donner l'ensemble des primitives des fonctions suivantes, après en avoir précisé les domaines de définition:

a) $l(x) = \frac{1}{6-4\sin x}$

b) $v(x) = \frac{18x+22}{x^2+2x+2}$

c) $p(x) = \frac{x^4}{(x^2-4)(x^2+2)}$

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE FHB
UFR MATHS - INFO

ANNEE 2021 - 2022

CALCUL INTEGRAL
SESSION 2
DUREE: 1H30

EXERCICE 1

On considère l'équation différentielle (E): $y'' - 5y' - 14y = (-18x + 16)e^{7x}$

1) Expliquer pourquoi une solution particulière de (E) est de la forme $(dx^2+kx)e^{7x}$.
Déterminer alors les nombres réels d et k

2) Donner la solution générale de (E)

3) Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$; $h'(0) = 2$

4) Donner un développement limité de h à l'ordre 2 au voisinage de 0.
En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0.
Etudier les positions relatives.

EXERCICE 2

Donner l'ensemble des primitives de chacune des fonctions suivantes en précisant d'abord leur domaine de définition:

1) $j(x) = \frac{1}{12+5\sin x}$

2) $v(x) = \frac{12x+7}{x^2+x+3}$

3) $w(x) = \frac{x^4+3}{(x^2-9)(x^2+3)}$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE FHB
UFR MATHS - INFO
NIVEAU: L1

ANNEE 2022 _ 2023

CALCUL INTEGRAL
SESSION 1
DUREE: 1H30

EXERCICE 1

On donne l'équation différentielle
(E): $y'' - y' - 12y = (-21x^2 - 8x + 9)\exp(-3x)$
1) Donner la solution générale de l'équation homogène associée à (E).
2) Expliquer rigoureusement pourquoi une solution particulière de (E) peut être mise sous la forme $(ax^3 + bx^2 + cx)\exp(-3x)$
3) Déterminer alors les réels a, b et c.
4) Déterminer la solution particulière f de l'équation (E), vérifiant les conditions $f(0) = 2$; $f'(0) = 0$
5) Donner un développement limité de la fonction f à l'ordre 3 au voisinage de 0. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0. Etudier les positions relatives.

EXERCICE 2
On donne $k(x) = \frac{x^3-3x}{(x^2+1)(x-1)}$ et $h(x) = \frac{1}{2+\cos x}$
Donner l'ensemble des primitives de chacune de ces fonctions, après avoir précisé le domaine de définition de l'intégrant.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Université F. H. B
UFR Maths - Info
Année 2023 _ 2024
Niveau: L1

EXAMEN: CALCUL INTEGRAL

DUREE: 1H45

EXERCICE 1

On donne l'équation différentielle
(E): $y' = \frac{1}{x}y^2 - \left(2 + \frac{1}{x}\right)y + x + 2$
1) Chercher une solution particulière y_0 de (E) sous la forme ax, $a \in \mathbb{R}$
2) On pose $y = y_0 + \frac{1}{Z}$, où Z est une nouvelle fonction inconnue, dépendant de x.

2.a Montrer que ce changement de fonction transforme (E) en l'équation
(E'): $z' - \frac{Z}{x} = -\frac{1}{x}$
(on donnera tous les détails des calculs menant à cette équation)

2.b Résoudre (E')

2.c En déduire la solution générale de l'équation (E)

3) Résoudre le problème

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x}y^2 - \left(2 + \frac{1}{x}\right)y + x + 2 \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On désigne par g sa solution

4) Soit C_g la courbe représentative de la fonction g dans le demi-plan $x > 0$. Donner l'équation de l'asymptote à C_g en $+\infty$ et étudier les positions relatives.

EXERCICE 2:

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes après avoir donné le domaine de définition de l'intégrant:

a) $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

b) $g(x) = \frac{17x+9}{(x-7)(x^2+7)}$

c) $h(x) = \frac{12x+1}{\sqrt{x^2+2x+9}}$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

CORRECTION CALCUL INTEGRAL 1ère SESSION 2021

EXERCICE N°1

Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $I \to]0, +\infty[$ une solution de l'équation

$$(E) : y' + a(x)y = b(x)\, y^m$$

1) On suppose que $m \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$. Divisons les deux membres de l'égalité (E) par terme y^m

Nous obtenons :

$$y'y^{-m} + a(x)yy^{-m} = b(x)y^m y^{-m}$$

Soit $y'y^{-m} + a(x)y^{1-m} = b(x)$ (E')

Posons $z = y^{1-m} \longrightarrow z' = (1-m)y'y^{-1-m-1} = (1-m)y'y^{-m}$ (E'')

En remplaçant dans (E'') z et z' par deux expressions respectives, on obtient :

$$\frac{z'}{1-m} + a(x)z = b(x) \Leftrightarrow z' + (1-m)\, a(x)\, z = (1-m)\, b(x)$$

$$z' + (1-m)\, a(x)\, z = (1-m)\, b(x) \qquad (E''')$$

2) $\varphi(x) = \int (1-m)\, a(x)\, dx$

Equation homogène associé à (E''')

$$z' + (1-m)\, a(x)\, z = 0 \qquad (E'''_H)$$

Désignons par z_H la solution de l'équation homogène (E'''_H)

$$z'_H + (1-m)\, a(x)\, z_H = 0$$

$$z'_H = -(1-m)\, a(x)\, z_H$$

$$\frac{dz_H}{dx} = -(1-m)\, a(x)\, z_H$$

$$\frac{dz_H}{dx} = -(1-m)\, a(x)\, dx \Longrightarrow \ln|z_H| = -\int (1-m)\, a(x)\, dx$$

$$|z_H| = e^{-\int (1-m)\, a(x)\, dx + A}$$

$$z_H = \pm e^A\, e^{-\int (1-m)\, a(x)\, dx} = e^A\, e^{-\int (1-m)\, a(x)\, dx}$$

Posons $k = \pm e^A \Longrightarrow z_H = k\, e^{-\int (1-m)\, a(x)\, dx}$

$$z_H = k\, e^{-\varphi(x)}$$

Recherche d'une solution particulière de l'équation

(E''') : $z' + (1-m)\, a(x)\, z = (1-m)\, b(x)$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Appliquons la méthode de la variation de la constante k, en posant $k = k(x)$, nous obtenons : $z_p = k(x)e^{-\varphi(x)} \Rightarrow z_p' = k'(x)e^{-\varphi(x)} - k(x)\,\varphi(x)'e^{-\varphi(x)}$

$$z_p' = k'(x)e^{-\varphi(x)} - k(x)\,\varphi(x)'e^{-\varphi(x)}$$

Sachant que $\varphi(x) = e^{\int(1-m)\,a(x)dx}$, alors, on a $\varphi(x)' = (1-m)\,a(x)$

$$z_p' = k'(x)e^{-\varphi(x)} - k(x)\,(1-m)\,a(x)e^{-\varphi(x)}$$

L'équation (E''') nous donne :

$$k'(x)e^{-\varphi(x)} - k(x)\,(1-m)\,a(x)e^{-\varphi(x)} + (1-m)\,a(x)k(x)e^{-\varphi(x)} = (1-m)\,b(x)$$

$$k'(x)e^{-\varphi(x)} - k(x)\,(1-m)\,a(x)e^{-\varphi(x)} + (1-m)\,a(x)k(x)e^{-\varphi(x)} = (1-m)\,b(x)$$

$$\Rightarrow k'(x)e^{-\varphi(x)} = (1-m)\,b(x) \Rightarrow k'(x) = (1-m)\,b(x)e^{\varphi(x)}$$

$$\Rightarrow k'(x) = (1-m)\,b(x)e^{\varphi(x)} \Rightarrow k(x) = (1-m)\int b(x)e^{\varphi(x)}\,dx$$

$$k(x) = (1-m)\int b(x)e^{\varphi(x)}\,dx$$

$$\Rightarrow z_p = k(x)e^{-\varphi(x)} = \left[(1-m)\int b(x)e^{\varphi(x)}\,dx\right]e^{-\varphi(x)}$$

Solution générale de (E''') :

$$z = z_H + z_p$$

$$= k(x)e^{-\varphi(x)} + \left[(1-m)\int b(x)e^{\varphi(x)}\,dx\right]e^{-\varphi(x)}$$

$$z = \left[k + (1-m)\int b(x)e^{\varphi(x)}\,dx\right]e^{-\varphi(x)}$$

Or $z = y^{1-m} \Rightarrow y = z^{\frac{1}{1-m}} = [z(x)]^{\frac{1}{1-m}}$, $k \in \mathbb{R}$

3) Si $m = 1$, on obtient

$$y' + a(x)\,y = b(x)\,y \Leftrightarrow y' + \big(a(x) - b(x)\big)\,y = 0$$

$$\Rightarrow y' = -\big(a(x) - b(x)\big)\,y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\big(a(x) - b(x)\big)\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\int\big(a(x) - b(x)\big)\,dx \Rightarrow y = e^{-\int(a(x)-b(x))\,dx+C}$$

$$y = e^{C}\,e^{-\int(a(x)-b(x))\,dx} = A\,e^{-\int(a(x)-b(x))\,dx}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$y = A\, e^{-\int (a(x)-b(x))\,dx} \quad , A \in \mathbb{R}$$

4) Résolvons le problème

$$\begin{cases} x^3y' + y^4 = x^2y & , x > 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Nous avons : $x^3y' + y^4 = x^2y \Longrightarrow y' + \frac{1}{x^3}\, y^4 = \frac{1}{x}\, y$

$$\Rightarrow y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^3}\, y^4 \qquad (E_2)$$

Dans l'expression de l'équation (E_2), nous avons

$$a(x) = -\frac{1}{x}\ ;\ b(x) = -\frac{1}{x^3}\ ;\ \ m = 4\ ;\ z = y^{-3}$$

On a :

$$z = \left[k + (1-m)\int b(x)e^{\varphi(x)}\,dx\right]e^{-\varphi(x)}$$

$$= \left[k + (1-m)\int \left(-\frac{1}{x^3}\right)e^{\varphi(x)}\,dx\right]e^{-\varphi(x)}$$

$$e^{\varphi(x)} = e^{\int (1-m)\,a(x)\,dx} = e^{\int (1-4)\left(-\frac{1}{x}\right)\,dx} = e^{3\int \frac{dx}{x}}$$

$$e^{\varphi(x)} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

$$e^{-\varphi(x)} = e^{-\int (1-m)\,a(x)\,dx} = e^{-3\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x^{-3}} = \frac{1}{x^3}$$

$$z = \left[k - 3\int \left(-\frac{1}{x^3}\right)x^3\,dx\right]\frac{1}{x^3}$$

$$= \left[k + 3\int dx\right]\frac{1}{x^3} = [k + 3x]\frac{1}{x^3} = \frac{k+3x}{x^3}$$

$$z = \frac{k+3x}{x^3}\ .\ \text{Or}\ z = y^{-3} \Longrightarrow \frac{1}{z^{1/3}} = y$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{k+3x}{x^3}}} = \frac{x}{\sqrt[3]{k+3x}}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{k+3x}}}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Pour $x = 1$; $y(1) = 1 \Rightarrow y(1) = \frac{1}{\sqrt[3]{k+3}} = 1$

$$1 = \sqrt[3]{k+3} \Rightarrow 1 = (k+3) \Rightarrow \boxed{k = -2}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{3x-2}} \quad , \forall x \in \mathbb{R}_+^* - \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

EXERCICE N°2

1) $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} / \sin x - \cos x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / \sin x \neq \cos x\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{\sin x}{\cos x} \neq 1\right\} = \{x \in \mathbb{R} / \tan x \neq 1\}$$

$$\text{Or} \quad \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } Df = \left\{x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$Df = \mathbb{R} - \left\{x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Posons $F(x) = \int f(x)\, dx = \int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$

Posons $t = \tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = arctgt \Rightarrow \frac{dx}{2} = \frac{dt}{1+t^2}$

$$\Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad ; \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{1}{\sin x - \cos x} = \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1}{\frac{t^2+2t-1}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{t^2+2t-1}$$

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sin x - \cos x} = \int \frac{1+t^2}{t^2+2t-1} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{2\,dt}{t^2+2t-1}$$

Remarque $t^2 + 2t - 1 = (t+1)^2 - 2 = (t+1)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2$

$$F(t) = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}$$

Posons $u = t + 1 \Rightarrow du = dt$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$F(u) = 2\int \frac{dt}{u^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\int \frac{dt}{(u-\sqrt{2})(u+\sqrt{2})}$$

$$\frac{1}{(u-\sqrt{2})(u+\sqrt{2})} = \frac{A}{(u-\sqrt{2})} + \frac{B}{(u+\sqrt{2})}$$

$$1 = A(u+\sqrt{2}) + B(u-\sqrt{2})$$

$$1 = (A+B)u + \sqrt{2}(A-B)$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{\sqrt{2}}{u} \\ B=-\frac{\sqrt{2}}{u} \end{cases}$$

$$F(u) = 2\times\frac{\sqrt{2}}{u}\int\left(\frac{1}{(u-\sqrt{2})} - \frac{1}{(u+\sqrt{2})}\right)du = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{(u-\sqrt{2})}{(u+\sqrt{2})}\right| + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{(t+1-\sqrt{2})}{(t+1+\sqrt{2})}\right| + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{(\tan u+1-\sqrt{2})}{(\tan u+1+\sqrt{2})}\right| + C$$

$$\boxed{F(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{(\tan x+1-\sqrt{2})}{(\tan x+1+\sqrt{2})}\right| + C}$$

2) $h(x) = \frac{4x+7}{x^2+x+2}$; $x^2+x+2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$; $Dh = \mathbb{R}$

Remarque $(x^2+x+2)' = 2x+1$

$4x+7 = 2(2x+1)+5$

$$h(x) = \frac{4x+7}{x^2+x+2} = \frac{2(2x+1)+5}{x^2+x+1} = \frac{2(2x+1)}{x^2+x+1} + \frac{5}{x^2+x+1}$$

$$H(x) = \int h(x)dx = 2\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} + 5\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= 2\int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx + 5\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$= 2\ln(x^2+x+1) + 5\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

$$5\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = 5\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{5}{\frac{\sqrt{7}}{2}} artg \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C = \frac{10}{\sqrt{7}} artg \frac{2}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{2}\right) + C$$

$$h(x) = 2\ln(x^2+x+2) + \frac{10}{\sqrt{7}}\, artg\left[\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + C$$

$$\boxed{h(x) = 2\ln(x^2+x+2) + \frac{10}{\sqrt{7}}\, artg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C}$$

3) $k(x) = \frac{x+3}{(x-1)^2(x^2+3)}$

$$Dk = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0 \text{ ou } x^2+3 \neq 0\}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2+3 \geq 0$

Donc $Dk = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\}$

Décomposition en élément simple de $k(x)$

$$\frac{x+3}{(x-1)^2(x^2+3)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$$x+3 = A(x^2+3) + B(x-1)(x^2+3) + (Cx+D)(x-1)^2$$

$$= A(x^2+3) + B(x^3-x^2+3x-3) + Cx(x^2-2x+1) + D(x^2-2x+1)$$

$$= (B+C)x^3 + (A-B-2C+D)x^2 + (3B+C-2D)x + (3A-3B+D)$$

$$\begin{cases} B+C=0 \\ A-B-2C+D=0 \\ 3B+C-2D=1 \\ 3A-3B+D=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B=-C \\ A-C+D=0 \\ -2C-2D=1 \\ 3A+3C+D=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B=-C \\ -2C-2D=1 \\ A-C+D=0 \\ 3A+3C+D=3 \end{cases}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$\begin{cases} B = -C \\ -2C - 2D = 1 \\ -3A + 3C - 3D = 0 \\ 3A + 3C + D = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -C \\ C + D = -\frac{1}{2} \\ 6C - 2D = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -C \\ C + D = -\frac{1}{2} \\ 8C = -1 + 3 \\ A - B - 2C + D = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -C \\ C = \frac{1}{4} \\ D = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \end{cases} \quad ; \quad B = -\frac{1}{4} \quad ; \quad A = 1$$

$$k(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{4}\frac{x-3}{x^2+3}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{8}\frac{2x-6}{x^2+3}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{8}\frac{2x}{x^2+3} - \frac{6}{8}\frac{1}{x^2+3}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{8}\frac{(x^2+3)'}{x^2+3} - \frac{3}{4}\frac{1}{x^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$\int k(x)dx = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{8}\ln(x^2+3) - \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{3}}\, artg\, \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

$$\boxed{\int k(x)dx = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{8}\ln(x^2+3) - \frac{4}{\sqrt{3}}\, artg\, \frac{x}{\sqrt{3}} + C}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Correction de Calcul Intégral Session 2 (L1) 2020-2021

Exercice 1

On considère l'équation différentielle.

(E) : $y'' - y' - 6y = (x-1)e^{3x} = P(x)e^{3x}$, avec $P(x) = x - 1$

1) L'équation homogène (E_H) est :

(E_H) : $y'' - y' - 6y = 0$ et l'équation caractéristique correspondante est : $r^2 - r - 6 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$

$\Delta = (5)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5^2} = |5|$

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{-(-1) - 5}{2} = -2 \\ r_2 = \dfrac{-(-1) + 5}{2} = 3 \end{cases}$$

Ainsi l'équation (E_H) admet pour solution générale $y_H(x) = \lambda e^{-2x} + \mu e^{3x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2) Expliquons pourquoi une solution particulière de (E) est de la forme $(ax^2 + bx)e^{3x}$.

On a : (E) : $y'' - y' - 6y = P(x)e^{3x}$

Une solution particulière de E est de la forme $y(x) = x^s Q(x)e^{3x}$ avec $Q(x) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de même degré que P. Donc de degré 1. Alors $Q(x) = ax + b$. De plus 3 est une racine simple de l'équation caractéristique, donc $s = 1$.

D'où une solution particulière de (E) est de la forme $y(x) = x(ax + b)e^{3x} = (ax^2 + bx)e^{3x}, (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Déterminons a et b.
Comme y est une solution particulière de (E), y vérifie (E).
On a : $y(x) = (ax^2 + bx)e^{3x}$

- $y'(x) = (3ax^2 + (2a + 3b)x + b)e^{3x}$
- $y''(x) = \big(9ax^2 + (12a + 9b)x + (2a + 6b)\big)e^{3x}$
- on a : $y'' - y' = (6ax^2 + 10ax + 66x + 2a + 5b)e^{3x}$
- $y'' - y' - 6y = 10ax + 2a + 5b$

Ainsi (E) : $(10ax + 2a + 5b)e^{3x} = (x - 1)e^{3x}$
$\Leftrightarrow (10ax + 2a + 5b) = (x - 1)$

Par identification : $\begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ 2a + 5b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = -\frac{6}{25} \end{cases}$

On vérifie aisément ces résultats en remplaçant a et b par $\frac{1}{10}$ et $-\frac{6}{25}$ respectivement dans $y(x)$.

3) La solution générale est donnée par :
$y_G(x) = y_p(x) + y$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$y_G(x) = \lambda e^{-2x} + \mu e^{3x} + \left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{6}{25}x\right)e^{3x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$y_G(x) = \lambda e^{-2x} + \left(\mu + \frac{1}{10}x^2 - \frac{6}{25}x\right)e^{3x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

4) On pose $y_G = f$.

On a : $f(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda e^{-2\times 0} + \left(\mu + \frac{1}{10}\times 0^2 - \frac{6}{25}\times 0\right)e^{3\times 0} = 1$

$$\Leftrightarrow \lambda + \mu = 1 \text{ ①}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -2\lambda e^{-2x} + \left(\mu + \frac{2}{10}x^1 - \frac{6}{25} + 3\mu + \frac{5}{10}x^2 - \frac{18}{25}x\right)e^{3x},$$

$$f'(0) = -2\lambda + \mu + 3\mu - \frac{6}{25} = -\frac{6}{25}$$

$$f'(0) = -2\lambda + 4\mu - \frac{6}{25} = -\frac{6}{25} \Rightarrow 4\mu - 2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow 2\mu - \lambda = 0 \text{ ②}$$

De ① et ② on a le système : $\begin{cases}\lambda + \mu = 1 \\ 2\mu - \lambda = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mu = \frac{1}{3} \\ \lambda = \frac{2}{3}\end{cases}$

Ainsi l'unique solution de f de (E) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\frac{6}{25}$ est :

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{3}e^{-2x} + \left(\frac{1}{3} - \frac{6}{25}x + \frac{1}{10}x^2\right)e^{3x}}$$

5) Au voisinage de 0, on a : $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \circ(x^4)$

- $e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \circ(x^4)$
- $e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 + \circ(x^4)$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{6}{25}x + \frac{1}{10}x^2\right)e^{3x} = \left(\frac{1}{3} - \frac{6}{25}x + \frac{1}{10}x^2\right)\left(1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 + \circ(x^4)\right)$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{6}{25}x + \frac{1}{10}x^2\right)e^{3x} = \left(\frac{1}{3} + \frac{19}{25}x + \frac{22}{25}x^2 + \frac{18}{25}x^3 + \frac{99}{200}x^4 + \circ(x^4)\right) \text{ ①}$$

$$\frac{2}{3}e^{-2x} = \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^4 + \circ(x^4)\right) \text{ ②}$$

$f(x) = \text{①} + \text{②}$

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{43}{75}x + \frac{166}{75}x^2 - \frac{146}{75}x^3 + \frac{1097}{600}x^4 + \circ(x^4)}$$

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(0, f(0))$ est : $y_T = 1 - \frac{43}{75}x$.

$$I = \int g(x)dx = -\int \frac{2dt}{t^2 - 2t + 1 - 2} = -\int \frac{2dt}{(t-1)^2 - 2}$$

$$I = -2\int \frac{du}{t^2 - 2} = -2\int \frac{dt}{(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$I = -2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}dt}{t-\sqrt{2}} - 2\int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}dt}{t+\sqrt{2}}$$

Après calcul, on a :

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} ln\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{2}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{2}}\right| + C$$

b) $h(x) = \frac{5x-11}{x^2+2x+2}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x + 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x + 1 + 1 \neq 0\}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R} / (x+1)^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 + 1 \neq 0$

$$J = \int h(x)dx = \int \frac{5x-11}{x^2+2x+2}dx = 5\int \frac{x}{x^2+2x+2}dx - 11\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

$$J = \frac{5}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - 13\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

$$\boxed{J = \frac{5}{2} ln|x^2+2x+2| - 13\arctan(x+1) + K, K \in \mathbb{R}}$$

c) $k(x) = \frac{x\sqrt{2-x}}{x-\sqrt{2-x}}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} / 2 - x \geq 0 \text{ et } x - \sqrt{2-x} \neq 0\}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} / 2 \geq x \text{ et } x \neq \sqrt{2-x}\}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \text{ et } x^2 \neq 2 - x\}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \text{ et } x^2 + 2(\frac{x}{2}) \neq 2\}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \text{ et } \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \neq 2 + \frac{1}{4}\}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \text{ et } \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \neq 0\}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \text{ et } \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \neq 0\}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \text{ et } \left(x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right) \neq 0\}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } x \neq -2\}$

Il faut noter que $x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = x + 2 \neq 0$ est toujours vraie $\forall x \in]-\infty ; 2]$

Donc $D_k = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \text{ et } x \neq 1\}$

$D_k =]-\infty ; 2] \backslash \{1\}$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

CORRECTION DE CALCUL INTEGRAL ET EQUATION DIFFERENTIELLE SESSION 1_2021-2022

EXERCICE 1

On donne : (E): $y'' - 5y' - 14y = (-18x + 11)e^{-2x}$

1 - Expliquons pourquoi une solution particulière de (E) est de la forme $(ax^2 + bx)e^{-2x}$

- Solution homogène de (E) associé à l'Equation homogène de (E) : $y'' - 5y' - 14y = 0$

Equation caractéristique : $r^2 - 5r - 14 = 0$

$\Delta = 81$ $r_1 = -2$ *et* $r_2 = 7$ Ainsi la solution homogène est de la forme $y_H = Ae^{-2x} + Be^{7x}$

Une Solution particulière est $y_p = e^{-2x}x^m Q(x)$ avec Q qui est un polynome de meme degre que $-18x + 11$. Comme -2 est racine simple de l'équation caractéristique, alors $m = 1$

Par conséquent $y_p = x(ax + b)^{-2x}$. Ainsi une solution particulière est de la forme

$$y_p = (ax^2 + bx)^{-2x}$$

Déterminons les réels a et b

Comme y_p est solution de(E), Alors $y_p'' - 5y_p' - 14y = (-18x + 11)e^{-2x}$

Après dérivation de y_p et remplace dans(E), On obtient

$y_p'' - 5y_p' - 14y = (-18ax + 2a - 9b)e^{-2x} = (-18x + 11)e^{-2x}$; Par identification $a = 1$ *et* $b = -1$

D'où $y_p = (x^2 - x)e^{-2x} = x(x - 1)e^{-2x}$

2 – Solution Générale $y_G = y_H + y_p = Ae^{-2x} + Be^{7x} + x(x - 1)e^{-2x}$ *avec* $A, B \in \mathbb{R}$

3 - Donnons l'unique solution de f *de* (E) vérifiant $f(0) = -1$, $f'(0) = 1$

$$f(x) = Ae^{-2x} + Be^{7x} + x(x - 1)e^{-2x} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Après calcul on obtient $B = 0$, $A = -1$; *Alors* $f(x) = (x^2 - x - 1)e^{-2x}$

EXERCICE 2

a - $l(x) = \frac{1}{9 - 4\sin x}$ *voir(session 2)* $\int l(x)dx = \frac{2\sqrt{65}\arctan\left(\frac{9\sqrt{65}\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 4\sqrt{64}}{65}\right)}{65} + c$, $c \in \mathbb{R}$

b - $v(x) = \frac{15x + 22}{x^2 + 2x + 2}$ *(voir(session 2),* $\int v(x)dx = \frac{15}{2}ln(|x^2 + 2x + 2|) + 7\arctan(x + 1) + c$, $c \in \mathbb{R}$

c – $p(x) = \frac{x^4}{(x^2 - 4)(x^2 + 2)} = 1 + \frac{2x^2 + 8}{(x^2 - 4)(x^2 + 2)}$ *(divison euclud), ensuite décomposition en élement simple* $p(x) = 1 + \frac{3}{x^2 - 4} + \frac{-1}{x^2 + 2}$ *Alors* $\int p(x)dx = x + \frac{3}{4}ln\left(\left|\frac{x - 2}{x + 2}\right|\right) - \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)}{\sqrt{2}} + c$, $c \in \mathbb{R}$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE FHB
UFR MATHS - INFO
NIVEAU: L1

ANNEE 2022 _ 2023

CALCUL INTEGRAL
SESSION 1
DUREE: 1H30
CORRECTION +BAREME

VALIDEUR LMD-2025

EXERCICE 1

On donne l'équation différentielle
(E): $y'' - y' - 12y = (-21x^2 - 8x + 9)e^{-3x}$

1) Donner la solution générale de l'équation homogène associée à (E).

Soit $y_h(x)$ la solution générale de l'équation homogène. On a alors
$y_h(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x}$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (1 pt)
2) Expliquer rigoureusement pourquoi une solution particulière de (E) peut être mise sous la forme $\left(ax^3 + bx^2 + cx\right)e^{-3x}$
Le second membre de l'équation (E) étant le produit d'un polynôme de degré 2 par e^{-3x}, une solution particulière $y_p(x)$ de l'équation complète se cherche sous la forme $x^s\left(ax^2 + bx + c\right)e^{-3x}$, où s est la multiplicité de -3 en tant que racine de l'équation caractéristique
$r^2 - r - 12 = 0$.Ici, $s = 1$ car $r^2 - r - 12 = (r-4)(r+3)$ d'où la forme. (2 pts)
3) Déterminer alors les réels a, b et c.

Dériver $y_p(x) = \left(ax^3 + bx^2 + cx\right)e^{-3x}$ deux fois, puis injecter dans (E).
On trouve $a = 1$; $b = 1$; $c = -1$ (1+1+1) = (3 pts)

4) Déterminer la solution particulière f de l'équation (E), vérifiant les conditions $f(0) = 2$; $f'(0) = 0$

La solution générale de l'équation complète (E) est donc
$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x} + \left(x^3 + x^2 - x\right)e^{-3x}$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Donc $y(x) = \left(C_2 + x^3 + x^2 - x\right)e^{-3x} + C_1 e^{4x}$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
$f(0) = 2$; $f'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 1 = C_2$ (1+1) = (2 pts)
Ainsi, $f(x) = \left(1 + x^3 + x^2 - x\right)e^{-3x} + e^{4x}$

5) Donner un développement limité de la fonction f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Scanned with CamScanner

Le développement limité de $f(x) = (1 + x^3 + x^2 - x)\, e^{-3x} + e^{4x}$ au voisinage de 0 donne $f(x) = 2 + \frac{33}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ (2 pts)
En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente s'en déduit: $y = 2$ (0.5 pt)
Etudier les positions relatives.

On a: $f(x) - y = \frac{33}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \geq 0$ (au voisinage de 0).
Donc la courbe représentative de f est au-dessus de la tangente au point d'abscisse 0. (0.5 pt)

EXERCICE 2
On donne $k(x) = \frac{x^3-3x}{(x^2+1)(x-1)}$ et $h(x) = \frac{1}{2+\cos x}$
Donner l'ensemble des primitives de chacune de ces fonctions, après avoir précisé le domaine de définition de l'intégrant.

$D_k = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (0.5 pt)
La décomposition en éléments simples de $k(x)$ donne
$k(x) = \frac{x^3-3x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{2x-2}{x^2+1} - \frac{1}{x-1} + 1$ (2.5 pts)
On en déduit
$\int k(x)\, dx = x - \ln|x-1| + \ln(x^2+1) - 2\arctan x + C;\ C \in \mathbb{R}$ (1.5 pt)

$D_h = \mathbb{R}$ (0.5 pt)

Poser $\tan\frac{x}{2} = t$. (0.5 pt)
On obtient alors
$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ (1 pt)
$\cos x = \frac{1-t^2}{1+T^2}$. (1 pt)
Ainsi, $\int h(x)\, dx = \int \frac{2}{t^2+3}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C$.(1.5 pt)

En définitive, $\int h(x)\, dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Calcul intégral L1

session 1 2023-2024

Exercice 1

On donne l'équation différentielle (E): $y' = \frac{1}{x}y^2 - \left(2+\frac{1}{x}\right)y + x + 2$

1) Chercher une solution particulière y_0 de (E) sous la forme $ax, a \in \mathbb{R}$

On trouve $a = 1$ done $y_0 = x$ (1point)

2) On pose $y = y_0 + \frac{1}{Z}$, où Z est une nouvelle fonction inconnue, dépendant de x.

2.a Montrer que ce changement de fonction transforme (E) en l'équation (E'') : $z' - \frac{z}{x} = -\frac{1}{x}$ (on donnera tous les détails des calculs menant à cette équation)

$$y = y_0 + \frac{1}{Z} = x + \frac{1}{Z} \Rightarrow y' = 1 - \frac{Z'}{Z^2} = \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{Z}\right)^2 - \left(2+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{Z}\right) + x + 2$$

On obtient (E'): $z' - \frac{z}{x} = -\frac{1}{x}$ (3 points)

2.b Résoudre (E')

La solution générale de l'équation homogène associée à (E') est:

$$Z_H = cx, c \in \mathbb{R} \text{ (1point)}$$

Par variation de la constante, on obtient une solution particulière Z_P de (E'). Elle vaut 1. (1.5 point)

La solution complète de l'équation (E') est

$$Z(x) = Z_H + Z_P = cx + 1, c \in \mathbb{R} (0.5 \text{ point})$$

2.c En déduire la solution générale de l'équation (E)

La solution générale de l'équation (E) est

$$y(x) = x + \frac{1}{cx+1}, c \in \mathbb{R} (1 \text{ point})$$

3) Résoudre le problème

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x}y^2 - \left(2+\frac{1}{x}\right)y + x + 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

On désigne par g sa solution $y(1) = 0 \Rightarrow c = -2$, donc $g(x) = x + \frac{1}{1-2x}$ (1 point)

4) Soit C_g la courbe représentative de la fonction g dans le demi-plan $x > 0$.

Domner l'équation de l'asymptote à C_g en $+\infty$ et étudier les positions relatives.

Equation de l'asymptote à C_g en $+\infty$ s'en déduit : $y = x$ (0.5 point)

VALIDEUR LMD - 2025

Scanned with CamScanner

Exercice 2

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes après avoir domé le domaine de définition de l'intégrant:

a) $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ (1 point)

$f(x) = \frac{\tan x}{1+\tan x}$. Poser $\tan x = t$ donc $I = \int f(x)dx = \int \frac{t}{(1+t)(1+t^2)}dt$ (1 point)

Comme $\frac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}{t^2+1} - \frac{1}{2(t+1)}$ (1 point), on obtient $I = \frac{1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{1}{2}\arctan t - \frac{1}{2}\ln|t+1| + C, C \in \mathbb{R}$ (1 point)

Ainsi, $I = -\frac{1}{2}\ln|\cos x| + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\tan x + 1| + C, C \in \mathbb{R}$(0.5 point)

b) $g(x) = \frac{17x+9}{(x-7)(x^2+7)}$ $D_g = \mathbb{R}\backslash\{7\}$(0.5 point)

Or $\frac{17x+9}{(x-7)(x^2+7)} = \frac{16}{7(x-7)} - \frac{\frac{19}{7}x-1}{x^2+7}$ (1point)

. On obtient donc $\int g(x)dx = \frac{16}{7}\ln|x-7| - \frac{8}{7}\ln(x^2+7) + \frac{\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{7}x\right) + K, K \in \mathbb{R}$ (1point)

c) $h(x) = \int \frac{12x+1}{\sqrt{x^2+2x+9}}dx$ $D_h = \mathbb{R}$(0.5 point)

Comme $12x + 1 = 6(2x+2) - 11$, alors $\frac{12x+1}{\sqrt{x^2+2x+9}} = 6\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+9}} - \frac{11}{\sqrt{(x+1)^2+8}}$ (1 point)

$\int h(x)dx = 12\sqrt{x^2+2x+9} - 11\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+9}\right) + L, L \in \mathbb{R}$ (1.5 point)

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

L1 Tronc Commun Année Académique 2020-2021

UE : Mécanique du Point Matériel

Durée : 3 H 00 session 1

Exercice 1

1. Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trois vecteurs donnés dans un espace vectoriel E.
   a. Résoudre l'équation vectorielle suivante d'inconnue $\vec{x}$ dans E : $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$;
   b. Faire une représentation graphique de la solution trouvée à la question **1.a.**

2. On considère un vecteur $\vec{a}$ de coordonnées $(-2,1,-2)$ dans la base de $\mathcal{R} = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et un point B de coordonnées $(1,2,1)$.
   a. Définir et calculer les cosinus directeurs du vecteur $\vec{a}$.
   b. Déterminer en détaillant les calculs, l'équation du plan passant par B et perpendiculaire à $\vec{a}$.

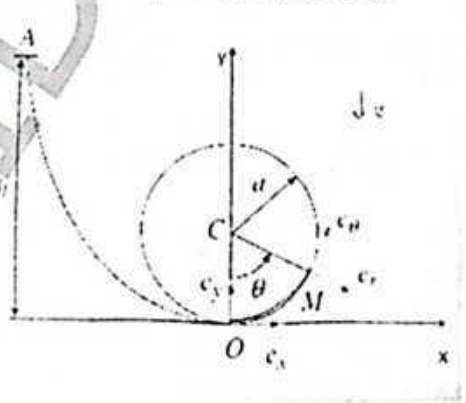
Exercice 2

Un point matériel M est repéré dans un référentiel fixe $\mathcal{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ par ses cordonnées cylindriques $(\rho, \emptyset, z)$ telles que : $\rho = R, \emptyset = \omega t$ et $z = h\emptyset$ (R, ω et h sont des constantes positives et t le temps).

1. Ecrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. a- Quelle est la nature du mouvement de M dans le paln (xOy) ?
   b- Quelle est la nature du mouvement de M suivant la direction de l'axe (Oz) ?
   c- Quelle est la nature du mouvement résultant de M ?
3. Déterminer les expressions des vecteurs vitesse et accélération de M dans la base cylindrique $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$.
4. Montrer que l'angle $\alpha = (\vec{k}, \vec{v})$ est constant. En déduire l'hodographe du mouvement.

Exercice 3

Une bille, assimilée à un point matériel M de masse m, est lâchée sans vitesse initiale depuis le point A d'une gouttière situé à une hauteur h du point le plus bas O de la gouttière. Cette dernière est terminée en O par un guide circulaire de rayon a, disposé verticalement. La bille, dont on suppose que le mouvement a lieu sans frottement, peut éventuellement quitter la gouttière vers l'intérieur du cercle. On désigne par $\vec{g} = -g\overrightarrow{e_y}$ l'accélération de la pesanteur (figure 1).



Scanned with CamScanner

1. Calculer la norme v_O de la vitesse de la bille en O.
2. Exprimer la norme v_M de la vitesse de la bille en un point M quelconque du cercle repéré par l'angle θ.
3. On désigne par $\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{CM}}{\|\overrightarrow{CM}\|}$ le vecteur unitaire porté par le vecteur position $\overrightarrow{CM}$ du point M. Ecrire l'expression de la réaction $\vec{R} = R\overrightarrow{e_r}$ du guide circulaire de la bille.
4. Déterminer la hauteur minimaleh_{min} à partir de laquelle il faut lâcher la bille sans vitesse initiale pour qu'elle ait un mouvement révolutif dans le guide.
5. On lâche la bille sans vitesse initiale depuis une hauteur $h_0 = 2a$. A quelle condition la bille décolle-t-elle du guide ? Calculer en degré, la valeur θ_0 de l'angle θ correspondante.
6. Calculer la valeur v_{O_x} de la composante suivant l'axe Ox de la vitesse de la bille au moment où elle quitte le guide.
7. Calculer la valeur maximale h_M de la hauteur atteinte dans ces conditions par la bille après qu'elle est quitté le guide.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

L1 Tronc Commun **Année Académique 2020-2021**

UE : Mécanique du Point Matériel

Deuxième session

Durée : 3 H 00

Exercice 1 :

1. Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}$ trois vecteurs donnés dans un espace vectoriel E.
   a- Résoudre l'équation vectorielle suivante d'inconnue $\vec{x}$ dans E : $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$;
   b- Faire une représentation graphique de la solution trouvée à la question 1.a.
2. On considère un vecteur $\vec{a}$ de coordonnées $(-2,1,-2)$ dans la base de $\mathcal{R} = (O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et un point B de coordonnées $(1,2,1)$.
   a- Définir et calculer les cosinus directeurs du vecteur $\vec{a}$.
   b- Déterminer en détaillant les calculs, l'équation du plan passant par B et perpendiculaire $\vec{a}$.

Exercice 2 :

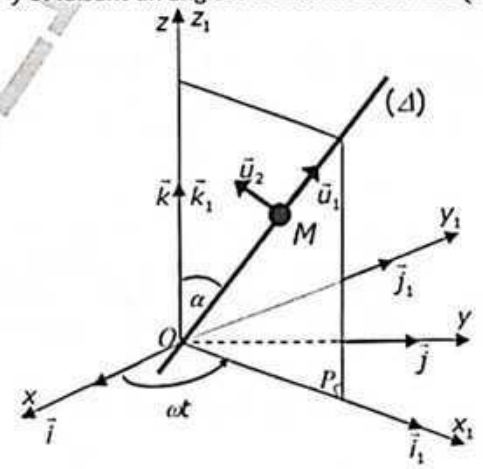
Un point matériel M est repéré dans un référentiel fixe $\mathcal{R}(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par ses coordonnées cylindriques (ρ,ϕ,z) telles que : $\rho = R, \phi = \omega t$ et $z = h\phi$ (R, ω et h sont des constantes positives et t le temps).

1. Ecrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
2. a- Quelle est la nature du mouvement de M dans le plan (xOy) ?
   b- Quelle est la nature du mouvement de M suivant la direction de l'axe (Oz) ?
   c- Quelle est la nature du mouvement résultant de M?
3. Déterminer les expressions des vecteurs vitesse et accélération de M dans la base cylindrique $(\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\vec{k})$.
4. Montrer que l'angle $\alpha = (\vec{k},\vec{v})$ est constant. En déduire l'hodographe du mouvement.

Exercice 3 :

On considère le repère fixe $\mathcal{R}(Oxyz)$ (repère absolu) muni de la base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. (xOy) étant le plan horizontal. Soit $(\mathcal{P})$ un plan vertical qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω. On désigne par $\mathcal{R}_1(Ox_1y_1z_1)$ le repère relatif muni de la base orthonormée directe $(\overrightarrow{i_1},\overrightarrow{j_1},\overrightarrow{k_1})$, tel que (x_1Oz_1) se trouve constamment dans le plan $(\mathcal{P})$ et $\vec{k} = \overrightarrow{k_1}$ (voir la figure ci-dessous).

Soit (Δ) une tige de longueur L (de vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{u_1}$) passant par O, constamment contenue dans le plan $(\mathcal{P})$ et faisant un angle α constant avec l'axe (Oz_1) $(0 < \alpha < \pi/2)$.



VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Un anneau M de masse m (assimilé à un point matériel) se meut sans frottement le long de la tige (Δ). La position de M sur la tige est définie par : $\overrightarrow{OM} = r(t)\overrightarrow{u_1}$ 71. Soient $\overrightarrow{u_2}$ un vecteur unitaire, contenu dans le plan ($\mathcal{P}$) et perpendiculaire à $\overrightarrow{u_1}$, et $\overrightarrow{u_3}$ un vecteur unitaire tel que la base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$, soit orthonormée directe.

1. Exprimer dans la base $(\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1})$
   a- le moment cinétique de M au point O par rapport à $\mathcal{R}_1$.
   b- le poids de M.
   c- les forces d'inertie.

2. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère $\mathcal{R}_1$, détermine la réaction $\vec{R}$ exercée par la tige sur le point M.

3. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\mathcal{R}_1$, détermine l'équation différentielle, du mouvement de M, vérifiée par r. Donner la solution de cette équation.

4. Calculer, en fonction de r, l'énergie potentielle de M par rapport au repère $\mathcal{R}_1$.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

L1 Tronc Commun

Année Académique 2021-2022

UE Mécanique du Point Matériel

session 1

Durée : 3 Heures

PREUVE LMD-2025

QCM :

1. Les vecteurs normés $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ constituent une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ orthonormée directe. Alors :
   a- 2 au moins des trois vecteurs sont perpendiculaires entre eux.
   b- $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$.
   c- En amenant $\vec{e}_1$ sur $\vec{e}_2$, on obtient $\vec{e}_3$, en tournant dans le sens horaire.
   d- En amenant $\vec{e}_1$ sur $\vec{e}_2$, on obtient $\vec{e}_3$, en tournant dans le sens direct.
   e- Aucune réponse n'est correcte.

2. Concernant le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ sur $\vec{b}$.
   a- Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, alors les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.
   b- Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, alors les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.
   c- $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est caractéristique du périmètre du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
   d- $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est caractéristique de la surface du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
   e- Aucune réponse n'est correcte.

Exercice 1 :

On considère le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et une conduite cylindrique mince et creuse (OP). (OP) est en mouvement de rotation autour de l'axe $(O; \vec{k})$, d'angle $\theta(t)$, de sorte que (OP) reste toujours perpendiculaire à $(O; \vec{k})$. Le repère $(P; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ tel que $\vec{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|}$ et $\vec{e}_\theta = \vec{k} \wedge \vec{e}_r$, est lié à la conduite cylindrique.

Un point matériel M (une bille) se déplace dans la conduite (OP) mince en translation tel que $OM = r(t)$. On donne $OP = \ell$ et $\omega = \dot{\theta} = cte$.

1. Schématiser le mouvement de (OP) et M avec les repères. Préciser la nature de chaque repère.
2. Calculer les vecteurs vitesse et accélération de M par rapport à la conduite cylindrique (OP).
3. Calculer les vecteurs vitesse et accélération de M dans le repère $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$. Comparer les résultats avec 2).
4. Calculer directement les vecteurs vitesse et accélération de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Quelle est la trajectoire de M, dans ce repère?
5. Retrouver les résultats de 4) en utilisant la composition des mouvements.
6. Quelle accélération dans $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ faut-il donner à la bille M, pour qu'elle ait une vitesse minimale dans la conduite (OP).

Exercice 2 :

Une bille, assimilée à un point matériel M de masse m, est lâchée sans vitesse initiale depuis le point A d'une gouttière situé à une hauteur h du point le plus bas O de la gouttière. Cette dernière est terminée en O par un guide circulaire de rayon a, disposé verticalement. La bille, dont on suppose que le mouvement a lieu sans frottement, peut éventuellement quitter la gouttière vers l'intérieur du cercle. On désigne par $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ l'accélération de la pesanteur (figure 1).

1. Calculer la norme v_O de la vitesse de la bille en O.

Scanned with CamScanner

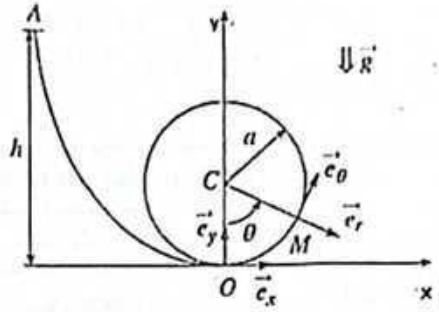


Figure 1: Gouttière

2. Exprimer la norme v_M de la vitesse de la bille en un point M quelconque du cercle repéré par l'angle θ.
3. On désigne par $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{CM}}{\|\overrightarrow{CM}\|}$ le vecteur unitaire porté par le vecteur position $\overrightarrow{CM}$ du point M. Ecrire l'expression de la réaction $\vec{R} = R\vec{e}_r$ du guide circulaire sur la bille.
4. Déterminer la hauteur minimale h_{min} à partir de laquelle il faut lâcher la bille sans vitesse initiale pour qu'elle ait un mouvement révolutif dans le guide.
5. Dans ces conditions, donner l'expression de la réaction du support au point O d'entrée du demi-cercle ($\theta = 0$).
6. Déterminer les limites h_1 et h_2 telles que :
   a- si $h < h_1$, le point M effectue des oscillations.
   b- si $h_1 < h < h_2$, M quitte la gouttière et chute pour $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.
   c- si $h > h_2$, le point M fait des tours complets (si le guide circulaire se poursuit).

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UE Mécanique du Point Matériel
Première Session

Durée : 3 Heures

Exercice 1 :

1. Représenter dans le référentiel cartésien $Oxyz$ les coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'un point M.
2. Exprimer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) en fonction des coordonnées sphériques (r, θ, φ). En déduire les coordonnées (r, θ, φ) en fonction des coordonnées (x, y, z).
3. Calculer le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{r}$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. En déduire la surface élémentaire dS en coordonnées sphériques, à la surface de la terre (de centre O et de rayon R), puis la surface de la terre.
4. Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}$ de M dans la base sphérique. En déduire l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}$, lorsque M se déplace à la surface de la terre, le long d'un méridien (en géographie, un méridien est une demi-ellipse imaginaire tracée sur le globe terrestre reliant les pôles géographiques).

Exercice 2 :

On se propose dans cet exercice d'étudier le mouvement du vol d'un avion parcourant une ligne rejoignant deux villes se trouvant sur le même méridien. On suppose que l'avion effectue le vol à une hauteur h et à une longitude φ_0 et ce à une vitesse v constante par rapport à la surface terrestre. Soit $\mathcal{R}_0(OX_0Y_0Z_0)$ le repère géocentrique et $\mathcal{R}_1(OX_1Y_1Z_1)$ le repère lié à la terre. L'avion est considéré comme un point matériel, que l'on notera M, repéré dans R_1 par les angles θ et φ, voir figure ci-dessous. Soit R le rayon du globe terrestre et ω sa vitesse angulaire de rotation. **Exprimer tous les résultats dans la base sphérique.**

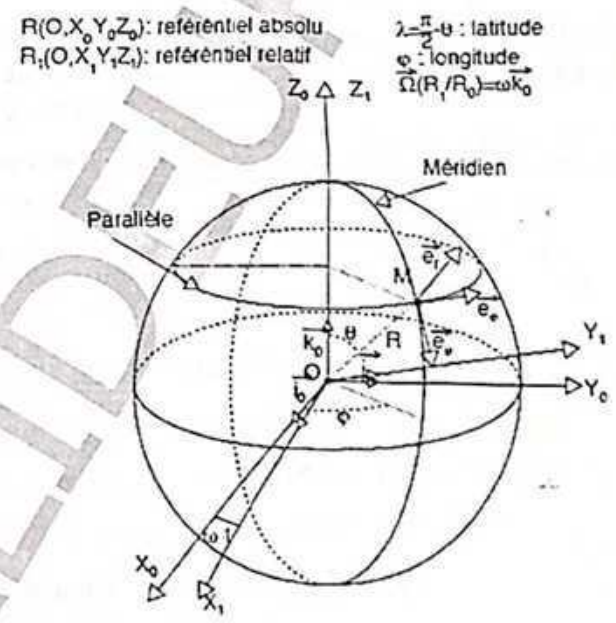


Figure 1: Vol d'avion

1. Etablir l'expression de la vitesse de l'avion $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$. En déduire que $\dot{\theta}$ est constante.
2. Etablir l'expression de l'accélération de l'avion $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1)$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

3. Quel est le vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$?
4. Etablir les expressions de la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)$ et de l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_0)$. En déduire l'effet de l'accélération de Coriolis et celui de l'accélération d'entrainement sur le mouvement de l'avion.
5. Reprendre l'exercice si l'avion se déplace selon le parallèle de latitude λ_0 (sur Terre, un parallèle est un cercle imaginaire reliant tous les lieux situés sur une même latitude).

Exercice 3 :

Un petit morceau de glace de masse m, repéré par le point M, glisse sans frottements sur la surface externe d'un igloo qui est une demi-sphère de rayon R dont la base est horizontale. Au temps $t = 0$, il est lâché sans vitesse initiale d'un point M_0 de cote $z_0 = R\sin\theta_0$ où θ_0 est l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$.

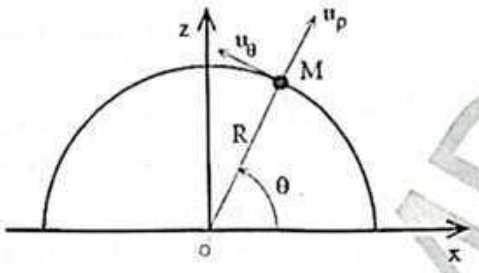


Figure 2: Glissade sur un igloo.

1. Déterminer les composantes de la vitesse et de l'accélération dans un repère local $(O; \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ lié à M.
2. On désigne par $\vec{N}$ la réaction de la demi-sphère sur M. En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'expression de $\|\vec{N}\|$ en fonction de la norme de la vitesse $v = \|\vec{v}\|$ de M.
3. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, donner l'expression de v puis $\|\vec{N}\|$ en fonction de l'angle θ.
4. Représenter la variation de $\|\vec{N}\|$ en fonction de θ. Pour quelle valeur de θ, le point M "décolle-t-il" de l'igloo ? Quelle est alors sa vitesse de décollage ? Quelle est la nature de la trajectoire quand la masse m quitte la surface de l'igloo ?
5. Montrer que le cas particulier $\theta_0 = \pi/2$ correspond à une position d'équilibre. Etudier sa stabilité.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

L1 Tronc Commun

Année 2023-2024

Première session lundi 04 Mars 2024
Mécanique du Point Matériel
Durée : 3 Heures

exercice 1 : (10 points)
Une charrette se déplace à vitesse constante $V_0 = 1.8\ km.h^{-1}$. Ces roues à rayons ont un diamètre de $D = 47.75\ cm$. A l'instant $t = 0$, on considère un rayon CA horizontal avec C centre d'une roue et A l'autre extrémité du rayon. A l'instant t_1 ce même rayon se retrouve pour la première fois dans la même position (la roue a effectué un tour complet).

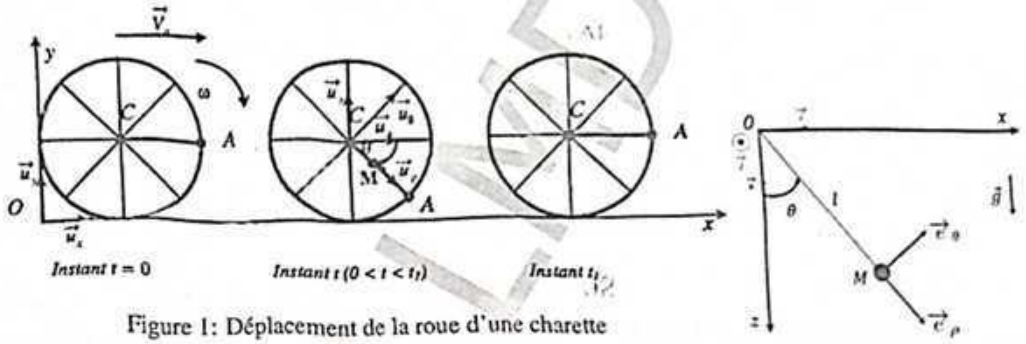


Figure 1: Déplacement de la roue d'une charette

Figure 2: Pendule simple

I. Question préliminaire

1. Exprimer la vitesse angulaire ω en fonction de V_0 et D. En déduire l'expression du vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$. Calculer ω.
2. Exprimer le temps t_1 au bout duquel la roue a effectué un tour complet. Calculer t_1.
3. Une petite coccinelle M située au centre C à l'instant $t = 0$ part avec une vitesse constante v sur le rayon CA. Quelle doit être sa vitesse pour atteindre A à l'instant t_1?

II. Référentiels en mouvement

On considère les référentiels suivants caractérisés par leur repère :
- Référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$,
- Référentiel $\mathcal{R}'(C; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$,
- Référentiel $\mathcal{R}''$ lié au rayon CA avec sa base fixe $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ qui correspond à la base polaire du repère $\mathcal{R}'(C, x, y)$.

1. Quel est le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$? (préciser les caractéristiques du mouvement).
2. Quel est le mouvement de $\mathcal{R}''$ par rapport à $\mathcal{R}'$? (préciser les caractéristiques du mouvement).
3. Quel est le mouvement de $\mathcal{R}''$ par rapport à $\mathcal{R}$? (préciser les caractéristiques du mouvement).

III. On se place dans le référentiel $\mathcal{R}''$ (lié au rayon CA, base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$)

1. La coccinelle se déplaçant à vitesse constante v dans ce repère, donner l'équation horaire du mouvement de $M(CM = \rho(t))$.
2. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.
3. Que vaut le vecteur accélération $\vec{\gamma}$ du point M dans ce référentiel ?

Scanned with CamScanner

IV. On se place dans le référentiel $\mathcal{R}'(C; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ et on utilisera sa base mobile $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$

1. Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{CM}$

2. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R}')$ du point M par rapport au référentiel R'.

3. Exprimer le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}')$ du point M par rapport au référentiel R'.

V. Loi de composition des vitesses et accélérations

1. Exprimer, pour le point M, le vecteur vitesse d'entraînement $\vec{v}'_e$ du référentiel $\mathcal{R}''$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$. Énoncer la loi de composition des vitesses et retrouver l'expression de $\vec{v}(M/R')$ à partir de celles de $\vec{v}'$ et de $\vec{v}'_e$.

2. De même, exprimer :
   a- Le vecteur accélération d'entraînement $\vec{\gamma}'_e$ du point M.
   b- Le vecteur accélération de Coriolis ou complémentaire $\vec{\gamma}_c$ du point M.
   c- Énoncer la loi de composition des accélérations et retrouver l'expression de $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}')$ à partir de celles de $\vec{\gamma}'$, $\vec{\gamma}'_e$ et $\vec{\gamma}_c$.

VI. On se place maintenant dans le référentiel $\mathcal{R}'(C; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

1. Comment, à partir de $\vec{v}(M/\mathcal{R}')$, peut-on obtenir l'expression du vecteur $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}$? Donner son expression.

2. Même question pour l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}')$.

Exercice 2 : (10 points)

Soit un référentiel galiléen $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{R}_1(O; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{j})$ un référentiel en mouvement de façon quelconque par rapport à $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}_1$ est non galiléen).

A- Questions de cours

1. Dans le référentiel $\mathcal{R}$, énoncer le principal de la dynamique.

2. Dans le référentiel $\mathcal{R}_1$, énoncer le principal de la dynamique.

3. Dans le référentiel $\mathcal{R}$, énoncer le théorème du moment cinétique.

4. Dans le référentiel $\mathcal{R}_1$, non galiléen, énoncer le théorème du moment cinétique.

B- Application au pendule simple

On considère le pendule simple défini comme suit :

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel galliléen $\mathcal{R}$, déterminer l'équation du mouvement du point matériel M.

2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel non galliléen $\mathcal{R}_1$, retrouver l'équation du mouvement du point matériel M.

3. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le référentiel galliléen $\mathcal{R}$, déterminer l'équation point matériel M.

4. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le référentiel non galliléen $\mathcal{R}_1$, retrouver l'équation du mouvement du point matériel M.

5. Que peut-on faire à partir de ce résultat?

Scanned with CamScanner

Université FHB Maths-Info 2020-2021

CORRECTION MECANIQUE

SESSION 1

Exercice 1

1. a) Résolvons $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$ (1)

(1) admet une solution ssi $\vec{a} \perp \vec{b}$. Soit (π) un plan contenant le vercteur $\vec{a}$ et $\vec{x}$.
On cherche une solution particulière $\vec{x_0}$ tel que $\vec{a}.\vec{x_0} = 0$.

$\vec{a} \wedge \vec{x_0} = \vec{b}$ (2)

$\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{x_0}) = \vec{a} \wedge \vec{b}$

$\underbrace{\vec{a}\,(\vec{a}.\vec{x_0})}_{0} - (\vec{a}.\vec{a})\,\vec{x_0} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

$$\vec{x_0} = \frac{\vec{b} \wedge \vec{a}}{\vec{a}^2}$$

Ainsi la solution particulière trouvée.

$$\begin{cases} \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b} & (1) \\ \vec{a} \wedge \vec{x_0} = \vec{b} & (2) \end{cases}$$

$(1) - (2) \Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{x} - \vec{a} \wedge \vec{x_0} = \vec{0}$

$\vec{a} \wedge (\vec{x} - \vec{x_0}) = \vec{0}$

$\vec{x} - \vec{x_0} = \alpha\,\vec{a};\ \alpha \in \mathbb{R}$

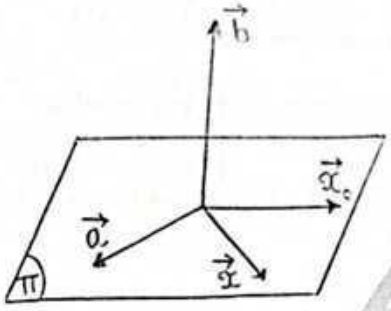
$\vec{x} = \vec{x_0} + \alpha\,\vec{a};\ \alpha \in \mathbb{R}$

$$\vec{x} = \frac{\vec{b} \wedge \vec{a}}{\vec{a}^2} + \alpha\,\vec{a};\ \alpha \in \mathbb{R}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

b) Schéma



2. $\vec{a}(-2,1,-2)$ et $B(1,2,1)$

a) Soit $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ les coordonnées du vecteur unitaire de même orientation que le vecteur $\vec{a}$.

$u_1 = \vec{u}.\vec{i} = \|\vec{u}\|.\|\vec{i}\|.\cos\theta_x = \cos\theta_x$

$u_2 = \vec{u}.\vec{j} = \|\vec{u}\|.\|\vec{j}\|.\cos\theta_y = \cos\theta_y$

$u_3 = \vec{u}.\vec{k} = \|\vec{u}\|.\|\vec{k}\|.\cos\theta_z = \cos\theta_z$

$\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ et $\|\vec{a}\| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

$$\vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

b) Soit $(\mathcal{P})$ ce plan, $\vec{a}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et soit $M(x,y,z)$ un point du plan.

$M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\vec{a} = 0$

$$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

D'où $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow -2(x-1) + (y-2) - 2(z-1) = 0$

$\Leftrightarrow -2x + 2 + y - 2 - 2z + 2 = 0$

$\Leftrightarrow -2x + y - 2z + 2 = 0$

Une équation de $(\mathcal{P})$ est $-2x + y - 2z + 2 = 0$

Exercice 2

1. $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

- En corrdonnée cylindrique, on a:

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = h\,\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \\ z = h\,\omega t \end{cases}$$

D'où $\overrightarrow{OM} = R\cos\omega t\,\vec{i} + R\sin\omega t\,\vec{j} + h\omega t\,\vec{k}$

2. a) $\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = R^2$

Alors dans le plan (xoy) la nature du mouvement de M est un cercle de centre $C\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ est le rayon R

b) $\begin{cases} x = R\cos(\omega t + 2\pi) \\ y = R\sin(\omega t + 2\pi) \\ z = h(\omega t + 2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = R\cos(\omega t) \\ y = R\sin(\omega t) \\ z = h\omega t + 2\pi h \end{cases}$

Suivant l'axe (oz), on a un mouvement de translation ou rectiligne uniforme

c) La nature du mouvement résultant:
Le mouvement résultant est un mouvement hélicoïdal.

3. $\vec{V}$ et $\vec{\delta}$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$

On a: $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k} = R\vec{e}_\rho + h\omega t\,\vec{k}$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/R} = \dot{R}\vec{e}_\rho + R\frac{d\vec{e}_\rho}{dt/R} + h\omega\vec{k} + h\omega t\frac{d\vec{k}}{dt/R}$$

$\dot{R}$ car $R = cste$ $\quad \frac{d\vec{k}}{dt/R} = \vec{0}$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt/R} = \dot{\varnothing}\vec{e}_\rho = (\dot{\omega t})\vec{e}_\rho = \omega\vec{e}_\rho$$

donc $\vec{V} = R\omega\vec{e}_\rho + h\omega\vec{k}$

$$\vec{\delta} = \frac{d\vec{V}}{dt/R} = R\omega\frac{d\vec{e}_\rho}{dt/R} \text{ or } \frac{d\vec{e}_\rho}{dt/R} = \dot{\varnothing}\vec{e}_\rho = (\dot{\omega t})\vec{e}_\rho = \omega\vec{e}_\rho$$

donc $\vec{\delta} = R\omega^2\vec{e}_\rho$

4. Montrons que l'angle $\alpha = (\vec{k}, \vec{v})$ est constant.

On sait que $\vec{v}.\vec{k} = \|\vec{v}\| \ \|\vec{k}\|\cos(\alpha)$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(R\omega)^2 + (h\omega)^2} = \omega\sqrt{R^2 + h^2}$

$\|\vec{k}\| = 1$ or $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est orthonormée alors

$$\vec{v}.\vec{k} = (R\omega\vec{e}_\varphi + h\omega\vec{k})(\vec{k}) = h\omega$$

$$\text{donc } \cos\alpha = \frac{h\omega}{\omega\sqrt{R^2 + h^2}} = \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} = Cste$$

Alors α est un angle constant. Puisque l'angle α et le module de la vitesse sont constants, on en déduit que l'hodographe du mouvement est un cercle de rayon $r_1 = R\omega$

Exercice 3: Voir correction Examen 2019 2020 ECUE Dynamique.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Université FHB Maths-Info 2020-2021

CORRECTION MECANIQUE DU POINT MATERIEL

SESSION 2

Exercice 1 (Correction, voir Exercice 1 session 1 2020 – 2021)

Exercice 2 (Correction, voir Exercice 1 session 2 2020 – 2021)

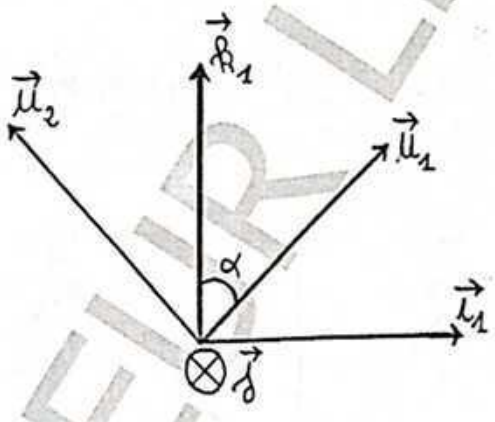
Exercie 3

1. Exprimons dans la base $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$

a) Le moment cinétique de M au point O par rapport à R_1

$\overrightarrow{L_0}$ est le moment cinétique en O du point matériel M, d'où:

$\overrightarrow{L_0} = m\,\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R_1)$, On a: $\overrightarrow{OM} = r(t)\,\vec{u_1}$



$R_1(O, x_1, y_1, z_1)$; base$(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$

$\vec{u_1} = \sin\alpha\ \vec{i_1} + \cos\alpha\ \vec{k_1}$

$\vec{u_2} = -\cos\alpha\ \vec{i_1} + \sin\alpha\ \vec{k_1}$

$\vec{u_3} = -\vec{j_1}$; $\vec{k} = \vec{k_1}$

$$\vec{V}(M/R_1) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/R_1} = \frac{d}{dt/R_1}(r\,\vec{u_1}) = \dot{r}\vec{u_1} + r\,\frac{d\vec{u_1}}{dt/R_1}$$

$\frac{d\vec{u_1}}{dt/R_1} = \vec{0}$ car $\dot{\alpha} = 0$

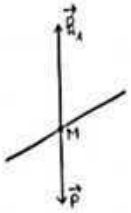
$\dot{r} = \dot{r}(t)$ et $r = r(t)$ donc $\vec{V}(M/R_1) = \dot{r}\,\vec{u_1}$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$\vec{V}(M/R_1) = \dot{r}\,(\sin\alpha\ \vec{i_1} + \cos\alpha\ \vec{k_1})$
$\Rightarrow \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R_1) = r(t)\ \vec{u_1} \wedge \dot{r}(t)\ \vec{u_1} = \vec{0}$
Donc $\boxed{\vec{L_0} = \vec{0}}$

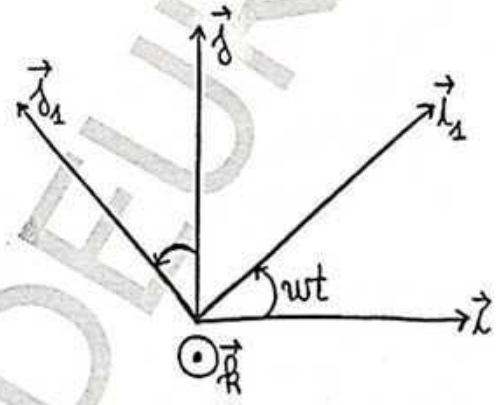
b) le poids de M



$\vec{P} = -mg\,\vec{k_1}$(voir figure)

c) Les forces d'inertie.

* $\vec{F_e} = -m\vec{\delta_e}$
avec $\vec{\delta_e} = \vec{\delta}(O/R) + \frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt/R} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge (\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{OM})$



D'après la figure, $\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\ \vec{k}$
Comme $\vec{k_1} = \vec{k} \Rightarrow \vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\ \vec{k}$
$\vec{\delta}(O/R) = \vec{0}$ car 0 est lié à R
$\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt/R} = \vec{0}$ car $\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\vec{k_1}$ et ω et $\vec{k_1}$ sont constants dans R

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{OM} = \omega\vec{k_1} \wedge r(t)\,\vec{u_1} = w\,r(t)\,\sin\alpha\,\vec{j_1}$
$\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge [\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{OM}] = \omega\,\vec{k_1} \wedge (w\,r(t)\,\sin\alpha\,\vec{j_1}) = -\omega^2\,r(t)\,\sin\alpha\,\vec{i_1}$

Donc $\boxed{\delta_e = -\omega^2\,r(t)\,\sin\alpha\,\vec{i_1}}$

$\Rightarrow \vec{F_e} = m\,\omega^2\,r(t)\,\sin\alpha\,\vec{i_1}$

* $\vec{F_c} = -m\,\vec{\delta_c}$ avec $\delta_c = 2\,\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}(M/R_1)$
$\vec{\delta_c} = 2\,\omega\,\vec{k_1} \wedge [\,\dot{r}(\sin\alpha\,\vec{i_1} + \cos\alpha\,\vec{k_1})\,] = 2\,\omega\,\dot{r}\,\sin\alpha\,\vec{j_1}$

$\Rightarrow \vec{F_c} = -2\,m\,\omega\,\dot{r}\,\sin\alpha\,\vec{j_1}$

2. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le R_1, déterminons la réaction $\vec{R}$ exercée par la tige sur le point M.

$\frac{d\vec{L_0}(M/R_1)}{dt/R_1} = \vec{m_0}(\vec{P}) + \vec{m_0}(\vec{R}) + \vec{m_0}(\vec{F_e} + \vec{m_0}(\vec{F_c})$ avec $\vec{m_0}(\vec{F_i})$ le moment de la force $\vec{F_i}$

* $\vec{m_0}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = [r\,\sin\alpha\,\vec{i_1} + r\,\cos\alpha\vec{k_1}] \wedge (-mg\,\vec{k_1})$
$\vec{m_0}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = m\,g\,r\sin\alpha\,\vec{j_1}$

* $\vec{m_0}(\vec{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R}$
$= r\,\vec{u_1} \wedge (R_2\,\vec{u_2} + R_3\,\vec{u_3})$
$= r\,R_2\,\vec{u_3} - r\,R_3\,\vec{u_2}$
Avec $\vec{R} = R_1\,\vec{u_1} + R_2\,\vec{u_2} + R_3\,\vec{u_3}$ et mouvement sans frottement donc $R_1 = 0$

* $\vec{m_0}(\vec{F_e}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F_e} = m\,r^2\,\omega^2\,\sin\alpha\,\cos\alpha\,\vec{j_1}$

* $\vec{m_0}(\vec{F_c}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F_c} = -2\,m\,\dot{r}\,\omega\,r\,\sin\alpha\,\vec{u_2}$

$\frac{d}{dt/R_1}\vec{L_0}(M/R_1) = \vec{0} \Rightarrow m\,g\,r\,\sin\alpha\vec{j_1} + r\,R_2\,\vec{u_3} - r\,R_3\,\vec{u_2} +$
$m\,r^2\,\omega^2\,\sin\alpha\,\cos\alpha\,\vec{j_1} - 2\,m\,\dot{r}\,\omega\,r\,\sin\alpha\,\vec{u_2} = \vec{0}$

Or $\vec{j_1} = -\vec{u_3} \Rightarrow -m\,g\,r\,\sin\alpha\vec{u_3} + r\,R_2\,\vec{u_3} - r\,R_3\,\vec{u_2} - m\,r^2\,\omega^2\,\sin\alpha\,\cos\alpha\,\vec{u_3} -$
$2\,m\,\dot{r}\,\omega\,r\,\sin\alpha\,\vec{u_2} = \vec{0}$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow R_2 = m\,g\,\sin\alpha + m\,r\,\omega^2\,\sin\alpha\,\cos\alpha$
$\Rightarrow R_3 = \quad 2m\,\omega\,\dot{r}\,\sin\alpha$

3. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère R_1, déterminons l'équation différentielle du mouvement de M.

$$\frac{dE_c(M/R_1)}{dt} = P(\vec{P}/R_1) + P(\vec{P}/R_1) + P(\vec{F_e}/R_1)$$

* $P(\vec{P}/R_1) = \vec{P}.\vec{V}(M/R_1)$
$= \quad m\,g\,k_1(\dot{r}\,\sin\alpha\,\vec{i_1} + \dot{r}\,\cos\alpha\,\vec{k_1})$
$= \quad m\,g\,\dot{r}\,\cos\alpha$

* $P(\vec{P}/R_1) = 0$

* $P(\vec{F_e}/R_1) = \vec{F_e}.\vec{V}(M/R_1) = m\,r\,\omega^2\,\sin\alpha\,\vec{i_1}(\dot{r}\,\sin\alpha\,\vec{i_1} + \dot{r}\,\cos\alpha\,\vec{k_1})$

$P(\vec{F_e}/R_1) = m\,r\,\dot{r}\,\omega^2\,\sin^2\alpha$

$E_c(M/R_1) = \frac{1}{2}\,m\,\vec{V}(M/R_1)^2 \Rightarrow E_c(M/R_1) = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2$

$\Rightarrow \frac{d(E_c(M/R_1))}{dt} = m\,\dot{r}\,\ddot{r}$

$\Rightarrow m\,\dot{r}\,\ddot{r} = \quad m\,g\,\dot{r}\,\cos\alpha + m\,r\,\dot{r}\,\omega^2\,\sin^2\alpha$

$\Rightarrow \ddot{r} \quad \omega^2\,\sin^2\alpha\,r = \quad g\,\cos\alpha$ est l'équation différentielle du mouvement de M. Cette équation différentielle est une équation différentielle avec second membre. On obtient après résolution:

$$r(t) = A\,e^{\omega_0 t} + B\,e^{\omega_0 t} + \frac{g\,\cos\alpha}{\omega_0^2}$$

avec $\omega_0^2 = \omega^2\,\sin^2\alpha$

4. Calculons en fonction de r l'énergie potentielle de M par rapport au repère R_1

On a $x_1 = r\,\sin\alpha \Longrightarrow \vec{F_e} = m\,\omega^2\,x_1\,\vec{i_1} \Longrightarrow \overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F_e} \Rightarrow E_{p_e}$

$dE_{p_e} = \quad dW(\vec{F_e}/R_1) = \quad \vec{F_e}\,d\overrightarrow{OM}$
$= \quad m\,\omega^2\,x_1\,\vec{i_1}(dx_1\,\vec{i_1} + dy_1\,\vec{j_1} + dz\,\vec{k_1})$
$= \quad m\,\omega^2\,x_1\,dx_1$
$\Longrightarrow E_{p_e} = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,x_1^2 + Cte \Rightarrow E_{p_e} = \quad \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,r^2\,\sin^2\alpha + Cte$

$dE_{p_g} = \quad dW(\vec{P}/R_1) = \quad \vec{P}\,d\overrightarrow{OM}$
$= mg\,\vec{k_1}(dx_1\,\vec{i_1} + dy_1\,\vec{j_1} + dz\,\vec{k_1})$
$\Rightarrow dE_{p_g} = mg\,dz_1 \Rightarrow E_{p_g} = mgz_1 + cte$

$z_1 = r\cos\alpha \Rightarrow E_{p_g} = mgr\cos\alpha + cte$

$\Longrightarrow E_p(M/R_1) = mgr\cos\alpha \quad \frac{1}{2}m\omega^2r^2\sin^2\alpha$ -

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Examen Mécanique du point matériel session 1 2021-2022

QCM

1. b et d
2. b et d

Exercice 1 :

1. Schema du mouvement de (OP) et M avec les repères

$OP = \rho$; $\dot{\theta} = \omega = cste$ $\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{e}_r$

Nature de chaque repère

$R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: repère fixe ou absolu

Soit $R_e(P, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ le repère relatif

2. Calcul de $\vec{V}_{OP}(M)$ et $\vec{\gamma}_{OP}(M)$

$\vec{V}_{OP}(M) = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt|OP} = \frac{d(r(t)\vec{e}_r)}{dt|OP}$

$\vec{V}_{OP}(M) = \frac{d(r(t))}{dt|OP} + r(t)\frac{d(\vec{e}_r)}{dt|OP}$ avec $r(t)\frac{d(\vec{e}_r)}{dt|OP} = 0$ car $\vec{e}_r$ se trouve dans le repère relatif

$\boxed{\vec{V}_{OP}(M) = \dot{r}(t)\vec{e}_r}$

$\vec{\gamma}_{OP}(M) = \frac{d(\vec{V}_{OP}(M))}{dt|OP} = \frac{d(\dot{r}(t)\vec{e}_r}{dt|OP}$

$\boxed{\vec{\gamma}_{OP}(M) = \ddot{r}(t)\vec{e}_r}$

3. Calcul des vecteurs vitesse et accélérations de PM dans le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$

$\vec{V}_r(M) = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt|Rc} = \frac{d}{dt}(r(t)\vec{e}_r)/Rc$ $\boxed{\vec{V}_r(M) = \dot{r}(t)\vec{e}_r}$

$\vec{\gamma}_r(M) = \frac{d(\vec{V}_r)}{dt|Rc} = \frac{d}{dt}(\dot{r}(t)\vec{e}_r)/Rc$ $\boxed{\vec{\gamma}_r(M) = \frac{d(\vec{V}_r)}{dt|Rc} = \ddot{r}(t)\vec{e}_r}$

Comparaison des resultats

$\vec{V}_{OP}(M) = \vec{V}_r(M)$ et $\vec{\gamma}_{OP}(M) = \vec{\gamma}_r(M)$

4. Calcul direct des vecteurs vitesse et accélérations de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\vec{V}(M) = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt|R} = \frac{d(r(t)\vec{e}_r)}{dt|R} = \frac{d(r(t)\vec{e}_r)}{dt|R} + \frac{r(t)d(\vec{e}_r)}{dt|R}$ $\boxed{\vec{V}(M) = \dot{r}(t)\vec{e}_r + r(t)\dot{\theta}\vec{e}_\theta}$

$\vec{\gamma}(M) = \frac{d(\vec{V})}{dt|R} = \frac{d(\dot{r}(t)\vec{e}_r + r(t)\dot{\theta}\vec{e}_\theta}{dt|R}$ $\boxed{\vec{\gamma}(M) = (\ddot{r}(t) - r(t)\omega^2)\vec{e}_r + 2\dot{r}(t)\omega\vec{e}_\theta}$

5. Retrouvons les resultats de 4. en utilisant la composition du mouvement

$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M)$

$\vec{V}_r(M) = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt|Rc} = \dot{r}(t)\vec{e}_r$

$\vec{V}_e(M) = \frac{d(\overrightarrow{OO})}{dt|R} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ car $\frac{d(\overrightarrow{OO})}{dt|R} = 0$

$\vec{V}_e(M) = \omega\vec{k} \wedge (r(t)\vec{e}_r) = r(t)\omega\vec{k} \wedge \vec{e}_r$

$\boxed{\vec{V}_e(M) = r(t)\omega\vec{e}_\theta}$

$\boxed{\vec{V}_a(M) = \dot{r}(t)\vec{e}_r + r(t)\omega\vec{e}_\theta}$

$\vec{V}_a(M) = \vec{V}(M)$

$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_c(M) + \vec{\gamma}_e(M)$

$\vec{\gamma}_r(M) = \frac{d(\vec{V}_r)}{dt|Rc} = \ddot{r}(t)\vec{e}_r$

$\vec{\gamma}_c(M) = \frac{d(\overrightarrow{OO})}{dt|Rc} + \frac{d(\vec{\omega})}{dt|Rc} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$

$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = \omega\vec{k} \wedge r(t)\omega\vec{e}_\theta = r(t)\omega^2\vec{k} \wedge \vec{e}_\theta$

$\boxed{\vec{\gamma}_e(M) = -r(t)\omega^2\vec{e}_r}$

$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r = 2\omega\vec{k} \wedge \vec{V}_r$

$\boxed{\vec{\gamma}_c = 2\dot{r}(t)\omega\vec{e}_\theta}$

$\boxed{\vec{\gamma}_a(M) = (\ddot{r}(t) - r(t)\omega^2)\vec{e}_r + 2\dot{r}(t)\omega\vec{e}_\theta}$

$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}(M)$

6. Pour que la vitesse soit minimale dans la conduite (OP), il faut que l'accélération soit nulle

Exercice 2 : déjà corrigé dans le VALIDEUR LMD

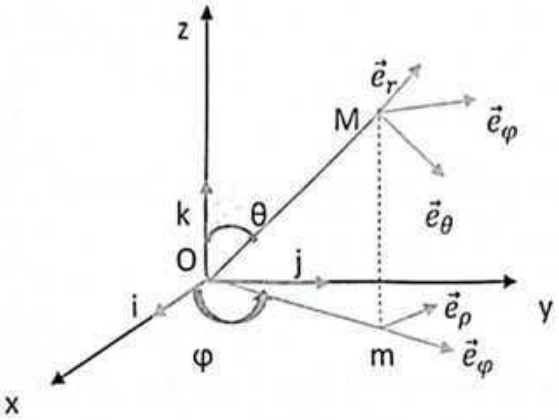
Scanned with CamScanner

Correction de l'examen de mécanique du point

Session 1 Année académique **2022-2023**

Exercice 1

1) Représentation



2) Coordonnées cartésiennes (x,y,z) en fonction des coordonnées sphériques et déduisons-en les coordonnées sphériques (r,θ,φ) en fonction des coordonnées cartésiennes (x,y,z)

Le vecteur position est donné par $\overrightarrow{OM}=r\vec{e}_r$

En projetant $\vec{e}_r$ dans la base cartésienne obtient :

$$\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

3) Calculons le déplacement élémentaire $d\vec{r}$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

On $\overrightarrow{OM}=r\vec{e}_r \Rightarrow d\overrightarrow{OM}=dr\vec{e}_r+rd\vec{e}_r$ or $\vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{k} + \sin(\theta)\vec{e}_\rho$

$\vec{e}_\rho = \cos(\varphi)\vec{\imath} + \sin(\varphi)\vec{k}$ et $\vec{e}_\theta = \cos(\theta)\vec{e}_\rho - \sin(\theta)\,\vec{k}$

Cherchons $d\vec{e}_r$

$d\vec{e}_r = -d\theta\sin(\theta)\,\vec{k} + d\theta\cos(\theta)\vec{e}_\rho + d\varphi\sin(\theta)\,\vec{e}_\varphi$

$d\vec{e}_r = d\theta\left(\cos(\theta)\vec{e}_\rho - \sin(\theta)\,\vec{k}\right) + d\varphi\sin(\theta)\vec{e}_\varphi$

$rd\vec{e}_r = rd\theta\vec{e}_\theta + rd\varphi\sin(\theta)\vec{e}_\varphi$

d'où $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + rd\varphi\sin(\theta)\vec{e}_\varphi$

✓ dS en coordonnées sphérique

$$dS = rd\varphi\sin(\theta).rd\theta$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

✓ dS sur la surface de la terre
à la surface de la terre r=R=cte
$dS = R^2 d\varphi \sin(\theta).\mathrm{d}\theta$ (1)

✓ calcul de la surface de la terre notée S_T
$0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$
En intégrant (1) on obtient :
$S_T = 4\pi R^2$

4) calcul du vecteur vitesse $\vec{V}$(M)

✓ dans la base sphérique

on a $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + rd\varphi\sin(\theta)\vec{e}_\varphi$

$\Rightarrow \vec{V}(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\frac{d\varphi}{dt}\sin(\theta)\vec{e}_\varphi$

$\Rightarrow \vec{V}(\mathrm{M}) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin(\theta)\vec{e}_\varphi$

✓ sur la surface de terre
on a r=R=cte $\Rightarrow \dot{r} = 0$
et
$\varphi = cte \Rightarrow \dot{\varphi}=0$

$\vec{V}(\mathrm{M}) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

Exercice 2

1) Etablissons l'expression de $\vec{V}(M/R_1)$ de l'avion et déduisons que $\dot{\theta}$ est constant.

$\vec{R}_0$ (O,$x_0y_0y_0$) : repère absolu

$\vec{R}_1$ (O,$x_1y_1y_1$) : repère relatif

Vecteur position se termine en tenant compte du mouvement horizontale de l'avion (c'est-à-dire avant que l'avion s'envole) ainsi que son mouvement verticale (lorsque l'avion en aire).

$\overrightarrow{OM} = (R_T + h)\vec{e}_r = R_M\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques. Avec $R_M = cte$

$\vec{V}(M/R_1) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R_M\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$: la vitesse relative

$v^2 = \left\|\vec{V}(M/R_1)\right\|^2 = {R_M}^2\,\dot{\theta}^2$, comme v est constante alors $\dot{\theta}$ l'est aussi

2) L'expression de $\vec{\gamma}(M/R_1)$

$\vec{\gamma}(M/R_1) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -R_M\,\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

3) Le vecteur de rotation $\vec{\Omega}(R_1/R_0)$

$\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \omega\vec{k}$

4) L'expression de la vitesse absolue $\vec{V}(M/R_0)$ et de l'accélération $\vec{\gamma}(M/R_0)$ et déduisons-en l'effet de l'accélération $\vec{\gamma}_C$ et $\vec{\gamma}_e$ sur le mouvement de l'avion

❖ Calcul de la vitesse absolue

$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}(M/R_1) + \vec{V}_e$

Déterminons la vitesse d'entrainement $\vec{V}_e$

$\vec{V}_e = \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{OM}$ car $\frac{d\overrightarrow{OO}}{dt} = \vec{0}$

On sait que $\vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{k} + \sin(\theta)\vec{e}_\rho$

$\vec{V}_e = \omega\vec{k} \wedge R_M(\cos(\theta)\,\vec{k} + \sin(\theta)\vec{e}_\rho) = \omega R_M \sin(\theta)\vec{e}_\varphi$

$\vec{V}(M/R_0) = R_M(\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \omega\sin(\theta)\vec{e}_\varphi)$

❖ Calcul de l'accélération absolue

- L'accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_C(M)$

$\vec{\gamma}_C(M) = 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1) = 2\omega\vec{k} \wedge R_M\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

$\vec{\gamma}_C(M) = 2\omega R_M\,\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e}_\varphi$

Avec : $\vec{k} = \cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta$

- L'accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e$(M)

$\vec{\gamma}_e(M) = \frac{d\vec{\Omega}(R_1/R_0)}{dt}\Big|_{R_0} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{OM}$

$\vec{\gamma}_e(M) = R_M\omega^2(\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta) \wedge (\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta) \wedge \vec{e}_r$

$= R_M\omega^2 \sin(\theta)\,(\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta) \wedge \vec{e}_\varphi$

Apres les calculs on obtient :

$\vec{\gamma}_e(M) = R_M\omega^2 \sin(\theta)\,\vec{e}_\rho$ avec $\vec{e}_\rho = \cos(\theta)\vec{e}_\theta + \sin(\theta)\vec{e}_r$

Finalement $\vec{\gamma}(M/R_0) = \vec{\gamma}(M/R_1) + \vec{\gamma}_C(M) + \vec{\gamma}_e(M)$

$\vec{\gamma}(M/R_0) = -R_M\,\dot{\theta}^2\vec{e}_r + 2\omega R_M\,\dot{\theta}\,\cos(\theta)\,\vec{e}_\varphi + R_M\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)\vec{e}_\theta + R_M\omega^2\sin^2(\theta)\vec{e}_r$

$\vec{\gamma}(M/R_0) = 2\omega R_M\,\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e}_\varphi + R_M\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)\vec{e}_\theta + R_M(\omega^2\sin^2(\theta) - \dot{\theta}^2)\vec{e}_r$

❖ **L'effet de l'accélération $\vec{\gamma}_C$ et $\vec{\gamma}_e$ sur le mouvement de l'avion**

✓ L'accélération de Coriolis engendre une force d'inertie qui a tendance à dévier l'avion vers l'Est.

Scanned with CamScanner

- ✓ L'accélération d'entrainement introduit une force d'inertie qui a tendance à éjecter l'avion vers l'espace dans le plan du parallèle.

5) Selon le parallèle de latitude λ_0

Dans ce cas $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda_0 = \theta_0$, ce qui donne :

$\vec{V}(M/R_1) = R_M \dot{\varphi} \sin(\theta_0)\vec{e}_\varphi$ et $\dot{\varphi} = cte$

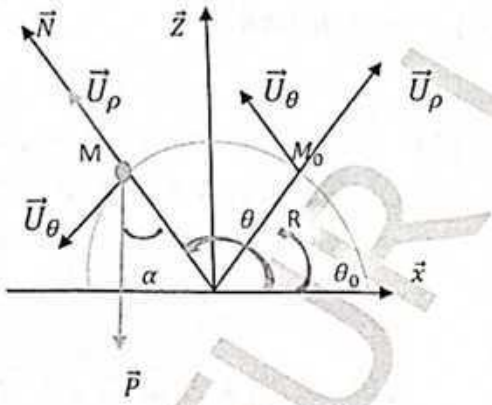
$\vec{\gamma}(M/R_1) = -R_M \dot{\varphi}^2 \sin(\theta_0)(\cos(\theta_0)\vec{e}_\theta + \sin(\theta_0)\vec{e}_r)$

- La vitesse et l'accélération d'entrainement ne changent pas
- L'accélération de Coriolis

$\vec{\gamma}_C(M) = 2\omega R_M \dot{\varphi} \sin(\theta_0)(\cos(\theta_0)\vec{e}_\theta + \sin(\theta_0)\vec{e}_r)$

En faisans la somme des accélérations et des vitesses, on obtient la vitesse et l'accélération absolue.

Exercice 3



1) Déterminons la vitesse et l'accélération de M
   - Référentiel terrestre supposé galiléen
   - Système : Morceau de glace(M)
   - Bilan des forces
     - ✓ Le poids $\vec{P}$ de la glace M
     - ✓ La réaction $\vec{N}$ de l'igloo sur M

Vecteur position $\overrightarrow{OM} = R\vec{U}_\rho$

Vecteur vitesse $\vec{v}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{U}_\theta$

Scanned with CamScanner

Vecteur accélération $\vec{\gamma}(M)=\frac{d\vec{v}(M)}{dt}=R\ddot{\theta}\vec{U}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{U}_\rho$

2) Calcul de $\vec{N}$ en fonction de v

D'après le PFD on a : $\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{\gamma}(M) \Rightarrow \vec{P}+\vec{N}=m\vec{\gamma}(M)$

Projetons $\vec{P}$ et $\vec{N}$ dans la base polaire $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta)$

$\vec{P}\begin{cases}-mg\cos(\alpha)\\-mg\sin(\alpha)\end{cases}$; $\vec{N}\begin{cases}N\\0\end{cases}$

D'après le schéma ci-dessus on a : $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases}N - mg\sin(\theta) = -mR\dot{\theta}^2 \ (1)\\ mg\cos(\theta) = mR\ddot{\theta} \ (2)\end{cases}$$

(1) $\Rightarrow N = -mR\dot{\theta}^2 + mg\sin(\theta)$

$N = -m\dot{\theta}v + mg\sin(\theta)$ or $v = R\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{R}$

$N = -\frac{mv^2}{R} + mg\sin(\theta)$ (3)

(2) $\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{R}\cos(\theta)$ (4)

3) Donnons l'expression de v et N en fonction de l'angle θ

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique

➢ Première méthode

$\Delta Ec_{O\to M} = \sum_{O\to M} W(\vec{F}_{ext})$

$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = W(\vec{P}) + W(\vec{N})$, or $W(\vec{N}) = 0$ car $\vec{N} \perp \overrightarrow{OM}$ et pas de vitesse initiale d'où $v_0 = 0m.s^{-1}$

$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$

$\frac{1}{2}v^2 = gh$ (5), on sait que $v = R\dot{\theta} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = R\ddot{\theta}$

Cherchons (5) en utilisant (4)

Dans (4) on aboutit à :

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = g\cos(\theta)$$

On sait que $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$ or $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{v}{R}$

$$\frac{v}{R}\frac{dv}{d\theta} = g\cos(\theta)$$

$vdv = Rg\cos(\theta)d\theta$ (6)

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Après avoir intégré (6) on obtient :

$\frac{1}{2}v^2(t) + k_1 = -Rg\sin(\theta) + k_2$, posons que $c = k_1 + k_2 = cte$

$$\frac{1}{2}v^2(t) + Rg\sin(\theta) = c$$

Cherchons c

à $t = 0$, on a : $\theta = \theta_0$ et $v(0) = 0 \Rightarrow c = Rg\sin(\theta_0)$

$$\frac{1}{2}v^2(t) = Rg\sin(\theta_0) - Rg\sin(\theta)$$

$$v^2(t) = 2Rg(\sin(\theta_0) - \sin(\theta))$$

$v = [2Rg(\sin(\theta_0) - \sin(\theta))]^{1/2}$ (7)

En remplaçant (7) dans (3)

On obtient : $N = mg[3\sin(\theta) - 2\sin(\theta_0)]$

➢ Deuxième méthode

$\Delta Ec_{O\to M} = \sum_{O\to M} W(\vec{F}_{ext})$

$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = W(\vec{P}) + W(\vec{N})$, or $W(\vec{N}) = 0$ car $\vec{N} \perp \overrightarrow{OM}$ et pas de vitesse initiale d'où $v_0 = 0m.s^{-1}$

$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$

$\frac{1}{2}v^2 = gh$ (5),

Cherchons h

$h = \Delta z = Z_0 - Z$ car le petit morceau de glace fait un mouvement ascendant, à $t = 0$, on a $Z_0 = R\sin(\theta_0)$ et à t≠ 0 $Z = R\sin(\theta)$

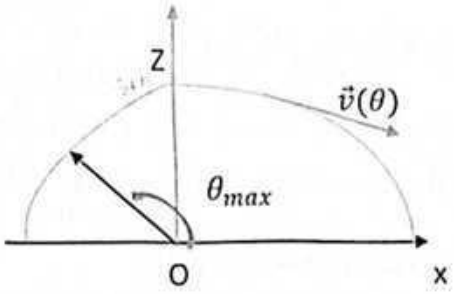
D'où $v = [2Rg(\sin(\theta_0) - \sin(\theta))]^{1/2}$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

4)

- Représentation



- La valeur de θ

  La condition de décollage, $\vec{N} = \vec{0}$ et $\theta_0 = 0$

  $N = mg[3\sin(\theta) - 2\sin(\theta_0)] = 0$

  $\theta = \arcsin(\frac{2}{3}\sin(\theta_0) = \theta_{max}$

- La vitesse de décollage

  On a $\sin(\theta) = \frac{2}{3}\sin(\theta_0)$

  $v = \left[\frac{2}{3}Rg\sin(\theta_0)\right]^{1/2}$

- La nature de la trajectoire

  La trajectoire est une parabole car la bille n'appuie plus sur son support.

5) Etudions la stabilité

Pour $\theta_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow N = mg$:condition d'équilibre

$v = \left[\frac{2}{3}Rg\right]^{1/2}$ une vitesse constante

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Correction de l'examen de mécanique du point matériel

Exercice 1

I.

1. Calcul de ω ; $\vec{\Omega}$

$$V_o = R\,\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{V_o}{R} = \frac{2V_o}{D} = \frac{2\times 0{,}5}{0{,}4775} = 2{,}095\ rad.s^{-1}$$

Le vecteur vitesse de rotation instantanée : $\vec{\Omega} = \omega\overrightarrow{u_z} = -2{,}095\,\overrightarrow{u_z}$; $\omega < 0$.

2. Le temps t_1 pour effectuer un tour.

$$2\pi = |\omega| t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\times 3{,}14}{2{,}094} = 3\ s$$

3. Calcul de la vitesse v pour parcourir $CA = \frac{D}{2}$.

$$\frac{D}{2} = vt_1 \Leftrightarrow v = \frac{D}{2t_1} = 7{,}96\ m.s^{-1}$$

II.

1. R' est en translation rectiligne uniforme par rapport à R avec la vitesse V_o.
2. R'' est en rotation uniforme par rapport à R' avec la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \omega\overrightarrow{u_z} = -2{,}095\,\overrightarrow{u_z}$
3. R'' est en translation (de vitesse V_o) et en rotation d'axe $\overrightarrow{u_z}$ par rapport à R. $(\vec{\Omega} = \omega\overrightarrow{u_z})$

III. On se place dans R''

1. Equation horaire du mouvement de M :

$$CM = \rho(t) = vt + \rho_o \Leftrightarrow \rho(t) = vt$$

2. Vecteur vitesse de M dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$

$$\vec{v}\left({}^{M}/_{R''}\right) = v\vec{u}_\rho$$

3. L'accélération de M dans R''

$$\vec{a}\left({}^{M}/_{R''}\right) = \frac{d\vec{v}\left({}^{M}/_{R''}\right)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\vec{u}_\rho\right) = \vec{0}$$

$\Rightarrow M$ à un mouvement rectiligne uniforme sur le rayon CA

IV. On se place dans R'

1. Le vecteur position : $\overrightarrow{CM} = \rho\vec{u}_\rho$

2. Le vecteur vitesse de M : $\vec{v}\left({}^{M}/_{R'}\right)$

$$\vec{v}\left({}^{M}/_{R'}\right) = \frac{d}{dt}\left(v\vec{u}_\rho\right) = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$
$$\vec{v}\left({}^{M}/_{R'}\right) = v.\vec{u}_\rho + \rho\omega\vec{u}_\theta$$
$$= v.\vec{u}_\rho + vt.\omega\vec{u}_\theta$$
$$\vec{v}\left({}^{M}/_{R'}\right) = v(\vec{u}_\rho + \omega t\vec{u}_\theta)$$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

D'où $\vec{v}(M/R') = 0{,}08(\vec{u}_\rho - 2{,}094t\vec{u}_\theta)$

3. Le vecteur accélération de M : $\vec{a}(M/R')$

$$\vec{a}(M/R') = \frac{d\vec{v}(M/R')}{dt} = v(\dot{\Theta}\vec{u}_\theta + \omega\vec{u}_\theta - \omega t\dot{\Theta}\vec{u}_\rho)$$

$$= v(2\,\omega\vec{u}_\theta - \omega^2 t\vec{u}_\rho)$$

$$= v\,\omega(2\vec{u}_\theta - \omega t\vec{u}_\rho)$$

D'où $\vec{a}(M/R') = -0{,}35t\vec{u}_\rho - 0{,}33\vec{u}_\theta$

V. Loi de composition des vitesses et accélérations

1. Calcul de la vitesse $\overrightarrow{v'_e}$:

$$\overrightarrow{v'_e} = \vec{v}(C/R') + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{CM} = \vec{0} + \omega\vec{u}_z\wedge\rho\vec{u}_\rho = \rho\omega\vec{u}_\theta$$

$$\overrightarrow{v'_e} = v\omega t\vec{u}_\theta = -0{,}167t\,\vec{u}_\theta$$

Le point M aurait un mouvement circulaire uniforme s'il ne bougeait pas dans R'. Donc $\overrightarrow{v'_e} = v\omega t\vec{u}_\theta$. D'après la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}(M/R') = \vec{v}(M/R'') + \overrightarrow{v'_e}$$

$$= v\,\vec{u}_\rho + v\omega t\vec{u}_\theta \iff \text{même résultat que 3.b.}$$

2.

a. $\overrightarrow{\delta_e} = \vec{\delta}(C/R') + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{CM} + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{CM})$

$$= \vec{0} + \omega\vec{u}_z\wedge(\omega\vec{u}_z\wedge\rho\vec{u}_\rho)$$

$$= -\omega^2\rho\vec{u}_\rho = -\omega^2 vt\vec{u}_\rho$$

⇒ accélération centripète.

b. L'accélération de coriolis:

$$\overrightarrow{\delta_c} = 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v} = 2\,\omega\vec{u}_z\wedge v\vec{u}_\rho$$

$$\overrightarrow{\delta_c} = 2v\omega\vec{u}_\theta$$

c. L'accélération absolue :

$$\vec{\delta}(M/R) = \vec{a}(M/R'') + \overrightarrow{\delta_e} + \overrightarrow{\delta_c}$$

$$= \vec{0} - \rho\,\omega^2\vec{u}_\rho + 2v\omega\vec{u}_\theta$$

$$\vec{\delta}(M/R) = v\omega(-\omega t\vec{u}_\rho + 2\vec{u}_\theta)$$

VI. On se place dans R'

1. R' est en translation par rapport à R. On a donc

$$\vec{v}(M/R) = \vec{v}(M/R') + \vec{V}_o$$

$$\vec{v}(M/R) = v(\vec{u}_\rho + \omega t\vec{u}_\theta) + V_o\overrightarrow{u_z}$$

2. $\vec{\delta}(M/R) = \vec{\delta}(M/R') + \vec{\delta}(C/R) = \vec{\delta}(M/R')$

VALIDE LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$= -\rho\,\omega^2\vec{u}_z + 2v\omega\vec{u}_\theta$$

$$\vec{\delta}(M/R) = v\omega(-\omega t\vec{u}_\rho + 2\vec{u}_\theta)$$

Exercice 2

A.

1. Énoncé du principe fondamental de la dynamique dans R. (Galiléen)

$$\sum\overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{\delta_a},\ \overrightarrow{\delta_a} = \overrightarrow{\delta_e} + \overrightarrow{\delta_r} + \overrightarrow{\delta_c}$$

$\sum\overrightarrow{F_{ext}}$: Somme des forces extérieures appliquée au système (point matériel)

$\overrightarrow{\delta_a}$: accélération absolue du point M

$\overrightarrow{\delta_r}$: accélération relative du point M

$\overrightarrow{\delta_e}$: accélération d'entrainement du point M

$\overrightarrow{\delta_c}$: accélération de coriolis.

2. Dans R_1, apparaissent les forces d'inertie d'entrainement et de coriolis.

$$\sum\overrightarrow{F_{ext}} + \sum\vec{F}_i = m\overrightarrow{\delta_r}\ avec\ \sum\vec{F}_i = \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}}$$

$\overrightarrow{F_{ie}} = -m\overrightarrow{\delta_e}$: force d'inertie d'entrainement

$\overrightarrow{F_{ic}} = -m\overrightarrow{\delta_c}$: force d'inertie de coriolis

Théorème du moment cinétique

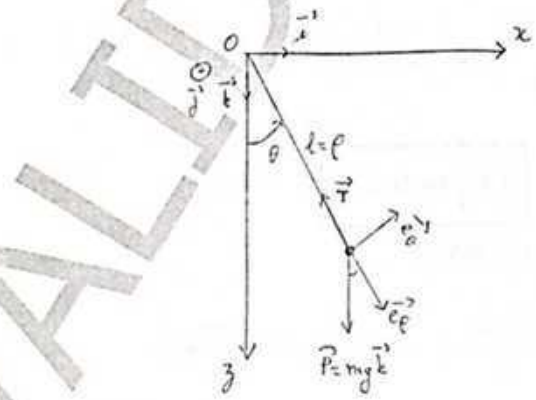
- Moment cinétique : $\overrightarrow{\sigma_o}(M) = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{V}$ en O de M : moment de la quantité de mouvement.
- Théorème dans R :

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M)}{dt} = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}\ avec\ \vec{F} = \sum\vec{F}_{ext}$$

B. Application au pendule simple :

1. Dans le cas d'un référentiel galiléen Φ
   - Système : Le point M de masse m
   - Bilan des forces : le poids de M $\vec{P} = mg\vec{k}$

     La tension du fil $\vec{T} = -T\overrightarrow{e_\rho}$



VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Le principe fondamental de la dynamique (PDF)

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{\delta_a}$$

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{T}$$

$$m\overrightarrow{\delta_a} = m\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}$$

- Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = l\overrightarrow{e_\rho}$
- Vecteur vitesse : $\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}|_R = \frac{d(l\overrightarrow{e_\rho})}{dt} = l\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$
- Vecteur accélération absolue : $\vec{\delta}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \frac{d(l\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta})}{dt} = l\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - l\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_\rho}$

PFD :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{\delta}(M/R) \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{\delta}(M/R)$$

$$mg\cos\theta\,\overrightarrow{e_\rho} - mg\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta} - T\overrightarrow{e_\rho} = ml(\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - \dot{\theta}^2\overrightarrow{e_\rho})$$

Projection : $\begin{cases} \overrightarrow{e_\rho}: mg\cos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2 \\ \overrightarrow{e_\theta}: -mg\sin\theta = ml\ddot{\theta} \end{cases}$ d'où l'équation du mouvement de M :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

2. PFD dans le référentiel R_1 non Galiléen :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} + \sum \vec{F_i} = m\overrightarrow{\delta_r}$$

- Calculons $\overrightarrow{\delta_e}, \overrightarrow{\delta_r}, \overrightarrow{F_{ie}}$ et $\overrightarrow{F_{ic}}$
- $\overrightarrow{\delta_r} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}|_{R_1} = \frac{d(l\overrightarrow{e_\rho})}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{F_{ic}} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{\delta_e} = \vec{\delta}(O/R) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})$ avec $\vec{\Omega}(\Phi_1/R) = \dot{\theta}\vec{j}$

$$\overrightarrow{\delta_e} = \ddot{\theta}\vec{j} \wedge l\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\theta}\vec{j} \wedge (\dot{\theta}\vec{j} \wedge l\overrightarrow{e_\rho}) = l\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - l\dot{\theta}\overrightarrow{e_\rho}$$

$$\overrightarrow{\delta_e} = l(\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - \dot{\theta}\overrightarrow{e_\rho}) \Rightarrow \overrightarrow{F_{ie}} = -ml(\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - \dot{\theta}\overrightarrow{e_\rho})$$

On a donc :

$$mg\cos\theta\,\overrightarrow{e_\rho} - mg\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta} - T\overrightarrow{e_\rho} - ml(\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - \dot{\theta}^2\overrightarrow{e_\rho}) = \vec{0}$$

Projection : $\begin{cases} \overrightarrow{e_\rho}: mg\cos\theta - T + ml\dot{\theta}^2 = \vec{0} \\ \overrightarrow{e_\theta}: -mg\sin\theta - ml\ddot{\theta} = \vec{0} \end{cases}$ d'où l'équation du mouvement

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

3. Théorème du moment cinétique dans R

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \text{ avec } \vec{F} = \sum \vec{F}_{ext}$$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

$\overrightarrow{\sigma_o}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(^M/_R)$: moment en O de M

$\overrightarrow{\sigma_o}(M) = l\overrightarrow{e_\rho} \wedge ml\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = ml^2\dot{\theta}\vec{j}$

- $\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M)}{dt} = \frac{d(ml^2\dot{\theta}\vec{j})}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{j}$
- $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = l\overrightarrow{e_\rho} \wedge (mg\cos\theta\,\overrightarrow{e_\rho} - mg\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}) = -mlg\sin\theta\,\vec{j}$
- $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = l\overrightarrow{e_\rho} \wedge (-T\overrightarrow{e_\rho}) = \vec{0}$

Soit $ml^2\ddot{\theta}\vec{j} = -mlg\sin\theta\,\vec{j}$ d'où l'équation du mouvement :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

4. Théorème du moment cinétique dans R_1

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M)}{dt}|_{R_1} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F_i}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M)}{dt}|_{R_1} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F_i} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_{ic}} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_{ie}}$$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F_i} = \vec{0} + l\overrightarrow{e_\rho} \wedge \left(-ml(\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - \dot{\theta}\overrightarrow{e_\rho})\right) = -ml^2\ddot{\theta}\vec{j}$$

On a donc $-ml^2\ddot{\theta}\vec{j} - mlg\sin\theta\,\vec{j} = \vec{0}$ d'où l'équation du mouvement :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

5. L'équation du mouvement dans le référentiel Galiléen comme dans le référentiel non Galiléen peut s'obtenir soit par le PFD, soit par les théorèmes généraux.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

VERSION LMD-2025

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

UFRMI

OUTILS BUREATIQUES
PREMIERE SESSION ANNEE 2020-2021
L1

I- ARCHITECTURE

Exercice 1 (0.5 x 8 + 2)

Quelle est la signification des acronymes suivants :

1) CPU : .....

2) UAL : .....

3) RAM : .....

4) ROM : .....

5) USB : .....

6) INTERNET.....

7) INTRANET.....

8) SITE WEB .....

9) Différence entre RAM et ROM (2)

Exercice 2 : Choisissez-les ou la bonne réponse (0,5 x 5)

Le microprocesseur comprend l'UAL ou l'UCC Le microprocesseur comprend l'unité arithmétique et logique Le microprocesseur comprend unité de commande et de contrôle Le microprocesseur comprend l'UAL et l'UCC Aucune bonne réponse
Les périphériques d'entrée effectuent les instructions de lecture Les périphériques d'entrée effectuent les instructions d'écriture Les périphériques d'entrée effectuent les instructions de lecture et d'écriture
Le clavier, scanner, microphone : sont des périphériques d'entrée Le clavier, scanner, microphone : sont des périphériques de sortie Le clavier, scanner, microphone : sont des périphériques d'entrée / sortie
Le clavier est un périphérique qui effectue les instructions de lecture Le clavier est un périphérique qui effectue les instructions d'écriture Le clavier est un périphérique d'entrée Aucune bonne réponse

Scanned with CamScanner

L'ordinateur est une machine intelligente
L'ordinateur est une machine programmable et intelligente
L'ordinateur est une machine programmable et rapide
Aucune bonne réponse

II- LOGICIELS D'EXPLOITATION

***Exercice 1* (0,5 x 4)**

Relier entre les mots de la première colonne et leurs correspondants dans la deuxième colonne. Compléter avec ce qui convient

1- Linux	a- est un SE mono-tâche
2- DOS	b- est la partie software nécessaire pour faire fonctionner un ordinateur
3- Windows 7	c- est un SE qui gère les CPU
4- Le SE	d- est un SE open source

***Exercice 2* : (0,5 x 5)**

Répondez brièvement à chaque question :

1) Windows est-il un système d'exploitation mono tâche ou multi tâches ? Expliquer ?
2) Comment faire pour démarrer rapidement l'application « calculatrice », si son raccourci a été supprimé du menu « accessoires » dans « Tous mes programmes » ?
3) Comment faire pour déplacer complètement un fichier nommé « mon fichier » du répertoire X vers le répertoire Y ? Citer deux façons pour le faire.
4) Comment le système d'exploitation reconnaît qu'un fichier Word doit être ouvert par « Ms Word » ?
5) Comment le système d'exploitation reconnaît qu'un fichier Excel doit être ouvert par « Ms Excel » ?

***Exercice 3* : (0,5 x3)**

Cocher la ou les bonne(s) réponse(s) si elle(s) existe(nt)

Dans Windows, le bureau est une image
Dans Windows, le bureau est un répertoire
Dans Windows, le bureau est un fichier
Dans Windows, le bureau est un dossier
Aucune bonne réponse

Windows est un logiciel de bureautique
Windows est un système d'exploitation
Windows est un ensemble de fichiers et de programmes

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Un système d'exploitation est un ensemble de programmes pour écrire nos documents. Un système d'exploitation est un ensemble de programmes destinés à gérer une machine. Un système d'exploitation gère le processeur, la mémoire et les fichiers

III- Logiciels de bureautique

word

Exercice 1 : (0,5 x3)

Relier entre les mots de la première colonne et leurs correspondants dans la deuxième colonne. Compléter avec ce qui convient :

1- Un Formateur de texte ..... a- produit un document brut
2- Un Editeur de texte ..... b- produit un document non éditable
3- Un traitement de texte ..... c- ne nécessite pas un éditeur de texte externe

Exercice 2 (1)

Pour créer un tableau Word il faut :
A. Cliquer sur le menu Insertion
B. Cliquer sur le menu Tableau.
C. Cliquer sur l'icône tableau de la barre d'outils standard
D. Cliquer sur le menu Format

Exercice 3 (1)

Quel chemin doit-on suivre pour insérer une image dans un texte ?
A. Édition, insertion d'image
B. Format, Image
C. Insertion, Image
D. Aucune de ces réponses

EXCEL

EXERCICE (0,5 x 6)

Excel est un document de Microsoft office Excel est un Tableur. Excel est un Chiffrier Excel est un logiciel pour créer des tableaux, traceur des graphes, faire des calculs, ... Aucune bonne réponse
Un fichier Excel est appelé classeur. Un classeur Excel peut contenir plusieurs feuilles Une feuille Excel comporte plusieurs pages Une page Excel est un ensemble de cellules numérotées Aucune bonne réponse

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Ms Excel est un programme de calcul Ms Excel n'est pas un programme de calcul Ms Excel peut être utilisé comme calculatrice scientifique Ms Excel ne peut pas être utilisé comme calculatrice scientifique
Dans Word Pour Copier on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+V Dans Word Pour Couper on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+X Dans Word Pour Copier on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+C. Dans Word Pour Couper on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+V
L'extension d'un fichier Excel est xsl ou xslx L'extension d'un fichier Excel est doc ou docx L'extension d'un fichier Excel est xls ou xlsx.
On peut copier un tableau d'Excel et le coller dans Word. On peut copier un tableau de Word et le coller dans Excel. On ne peut pas copier un tableau de l'un et le coller dans l'autre.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY
FELIX HOUPHOUET BOIGNY
UFRMI

Année 2021 - 2022

PREMIERE SESSION

Epreuve de Bureautique
(L1)

Questions de cours :

Répondre en choisissant la ou les bonnes réponses

Quelle est la composition de l'architecture d'un ordinateur selon VON NEUMAN

a) UCC, UAL, E, ROM, RAM, BUS
b) UC, ECRAN, CABLE, SOURIS
c) UCC, USB, BUS, RAM XP

Dans la catégorie de systèmes d'exploitation, on trouve :

a) Unix, Windows 8, Open Office
b) Unix Linux, Windows, Mac Os
c) Microsoft Windows, Microsoft Office, Libre Office
d) Android, Unix Windows

Structure et fonctionnement :

Répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse:

1.Un ordinateur ne peut pas fonctionner sans imprimante.
2.La mémoire centrale d'un ordinateur conserve les données momentanément
3. Un ordinateur peut fonctionner sans processeur.

4. Les mots, ordinateur et computer désignent la même chose.

Environnement Windows

Répondre en choisissant la ou les bonnes réponses

1- L'informatique est

A. un ordinateur qui traite l'information
B. la science du traitement des connaissances
C. la science du traitement rationnel de l'information

2- La mémoire RAM est

A. non volatile
B. souple
C. volatile

3- Quelle est l'unité utilisée pour la mesure de la taille d'un écran

A- Le pied
B - Le nez
C – Le pouce
D – Le coude

4- À l'origine, Windows nécessitait la présence de MS-DOS.

A. Vrai
B. Faux

Traitement de Texte

1) Quelles sont les fonctions d'un logiciel de traitement de texte ?

A. Mise en page d'un texte
B. Compilation d'un texte
C. Présentation d'un texte sous forme de diaporama
D. Edition d'un texte

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

2) Pour enregistrer un document pour la première fois, nous utilisons :

A. Fichier/Nouveau
B. Fichier/Enregistrer
C. Fichier/Enregistrer-sous
D. Fichier/Enregistrer en tant que page Web

3) Insérer des lignes supplémentaires dans un tableau Word :

A. Cela n'est pas possible et il faut calculer dès le départ le nombre de lignes qui seront nécessaires.
B. Peut se faire à n'importe quel moment en allant dans la dernière cellule du tableau et en appuyant s touche Espace.
C. Peut se faire à n'importe quel moment en utilisant le menu Tableau - Insérer Lignes.
D. Peut se faire à n'importe quel moment en allant dans la dernière cellule du tableau et en appuyant s touche Entrer.

4) Pour créer un tableau Word il faut :

A. Cliquer sur le menu Insertion
B. Cliquer sur le menu Tableau
C. Cliquer sur l'icône tableau de la barre d'outils standard
D. Cliquer sur le menu Format

5) Quel chemin doit-on suivre pour insérer une image dans un texte?

A. Édition, insertion d'image
B. Format, Image
C. Insertion, Image
D. Aucune de ces réponses

Excel

1) La cellule F2 désigne :

A. Ligne F colonne 2
B. Colonne F ligne 2
C. La touche du clavier F2
D. Aucune des trois réponses:

2) Qu'est- ce qu'une cellule :

A. La cellule est une colonne.
B. La cellule est une ligne.
C. Aucune des deux réponses.

3) Quand vous tapez une équation dans une cellule Excel, la première chose à faire est d'introduire :

A. Une parenthèse.
B. Le signe égal.
C. Un double apostrophe.

4) Répondre par Vrai OU Faux

- L'extension d'un fichier Excel est Xls ou Xslx ;
- L'extension d'un fichier Excel est Doc ou Docx ;
- L'extension d'un fichier Excel est Xls ou Xlsx

5) Répondre par Vrai OU Faux

- On peut copier un tableau Excel et le coller dans Word ;
- On peut copier un tableau de Word et le coller dans Excel ;
- On ne peut pas copier un tableau de l'un et le coller dans l'autre;

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE FELIX
HOUPHOUET BOIGNY

UFRMI

OUTIL BUREATIQUE
PREMIERE SESSION ANNEE 2022-2023
L1

(1H30)

I – ARCHITECTURE

Exercice 1

Quelle est la signification des acronymes suivants :

1) CPU:.....
2) UAL: .....
3) RAM: .....
4) ROM: .....
5) USB: .....
6) INTERNET .....
7) INTRANET.....
8) SITE WEB .....
9) Différence entre RAM et ROM .....

Exercice 2 : Choisissez-les ou la bonne réponse

- Le microprocesseur comprend l'UAL ou l'UCC - *Le microprocesseur comprend l'unité arithmétique et logique* - *Le microprocesseur comprend unité de commande et de contrôle* - *Le microprocesseur comprend l'UAL et l'UCC* - Aucune bonne réponse
- *Les périphériques d'entrée effectuent les instructions de lecture* - Les périphériques d'entrée effectuent les instructions d'écriture - Les périphériques d'entrée effectuent les instructions de lecture et écriture
- *Le clavier, scanner, microphone : sont des périphériques d'entrée* - Le clavier, scanner, microphone : sont des périphériques de sortie - Le clavier, scanner, microphone : sont des périphériques entrée / sortie
- *Le clavier est un périphérique qui effectue les instructions de lecture* - Le clavier est un périphérique qui effectue les instructions d'écriture - *Le clavier est un périphérique d'entrée* - Aucune bonne réponse
- L'ordinateur est une machine intelligente - L'ordinateur est une machine programmable et intelligente - *L'ordinateur est une machine programmable et rapide* - Aucune bonne réponse

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY Année 2023 - 2024

UFHB

PREMIERE SESSION :

EXAMEN : OUTIL BUREAUTIQUE

A Question de cours

1- Définit les sigles suivants
   a- CPU
   b- UAL
   c- RAM
   d- ROM
   e- USB
   f- Bit
   g- PC
2- Donne une définition du mot INFORMATIQUE.
3- Quelle est la différence entre un Système d'exploitation et une application.
4- Quelles sont les différentes catégories de mémoire que l'on peut trouver dans un ordinateur.
5- Quelle est la différence entre ROM et RAM.
6- Soit
   {1-word ; 2-excel ; 3-powerPoint ;4-Access ;5-Adobe Illustrator ; 6-Adobe Photoshop ; 7-Windows Media Player ;8-Final CutProx}
   des application Microsoft . Fais correspondre chaque application de Microsoft à l'une des application libre contenue dans l'ensemble suivant :
   {a- Base ; b-Writer ; c-Impress ; d-Calc ; e-VLC ; f- Inkscape ; g-Movie Maker ;h-Gimp}
   Exemple 9-i

B Word

1- Donne une explication à l'expression suivante : D:\ECOLE\Rapport.docx
2- Quelles sont les fonctions d'un logiciel de traitement de texte ?
   a- Mise en page d'un texte
   b- Compilation d'un texte
   c- Présentation d'un texte sous forme de diaporama
   d- Edition d'un texte

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

3- Quel chemin doit-on suivre pour insérer une image dans un texte ?
   a- Édition, insertion d'image
   b- Format, Image
   c- Insertion, Image
   d- Aucune de ces réponses
4- Pour créer un tableau Word il faut :
   a- Cliquer sur le menu Insertion
   b- Cliquer sur le menu Tableau
   c- Cliquer sur l'icône tableau de la barre d'outils standard
   d- Cliquer sur le menu Format
5- Pour enregistrer un document pour la première fois, nous utilisons :
   a- Fichier/Nouveau
   b- Fichier/Enregistrer
   c- Fichier/Enregistrer-sous
   d- Fichier/Enregistrer en tant que page Web
6- L'extension d'un fichier word est
   a- .cod
   b- .doc
   c- .word
   d- .docx

C Excel

1- L'extension d'un fichier Excel peut être :
   a- .exe
   b- .exelx
   c- .xlsx
   d- .xlxs
2- Etablis la correspondance entre les expressions suivantes exemple : 9-i

1- Une ligne	a- A1:A5
2- Une colonne	b- A1
3- Une cellule	c- 1
4- Une plage de cellule	d- A

3- Dans une cellule, une formule Excel commence toujours par
   a- Formule
   b- Equation
   c- =
   d- +

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

II – LOGICIELS D'EXPLOITTION

Exercice 1

Relier entre les mots de la première colonne et leurs correspondants dans la deuxième colonne. Compléter avec ce qui convient

1- Linux	a- est un SE mono-tâche
2- DOS	b- est la partie software nécessaire pour faire fonctionner un ordinateur
3- Windows ...	c- est un SE qui gère les CPU
4- Le SE	d- est un SE open source

Exercice 2

Répondez brièvement à chaque question :

1) Windows est-il un système d'exploitation mono tâche ou multi tâches ? Expliquer ?
2) Comment faire pour démarrer rapidement l'application « calculatrice », si son raccourci a été éliminé du menu « accessoires » dans « Tous mes programmes » ?
3) Comment faire pour déplacer complètement un fichier nommé « mon fichier » du répertoire X vers le répertoire Y ? Citer deux façons pour le faire.
4) Comment le système d'exploitation reconnaît qu'un fichier Word doit être ouvert par « Ms Word » ?
5) Comment le système d'exploitation reconnaît qu'un fichier Excel doit être ouvert par « Ms Excel » ?

Exercice 3

Cocher la ou les bonne(s) réponse(s) si elle(s) existe(nt)

- Dans Windows, le bureau est une image - *Dans Windows, le bureau est un répertoire* - Dans Windows, le bureau est un fichier - *Dans Windows, le bureau est un dossier* - Aucune bonne réponse
- Windows est un logiciel de bureautique - Windows est un system d'exploitation - Windows est un ensemble de fichiers et de programmes
Un système d'exploitation est un ensemble de programmes pour écrire nos documents - *Un système d'exploitation est un ensemble de programmes destinés à gérer une machine* - *Un système d'exploitation gère le processeur, la mémoire et les fichiers*

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

III-Logiciels de bureautique word

Exercice 1

Relier entre les mots de la première colonne et leurs correspondants dans la deuxième colonne. Compléter avec ce qui convient :

1- Un Formateur de texte ..... a- produit un document brut
2- Un Editeur de texte ..... b- produit un document non éditable
3- Un traitement de texte ..... c- ne nécessite pas un éditeur de texte externe

Exercice 2

Cocher la ou les bonne(s) réponse(s) si elle(s) existe(nt)

Pour créer un tableau Word il faut :

A. Cliquer sur le menu Insertion
- B. Cliquer sur le menu Tableau
- C. Cliquer sur l'icône tableau de la barre d'outils standard
- D. Cliquer sur le menu Format

Exercice 3

Cocher la ou les bonne(s) réponse(s) si elle(s) existe(nt)

Quel chemin doit-on suivre pour insérer une image dans un texte ?

- A. Édition, insertion d'image
- B. Format, Image
- C. Insertion, Image
- D. Aucune de ces réponses

EXCEL

EXERCICES

Cocher la ou les bonne(s) réponse(s) si elle(s) existe(nt)

- Excel est un document de Microsoft office - Excel est un Tableur - Excel est un Chiffrier - Excel est un logiciel pour créer des tableaux, tracer des graphes, faire des calculs, - … Aucune bonne réponse
- Un fichier Excel est appelé classeur - Un classeur Excel peut contenir plusieurs feuilles - Une feuille Excel comporte plusieurs pages - Une page Excel est un ensemble de cellules numérotées - Aucune bonne réponse
- Ms Excel est un programme de calcul - Ms Excel n'est pas un programme de calcul - Ms Excel peut être utilisé comme calculatrice scientifique - Ms Excel ne peut pas être utilisé comme calculatrice scientifique
- Dans Word Pour Copier on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+V - Dans Word Pour Couper on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+X - Dans Word Pour Copier on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+C - Dans Word Pour Couper on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+V
- L'extension d'un fichier Excel est xsl ou xslx - L'extension d'un fichier Excel est doc ou docx - L'extension d'un fichier Excel est xls ou xlsx
- On peut copier un tableau d'Excel et le coller dans Word - On peut copier un tableau de Word et le coller dans Excel - On ne peut pas copier un tableau de l'un et le coller dans l'autre

MASTER LMD-2025

Scanned with CamScanner

UFRMI L1	2020
L1 **Epreuve de Outil Bureautique**	

CORRECTION

A – QUESTION DE COURS

1) Quelle est la signification des mots suivants :
   1. CPU : Central Processing Unit
   2. UAL : Unité Arithmétique et Logique
   3. RAM : Random Access Memory
   4. ROM : Read Only Memory
   5. USB : Universal Serial Bus
2) Les principales caractéristiques pour l'achat des périphériques suivants :
   - ❖ Processeur :
     - Gamme (Intel, AMD, ...)
     - Vitesse en GHz
     - Mémoire cache L1 et L2
   - ❖ Disque Dur :
     - Marque (Seagate, Samsung, ...)
     - Capacité en Go
     - Vitesse de Rotation
     - Connexion norme SATA (Serial ATA (Serial Advanced Technology Attachment : vitesse de transfert = 150 Mo/s) ou PATA (IDE) (Parallel Advanced Technology Attachment : vitesse de transfert = 133 Mo/s)
   - ❖ Carte mère :
     - Vitesse de son Bus
     - Compatibilité avec les différents types de processeurs (Intel, AMD, ...)
     - Nombre de slot pour RAM
     - Nombre de slot PCI Express
     - Nombre de connecteurs USB
     - Connecteurs IDE et SATA

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

3) Mettez **V** si la phrase est juste et **F** si la phrase est fausse :

a. V
b. F
c. F
d. F
e. F

B – STRUCTURE ET FONCTIONNEMENT

Mettez **V** si la phrase est juste et **F** si la phrase est fausse :

1. F
2. V
3. F
4. V

C – ENVIRONNEMENT WINDOWS

1) Windows est un système d'exploitation multitâche.
2) Deux façons pour déplacer un fichier :

❖ Première façon :

- Faire un contrôle (**Ctrl**) **A** pour sélectionner le fichier dans le répertoire **X**, puis contrôle (**Ctrl**) **C** pour copier. Ensuite on part dans le répertoire **Y** puis contrôle (**Ctrl**) **V** pour coller le fichier.

❖ Deuxième façon :

- Faire un contrôle (**Ctrl**) **A** pour sélectionner le fichier dans le répertoire **X**, puis contrôle (**Ctrl**) **X** pour couper. **Ensuite** on part dans le répertoire **Y** puis contrôle (**Ctrl**) **V** pour coller le fichier.

3) Le système d'exploitation reconnait un fichier Word et Excel par leurs extensions (**docx** pour Word et **xlsx** pour Excel).

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

D – TRAITEMENT DE TEXTE

1) Répondre brièvement :

- Dans le menu fichier de Word, on utilise **Enregistrer sous** si l'on veut enregistrer son document pour la première fois (en lui donnant un nom et un emplacement).
- Dans le menu fichier de Word, on utilise **Enregistrer** si l'on veut enregistrer son travail courant.

Mettez **V** si la phrase est juste et **F** si la phrase est fausse :

1) Quelles sont les fonctions d'un logiciel de traitement de texte ?
   a. V
   b. F
   c. F
   d. V
2) Pour enregistrer un document pour la première fois, nous utilisons :
   a. F
   b. F
   c. V
   d. F
3) Pour créer un tableau sur Word, il faut :
   a. F
   b. V
   c. F
   d. F
4) Quel chemin doit-on suivre pour insérer une image dans un texte ?
   a. F
   b. F
   c. V
   d. F

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

EXCEL

1) Mettez **V** si la phrase est juste et **F** si la phrase est fausse :
   a. F
   b. V
   c. V
   d. F
2) Mettez **V** si la phrase est juste et **F** si la phrase est fausse :
   La cellule **F2** désigne :
   a. F
   b. V
   c. F
   d. F
3) Qu'est-ce qu'une cellule ?
   a. F
   b. F
   c. V
4) Mettez **V** si la phrase est juste et **F** si la phrase est fausse :
   Quand vous tapez une équation dans une cellule Excel, la première chose à faire est d'introduire :
   a. F
   b. V
   c. F

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE FELIX
HOUPHOUET BOIGNY

UFR MI

CORRECTION OUTILS BUREAUTIQUES
PREMIERE SESSION ANNEE 2020 – 2021

I – ARCHITECTURE

Exercice 1 (0,5 x8 + 2)

Quelle est la signification des acronymes suivants :

1) **CPU** : Central Processing Unit
2) **UAL** : Unité Arithmétique et Logique
3) **RAM** : Random Access Memory
4) **ROM** : Read Only Memory
5) **USB** : Universal Serial BUS
6) **INTERNET** : INTERnational NETwork
7) **INTRANET** : Réseau informatique qui est développé au sein d'une entreprise et réservé aux collaborateurs de celle-ci, qui est similaire à internet.
8) **SITE WEB** : World Wide Web
9) Différence entre **RAM** et **ROM** : La RAM est une mémoire vive tandis que la ROM est une mémoire morte.

Exercice 2 : Choisissez-les ou la bonne réponse (0,5 x5)

☐ Le microprocesseur comprend l'UAL ou l'UCC ☒ Le microprocesseur comprend l'unité arithmétique et logique ☒ Le microprocesseur comprend unité de commande et de contrôle ☒ Le microprocesseur comprend l'UAL et l'UCC ☐ Aucune bonne réponse
☒ Les périphériques d'entrée effectuent les instructions de lecture ☐ Les périphériques d'entrée effectuent les instructions d'écriture ☐ Les périphériques d'entrée effectuent les instructions de lecture et écriture
☒ Le clavier, scanner, microphone : sont des périphériques d'entrée ☐ Le clavier, scanner, microphone : sont des périphériques de sortie ☐ Le clavier, scanner, microphone : sont des périphériques entrée / sortie
☒ Le clavier est un périphérique qui effectue les instructions de lecture ☐ Le clavier est un périphérique qui effectue les instructions d'écriture ☒ Le clavier est un périphérique d'entrée ☐ Aucune bonne réponse
☐ L'ordinateur est une machine intelligente ☐ L'ordinateur est une machine programmable et intelligente ☒ L'ordinateur est une machine programmable et rapide ☐ Aucune bonne réponse

Scanned with CamScanner

II – LOGICIELS D'EXPLITATION

Exercice 1 (0,5 x 4)

Relions les mots de la première colonne à leurs correspondants dans la deuxième colonne.

1 - Linux	**d**
2 - DOS	**a**
3 - Windows	**c**
4 - Le SE	**b**

Exercice 2 (0,5 x 5)

Répondons brièvement à chaque question

1) Windows est-il un système d'exploitation (SE) mono tâche ou multi tâches ? Justifier votre réponse ?

Réponse : C'est un SE multi tâche, parce qu'on peut lancer plusieurs applications en même temps.

2) Comment faire pour démarrer rapidement l'application « calculatrice », si son raccourci a été éliminé du menu « accessoires » dans « Tous mes programmes » ?

Réponse : On clique sur **Démarrer** → **Exécuter** puis on tape le mot « calc ».

3) Comment faire pour déplacer complètement un fichier nommé « monfichier » du répertoire X vers le répertoire Y ? Citer deux façons pour le faire ?

Réponse : On va dans le répertoire X, puis on sélectionne le fichier et dans la barre de menu on clique sur **Edition**

→ **Couper** ; ensuite on se place dans le répertoire Y, on clique sur **Edition** → **Coller.**

On peut aussi dans X, cliquer sur le fichier avec le bouton droit de la souris, choisir **Couper**, ensuite dans Y, cliquer avec le bouton droit de la souris et choisir **Coller.**

4) Comment le système d'exploitation reconnaît qu'un fichier Word doit être ouvert par « Ms Word » ?

Réponse : Grâce à son extension « .doc » ou « .docx ».

5) Comment le système d'exploitation reconnaît qu'un fichier Excel doit être ouvert par « Ms Excel » ?

Réponse : Grâce à son extension « .xls » ou « .xlsx ».

Exercice 3 (0,5 x 3)

- ☐ Dans Windows, le bureau est une image
- ☒ Dans Windows, le bureau est un répertoire
- ☐ Dans Windows, le bureau est un fichier
- ☒ Dans Windows, le bureau est un dossier
- ☐ Aucune bonne réponse

WEB-DEPANNAGE-2025

Scanned with CamScanner

☐ Windows est un logiciel de bureautique ☒ Windows est un system d'exploitation ☒ Windows est un ensemble de fichiers et de programmes
☐ Un système d'exploitation est un ensemble de programmes pour écrire nos documents ☒ Un système d'exploitation est un ensemble de programmes destinés à gérer une machine ☒ Un système d'exploitation gère le processeur, la mémoire et les fichiers

III – LOGICIELS DE BUREAUTIQUE

WORD

Exercice 1 (0,5 x 3)

Relions les mots de la première colonne à leurs correspondants dans la deuxième colonne.

1 – Un Formateur de texte **b**

2 – Un éditeur de texte **a**

3 – Un traitement de texte **c**

Exercice 2 (1)

Pour créer un tableau Word il faut :

A. F

B. V

C. F

D. F

Exercice 3 (1)

Quel chemin doit-on suivre pour insérer une image dans un texte ?

A. F

B. F

C. V

D. F

EXCEL

Exercice (0,5 x 6)

☐ Excel est un document de Microsoft office ☒ Excel est un Tableur ☒ Excel est un Chiffrier ☒ Excel est un logiciel pour créer des tableaux, tracer des graphes, faire des calculs, … ☐ Aucune bonne réponse

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

☒ Un fichier Excel est appelé classeur ☒ Un classeur Excel peut contenir plusieurs feuilles ☒ Une feuille Excel comporte plusieurs pages ☒ Une page Excel est un ensemble de cellules numérotées ☐ Aucune bonne réponse
☐ Ms Excel est un programme de calcul ☒ Ms Excel n'est pas un programme de calcul ☒ Ms Excel peut être utilisé comme calculatrice scientifique ☐ Ms Excel ne peut pas être utilisé comme calculatrice scientifique
☐ Dans Word Pour Copier on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+V ☒ Dans Word Pour Couper on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+X ☒ Dans Word Pour Copier on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+C ☐ Dans Word Pour Couper on peut utiliser le raccourci clavier Ctrl+V
☐ L'extension d'un fichier Excel est xsl ou xslx ☐ L'extension d'un fichier Excel est doc ou docx ☒ L'extension d'un fichier Excel est xls ou xlsx
☒ On peut copier un tableau d'Excel et le coller dans Word ☒ On peut copier un tableau de Word et le coller dans Excel ☐ On ne peut pas copier un tableau de l'un et le coller dans l'autre

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Licence 1 Tronc Commun
Année : 2021 – 2022 Semestre 1 Session1
Examen sans calculatrice, durée 1 h 30
INITIATION A L'INFORMATIQUE

Exercice 1 : culture informatique

1.1. Définir les trois grandes familles de logiciels et donner un exemple de chacune d'elle.
1.2. Citer les cinq blocs fonctionnels de l'architecture de Von Neumann et donner leur rôle
1.3. Donner la signification des termes informatiques ci-dessous :

Expressions	Signification	Expressions	Signification
pixel		ROM	
RAM		USB	
Asus Vivobook X571 - Intel Core I5-10300H - 8Go RAM & 512Go SSD + 4Go NviDia - Écran 15.6		Blog	

Exercice 2 : Conversions et calculs

2.1. 17''= (?) cm ; 2560 Go= (?)To
2.2. Réaliser les conversions suivantes : $(54,75)_{10}=(\ ?)_2$; $(42,4)_8=(?)_{10}$; $(1101010)_2=(?\ )_{16}$; $(1101011)_2=(?)_8$; $(1C5)_{16}=(\ ?)_2$; $(101,01)_2=(?)_{10}$; $(10)_{10}=(?)_{8421}$; $1AC_{16}=(?)_{10}$; $243_8=(\ ?)_{10}$
2.3. Effectuer les opérations suivantes :$(1A/B)_{16}$, , $(2BC + DAE)_{16}$, $(1BCx\ A1)_{16}$ $(1011/111)_2$ à 2 chiffres près ; $(1011x101)_2$; $(1101\text{-}111)_2$; $(1101+1001)_2$

Exercice 3 : systèmes de numération

On donne $A=39_{10}$, $B=32_{10}$, $C=43,75_{10}$
3.1. Effectuer A- B en complément à 10 et A- C en complément à 9
3.2. Convertir A et B en octal, puis effectuer B- A en complément restreint
3.3. Convertir A et B en DCB, puis effectuer A+ B en DCB
Pour la suite on considère que les codes sont sur une longueur 8.
3.4. Convertir A et B en binaire
3.5. Coder –A selon le mode signe et valeur absolue, selon le mode complément à un, puis selon le mode complément à deux.
3.6. Effectuer si possible B - A dans le codage signe et valeur absolue, dans le codage complément à un puis dans le codage complément à deux.

Abidjan, le 10/03/2022

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Licence 1 Tronc Commun 2022 - 2023
Examen initiation à l'informatique
Session 1 semestre 1 durée 1 h 30
— Calculatrice interdite —

Exercice 1 : Question de cours

1. Citer les cinq blocs fonctionnels de l'architecture de Von Neuman et le rôle de chacun
2. Après avoir donné des définitions, citer les différences entre ROM et RAM, et entre Windows et MS Office.
3. Donner une relation entre l'octet et le Bit, entre le cm et le pouce, entre l'octet et le téraoctet

Exercice 2 : Conversion et arithmétique des systèmes de numération

1. Trouver les valeurs décimales des nombres suivants : $(1110,1)_2$; $(32,4)_8$; $(1FA)_{16}$; $(10010111)_{DCB}$;
2. Effectuer les conversions suivantes : $(1011110)_2 = (\ ?\ )_8$; $(1010111)_2 = (\ ?\ )_{16}$; $(1FE)_{16} = (\ ?\ )_2$; $(27,75)_{10} = (\ ?\ )_2$; $(77)_{10} = (\ ?\ )_{16}$
3. Soit $P=24_{10}$, $Q=78_{10}$. Effectuer en DCB, Q -P et P+Q.
4. Donner la suite des 33 nombres hexadécimaux après 199
5. Effectuer les opérations suivantes :
$(101010101+10101110)_2$, $(11010111-1100110)_2$, $(111.101+101.111)_2$, $(101.01-11.11)_2$, $(1101 \times 1010)_2$, $35_8 \times 72_8$, $(10011 / 111)_2$ à 2 chiffres après la virgule, $143_5 / 15_5$, $(1AF+EB)_{16}$, , $(2A1x3C)_{16}$

Exercice 3 : Problème

On suppose que les codes ont pour longueur 8. Soit A=62 et B=18 dans le système décimal.
1. Coder A et B en binaire pure.
2. Coder –B selon les modes suivants : Signe et valeur absolue ; complément à un ; complément à deux
3. Effectuer si possible A+(-B) dans les codages suivants : Signe et Valeur Absolue , complément à un , complément à deux .
4. Effectuer B-A en complément vrai puis en complément restreint.
5. Convertir a et B en octal puis effectuer B-A en complément à 8 et en complément à 7
6. En octal, effectuer A-B, A/B, A+B

Scanned with CamScanner

UFR MI Licence 1 2023 - 2024
Examen écrit d'architecture des ordinateurs
Session 1 durée 1 h 30 min
Calculatrice et aucun document non autorisés

Exercice 1 : culture informatique

1. Répondre aux questions sur votre copie en combinant la question à la bonne réponse

1.Un clavier français est un clavier ? a) AZERTY b) QWERTY c) Type 12 d) Type 02	**2.L'informatique est** a)Un ordinateur b)La science du traitement des connaissances c)La science du traitement automatique de l'information	**3.Comment appelle-t-on l'ensemble des programmes assurant la liaison entre les ressources matériels, l'utilisateur et les applications d'un ordinateur.** a)Logiciel de base b)Logiciel libre c)Système d'exploitation	**4.Le clavier est un organe de :** a)Sortie b)Entré c)Entré / Sortie4
5.Dans le micro-ordinateur le traitement de l'information est réalisé par a)Le microprocesseur b)La mémoire RAM c)La mémoire ROM.	**6.Le système d'exploitation WINDOWS appartient à** a)Apple b)BM c)Microsoft.	**7.La mémoire RAM est :** a)Non volatile b)Souple c)Volatile	**8.Parmi les programmes suivants, lequel est un exemple de tableur** a)Wordpad b)Excel c)MS Access
9.Pour réaliser un traitement, l'ordinateur exécute a) des données des données b) un programme c) des résultats	**10.En convertissant** a) 1To= 1000 Go b) 1 To= 1024 Go c) 1 To= 1024 Mo	**11.Un écran 17 pouces vaut :** a) 34 cm b)43.5 cm c)43,18	**12.Le pixel est le plus petit élément** a) d'une image numérique b) d'un espace de stockage, c)d'une distance

2. Compter 20 nombres en hexadécimal à partir du nombre hexadécimal 129.

Exercice 2 : systèmes de numération

2. Manipuler des systèmes de numération en réalisant les conversions suivantes :
a) $(32,75)_{10} = (\ ?\ )_2$ b) $(45,4)_8 = (\ ?\ )_{10}$ c) $(111011010)_2 = (\ ?\ )_{16}$ d) $(1BE)_{16} = (\ ?)_2$ e) $(DC)_{16} = (\ ?)_{10}$
f) $(11101010)_2 = (?)_8$ g) $(1101101010)_2 = (?)_3$ h)(ACx 2C)$_{16}$ i) (1011 /11)$_2$ (1 chiffre près) j) (AC5 - 1EF)$_{16}$

Exercice 3 : Problème

On donne A = $(37)_{10}$ et B = $(16)_{10}$
1. Effectuer B-A en complément vrai
2. Convertir A et B en base 8 puis effectuer AxB, A/B (2 chiffres près), B-A en complément restreint.
3. Convertir A et B en ²base 5 puis effectuer A-B en complément vrai
4. Convertir A et B en DCB puis effectuer A+B
5. Coder si possible A en binaire sur 4 bits. Justifier votre réponse
6. Effectuer en binaire A+B et AxB
Dans le système binaire, on suppose que les codes ont pour longueur 8.
7. Coder –A selon le mode signe et valeur absolue, selon le mode complément à un, puis selon le mode complément à deux.
8. Effectuer en binaire si possible B - A dans le codage signe et valeur absolue, dans le codage complément à un puis dans le codage complément à deux.

Abidjan, le 07/01/2024 1/1

Scanned with CamScanner

SUJET INITIATION A L'INFORMATIQUE SESSION 1 2021-2022

Exercice 1

1.1)voir cours
1.2)voir cours

1.3) *pixel :point d'une image electronique,unité de mesure de la definition d'une image numérique
*RAM :Random Access Memory
*ROM :Read Only Memory
*USB: Usual Serial Bus
*Blog :WeB Log (journal en ligne)
*Assus.... renvoie au information d'un ordinateur de marque Assus Vivobook X571 core i5 avec 8Go de memoire vive et 512Go de memoire du disque dure avec un ecran de 15.6

Exercice 2

1-17''=43.18cm ;
2560Go=2.5To;
54.75(10)= 110110,11(2)
1101010(2)=6A(16)
1101011(2)=153(8)
1C5(16)=000111000101(2)
101,01(2)=5.5(10)
10(10)=1010(8421)
1AC(16)=428(10)
243(8)=159(10)
(1A/B)16=
1A B
- 16 2
04

(2BC+DAE)16=
2BC
+ DAE
= (105A)16

(1BC x A1)16 =
1BC
x A1
1 B C
+11 58
(1 1 7 3 C)16

(1011/111)2 =
1011 111
- 111 1,10
01000
111
0010
00
10

(1011x111)2=
1011
x 111
1011
1011
1011
100110 1

(1011-111)2 =
1011
-111
0100

(1101+100)2=
1101
+ 100
10001

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Exercice 3

A=39(10) ,B=32(10),C=43.75(10)

3.1) *A-B en complement a 10

*complement a 10 de B =10^2-32=100-32=68(10)

A+(complement a 10 de B)=39+68=107 (10)
Il y a une retenue de depassement qui est **1** ,
nous l'ignorons on obtient donc A-B en complement a 10=07(10)

*A-C en complement a 9

*complement a 9 de C=10^2 -10^{-2} – 43.75=100-0.01-43.75=56.24(10)

A+(complement a 9 de C)=39.00+56.24=95.24(10) il n y a pas de retenue de depassement complementons donc 95.24 on obtient : 10^2-10^{-2} -95.24 =4.75
affectons le signe (-) nous obtenons :
A-C en complement a 9 = -4.75

3.2) A et B en octal
A=39(10)=32+7=4x8+7=4x8^1 + 7x8^0 =47(8)
B=32(10) = 4x8 = 4x8^1 + 0x8^0=40(8)

B-A en complement a 7 :

complement a 7 de A= 8^2 -8^0-47(8)=64(10)-1-47(8)=64(10)-50(8)

Remarque = 8^0=1(10)=1(8) et -1(8)-47(8)=-(47+1)(8) = 47
+ 1
5 0 (8)

64(10)=8^2=1x8^2+0x8^1+0x8^0=100(8)
finalement on obtient:
complement a 7 de A=100(8)-50(8)= 100
- 50
030(8)

B+(complement a 7 de A) = 40(8)+30(8) = 40
+30
70 (8) Il n'y a pas de retenue de depassement complementons le resultat :

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

on obtient : $8^2-8^0-70(8)=64(10)-1(8)-70(8)=100(8)-71(8)$ = 100
- 71
007(8)

Affectons le signe (-) on a : B-A en complement a 7 = - 7(8)

3.3 Convertir A et B en DCB

A=39(10)=00111001(DCB)
B=32(10)=00110010(DCB)

(A+B)(DCB)= 00111001
+ 00110010
01101011 le bloc 1011=8+2+1=11 est erroné ajoutons 0110 au resultat : 01101011
+ 0110
01110001 d'ou (A+B)(DCB)=01110001(DCB)

3.4 convertir A et B en binaire

A=39(10)=32 + 4 + 2 +1 =
$2^5+2^2+2^0=1x2^5+0x2^4+0x2^3+1x2^2+0x2^1+1x2^0=100101=00100101(2)$
$B=32(10)=2^5=1x2^5+ 0x2^4+0x2^3+ 0x2^2+0x2^1+0x2^0=100000=00100000(2)$

3.5) codage de -A

*SVA(signe et valeur absolue) : -A=10100101(SVA)
*Complement a 1 : 11011010(complement a 1)
*complement a 2 = (complement a 1) + 1 = 11011010
+ 1
11011011

3.6) B-A dans le codage
*Signe et valeur absolue
B-A = **0**0100000
+**1**0100101
?1000101(SVA) ici **0** et **1 representent les bits de poids fort donc les bits de signes dans ce cas nous avons un conflit de signe car il est difficile de dire avec precision le signe vainqueur ce calcul est donc imposible a effectuer directement en SVA.**
*complement a 1
B-A= 00100000
+11011010
11111010 pas de retenue de depassement complementons le resultat on obtient :00000101 affectons le signe (-) on a
B-A en complement a 1= -(00000101)=10000101

MAITRE-IR LMD-2025

Scanned with CamScanner

*Université Félix Houphouet-Boigny d'Abidjan/Maths-Info/*2020 – 2021

Licence 1 Maths-Info
Durée: 2 heures
NB: la clarté de la rédaction sera notée !

Examen (1ère Session)
(Elément de Logique mathématique)

Exercice 1

On note P et Q les affirmations suivantes:
P: Jean est fort en Maths
Q: Jean est fort en Chimie.

Repreésenter les affirmations suivantes sous forme symbolique, à l'aide des lettres P et Q et des connecteurs logiques usuels.
1) Jean est fort en Maths mais faible en Chimie.
2) Jean est fort en Maths ou il est à la fois fort en chimie et faible en Maths.
3) Jean n'est fort ni en Maths ni en Chimie.
4) Jean est fort en Maths s'il est fort en Chimie.

Exercice 2

P, Q et R étant des propositions données, établir les tables de vérité des formes propositionnelles suivantes:
1) $\overline{\overline{P} \vee \overline{Q}}$
2) $(P \wedge Q) \Rightarrow \overline{Q}$
3) $P \vee \overline{Q \wedge R}$.

Exercice 3

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n =]\frac{1}{n}, n+1[$, intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On considère les sous-ensemble

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n \text{ et } \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$$

1) Montrer que $D =]0, +\infty[$.

2) Déterminer de façon explicite le sous-ensemble H. (Justifier votre réponse !)

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Exercice 4

On munit l'ensemble $E = \mathbb{N}^*$ de la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante.

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^*,\ p\mathcal{R}q \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*,\ p = q^k$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E. L'ordre est-il total ? (Justifier)

2) On convient que l'élément $p \in \mathbb{N}^*$ est plus petit que l'élément $q \in \mathbb{N}^*$ relativement à la relation d'ordre $\mathcal{R}$ si $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = \{2, 4, 8, 16, 64\}$.

   (a) Vérifier si l'ensemble A admet un plus petit élément relativement à la relation $\mathcal{R}$.

   (b) Vérifier si l'enssemble A admet un plus grand élément relativement à la relation $\mathcal{R}$.
   (Si oui, préciser ces éléments !).

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

*Université Félix Houphouet-Boigny d'Abidjan/Maths-Info/*2020 – 2021

Licence 1 Maths-Info
Durée: 2 heures
NB: la clarté de la rédaction sera notée !

Examen - Elément de logique mathématique - Session 2

Exercice 1
Déterminer la négation de chacune des assertions suivantes:

1. Tout triangle rectangle possède un angle droit.
2. Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.
3. Jean est fort en Maths ou il est à la fois fort en Chimie et faible en Maths.
4. Jean n'est fort ni en Maths ni en Chimie.
5. Jean est fort en Chimie s'il est fort en Maths.
6. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ |x - \frac{7}{5}| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 7| < \varepsilon.$

Exercice 2
1) Soient A, B et D des parties quelconques d'un ensemble E. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Dire si les implications ou équivalences suivantes sont vraies ou fausses (Justifier les réponses!)

(i) $D \subseteq A \cap B \Rightarrow D \subseteq A$ ou $D \subseteq B$.

(ii) $D \subseteq A \cap B \Rightarrow D \subseteq A$.

(iii) $D \subseteq A \cup B \Rightarrow D \subseteq A$ ou $D \subseteq B$.

(iv) $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$.

(v) $A = B \Leftrightarrow A \Delta B = \emptyset$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Exercice 3

une tautologie est une proposition intrinsèquement vraie. Par exemple, si P est une proposition et $\overline{P}$ est la négation de P, la connection $P \vee \overline{P}$ est une tautologie.
Soient P, Q, R des propositions. On considère les deux propositions suivantes.

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow [(P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R)]$$

(a) Sans utiliser de table de vérité, montrer que la proposition (1) est une tautologie.

(b) Vérifier si la proposition (2) est une tautologie.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny d'Abidjan/ Année 2021-2022

Licence 1 Maths-Info-Méca
Durée: **2 h 05 mn**
NB: la clarté de la rédaction sera notée!

Examen - Éléments de logique mathématique - Session 1

Exercice 1
Démontrer la proposition suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,3\}, \quad n^2 \leq 2^n$$

Exercice 2
1) Exprimer les propositions suivantes à l'aide des deux quantificateurs $\exists$, $\forall$ et des symboles mathématiques, le référentiel étant l'ensemble E des étudiants.
(a) Aucun étudiant n'a une taille supérieure ou égale à $2\,m$.

(b) Certains étudiants ont une taille supérieure ou égale $2\,m$.

(c) Tous les étudiants ont une taille strictement inférieure $2\,m$ et supérieure ou égale $1,50\,m$.

2) Donner les négations de ces propositions.

Exercice 3
Déterminer la négation de chacune des assertions suivantes:
1. Si I est un intervalle et si f est continue sur I, alors f a une primitive sur I.

2. Jean est fort en Maths ou il est à la fois fort en chimie et faible en Maths.

3. Jean n'est fort ni en Maths ni en Chimie.

4. $\exists \alpha \geq 2, \forall n \geq 5, 7 \leq |U_n| \leq \alpha$.

5. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad |x - \frac{7}{5}| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 7| < \varepsilon$.

Exercice 4
1) Soient A, B et D des parties quelconques d'un ensemble E. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Dire si les implications ou équivalences suivantes sont vraies ou fausses (Justifier les réponses!):

(i) $D \subseteq A \cap B \Rightarrow D \subseteq A$ ou $D \subseteq B$.

(ii) $D \subseteq A \cap B \Rightarrow D \subseteq A$.

(iii) $D \subseteq A \cup B \Rightarrow D \subseteq A$ ou $D \subseteq B$.

(iv) $A \cup B \cup D = \emptyset \Rightarrow B = \emptyset$.

(v) $A = B \Leftrightarrow A \triangle B = \emptyset$

(vi) $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny d'Abidjan/ UFR-MI/ Année 2021-2022

Licence 1 Maths-Info-Méca
Durée: **2 h 05 mn**
NB: la clarté de la rédaction sera notée!

Examen - Éléments de logique mathématique - Session 2

Exercice 1
Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n^3 - n$ est divisible par 6.

Exercice 2
1) Exprimer les propositions suivantes à l'aide des deux quantificateurs $\exists$, $\forall$ et des symboles mathématiques, le référentiel étant l'ensemble E des étudiants.

(a) Aucun étudiant n'a une taille supérieure ou égale à $2\,m$.

(b) Certains étudiants ont une taille supérieure ou égale $2\,m$.

(c) Tous les étudiants ont une taille strictement inférieure $2\,m$ et supérieure ou égale $1,50\,m$.

Exercice 3
(i) Soient $H = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 4x - 3 < 0\}$ et $T = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 3\}$.

Déterminer $H \cap T$.

(ii) Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.

Montrer que:

1) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$ (où $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E).

2) $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

3) $(A \cup C) \cap [(A \cap B) \cup (\overline{C} \cap B)] = A \cap B$.

4) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

Exercice 4
Une tautologie est une proposition intrinsèquement vraie. Par exemple, si P est une proposition et $\overline{P}$ est la négation de P, la connection $P \vee \overline{P}$ est une tautologie.
Soient P, Q, R des propositions. On considère les deux propositions suivantes.

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R) \quad (1)$$
$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow [(P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R)] \quad (2)$$

(a) Sans utiliser de table de vérité, montrer que la proposition (1) est une tautologie.

(b) Vérifier si la proposition (2) est une tautologie.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Université FHB
Licence 1
Année académique 2022 – 2023

Examen d'Eléments de logique
Session 1, 2h

Exercice 1 :(6-points)
Exprimer à l'aide de quantificateurs et symboles logiques, les affirmations suivantes :

1. La partie A de $\mathbb{N}$ n'est pas majorée.
2. L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est bornée.
3. Dans tout intervalle I, ouvert, il y a des nombres rationnels.

Exercice 2 :(3-points) . Notons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des étudants de Math-info et par $\mathcal{R}$ l'ensemble des repas.
Exprimer clairement chacune des propositions suivantes écrites avec les quantificateurs :

1. $\forall r \in \mathcal{R}$, $\exists e \in \mathcal{E}$ tel que e mange le repas r.
2. $\exists r \in \mathcal{R}$, tel que $\forall e \in \mathcal{E}$, e mange le repas r.
3. $\exists e \in \mathcal{E}$, tel que $\forall r \in \mathcal{R}$ e mange le repas r.

Exercice 4 :(6-points)
Sur l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 23\}$, on considère la relation binaire suivante :

$$a\mathcal{R}b \text{ si } a^3 - b^3 \text{ est un multiple 6.}$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence de 0 et de 1.
3. Déterminer toutes les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.

Exercice 5 :(5-points) . On considère l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

.

1. Trouver une application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}^*$ qui soit injective.
2. Trouver une application g de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Z}$ qui soit surjective.
3. Déterminer vos propres applications $f \circ g$ et $g \circ f$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UFHB
Licence 1 : Classique
Année académique 2023 – 2024

Examen d'Eléments de logique : Session 1, 1h30

Exercice 1 :(4-points) Dire si les collections suivantes sont des ensembles ou non :

1. $A = \{\emptyset, 1, \{1\}, \{3, 2, 1\}, \{1, 2\}\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : z < 2i + 1\}$,
2. E la collection de tous les étudiants inscrits pour l'année 2023 – 2024 qui iront à Adjamé.
3. F la collection de toutes les fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2 :(4-points) .

Soient $\mathcal{E}$ l'ensemble des étudants de UFR-MI et $\mathcal{R}$ l'ensemble des repas.

Exprimer clairement chacune des propositions suivantes écrites avec les quantificateurs :

1. $\forall\, r \in \mathcal{R}$, $\exists\, e \in \mathcal{E}$ tel que e ne mange pas le repas r.
2. $\exists\, r \in \mathcal{R}$, tel que $\forall\, e \in \mathcal{E}$, e mange le repas r.
3. $\exists\, e \in \mathcal{E}$, tel que $\forall\, r \in \mathcal{R}$, e ne mange pas le repas r.
4. $\exists\, r \in \mathcal{R}$ et $\exists\, e \in \mathcal{E}$, tels que e ne mange le repas r.

Exercice 3 :(6-points)

Sur l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on considère la relation binaire suivante :

$$a \prec b \text{ si } a^2 + a \text{ divise } b^2 + b.$$

Lorsqu'on aura $a \prec b$, on dira que b **majore** a ou encore a **minore** b.

1. A-t-on la relation $2 \prec 3$?
2. Montrer que la relation $\prec$ est une reation d'ordre partielle.
3. Soit $A = \{3, 4, 5, 90\}$. La partie A est-elle majorée ? Est-elle minorée ?

Exercice 4 :(6-points) .

On considère les ensembles suivants : $E = \{0, 1, 2, 5\}$ et $F = \{a, b, c\}$.

1. La partie $f = \{(0, a), (2, c), (1, c), (5, b)\}$ de $E \times F$ est-elle une application de E dans F ?
2. Trouver une fonction θ de E dans E telle que :

$$\theta \neq id_E \text{ et } \theta \circ \theta \circ \theta = id_E$$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Université FHB, UFR-MI
Licence1 : Classique
Année académique 2023 – 2024

Examen d'Eléments de logique, Session 2, 2h

Exercice 1 :(6-points) . Notons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des étudants en L1 en seconde session, $\mathcal{M}$ l'ensemble des matières et par $\mathcal{N}$ l'ensemble des Notes. On écrira $\mathbf{N(e)}$ pour la note de l'étudiant "e".

Exprimer à l'aide des quantificateurs, les propositions suivantes :

1. À toutes les matières de la session, un étudiant aura **moins** de 03/20.
2. Aucun étudiant **n'aura** une note supérieure à 11. **et ce.** dans toutes les matières.
3. Dans une seule matière, un étudiant aura la moyenne.
4. Aucune matière ne sera validée !

Exercice 2 :(3-points)

Exprimer à l'aide de quantificateurs et symboles logiques, les affirmations suivantes :

1. La partie A n'est pas incluse dans $\mathbb{N}$.
2. L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est bornée.
3. L'intervalle $]1, 2[$ n'a pas un **élément plus petit** que les autres.

Exercice 3 :(6-points)

Sur l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} : -23 \leq n \leq 23\}$, on considère la relation binaire suivante :

$$a\mathcal{R}b \text{ si } a^3 - b^3 \text{ est un multiple 6.}$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence de 0 et de 1.
3. Déterminer toutes les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.

Exercice 4 :(5-points) . Soient $f : E \longrightarrow E$ une **application** , et A, B deux parties de E.

De votre choix, montrer **une seule** des propriétés suivantes :

1. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
4. Si $f \circ f \circ f = id_E$, alors f est **bijective.**

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

CORRECTION LOGIQUE SESSION 1 ANNEE 2021-2022

EXERCICE 1

Démontrons que $\forall n \in N\backslash\{1,2,3\}$ $n^2 \leq 2^n$

Soit p(n) la proposition : $n^2 \leq 2^n$, $n \geq 4$

Vérifions p(4)

$4^2 = 16$ Et $2^4 = 16$

Donc $4^2 \leq 2^4$ puis que 16≤16. Ainsi p(4) est vraie.

Soit $n \geq 4$, supposons que p(n) est vraie et montrons que $p(n+1)$est vraie : $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$

D'après hypothèse de récurrence on a : $n^2 \leq 2^n \Rightarrow 2n^2 \leq 2 * 2^n$

Or $2^{n+1} = 2 * 2^n \geq 2 * n^2 = n^2 + n * n \geq n^2 + 4n = n^2 + 2n + 2n \geq n^2 + 2n + 2 * 4 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

Donc, $n^2 + 2n + 1 \leq 2^{n+1}$,$\forall n \geq 4$

Ainsi, $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$,$\forall n \geq 4$. Donc $p(n+1)$ est vraie $\forall n \geq 4$

Alors, $\forall n \geq 4, n^2 \leq 2^n$.

Conclusion

$\forall n \in N\backslash\{1,2,2,3\}$ $n^2 \leq 2^n$.

EXERCICE 2

1-

a) $\forall x \in E, x < 2m$
b) $\exists x \in E, x \geq 2m$
c) $\forall x \in E, 1,5m \leq x < 2m$

2-Donnons la négation.

Non(a) : $\exists x \in E, x \geq 2m$

Non(b) : $\forall x \in E,\ x < 2m$

Non(c) :$\exists x \in E, 1m \leq x < 1,5m$

EXERCICE 3

1)

Si I est un intervalle et f est une fonction continue sur I et f n'admet pas de primitive sur I.

2) P : jean est fort en math ; Q : jean est fort en chimie ; R : jean est faible en math

P ou (Q et R) ; $\overline{P}\ et\ (\overline{Q}\ ou\ \overline{R})$; $(\overline{P}\ et \overline{Q})ou\ (\overline{P}\ et \overline{R})$

Jean n'est ni fort en math et en chimie ou jean est ni fort et ni faible en math.

Jean n'est ni fort en math ni faible en chimie ou jean n'est fort et ni faible en math.

3) le n°3<=> $(\overline{P}\ et\ \overline{Q})$ donc la négation est (P ou Q) : (c'est-à-dire jean est fort en math ou en chimie).

4) la négation est $\forall \alpha \geq 2, \exists\, n \geq 5, \alpha < |Un| < 7$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

5) la négation est : $\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \left|x - \frac{7}{5}\right| < \alpha$ et $|f(x)| - 7 \geq \varepsilon$

EXERCICE 4

Disons si les propositions sont vraies ou fausses en justifiant.

i - $D \subseteq A \cap B \Rightarrow D \subseteq A$ ou $D \subseteq B$: faux : car $D \subseteq A \cap B \Leftrightarrow D \subseteq A$ *et* $D \subseteq B$

ii) $D \subseteq A \cap B \Rightarrow D \subseteq A$ Vraie, car $D \subseteq A \cap B \Leftrightarrow D \subseteq A$ *ET* $D \subseteq B$

iii) $D \subseteq A \cup B \Leftrightarrow D \subseteq A$ *OU* $D \subseteq B$ FAUX, car soient D={1,2} ; A={1} ; B={2,3} et A∪B={1,2,3}. On a D⊆A∪B mais D⊄A et D⊄B

iv) $A \cup B \cup D = \emptyset \Rightarrow B = \emptyset$; Vraie, car $B \subseteq A \cup B \cup D = \emptyset$ Donc B⊆∅ ce qui implique B=∅

v) $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

$A = B \Leftrightarrow A \Delta B = \emptyset$ VRAIE ; en effet si A=B, $\{(A \backslash B) = (B \backslash B) = \emptyset$ *et* $(B \backslash A) = (A \backslash A) = \emptyset\} \Rightarrow A \Delta B = \emptyset$

Si $A \Delta B = \emptyset$ Aors, $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = \emptyset$

⇒(A\B)=∅ et (B\A)=∅

⇒A\B=∅ et B\A=∅

⇒(A=∅ ou A=B) et (B=∅ et A=B). Dans tous cas A=B

vi) $A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$; vraie. Preuve : supposons que $A \subseteq B$

Soit, $x \in \bar{B}$ alors $x \notin B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in \bar{A}$ donc $\bar{B} \subseteq \bar{A}$

*Supposons que $\bar{B} \subseteq \bar{A}$ et soit $x \in A$ alors $x \notin \bar{A} \Rightarrow x \notin \bar{B} \Rightarrow x \in B$ DONC $A \subseteq B$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

CORRECTION LOGIQUE SESSION 2 ANNEE 2021-2022

EXERCICE 1

Montrons que $\forall n \in N,\ n^3 - n$ est divisible par 6

$\forall n \in N,\ n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

D'où $n^3 - n$ est le produit de 3 entiers naturel consécutifs .

Donc $n^3 - n$ est divisible par 3 et par 2

Comme 2 et 3 sont premier entre eux, alors $n^3 - n$ est divisible par 6

Exercice 2

a) $\forall x \in E, taille(x) < 2m$
b) $\exists x \in E, taille(x) \geq 2m$
c) $\forall x \in E, 1{,}50 \leq taille(x) < 2m$

Exercice 3

i) Déterminons $H \cap T$

$H=\{x \in R / 2x^2 - 4x - 3 < 0\}$ et $T = \{x \in R / 2 \leq x < 3\}$

Notons $p(x) = 2x^2 - 4x - 3$

$\Delta = 40$

$x_1 = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$ et $x_2 = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$

tableau de signe de $p(x)$

x	$-\infty$		$\frac{2+\sqrt{10}}{2}$		$\frac{2-\sqrt{10}}{2}$		$+\infty$
$p(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où $H=]\frac{2-\sqrt{10}}{2} ; \frac{2+\sqrt{10}}{2}[$ et $T = [2;3[$

Ainsi $H \cap T = [2 ; \frac{2+\sqrt{10}}{2}[$

ii)

1) Montrons que : $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$
On a : $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A \cup (B \cap \bar{B})$
$= A \cup \emptyset$
$(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$
2) Montrons que : $A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$
Supposons que $A \subseteq B$ et montrons que $\bar{B} \subseteq \bar{A}$
Soit $x \in \bar{B}$, alors $x \notin B$
D'où $x \notin B$ puisque $A \subseteq B$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Ainsi $x \in \bar{A}$

Donc $\bar{B} \subseteq \bar{A}$

Réciproquement, supposons que $\bar{B} \subseteq \bar{A}$ et montrons que $A \subseteq B$

$\bar{B} \subseteq \bar{A} \Rightarrow \bar{\bar{A}} \subseteq \bar{\bar{B}}$

$\Rightarrow A \subseteq B$ en effet $\bar{\bar{A}} = A$ et $\bar{\bar{B}} = B$

En somme $A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$

3) Montrons que $(A \cup C) \cap [(A \cap B) \cup (\bar{C} \cap B)] = A \cap B$

On a : $(A \cup C) \cap [(A \cap B) \cup (\bar{C} \cap B)] = (A \cup C) \cap [(A \cup \bar{C}) \cap B]$

$= (A \cup C) \cap (A \cup \bar{C}) \cap B$

$= [A \cup (C \cap \bar{C})] \cap B$

$= (A \cup \emptyset) \cap B$

$(A \cup C) \cap [(A \cap B) \cup (\bar{C} \cap B)] = A \cap B$

4) Montrons que $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$

$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$

$= (A \cup B) \cap (\bar{A} \cap \bar{B})$

$= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{B})$

$= \emptyset \cup (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \cup \emptyset$

$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$

Exercice 4

a) Montrons que la proposition (1) est une tautologie

$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R) = [(\bar{P} \vee Q) \wedge (\bar{Q} \vee R)] \Rightarrow (\bar{P} \vee R)$

$= \overline{[(\bar{P} \vee Q) \wedge (\bar{Q} \vee R)]} \vee (\bar{P} \vee R)$

$= (P \wedge \bar{Q}) \vee (Q \wedge \bar{R}) \vee (\bar{P} \vee R)$

$= [(\bar{P} \vee P) \wedge (\bar{P} \vee \bar{Q})] \vee [(Q \vee R) \wedge (\bar{R} \vee R)]$

"$\bar{P} \vee P$" Est une tautologie, Donc toujours vraie

Ainsi la valeur de vérité de "$(\bar{P} \vee P) \wedge (\bar{P} \vee \bar{Q})$" est celui de "$\bar{P} \vee \bar{Q}$"

D'où "$(\bar{P} \vee P) \wedge (\bar{P} \vee \bar{Q})$" est équivalente à "$\bar{P} \vee \bar{Q}$"

Par ailleurs "$\bar{R} \vee R$" est une tautologie, donc toujours vraie

Ainsi la valeur de vérité de "$(Q \vee R) \wedge (\bar{R} \vee R)$" est celui de "$Q \vee R$"

D'où "$(Q \vee R) \wedge (\bar{R} \vee R)$" est équivalente à "$Q \vee R$"

En somme la proposition $[(\bar{P} \vee P) \wedge (\bar{P} \vee \bar{Q})] \vee [(Q \vee R) \wedge (\bar{R} \vee R)]$ est équivalente à

$(\bar{P} \vee \bar{Q}) \vee (Q \vee R) = \bar{P} \vee (\bar{Q} \vee Q) \vee R$

Etant donné que "$\bar{Q} \vee Q$" est une tautologie, alors la proposition "$\bar{P} \vee (\bar{Q} \vee Q) \vee R$"

Est toujours vraie.

Ainsi la proposition $[(\bar{P} \vee P) \wedge (\bar{P} \vee \bar{Q})] \vee [(Q \vee R) \wedge (\bar{R} \vee R)]$ est une tautologie.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Par ricochet, $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ est une tautologie

b) Vérifions si la proposition (2) est une tautologie

Table de vérité de le proposition (2)

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$P \vee R$	$Q \vee R$	$(P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R)$	$(P \vee Q) \Rightarrow [(P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R)]$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V

D'après la table de vérité, la proposition (2) est une tautologie

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

CORRECTION LOGIQUE SESSION 1 ANNEE 2022-2023

EXERCICE 1

1) $\forall M \in \mathbb{N}, \exists x \in A \; tel \; que \; x > M$

2) $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall z \in \mathbb{C}, \; |f(z)| \leq M$ (dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas de comparaison, donc on utilise le module)

3) $\forall a, b \in \mathbb{R} \; tel \; que \; b > a,]a, b[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

EXERCICE 2

1) Tous les repas sont mangés par des (certains) étudiants de math-infos

2) Certains repas sont mangés par tous les étudiants de math-infos

3) Certains étudiants de math-infos mangent tous les repas

EXERCICE 3

1)

*réflexivité

$soit \; a \in E$

$a^3 - a^3 = 0 \; or \; 0$ Est un multiple de 6

D'où $a\mathcal{R}a$. Ainsi $\mathcal{R}$ est réflexive

*symétrique

$soient \; a, b \in E \; tel \; que \; a\mathcal{R}b$. A-t-on $b\mathcal{R}a$?

$a\mathcal{R}b \Rightarrow a^3 - b^3 = 6k \;\; , k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow b^3 - a^3 = 6(-k) \;, \; k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow b^3 - a^3 = 6p \;\; , p = -k$

D'où $b\mathcal{R}a$. Ainsi $\mathcal{R}$ est symétrique

*transitivité

$soient \; a, b, c \in E \; tel \; que \; a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$. A-t-on $a\mathcal{R}c$?

$a\mathcal{R}b \Rightarrow a^3 - b^3 = 6p \;\; , p \in \mathbb{Z}$

$b\mathcal{R}c \Rightarrow b^3 - c^3 = 6q \;\; , q \in \mathbb{Z}$

En additionnant ces égalités, on obtient ;

$a^3 - c^3 = 6(p + q), \;\; p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow \; a^3 - c^3 = 6k \;\; , k = p + q \in \mathbb{Z}$

D'où $a\mathcal{R}c$. Ainsi $\mathcal{R}$ est transitive.

$\mathcal{R}$ étant réflexive, symétrique et transitive alors $\mathcal{R}$ **est une relation d'équivalence**

2)

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

2-) * classe de 0 : $\overline{0} = \{x \epsilon E \ tel \ que \ x\mathcal{R}0\}$

$x\mathcal{R}0 <=> x^3 = 6k, k\epsilon\mathbb{Z} <=> 6|x^3$

Tableau de congruence modulo 6

x	0	1	2	3	4	5
x^3	0	1	2	3	4	5

D'après le tableau de congruence $6|x^3 <=> 6|x$

D'où $x\epsilon\overline{0} <=> 6|x <=> x = 6\mathbb{Z}$

Ainsi $\overline{0} = \{0; 6; 12; 18\}$.

*Classe de 1 : $\overline{1} = \{x \epsilon E \ tel \ que \ x\mathcal{R}1\}$

$x\mathcal{R}1 <=> x^3 - 1 = 6k, k\epsilon\mathbb{Z} <=> x^3 = 6k + 1 <=> x^3 \equiv 1[6]$

$<=> x \equiv 1[6]$ d'après le tableau de congruence

$<=> x = 1 + 6k, k\epsilon\mathbb{Z}$

D'où $\overline{1} = 1 + 6\mathbb{Z} = \{1; 7; 13; 19\}$.

3-) * classe de 2 : $\overline{2} = \{x \epsilon E \ tel \ que \ x\mathcal{R}2\}$

$x\mathcal{R}2 <=> x^3 - 8 = 6k, k\epsilon\mathbb{Z} <=> x^3 = 8 + 6k <=> x^3 = 2 + 6K, avec$

$K = k + 1 \epsilon\mathbb{Z}$

$<=> x^3 \equiv 2[6] <=> x \equiv 2[6]$ *d'après le tableau de congruence,*

$<=> x = 2 + 6k, k\epsilon\mathbb{Z}$

Ainsi $\overline{2} = 2 + 6\mathbb{Z} = \{2; 8; 14; 20\}$

*classe de de 3 ,4,5 : on montre de façon analogue que $\overline{3} = 3 + 6\mathbb{Z} = \{3; 9; 15; 21\}$

$\overline{4} = 4 + 6\mathbb{Z} = \{4; 10; 16; 22\}$ $\overline{5} = 5 + 6\mathbb{Z} = \{5; 11; 17; 23\}$.

EXERCICE4 :

1-) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}^*, n \longmapsto \begin{cases} n & si \ n > 0 \\ -n + 1 & si \ n < 0 \end{cases}$ *f est bien injective.*

2-) $g: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Z}, n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & si \ n \ est \ pair \\ \frac{-n+1}{2} & si \ n \ est \ impair \end{cases}$ *g est bien surjective.*

3-) les applications f *et* g définies dans les questions précédentes sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Ainsi $f \circ g: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*, n \longmapsto n$ *et* $g \circ f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \longmapsto n$.

Scanned with CamScanner

Eléments de logique

session 1 2023-2024

Exercice 1

Dire si les collections suivantes sont des ensembles ou non
1. $A = \{\emptyset, 1, \{1\}, \{3, 2, 1\}, \{1, 2\}\}$**oui** $B = \{z \in \mathbb{C} : z < 2i + 1\}$**oui**
2. E la collection de tous les étudiants inscrits pour l'année 2023-2024 qui iront à Adjamé **non**
3. F la collection de toutes les fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ **oui**

Exercice 2

Soient $\mathcal{E}$ l'ensemble des étudiants de UFR-MI et $\mathcal{R}$ l'ensemble des repas
Exprimer clairement chacune des propositions suivantes écrites avec les quantificateurs :
1. Aucun repas n'est mangé par tous (les étudiants).
2. Il y'a un repas que tous les étudiants mangent.
3. Un étudiant ne mange aucun repas .
4. Il y'a un repas qui n'est pas mangé par tous (tous les étudiants).

Exercice 3

1. On a 2^2+2=6 et 3^2+3=12, 6 divise bien 12, donc 3 majore 2.
2. (a) On a pour tout a , a^2+a se divise , donc a $\prec$ a . La relation $\prec$ est reflexive.
(b) Si a$\prec$b et b$\prec$a , alors a^2+a divise b^2+b et b^2+b divise a^2+a .
Clairement on aura l'égalité a^2+a=b^2+b et comme a et b sont positifs , cette égalité conduira l'égalité a=b .
La relation $\prec$ est donc anti-symétrique .
(c) $\prec$ est clairement transitive !
(d)$\prec$ est donc une relation d'ordre , mais $\prec$ est **partielle**. En on a ni 3$\prec$4, ni 4$\prec$3. 3 et 4 ne sont donc pas **comparables**.
3. Soit A=$\{3, 4, 5, 90\}$. La partie A est **majorée** par 12×20×90×91 .
Elle n'est cependant pas **minorée** car aucun entier plus petit ou égale à 3 ne minore A .

Exercice 4

1. La représentation de f dans le diagramme montre bien que f est une application .
2. $\theta \neq id_E$ et $\theta \circ \theta \circ \theta = id_E$ et θ=$\{(0,1),(1,2),(2,0),(5,5)\}$ répond à cette question .

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Université FHB, UFR-MI
Licence1 : Classique
Année académique 2023 – 2024

Corrigé de l'Examen d'Eléments de logique, Session 2.

Exercice 1 :(6 = 4 × 1.5-points) . Notons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des étudants en L1 en seconde session, $\mathcal{M}$ l'ensemble des matières et par $\mathcal{N}$ l'ensemble des Notes. On écrira N(e) pour la note de l'étudiant "e".

Exprimons à l'aide des quantificateurs, les propositions suivantes :

1. À toutes les matières de la session, un étudiant aura **moins** de 03/20.
   $\forall m \in \mathcal{M}$, $\exists e \in \mathcal{E}$ tel que $n(e) < 03$.
2. Aucun étudiant **n'aura** une note supérieure à 11, et ce, dans toutes les matières.
   $\forall m \in \mathcal{M}$, $\forall e \in \mathcal{E}$ tel que $n(e) \leq 11$.
   ou $\forall e \in \mathcal{E}$ tel que $n(e) \leq 11$, $\forall m \in \mathcal{M}$.
3. Dans une seule matière, un étudiant aura la moyenne.
   $\exists! m \in \mathcal{M}$ telle que $\exists e \in \mathcal{E}$ pour qui on a $n(e) \geq 10$.
4. Aucune matière ne sera validée !
   $\forall m \in \mathcal{M}$, $\exists e \in \mathcal{E}$ tel que $n(e) < 10$.

Exercice 2 :(3 = 1 + 1 + 1-points)

Exprimer à l'aide de quantificateurs et symboles logiques, les affirmations suivantes :

1. La partie A n'est pas incluse dans $\mathbb{N}$. peut s'exprimer comme suit :
   $\exists a \in A$ tel que $a \notin \mathbb{N}$
2. L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est bornée. peut s'exprimer comme suit :
   $$\exists r \in \mathbb{R}_+^* \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \leq r$$
3. L'intervalle $]1, 2[$ n'a pas un **élément plus petit** que les autres. peut s'exprimer comme suit :
   $$\forall \alpha \in]1, 2[, \ \exists \alpha' \in]1, 2[\text{ tel que } \alpha' < \alpha$$

Exercice 3 : (6-points)

Sur l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{Z} : -23 \leq n \leq 23\}$, on considère la relation binaire suivante :

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

$a\mathcal{R}b$ si $a^3 - b^3$ est un multiple 6.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (a) On a pour tout a, $a^3 - a^3 = 0$ et $0 \in 6\mathbb{Z}$. Donc $a\mathcal{R}a$ pour tout $a \in E$, la relation $\mathcal{R}$ est reflexive. (1-point)
   (b) Si pour $(a, b) \in E^2$ on a $a\mathcal{R}b$, c'est à dire $a^3 - b^3 \in 6\mathbb{Z}$, alors $b^3 - a^3 = -(a^3 - b^3) \in 6\mathbb{Z}$. Par conséquent on a $b\mathcal{R}a$, $\mathcal{R}$ est symétrique. (1-point),
   (c) $\mathcal{R}$ est clairement transitive! (1-point)
2. Les classes d'équivalence de 0 et de 1.
   (a) La classe d'équivalence de 0.

$$\overline{0} = \{a \in E : a\mathcal{R}0\} = \{a \in E : a^3 \in 6\mathbb{Z}\} = \{a \in E : a \in 6\mathbb{Z}\}$$

   On trouve $\overline{0} = E \cap 6\mathbb{Z}$ 1 Point
   (b) La classe d'équivalence de 1.

$$\overline{1} = \{a \in E : a^3 - 1 \in 6\mathbb{Z}\}$$

   Comme $a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1)$, on voit que si $a - 1 \in 6\mathbb{Z}$, alors $a^3 - 1 \in 6\mathbb{Z}$. On a donc $E \cap 6\mathbb{Z} + 1 \subseteq \overline{1}$, et on trouve finalemment :

$$\overline{1} = E \cap (6\mathbb{Z} + 1)$$

   (1-point).
3. Déterminer toutes les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$. Comme

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

   on voit que si $a - b \in 6\mathbb{Z}$, alors $a^3 - b^3 \in 6\mathbb{Z}$. On a donc

$$E \cap (6\mathbb{Z} + a) \subseteq \overline{a}$$

   et on trouve finalemment on trouve 6 classes d'équivalence :
   $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2} = E \cap (6\mathbb{Z} + 2)$, $\overline{3} = E \cap (6\mathbb{Z} + 3)$, $\overline{4} = E \cap (6\mathbb{Z} + 4)$ et $\overline{5} = E \cap (6\mathbb{Z} + 5)$. (1-point)

Exercice 4 :(5-points) . Soient $f : E \longrightarrow E$ une **application** , et A, B deux parties de E.

De votre choix, montrer **une seule** des propriétés suivantes :

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny

UFR-MI

Licence 1 :

Année académique 2020-2021

Examen de Structures Algébriques :

(Première Session 2heures)

Exercice 1 : (7-points).

Soit l'ensemble $E = \{1,2,3,4,5\}$.

1. Construire sur E deux l.c.i **(loi de composition interne)** commutatives, admettant respectivement 3 et 5 comme éléments neutres.
2. Construire sur E une l.c.i **non commutative, non associative,** admettant 1 comme élément neutre.
3. Construire sur E une l.c.i commutative, associative, admettant 1 comme élément neutre, et telle que chaque élément admette un symétrique..

Exercice 2 : (7-points) On considère l'anneau quotient $A = \frac{\mathbb{Z}}{16\mathbb{Z}}$.

1. Déterminer les classes d'équivalences de 33^{2021} et de 31^{2021} dans A.
2. A est-il commutatif, unitaire, intègre ?
3. Déterminer $\mathcal{U}(A)$ l'ensemble des éléments inversibles de A.
4. Déterminez tous les sous-groupes du groupe $\mathcal{U}(A)$.

Exercice 3 : (6-points)

On considère l'anneau quotient $\mathbb{K} = \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{K}[X]$, l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Ecrire les tables de l'addition et de la multiplication de l'anneau quotient $\mathbb{K}$.
2. Effectuer dans $\mathbb{K}[X]$, la division euclidienne de $P(X) = X^5 + 2X^4 + 3X^3 + 4X + 1$ par $Q(X) = 4X^3 + X^2 + X + 4$.
3. Effectuer dans $\mathbb{K}[X]$, **si possible,** la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 3, de : $P(X) = X^5 + 2X^4 + 3X^3 + 4X + 1$ par $Q(X) = 4X^3 + X^2 + X + 4$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny, UFR-MI
Licence 1, Année académique 2020-2021.

Examen de Structures algébriques : (Deuxième session *1h30*min)

Exercice : 1 : (15-points)
Répondre par **vrai** ou par **faux** à chacune des propositions suivantes :
Notez bien : 1,5-points pour une bonne réponse et -0,5 si **non**.

1. Sur tout ensemble d'au moins 2 éléments, on peut définir une loi de composition interne (**l.c.i**) non commutative.
2. Toute **l.c.i** commutative est associative.
3. Il y'a des **l.c.i** qui sont ni associatives, ni commutatives, mais admettent un élément neutre.
4. Un même éléments peut être neutre pour 2 lois de compositions internes **différentes** sur un ensemble E.
5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il y a des groupes finis de n éléments.
6. Si H est un sous-groupe de 2 éléments d'un groupe fini G, alors le cardinal de G est pair.
7. Il y a des groupes infinis qui ont des sous-groupes de 2 éléments.
8. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il y a des groupes abéliens de 2^n éléments.
9. Dans un anneau commutatif unitaire, l'ensemble de tous les éléments inversibles est un groupe.
10. Les idéaux de l'anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ sont exactement ses sous-groupes.

Exercice : 2 : (5-points) On considère le produit cartésien de l'anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ par lui-même : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On rappelle que $(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$ et $(a,b).(a',b') = (a.a', b.b')$.
Soient

$$I = \{(n,n), n \in \mathbb{Z}\} \text{ et } J = \{(n,3m), n, m \in Z\}$$

1. Montrer que I est stable pour + et pour . .
2. I est-il un idéal de l'anneau $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?
3. Montrer que J est un idéal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny
UFR-MI
Licence 1
Année académique 2021 – 2022

Examen de Strutures algébriques : (première session 2h)

Exercice 1 : (6-points).

Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sur E, on considère la loi de composition interne $\wedge$, définie par :

$$a \wedge b = Min\{a, b\}$$

1. Ecrire la table de la loi $\wedge$.
2. Etudier la loi $\wedge$.
3. Si la loi $\wedge$ admet un élément neutre, déterminer l'ensemble des éléments ayant un symétrique.
4. Calculer $4^{m!}$ pour un entier $m \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : (6-points) Soient $A = \{\bigcirc, \heartsuit, \square\}$ et le groupe $(\mathcal{P}(A), \triangle)$. où $\triangle$ est la loi différence symétrique.

1. Déterminer $\mathcal{P}(A)$.
2. Montrer que $\mathcal{H} = \{\varnothing, \{\bigcirc\}\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{P}(A)$.
3. Quel est le cardinal de $\frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{H}}$? Déterminer ses classes d'équivalences

Exercice 3 :(8-points) . On considère l'ensemble

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ est un sous-anneau du corps $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
2. Si $z = a + b\sqrt{5}$, on note $\widehat{z} = a - b\sqrt{5}$. Montrer que
$$\widehat{z_1 + z_2} = \widehat{z}_1 + \widehat{z}_2, \quad \widehat{z_1 \cdot z_2} = \widehat{z}_1 \cdot \widehat{z}_2, \text{ et } \quad z \cdot \widehat{z} \in \mathbb{Z}$$
3. Montrer que si z est inversible alors $\widehat{z}$ est inversible et $z\widehat{z} \in \{-1, 1\}$.
4. Montrer que $2 + \sqrt{5}$ est inversible.
5. Donner 19 éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UFR-MI
Licence 1 :
Année académique 2021 – 2022

Examen de Strutures algébriques :
(Deuxière session 2heures)

Exercice 1 : (7-points).
Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. Construire sur E deux l.c.i(loi de composition internes) commutatives, admettant respectivement 1 et 4 comme éléments neutres.
2. Construire sur E une l.c.i non commutative, non associative, admettant 1 comme élément neutre.
3. Construire sur E une l.c.i commutative, associative, admettant 1 comme élément neutre, et telle que chaque élément admette un symétrique.

Exercice 2 : (7-points) On considère l'anneau quotient $A = \frac{\mathbb{Z}}{25\mathbb{Z}}$.

1. Déterminer les classes d'équivalences de 16^{2022} et de 36^{2022} dans A.
2. A est-il commutatif, unitaire , intègre ?
3. Déterminer $\mathcal{U}(A)$ l'ensemble des éléments inversibles de A.
4. Déterminer :
   (a) 1 sous-groupe de 2 éléments du groupe $\mathcal{U}(A)$.
   (b) 1 sous-groupe de 4 éléments du groupe $\mathcal{U}(A)$.
   (c) 1 sous-groupe de 5 éléments du groupe $\mathcal{U}(A)$.

Exercice 3 : (6-points).

On considère l'anneau quotient $\mathbb{K} = \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{K}[X]$, l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Ecrire les tables de l'addition et de la multiplication de l'anneau quotient $\mathbb{K}$.
2. Effectuer dans $\mathbb{K}[X]$, la division euclidienne de
   $P(X) = X^5 + \dot{2}X^4 + \dot{3}X^3 + \dot{4}X + \dot{1}$ par $Q(X) = \dot{4}X^2 + X^2 + X + \dot{4}$.
3. Effectuer dans $\mathbb{K}[X]$, si possible, la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 3, de
   $U(X) = \dot{3}X^3 + \dot{4}X + \dot{1}$ par $V(X) = \dot{4}X^3 + X^2 + X + \dot{4}$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny / UFR-MI / L1 Maths-Info TC / 2023

Durée: 2 h 35 mn
NB: la clarté de la rédaction sera notée!

Examen - Session 1 - Structures algébriques

Exercice 1

1) Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (justifier les réponses!).

i) L'anneau $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est intègre.

ii) $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad n^2\mathbb{Z} \subseteq -n\mathbb{Z}$.

2) Déterminer les entiers naturels m, n, k tels que

i) $150\mathbb{Z} + 231\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$

ii) $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} + 16\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$

iii) $15\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$.

3) Déterminer des entiers u, $v \in \mathbb{Z}$ tels que $150\,u + 231\,v = m$

Exercice 2

1) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants:

$$P_1 = X^3 + 1, \quad P_2 = X^4 + X^2 + 1.$$

2) Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les polynômes A et B suivants:

$$A = (X^4 + X^2 + 1)^3(X + 7)^4(X^2 + 2X + 3)^7, \quad B = (X + 7)^4(X^2 - 9)(X^2 + X + 1)^5$$

Déterminer le PPCM et le PGCD des polynômes A et B.

3) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle réelle suivante.

$$F(X) = \frac{4X^2}{(X^3 + 1)(X^2 - X + 1)}$$

Exercice 3

1) Rappeler la définition d'un anneau unitaire.

2) Rappeler la définition d'un corps.

3) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on pose

$$a \top b = a + b - 1 \quad \text{et} \quad a * b = ab - a - b + 2$$

i) Montrer que $(\mathbb{R}, \top, *)$ est un anneau commutatif unitaire.

ii) Vérifier si $(\mathbb{R}, \top, *)$ est un corps.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Durée: 3 heures
NB: la clarté de la rédaction sera notée!

Examen - Session 1 - Structures algébriques

Exercice 1

1) Décomposer le polynôme $P(X) = X^8 - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

2) On pose $F(X) = \dfrac{1}{X^8 - 1}$.

(i) Quelle est la parité de la fraction rationnelle $F(X)$.
(ii) Décomposer la fraction rationnelle $F(X)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 2

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, note par $\overline{z}$ le *conjugué* de z dans $\mathbb{C}$. On considère l'ensemble

$$A = \{a + ib\sqrt{5} \,/\, a, b \in \mathbb{Z}\}$$

1) Montrer que A est un sous-anneau de l'anneau $(\mathbb{C}, +, \times)$.

2) Vérifier que $\forall z \in A,\ z\overline{z} \in \mathbb{Z}$.

3) Pour $u, v \in A$, on dit que u *divise* v dans l'anneau $(A, +, \times)$ si il existe $w \in A$ tel que $v = wu$.

(i) Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $(A, +, \times)$.
(iii) Déterminer tous les éléments de A qui divisent 4 dans l'anneau $(A, +, \times)$.

Exercice 3

Pour tout a et b de l'intervalle $I = [1; +\infty[$, on pose $a \top b = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2}$.

(1) Vérifier que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$$

(2) Montrer que $\top$ est une loi de composition interne dans I.

(3) Montrer que $(I, \top)$ est un groupe commutatif.

(4) Montrer que l'ensemble $\Gamma = \{\sqrt{1 + 2^m} / m \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe du groupe $(I, \top)$.

(5) On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif.

(i) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow I$ définie par $x \longmapsto \sqrt{x + 1}$ est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers le groupe $(I, \top)$.
(ii) Déterminer le noyau $\ker(\varphi)$ de φ.
(iii) Vérifier si φ est un isomorphisme de groupes.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

STRUCTURE ALGEBRIQUE Session 2 2023-2024

EXERCICE 1

1) Décomposer le polynome $P(X) = X^4 + 1$ en produit de facteurs irreductible dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$
2)On pose $F(X) = \frac{3X^5}{X^4+1}$
i)Quelle est la parité de la fraction rationnlle F(X)
ii)Décomposer la fraction rationelle F(X) en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$

EXERCICE 2

Dans $\mathbb{R}$ on définit la loi T par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad xTy = xy - 2(x+y) + 6$$

1) On pose $G = \mathbb{R} \setminus 2$ Montrer que G est une partie stable pour la loi T
2)Montrer que (G, T) est un groupe commutatif
3) On considère l'application $g : G \to \mathbb{R}^*$ définie par $x \mapsto x - 2$
Montrer que g est un isomorphisme du groupe (G, T) sur le groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$
4) Montrer que $[2, +\infty]$ est un sous-groupe du groupe (G, T)

EXERCICE 3

Parmi les affirmation suivantes lesquelles sont vraies lesquelles sont fausses ?
Justifier vos réponses (NB toute réponse non justifié ne sera pas prise en compte)
a) Si le produit de deux entiers est congru 0 modulo 5 alors l'un des deux est multiple de 5
b) Si un entier est congru à 2 modulo 5 alors sa puissance quatrième est congru à 1 modulo 5
c) Si deux entiers sont congru à 2 modulo 5 alors leur somme est congru à 1 modulo 5
d)Pour tout entier non multiple de 5 il existe un entier tel que le produit des deux soit congru à 1 modulo 5
e) Aucun entier n'est tel que son carré soit congru à 1 modulo 5
f) Aucun entier n'est tel que son carré soit congru à 2 modulo 5
g) La puissance quatrième d'un entier non multiple de 5 est toujours congru à 1 modulo 5

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Correction du sujet de structure algébrique

session 1 année 2020-2021

Exercice 1

1)

- Table d'une loi de composition interne admettant 3 comme élément neutre

Notons * cette loi de composition interne

En effet, $\forall x \in E, x * 3 = 3 * x = x$

*	1	2	3	4	5
1	2	5	1	4	3
2	4	1	2	2	2
3	1	2	3	4	5
4	5	3	4	1	1
5	1	5	5	5	4

- Table d'une loi de composition interne admettant 5 comme élément neutre

Notons Δ cette loi de composition interne

En effet, $\forall x \in E, x\Delta 5 = 5\Delta x = x$

Δ	1	2	3	4	5
1	4	5	2	3	1
2	3	1	3	4	2
3	2	3	5	5	3
4	1	5	4	2	4
5	1	2	3	4	5

2)

- Table d'une loi de composition interne non commutative, non associative admettant 1 comme élément neutre.

Notons □ cette loi de composition interne

□	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	3	5	2	3
3	3	4	5	2	1
4	4	1	2	2	5
5	5	4	1	4	3

On a : $3\square 2 = 4$ et $2\square 3 = 5$, donc □ n'est pas commutative.

$(3\square 2)\square 4 = 2$ et $3\square(2\square 4) = 4$,

Donc □ n'est pas associative.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

3) Table d'une LCI associative, commutative, admettant 1 comme élément neutre, et celle que chaque élément admette un symétrique.
Notons 'T' cette loi de composition interne

T	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	1	1	1
3	3	1	1	1	1
4	4	1	1	1	1
5	5	1	1	1	1

Exercice 2

$A = \frac{\mathbb{Z}}{16\mathbb{Z}}$

1) Déterminons les classes d'équivalence de 33^{2021} et de 31^{2021} *dans A.*

On a : $33 = 16 \times 2 + 1 \Leftrightarrow 33 \equiv 1[16]$

$\Leftrightarrow 33^{2021} \equiv 1^{2021}[16]$

$\Leftrightarrow 33^{2021} \equiv 1[16]$ comme $0 \leq 1 \leq 16$

Ainsi $\bar{1}$ est la classe d'équivalence de 33^{2021} dans A.

On a : $31 = 16 \times 2 - 1 \Leftrightarrow 31 \equiv -1[16]$

$\Leftrightarrow 31^{2021} \equiv (-1)^{2021}[16]$

$\Leftrightarrow 31^{2021} \equiv -1[16]$

Or $-1 \equiv 15[16]$, d'où $31^{2021} \equiv 15[16]$ et comme $0 \leq 15 < 16$

Ainsi $\overline{15}$ est la classe d'équivalence de 31^{2021} dans A.

2) A est-il commutatif, unitaire, intègre ?

$A = \frac{\mathbb{Z}}{16\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}\}$

Soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in A^2$

On a : $\bar{x} \times \bar{y} = \overline{xy} = \overline{yx} = \bar{y} \times \bar{x}$

Ainsi A est commutative.

De plus, $\bar{1} \times \bar{x} = \overline{1 \times x} = \overline{x \times 1} = \bar{x}$

Ainsi A est unitaire d'élément neutre 1.

Mais $\bar{2} \times \bar{8} = \overline{16} = \bar{0}$ d'où A n'est pas intègre.

En conclusion : A est commutative, unitaire et non intègre.

3) Déterminons $\mathcal{U}(A)$.

$\mathcal{U}(A) = \{\bar{x} \in A, pgcd(x, 16) = 1\}$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$\mathcal{U}(A) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{15}\}$

4) Déterminons tous les sous-groupes de groupe $\mathcal{U}(A)$.

On sait que les cardinales des sous-groupes de $\mathcal{U}(A)$ doivent divisés le cardinal de $\mathcal{U}(A)$.

Comme $card(\mathcal{U}(A)) = 8$, alors les cardinaux possibles sont : 2,4 *et* 8.

- Les sous-groupes à 2 éléments sont :
  $\{\bar{1}, \bar{7}\}, \{\bar{1}, \bar{9}\}, \{\bar{1}, \overline{15}\}$
- Sous-groupe à 4 éléments :
  $\{\bar{1}, \bar{3}, \overline{11}, \bar{9}\}$
- Sous-groupe à 8 éléments :
  $\mathcal{U}(A)$

Exercice 3

1) Table de l'addition et de la multiplication de l'anneau quotient $\mathbb{K}$.

$\mathbb{K} = \frac{\mathbb{K}}{5\mathbb{K}} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\}$

+	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{4}$	0	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$

−	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	4	5
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

2) La division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ de $P[X]$ par $Q[X]$.

Ainsi $P(X) = Q(X).(\dot{4}X^2 + \dot{2}X + \dot{3}) + \dot{4}X^2 + \dot{3}X + \dot{4}$

3) Division suivants la puissance croissantes, à l'ordre 3 de $P(X)$ par $Q(X)$

Par suite : $P(X) = Q(X).(\dot{4} + \dot{4}X^2 + \dot{2}X^3) + X^3(X + \dot{3}X^2 + \dot{2}X^3)$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Université FHB Maths-Info 2020-2021

CORRECTION STRUCTURE ALGEBRIQUE

SESSION 2

Exercice 1

1- Vrai
2- Faux
3- Vrai
4- Vrai
5- Vrai
6- Vrai
7- Vrai
8- Faux
9- Vrai
10- Faux

Exercice 2

$I = \{(n,n);\ n \in \mathbb{Z}\}$ et $J = \{(n,3m);\ n,m \in \mathbb{Z}\}$

1. Montrons que I est stable pour la loi $+$ et la loi $\bullet$
Soient $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ et $(a',b') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

À t-on $(a,b)+(a',b') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$?

$(a,b)+(a',b') = (a+a',b+b')$ avec $a+a' \in \mathbb{Z}$ et $b+b' \in \mathbb{Z}$ d'où $(a+a',b+b') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ donc I est stable pour la loi $+$.

À t-on $(a,b).(a',b') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$?

$(a,b).(a',b') = (a+a',b+b')$ avec $a.a' \in \mathbb{Z}$ et $b.b' \in \mathbb{Z}$ d'où $(a.a',b.b') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ donc I est stable pour la loi $\bullet$.

2. Vérifions si I est idéal de l'anneau $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Nous avons montré que I est stable pour la loi $+$ et la loi $\bullet$ à la question 1). Donc il suffit de vérifier que I admet un élément neutre et chaque

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

éléments de I admet un symétrie.

Vérifions que I admet un élément neutre

Soit (e,e') l'élément neutre de I et soit $(a,b) \in I$ alors, on a:
$(a,b)+(e,e')=(a,b)$
$(e,e')=(a,b)-(a,b)$
$(e,e')=(0,0)$
$\Rightarrow e=0$ et $e'=0$ d'où l'élément neutre de I est $(0,0)$ alors I admet effectivement un élément neutre.

Vérifions que chaque éléments de I admet un élément symétrie.

Soit (a_1,b_1) le symétrie du couple (a,b) avec $(a_1,b_1) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
On a donc $(a,b)+(a_1,b_1)=(0,0)$
$(a+a_1\,,\,b+b_1)=(0,0)$

$$\begin{cases} a+a_1=0 \\ b+b_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=-a \\ b_1=-b \end{cases}$$

D'où l'élément symétrie du couple (a,b) est $(-a,-b)$. Donc chaque élément de I admet un symétrie.
Conclusion: I est belle et bien un idéal de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

3. Montrons que J est un idéal de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Vue la question 1), il est trivial de montrer que J est stable pour la loi $+$ et la loi $\bullet$

Montrons que J admet un élément neutre

Soit $(\varepsilon,\varepsilon')$ l'élément neutre de J, alors on a:
$(n,3m)+(\varphi,\varphi')=(n,3m)$
$(n+\varpi,3m+\varphi')=(n,3m)$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+\varphi=n \\ 3m+\varphi'=3m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi=0 \\ \varphi'=0 \end{cases}$$

D'où l'élément neutre de J est $(0,0)$

Montrons que chaque éléments de J admet un symétrie

Soit (d,g) le symétrie de $(n,3m)$ alors on a:
$(n,3m)+(d,g)=(0,0)$
$(n+d,3m+g)=(0,0)$

$$\begin{cases} n+d=0 \\ 3m+g=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=-n \\ g=-3m \end{cases}$$

D'où le symétrie du couple $(n,3m)$ est $(\ n,\ 3m)$. Donc chaque élément de J admet un symétrie.

Conclusion: Au regard de ce qui précède on a montré que J est un idéal de l'anneau $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

CORRECTION DE STRUCTURE ALGEBRIQUE SESSION 1 ANNEE 2021-2022

EXERCICE 1

Soit $E = \{1,2,3,4,5\}$ on considère la loi ∧ par $a \wedge b = \min\{a, b\}$

1 – Table de loi ∧

∧	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3
4	1	2	3	4	4
5	1	2	3	4	5

2 – Etudions la loi ∧

- Commutativité

Soient $a, b \in E$

$a \wedge b = \min\{a, b\}$

$= \min\{b, a\}$

$a \wedge b = b \wedge a$ Donc la loi ∧ est commutative

- Assoiciativité

Soient a, b, c *élements de* E *tels que* $a < b < c$

$a \wedge (b \wedge c) = a \wedge \min\{b, c\}$

$= a \wedge b$

$= \min\{a, b\}$

$= a$

$(a \wedge b) \wedge c = \min\{a, b\} \wedge c$

$= a \wedge b$

$= \min\{a, c\}$

$= a$

Ainsi $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ La loi ∧ est associative

- Elément neutre

Exist-il un unique élément de E tel que :

$e \wedge x = x,\ x \in E$?

$\forall x \in E, on\ a\ 5 \wedge x = x$ D'après la table de la loi ∧

Ainsi 5 est l'élément neutre de de la loi ∧

- Elément symétrie

Vérifions si $\forall x \in E,\ \exists\ x' \in E, x \wedge x' = 5$

D'après la table de la loi ∧, on a 5∧5=5

Donc la loi ∧ n'est pas symétrisable.

3 – L'ensemble des éléments ayant un symétrie. Soit A, cet ensemble $A = \{5\}$

4 - Calculons 4^m pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$

$$4^m = \underbrace{4 \wedge 4 \wedge \dots \wedge 4}_{m\ fois}$$

$$= \min\{4, \dots, 4\}$$

$$4^m = 4$$

EXERCICE 2

Soit $A = \{\circ, \heartsuit, \square\}$ et le groupe $(\mathcal{P}(A), \Delta)$

1 – Déterminons $\mathcal{P}(A)$. $card(\mathcal{P}(A)) = 2^3 = 8$ =>

$\mathcal{P}(A) = \{\phi; \{\circ\}; \{\heartsuit\}; \{\square\}; \{\circ; \heartsuit\}; \{\circ; \square\}; \{\heartsuit; \square\}; A\}$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

2 - Soit $H = \{\phi; \{\circ\}\}$ On vérifie aisément les trois propriétés de sous-groupe

(Trivial)/ $\phi \in H$, $\phi \Delta \{\circ\} = \{\circ\} \in H$, $\{\circ\}\Delta\{\circ\} = \phi \in H$

3 – Cardinal de $\frac{\mathcal{P}(A)}{H}$. D'après le théorème de Lagrange, on a :

$$card\left(\frac{\mathcal{P}(A)}{H}\right) = \frac{card(\mathcal{P}(A))}{card(H)} = \frac{8}{2} = 4$$

Classe d'équivalence de $\frac{\mathcal{P}(A)}{H}$. Puisque $card\left(\frac{\mathcal{P}(A)}{H}\right) = 4$, Alors on a quatre d'équivalence de deux éléments suivant H

- $\overline{\phi} = \phi \Delta H$
  $\overline{\phi} = H$
- $\{\overline{\square}\} = \{\square\}\Delta H$
  $= \{\{\square\}\Delta\phi; \{\square\}\Delta\{\circ\}\}$
  $= \{\{\square\}; \{\square;\circ\}\}$
- $\{\overline{\heartsuit}\} = \{\heartsuit\}\Delta H$
  $= \{\{\heartsuit\}\Delta\phi; \{\heartsuit\}\Delta\{\circ\}\}$
  $= \{\{\heartsuit\}; \{\heartsuit;\circ\}\}$
- $\{\overline{\heartsuit;\square}\} = \{\heartsuit;\square\}\Delta H$
  $= \{\{\heartsuit;\square\}\Delta\phi; \{\heartsuit;\square\}\Delta\{\circ\}\}$
  $= \{\{\heartsuit;\square\}; A\}$

Ses classes d'équivalence sont : $\{\overline{\phi}; \{\overline{\square}\}; \{\overline{\heartsuit}\}; \{\overline{\heartsuit;\square}\}\}$

EXERCICE 3

$Z[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5}, (a+b) \in Z^2\}$.

1 –Montrons que $Z[\sqrt{5}]$est un sous anneau de (R,+,*)

.O=0+0$\sqrt{5}$ d'où O∈$Z[\sqrt{5}]$

.Soient (a,b) et (a',b')∈Z^2

(a+b$\sqrt{5}$)+(a'+b'$\sqrt{5}$)=(a+a')+(b+b')$\sqrt{5}$ puisque a+a'∈Z et b+b'∈Z alors posons f=a+a' et g=b+b' ; a+b$\sqrt{5}$ + $a' + b'\sqrt{5}$=f+g$\sqrt{5}$ ∈$Z[\sqrt{5}]$ on a –(a+b$\sqrt{5}$) $= -a - b\sqrt{5}$ Posons e=-a et g=-b ainsi –(a+b$\sqrt{5}$) $= e +$ $g\sqrt{5}$ ∈Z[5]. Z[5] est un sous-groupe de (R,+,*)

.1=1+0$\sqrt{5}$ ∈Z[5]

.(a+b$\sqrt{5}$)$(a' + b'\sqrt{5})$=(aa'+5bb')+(ab'+ba')$\sqrt{5}$ posons e=aa'+5bb'∈Z et g=ab'+ba'∈Z (a+b$\sqrt{5}$)$(a' +$ $b'\sqrt{5})$=e+g$\sqrt{5}$ ∈$Z[\sqrt{5}]$. En somme Z[5] est un sous anneau du corps R.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

2 – soit z=a+b$\sqrt{5}$, $\hat{z} = 0 - b\sqrt{5}$; $\widehat{z_1 + z_1}$=$a_1 + b_1\sqrt{5} + a_2 + b_2\sqrt{5}$ =$(a_1 - b_1\sqrt{5})$+$(a_2 - b_2\sqrt{5})$=$\hat{z_1} + \hat{z_2}$

$\widehat{z_1 z_2} = (a_1 + b_1\sqrt{5})(a_2 + b_2\sqrt{5}) = a_1a_2 + 5b_1b_2 - (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{5}$ Donc $\widehat{z_1 z_2} = \hat{z_1}\hat{z_2}$

.Montrons que si Z est inversible alors $\hat{Z}$ est inversible et $Z\hat{Z} \in \{-1 ; 1\}$; Z étant inversible alors $\exists Z' \in Z[\sqrt{5}]$, ZZ'=1. ZZ'=1=> $Z\widehat{Z'}=\hat{1}$ => $\hat{Z}\widehat{Z'} = 1$ Ainsi $\hat{Z}$est inversible d'inverse $\widehat{Z'}$

On a ZZ'=1 et $\hat{Z}\widehat{Z'} = 1$ en faisant le produit nombre a nombre on a : ZZ'.$\hat{Z}\widehat{Z'} = 1$ d'où $Z\hat{Z}.Z'\widehat{Z'}$=1 Ce qui montre que $Z\hat{Z} \in \{-1; 1\}$ car $Z\hat{Z}$ et $Z'\hat{Z}$ sont entiers et leur produit donne 1.

4 – Montrons que 2+$\sqrt{5}$ est inversible

Posons Z=2+$\sqrt{5}$ alors $\hat{Z}$=2-$\sqrt{5}$

$Z\hat{Z}$=(2+$\sqrt{5}$)(2-$\sqrt{5}$)=1 Or d'après 3) Z est inversible si $Z\hat{Z} \in \{-1; 1\}$ Puisque $Z\hat{Z}$=1 alors Z=2+$\sqrt{5}$ est invesible.

5 – Donnons 19 éléments de l'anneau Z[5](voir cours)

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny / UFR-MI / L1 Maths-Info TC / 2023

Indications de Correction Examen - Session 1 - Structures algébriques

Exercice 1 (6 points)

1) Disons si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

i) L'anneau $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est intègre. C'est **FAUX** car $8 \neq 0$ et 8 n'est pas premier. **(1 point)**

ii) $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad n^2\mathbb{Z} \subseteq -n\mathbb{Z}$. C'est **VRAI.**
En effet, Tout entier relatif multiple de n^2 dans $\mathbb{Z}$ est multiple de n dans $\mathbb{Z}$. Si $x \in n^2\mathbb{Z}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = n^2 k$, donc $x = (-n)(-nk) \in -n\mathbb{Z}$, ainsi $x \in -n\mathbb{Z}$ et $n^2\mathbb{Z} \subseteq -n\mathbb{Z}$. **(1 point)**

2) Déterminons les entiers naturels m, n, k.

i) $150\mathbb{Z} + 231\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$

On a $m = PGCD(150, 231) = 3$. **(1 point)**

ii) $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} + 16\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$.

On a $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} + 16\mathbb{Z} = (4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}) + 16\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} + 16\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$ donc $n = 2$. **(1 point)**

iii) $15\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$.

On a $15\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} = (15\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z}) \cap 12\mathbb{Z} = 30\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} = 60\mathbb{Z}$. Donc $k = 60$. **(1 point)**

En fait $k = PPCM(PPCM(15, 6), 12) = PPCM(30, 12) = 60$.

3) Déterminons des entiers u, $v \in \mathbb{Z}$ tels que $150u + 231v = m$

D'après la question i) on a $m = 3$. En appliquant l'algorithme d'Euclide, on obtient

$$-20 \times 150 + 13 \times 231 = 3$$

Par identification $u = -20$ et $v = 13$. **(1 point)**

Exercice 2 (8 pts)

1) Factorisons dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $P_1 = X^3 + 1, \quad P_2 = X^4 + X^2 + 1$.

$P_1 = X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$ donc

$$P_1 = (X + 1)(X^2 - X + 1) \qquad \textbf{(1 point)}$$

$P_2 = X^4 + X^2 + 1 = (X^2)^2 + 2X^2 + 1 - X^2 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$

donc

$$P_2 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1) \qquad \textbf{(1 point)}$$

1) Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les polynômes A et B suivants:

$$A = (X^4 + X^2 + 1)^3(X + 7)^4(X^2 + 2X + 3)^7, \quad B = (X + 7)^4(X^2 - 9)(X^2 + X + 1)^5$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Déterminons le PPCM et le PGCD des polynômes A et B.

Une décomposition de A en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$A = (X^2 - X + 1)^3(X^2 + X + 1)^3(X + 7)^4(X^2 + 2X + 3)^7$$

et une décomposition de B en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$B = (X + 7)^4(X - 3)(X + 3)(X^2 + X + 1)^5$$

Ainsi, on trouve

$$PGCG(A, B) = (X + 7)^4 (X^2 + X + 1)^3 \qquad \textbf{(1,5 points)}$$

et

$$PPCM(A, B) = (X^2-X+1)^3(X^2+X+1)^5 (X+7)^4 (X^2+2X+3)^7 (X-3)(X+3) \qquad \textbf{(1,5 points)}$$

3) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle réelle suivante: $F(X) = \dfrac{4X^2}{(X^3+1)(X^2-X+1)}$

On a

$$F(X) = \frac{4X^2}{(X+1)(X^2-X+1)^2}$$

Il existe des nombres réels a, bc, e, f tels que

$$F(X) = \frac{a}{(X+1)} + \frac{bX+c}{X^2-X+1} + \frac{eX+f}{(X^2-X+1)^2}$$

On trouve

$$a = \frac{4}{9}, \quad b = -\frac{4}{9}, \cdots\cdots \qquad \textbf{(3 points)}$$

Exercice 3 (8 pts)

1) Définition d'un anneau unitaire (cf. Cours) **(1,5 points)**

2) Définition d'un corps (cf. Cours). **(1,5 points)**

3) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on pose

$$a \top b = a + b - 1 \quad \text{et} \quad a * b = ab - a - b + 2$$

i) Montrons que $(\mathbb{R}, \top, *)$ est un anneau commutatif unitaire.

Il est clair que ces deux lois sont de composition interne dans $\mathbb{R}$.

Associativité de la loi $\top$:
Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a

$$(a \top b) \top c = (a+b-1) \top c = (a+b-1)+c-1 = a+b+c-2 = a+(b+c-1)-1 = a \top (b \top c)$$

donc $(a \top b) \top c = a \top (b \top c)$.

La loi $\top$ admet 1 comme élément neutre car $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \top 1 = a = 1 \top a$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $2 - a$ est le symétrique de a dans $\top$

et la loi $\top$ est commutative. Ainsi $(\mathbb{R}, \top)$ est un groupe abélien.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

De plus, on montre que la loi $*$ est associative et commutative et admet 2 comme élément neutre et elle est distributive par rapport à la loi $\top$.
En somme, $(\mathbb{R}, \top, *)$ est une anneau commutatif unitaitre. **(4 points)**

ii) Vérifions si $(\mathbb{R}, \top, *)$ est un corps.

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq 1$. Existe-t-il $b \in \mathbb{N}$ tel que $a * b = 2$?
On a

$$a * b = 2 \quad \Leftrightarrow \quad ab - a - b + 2 = 2 \quad \Leftrightarrow b = \frac{a}{a-1}$$

Donc donc a est un élement inversible de l'anneau $(\mathbb{R}, \top, *)$.
L'anneau $(\mathbb{R}, \top, *)$ est donc un corps. **(1 point)**

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Indications de CORRECTION - Examen - Session 1 - Structures algébriques

Exercice 1

1) Décomposons le polynôme $P(X) = X^8 - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Dans $\mathbb{R}$

$P(X) = X^8 - 1 = (X^4)^2 - 1^2 = (X^4 - 1)(X^4 + 1)$. Comme $X^4 - 1 = (X + 1)(X - 1)(X^2 + 1)$ et

$$(X^4+1) = (X^2)^2 + 2X^2 + 1 - 2X^2 = (X^2+1)^2 - (\sqrt{2}\,X)^2 = (X^2 + \sqrt{2}\,X + 1)(X^2 - \sqrt{2}\,X + 1)$$

donc

$$P(X) = (X+1)(X-1)(X^2+1)(X^2+\sqrt{2}\,X+1)(X^2-\sqrt{2}\,X+1)$$

Dans $\mathbb{C}$

$$P(X) = (X+1)\,(X-1)\,(X+i)\,(X-i)\,(X-z_1)\,(X-\overline{z_1})\,(X-z_2)\,(X-\overline{z_2})$$

avec $z_1 = \dfrac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = -e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) On pose $F(X) = \dfrac{1}{X^8 - 1}$.

(i) La parité de la fraction rationnelle F.

On a $F(-X) = \dfrac{1}{(-X)^8 - 1} = \dfrac{1}{X^8 - 1} = F(X)$ donc F est paire.

(ii) Décomposons la fraction rationnelle $F(X)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

on a

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1} + \frac{eX+f}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{gX+h}{X^2-\sqrt{2}X+1}$$

où $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$.

Comme $F(X) = F(-X)$ alors on déduit que $b = -a$ et $c = 0$ et $g = -e$ et $f = h$.

On obtient

$$a = \frac{1}{8},\ b = -\frac{1}{8},\ c = 0,\ d = -\frac{1}{4}$$

Par la limite $\lim_{X \to z_2}(X - z_2)\,F(X)$ on obtient

$$g\,z_2 + h = \frac{1}{(z_2^4 - 1)\,(z_2 - z_1)(z_2 - \overline{z_1})}$$

permet de déterminer g et h. Remarquons que $\overline{z_1} = -z_2$.

on a $z_2^4 - 1 = -2$ et $z_2 - z_1 = \sqrt{2}$ et $z_2 - \overline{z_1} = -2\,\overline{z_1}$.

On obtient $g = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$ et $h = -\dfrac{1}{4}$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Exercice 2

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, note par $\overline{z}$ le *conjugué* de z dans $\mathbb{C}$. On considère l'ensemble

$$A = \{ a + ib\sqrt{5} \,/\, a, b \in \mathbb{Z} \}$$

1) Montrons que A est un sous-anneau de l'anneau $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Il est clair que $A \subseteq \mathbb{C}$.

On sait que $0 = 0 + i\,0\sqrt{5}$ donc $0 \in A$ et $1 = 1 + i\,0\sqrt{5}$ donc $1 \in A$.

Soient $Z_1 = a + ib\sqrt{5}$, $Z_2 = c + id\sqrt{5} \in A$. Alors

$$Z_1 - Z_2 = (a - c) + i(b - d)\sqrt{5} \in A$$

et

$$Z_1 \times Z_2 = (ac - 5bd) + i(ad + bc)\sqrt{5} \in A$$

En somme, A est un sous-anneau unitaire de l'anneau unitaire $(\mathbb{C}, +, \times)$.

2) Vérifions que $\forall z \in A$, $z\overline{z} \in \mathbb{Z}$.

Soit $z = a + ib\sqrt{5} \in A$. Alors

$$z\overline{z} = a^2 + 5b^2 \in \mathbb{Z}$$

puisque $a, b \in \mathbb{Z}$.

3) Pour $u, v \in A$, on dit que u *divise* v dans l'anneau $(A, +, \times)$ si il existe $w \in A$ tel que $v = wu$.

(i) Déterminons les éléments inversibles de l'anneau $(A, +, \times)$.

Soit $z = a + ib\sqrt{5} \in A$. Alors z est un élément inversible de l'anneau $(A, +, \times)$ si il existe $w \in A$ tel que $zw = 1$. On a donc

$$\overline{zw} = 1.$$

Comme $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ alors

$$z\overline{z}\,w\overline{w} = 1$$

Donc $z\overline{z} = 1$, c'est à dire

$$a^2 + 5b^2 = 1$$

Forcement $b = 0$ donc $a = 1$ ou $a = -1$, d'où $z = 1$ ou $z = -1$.

(NB: on peut aussi remarquer que z est un élément inversible de l'anneau $(A, +, \times)$ équivaut à dire que z divise 1 dans l'anneau $(A, +, \times)$, donc $z\overline{z}$ divise 1 dans $\mathbb{N}$).

(iii) Déterminons tous les éléments de A qui divisent 4 dans l'anneau $(A, +, \times)$.

Soit $u = a + ib\sqrt{5} \in A$. Alors u est un diviseur de 4 dans l'anneau $(A, +, \times)$ si il existe $w \in A$ tel que $uw = 4$. Ce qui implique que $u\overline{u}$ divise 16 dans $\mathbb{N}$. C'est à dire que $a^2 + 5b^2$ divise 16 dans $\mathbb{N}$.

VALIDEUR LMD - 2025

Scanned with CamScanner

Ainsi

$$a^2+5b^2 \in \{1, 2, 4, 8, 16\}.$$

Les équations $a^2+5b^2=2$ et $a^2+5b^2=8$ n'ont pas de solutions dans $\mathbb{Z}$.

On a

$$a^2+5b^2=1 \quad \text{implique que} \quad b=0 \quad \text{et} \quad a=\pm 1$$

Donc $u=1$ ou $u=-1$.

$$a^2+5b^2=4 \quad \text{implique que} \quad b=0 \quad \text{et} \quad a=\pm 2$$

Donc $u=2$ ou $u=-2$.

$$a^2+5b^2=16 \quad \text{implique que} \quad b=0 \quad \text{et} \quad a=\pm 4$$

En somme, l'ensemble D des diviseurs de 4 dans l'anneau $(A,+,\times)$ est

$$D=\{-4,-2,-1,1,2,4\}$$

Exercice 3

Pour tout a et b de l'intervalle $I=]1;+\infty[$, on pose $a\top b=\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}$.

(1) On vérifie sans difficulté que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$x^2y^2-x^2-y^2+2=(x^2-1)(y^2-1)+1$$

(2) Montrons que $\top$ est une loi de composition interne dans $I=]1;+\infty[$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. D'après la question (1), on a

$$a^2b^2-a^2-b^2+2=(a^2-1)(b^2-1)+1$$

donc

$$a\top b=\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}=\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)+1}$$

Comme $a>1$ et $b>1$ alors $(a^2-1)(b^2-1)>0$ donc $(a^2-1)(b^2-1)+1>1$ et

$$\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)+1}>1$$

par conséquent, $a\top b \in]1;+\infty[$. La loi $\top$ est donc interne dans $I=]1;+\infty[$.

(3) Montrons que $(I,\top)$ est un groupe commutatif.

On sait que la loi $\top$ est une l.c.i dans I.

Associativité:

Pour tout a, b, c de l'intervalle $I=]1;+\infty[$, on a

$$(a\top b)\top c=(\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2})\top c=\sqrt{a^2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2+a^2+b^2+c^2}$$

donc

$$(a\top b)\top c=\sqrt{a^2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2+a^2+b^2+c^2}$$

On obtient de même que

$$a\top(b\top c)=\sqrt{a^2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2+a^2+b^2+c^2}$$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Commutativité

On montre sans difficulté que pour tout a, b de l'intervalle $I =]1;+\infty[$, on a l'égalité $a \top b = b \top a$.

Élément neutre

On obtient que $e = \sqrt{2}$ est l'élément neutre dans $(I, \top)$.

En effet, $a \top e = a \quad \Leftrightarrow \quad a^2e^2 - a^2 - e^2 + 2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad (e^2 - 2)(a^2 - 1) = 0$ pour tout $a \in I$, par conséquent, $e^2 = 2$, donc $e = \sqrt{2}$.

Élément symétrique

On obtient que pour tout a de l'intervalle $I =]1;+\infty[$, le symétrique de a dans $(I, \top)$ est

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

(4) Montrons que l'ensemble $\Gamma = \left\{\sqrt{1 + 2^m} / m \in \mathbb{R}\right\}$ est un sous-groupe du groupe $(I, \top)$.

On a $\Gamma \subset I =]1;+\infty[$ et $e = \sqrt{2} \in \Gamma$.

Pour tout $a, b \in \Gamma$, il existe $m, n \in \mathbb{R}$ tel que $a = \sqrt{1 + 2^m}$ et $b = \sqrt{1 + 2^n}$. Alors on otient

$$a \top b = \sqrt{1 + 2^{m+n}} \in \Gamma \quad \text{et} \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{\sqrt{1 + 2^m}}{\sqrt{2^m}} = \sqrt{1 + 2^{-m}} \in \Gamma$$

.

En somme, Γ est un sous-groupe du groupe $(I, \top)$.

(5) On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif.

(i) Montrons que l'application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow I$ définie par $x \longmapsto \sqrt{x+1}$ est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers le groupe $(I, \top)$.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\varphi(x) \top \varphi(y) = \sqrt{(1+x)(1+y) - (1+x) - (1+y) + 2} = \sqrt{xy + 1} = \varphi(xy)$$

donc

$$\varphi(x) \top \varphi(y) = \varphi(xy)$$

et φ est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers le groupe $(I, \top)$.

(ii) Déterminons le noyau $\ker(\varphi)$ de φ.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $x \in \ker\varphi \quad \Leftrightarrow \varphi(x) = \sqrt{2}$. Et

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+1} = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

donc $\ker\varphi = \{1\}$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

(iii) Vérifions si φ est un isomorphisme de groupes.

Comme $\ker \varphi = \{1\}$ alors φ est injective.

Soit $a \in I$. Existe-t-il $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varphi(x) = a$?

$$\varphi(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+1} = a \quad \Leftrightarrow \quad x = a^2 - 1$$

Et $a^2 - 1 \in \mathbb{R}_+^*$, donc φ est surjective.

En somme, φ est un isomorphisme de groupes.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

EXAMEN TEF / SESSION 1 Durée : 2 heures LICENCE 1 / MATH & INFO

2019-2020

EXERCICE 1 (6 pts)

Indiquez les registres pour chacun des mots.

1. Embéter
2. Se gourer
3. Egueulasse
4. La flotte
5. Ennuyer
6. Se tromper
7. Sale
8. L'eau
9. Importuner
10. Se méprendre
11. Répugnant
12. Onde

EXERCICE 2 (5 pts)

Mettre les verbes donnés à la forme pronominale, même temps, même personne.

1. Tu salis
2. Vous nourrissiez
3. Elle déplaça
4. Nous obligeons
5. Ils échangent
6. Je suis interrogé
7. Elle était trempée
8. Nous serons ennuyés
9. Tu es détendu
10. Vous étiez changés

EXERCICE 3 : (5 pts)

Dites si les verbes des phrases sont à la forme pronominale réfléchi ou réciproque.

1) Ma sœur se peigne longuement tous les matins.
2) Ces enfants se disputent souvent.
3) Alain et son frère s'affrontent à l'escrime.
4) Cette personne s'écoute parler en société.
5) Je m'enlève une écharde du pied.
6) Mes parents s'entraident à la cuisine.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

7) Tu t'appliques un nouveau produit de beauté.
8) Les deux adversaires se regardent méchamment.
9) Tu te soucies peu de ton avenir.
10) Vous vous dénoncez sans le savoir.

EXERCICE 4 : (5 pts)

Dites si ces verbes sont essentiellement pronominaux ou accidentellement pronominaux.

1. S'absenter	2. S'affaiblir	3. S'arroger	4. S'enfuir	5. S'enquérir
6. S'ensuivre	7. S'entraider	8. S'envoler	9. S'étonner	10. S'évanouir
12. S'exclamer,	13. Se féliciter	14. Se formaliser	15. S'immiscer	16. S'insurger
17. Se méprendre	18. Se plaindre	19. Se presser	20. Se saisir	

EXERCICE 5 (5 pts)

Identifiez la valeur des connecteurs logiques employés dans chacune des phrases.

1. Hortense a appris sa leçon donc elle a eu une très bonne note.
2. Barnabé est tombé. En effet, il a glissé sur une plaque de verglas.
3. Hortense prendra le bus ou le train pour partir en vacances.
4. Certes, il fait beau...
5. J'aime les betteraves et les choux.
6. Hortense a menti à ses parents car elle avait peur de se faire disputer.
7. Je connais ma leçon par cœur. Toutefois, je redoute l'interrogation.
8. La fourmi a mis de la nourriture de côté, ainsi elle ne mourra pas de faim en hiver.
9. Barnabé n'aimait ni la lecture, ni le calcul, ni le dessin, ni la musique.
10. J'aime les betteraves, cependant je n'ai pas souvent l'occasion d'en manger.

EXERCICE 6 :

Sujet : Avec Internet, la notion de frontière n'a plus de sens.

L'internet aujourd'hui devient l'invention la plus disponible pour tout le monde et partout. Cette invention représente un regard panoramique sur le monde et la fenêtre ouverte à

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

l'information, mais à travers cette définition est ce qu'il existe une vue plus loin et peut être sans limite.

Nous débuterons cette argumentation par les choix multiples que l'internet nous offre pour démontrer que l'internet avec ses fonctions assez nombreuses est sans limites et enfin nous nous pencherons sur comment l'internet change notre style de vie.

Personnellement, je pense qu'au Maroc l'internet signifie l'invention de la liberté c'est-à-dire la notion de frontière n'a plus de sens.

Tout d'abord, on peut dire que l'internet nous donne un passe-temps agréable et d'amuser, c'est grâce à la possibilité de télécharger confortablement les vidéos, les films et de plus le hes audios aussi le document lisible et les ouvrages en version PDF et aussi il nous permet de suivre l'actualité.

Ainsi l'internet est une sorte de communication moderne parce qu'il nous permet de découvrir le monde et de s'exprimer via les sites sociaux et contacter l'entourage par l'email aussi passé des appels en vidéo.

En outre c'est une source riche d'informations, en effet il met le chercheur devant une rivière pas d'eau mais d'information.

Enfin, l'internet véritablement change beaucoup dans notre style de vie, par exemple nous pouvons faire des courses et recevoir notre achat par livraison à domicile tout à fait par internet et plus que cela, le paiement est en ligne et par carte bancaire.

En conclusion, l'internet sans doute est comme l'univers, c'est pourquoi il faudra bien profiter au maximum de cette liberté illimité.

Apres l'exploitation du texte ci-dessus

1. Identifiez le thème. **(2pts)**
2. Qu'elle en est la thèse associée ? **(2pts)**
3. Formulez le problème qui est traité dans ce texte argumentatif. **(2pts)**
4. Formulez-le ou les différents axes qui sous-tendent ce texte argumentatif. **(2pts)**
5. Identifiez les principales parties du texte en les délimitant clairement. (Ex : L... à L... : **titre de la séquence**). **(2pts)**
6. Identifier dans un tableau toutes les idées, tous les arguments et toutes les illustrations du texte. **(4pts)**

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY-ABIDJAN ANNE UNIVERSITAIRE 2020 – 2021
UFR DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

ECONOMIE
Durée: 2H
EXAMEN, 2ème session 2021

I QUESTIONS A CHOIX MULTIPLES (QCM) (8 points)

Indiquez la (les) réponse(s) correcte(s) à chaque QCM

1.1. L'expression ≪ ceteris paribus ≫ est utilisée lorsque l'on étudie l'influence :
a) de plusieurs facteurs, en décidant d'en laisser un seul à son niveau initial.
b) de plusieurs facteurs, en décidant d'en laisser quelques-uns à leur niveau initial.
c) d'un seul facteur, en décidant de laisser tous les autres à leur niveau initial.
1.2. La courbe d'Engel indique les différentes quantités d'un bien que le consommateur désire acheter à différents niveaux de son revenu.
a) pour chaque accroissement du prix du bien
b) pour chaque accroissement de l'unité totale
c) toutes choses égales par ailleurs 1.3. un bien Giffen est un bien dont :
a) la demande diminue quand son prix augmente
b) la demande augmente quand son prix augmente
c) la demande augmente quand son prix diminue
1.4. La notion de ≪ rendement à l'hectare ≫ utilisée en agriculture est assimilable à:
a) la productivité physique totale
b) la productivité marginale
c) la productivité physique moyenne
d) la productivité physique marginale 1.5. La productivité moyenne est croissante lorsque
a) la productivité marginale lui est inférieure.
b) la productivité marginale lui est supérieure.
c) la production est croissante.

II Exercices d'application

2.1 Exercice 1 (7 points)

Louis possède la fonction d'utilité suivante : $U(x, y) = xy - 2$ où x et y correspondent respectivement aux quantités de biens X et Y. Louis dispose d'un revenu R, exclusivement consacré à l'achat des biens X et Y, dont les

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

prix sont respectivement px et py.
2.1.1. Etablir l'équation des courbes d'indifférence pour un niveau d'utilité donnée U_0 et l'équation de la droite de budget pour un revenu donné R.
2.1.2. À l'aide du lagrangien, déterminer les conditions du l'ordre.
2.1.3. Déterminer l'équation du sentier d'expansion du revenu.
2.1.4. Puis déterminer les coordonnées des points optimaux (notées $x\bullet$ et $y\bullet$).
2.1.5. Lorsque $px = 6\text{F}$, $py = 3\text{F}$ et $R = 24\text{F}$, calculer:
- les coordonnées de l'optimum (noté Z),
- l'équation du dentier d'expansion,
- l'équation de la droite de budget (notée D_1),
- l'équation de la courbe d'indifférence associée à l'optimum (notée U)

2.2 Exercice 2 (8 points)

Supposez qu'un fabriquant de chaises produise à terme (avec son équipement et son installation actuelle). Le fabriquant a constaté les niveaux de production suivants, correspondant à différents nombres de travailleurs :

Nbr de travailleurs/mois	Nbr de chaises en unités/mois	Product moy	Product marginale
0	0		
1	10		
2	18		
3	24		
4	28		
5	30		
6	28		
7	25		

Product moy:Productivité moyenne, Product marginale:Productivité marginale

a) Calculez la productivité moyenne et la productivité marginale du travail pour cette fonction de production.
b) Cette fonction de production présente-t-elle des rendements du travail décroissants ?

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY-ABIDJAN ANNE UNIVERSITAIRE 2020 – 2021
UFR DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

ECONOMIE
Durée: 2H
EXAMEN, session 2021

I QUESTIONS A CHOIX MULTIPLES (QCM) (8 points)

Indiquez la (les) réponse(s) correcte(s) à chaque QCM

1.1. L'expression ≪ ceteris paribus ≫ est utilisée lorsque l'on étudie l'influence :
a) de plusieurs facteurs, en décidant d'en laisser un seul à son niveau initial.
b) de plusieurs facteurs, en décidant d'en laisser quelques-uns à leur niveau initial.
c) d'un seul facteur, en décidant de laisser tous les autres à leur niveau initial.
1.2. La courbe d'Engel indique les différentes quantités d'un bien que le consommateur désire acheter à différents niveaux de son revenu.
a) pour chaque accroissement du prix du bien
b) pour chaque accroissement de l'unité totale
c) toutes choses égales par ailleurs 1.3. un bien Giffen est un bien dont :
a) la demande diminue quand son prix augmente
b) la demande augmente quand son prix augmente
c) la demande augmente quand son prix diminue
1.4. La notion de ≪ rendement à l'hectare ≫ utilisée en agriculture est assimilable à:
a) la productivité physique totale
b) la productivité marginale
c) la productivité physique moyenne
d) la productivité physique marginale 1.5. La productivité moyenne est croissante lorsque
a) la productivité marginale lui est inférieure.
b) la productivité marginale lui est supérieure.
c) la production est croissante.
1.6. Les coûts économiques: a) Incluent le coût des inputs, plus le coût d'opportunité.
b) Incluent le coût des facteurs fixes et variables.
c) Incluent le coût explicite des inputs ainsi que les coûts irrécupérables des actifs pour lesquels il n'existe pas d'autres usages.
d) Excluent le coût explicite des facteurs, maisincluent les coûts d'opportunité.
1.7. Si le coût total d'une entreprise est de 500F lorsque la production est égale à 0, $1000F$ lorsque la production est de 10 et 1400F quand la

Scanned with CamScanner

production est de 20, le coût est égal à:
a) 1000F.
b) 900F.
c) 500F.
d) Aucune de ces réponses.

1.8. À long terme :
a) Tous les inputs à l'exception du travail peuvent varier; le coût variable reste donc inchangé, mais le coût fixe est égal à zéro
b) Tous les points, comme le travail, les équipements, les bureaux ou les usines, peuvent varier; le coût fixe moyen est donc plus faible.
c) Tous les inputs, comme le travail, les équipements, les bureaux ou les usines, peuvent varier; les coûts variables et les coûts fixes baissent donc.
d) Tous les inputs, comme le travail, les équipements, les bureaux ou les usines, peuvent varier; le coût variable est donc égal au coût total puisque le coût fixe est nul.

II Exercices d'application

Exercice 1 (5 points)

La demande d'un bien Q est fonction duprix du bien (P), des prix des autres biens (Pi) et du revenu (R).
1. Comment appelle-t-on les indicateurs qui permettent de rendre compte du changementen pourcentage de la demande du bien Q en fonction du changement en pourcentage de (P), de (Pi), de (R) ?
2. On suppose que la demande de Q s'exprime par la relation:

$$Q = P^{-0,3}\, P_i^{0,1}\, R^{0,4}$$

Quelle sera la modification en pourcentage enregistrée dans la demande de Q si :
- P croît de 10%, Pi et R restant inchangés ?
- Pi croît de 5%, P et R restant inchangés ?
- R décroît de 10%, P et Pi restant inchangés ?

Exercice 2 (7 points)

La pâtisserie *Choco* est réputée pour ses fameux soufflés au chocolat. Son propriétaire nous apprend que la fonction de production pour les soufflés est la suivante :
$Q = 50K^{0,4}\, L^{0,6}$ où Q est la quantité produite de soufflés au chocolat;
K est la quantité de capital utilisé;
L est le nombre d'heures travaillées par les employés.
A) Ecrivez l'équation de l'isocoût de la pâtisserie *Choco* à un coût total de

VERSION PDF 2025

Scanned with CamScanner

600F si le prix du capital (PK) est égal à 2F et celui du travail (PL) est égal à 6F

B) Quel est le TMDT de la pâtisserie *Choco* ?
C) Quelle est la combinaison optimale de facteurs de production K et L à un coût total de 600F ? Combien d'unités seront produites ? Représentez graphiquement le choix optimal. (Prenez soin de bien identifier vos axes, la valeur de l'abscisse et de l'ordonnée à l'origine, les quantités optimales de K et L, le niveau de production, ainsi que toutes autres fonctions présentes sur votre graphique)

D) La production de soufflés au chocolat affiche-t-elle des rendements à l'échelle croissants, décroissants ou constant ? Expliquez.
E) A court terme, la loi des rendements marginaux décroissants s'applique-t-elle à la production de soufflés au chocolat lorsqu'on ajoute des travailleurs ? Expliquez.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY-ABIDJAN ANNEE UNIVERSITAIRE 2021-2022

UFR DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

LICENCE I^e ANNEE

ECONOMIE

Durée : 2 H
EXAMEN, 2^ième session 2022

I Questions théoriques *(3 points)*

1) Qu'est-ce qu'un bien normal, un bien inférieur, un bien Giffen ?

2) Une entreprise produit sur un marché concurrentiel des tricycles à un coût variable moyen de 40 euros et un coût total moyen de 60 euros par unité. Si le prix de marché est de 50 euros par unité, entre les trois solutions suivantes laquelle doit choisir l'entreprise à court terme et pourquoi ?
1. Fixer son niveau de production de façon à minimiser son coût marginal ; 2. Fermer immédiatement ; 3. Continuer à produire.

II Questions à choix multiples (QCM) *(6 points)*

Répondez aux questions à choix multiples suivantes :

Tout en vous servant des données suivantes, relatives aux coûts totaux (CT) de production et aux quantités produites (Q), répondez aux q.c.m 1, 2, 3 et 4 ci-dessous :

Q	CT
0	150
1	155
2	170
3	192
4	228
5	275

1) le coût fixe moyen (CFM) nécessaire à la production de 3 unités d'output (Q) est :
a) 64 ; c) 150
b) 192 ; d) 50

2) le coût variable total (CVT) pour produire 5 unités d'output est :
a) 30 ; c) 55
b) 125 ; d) 25

3) le coût marginal (Cm) de la 4^ème unité d'output est :
a) 228 ; c) 57
b) 128 ; d) 36

4) le coût variable moyen (CVM) pour produire 3 unités d'output est :

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

a) 14 : c) 22
b) 50 : d) 64

5) Lorsque la demande d'un bien normal est inélastique, une augmentation du prix de 1% entraîne :

a) une augmentation de la demande de plus de 1% ;

b) une augmentation de la demande de moins de 1% ;

c)une baisse de la demande de plus de 1% ;

d) une baisse de la demande de moins de 1% ;

e) rien de ce qui précède n'est correct

6) L'élasticité-revenu d'un bien Giffen est :

a) positive ;

b) nulle ;

c) négative ;

d) tout ce qui précède est correcte ;

III Exercices d'application

Exercice 1 *(6 points)*
Supposons que Yao, étudiant en L1, tire son utilité de la consommation de deux biens X et Y vendus au campus. Cette utilité est de la forme :
$U(X,Y) = LnX+LnY$
Où Ln est le logarithme népérien.

a) En général, en utilisant la fonction ci-dessus, calculer les fonctions de demande marshallienne de Yao pour les biens X et Y comme fonctions de Px, Py et R.

b) Calculer et commenter $\partial X/\partial R$, $\partial X/\partial Px$, et $\partial X/\partial Py$.
c) Quelle est l'équation de la courbe d'Engel relative au bien X pour Px = 20 ?

d) Quelle est la fonction d'utilité indirecte de Yao ?
e) Si le prix du bien X, Px = 20, celui de Y, Py = 10 et le revenu, I =200, quelles sont les quantités qui seront achetées pour maximiser l'utilité de Yao ?

Exercice 2 *(5 points)*
Après sa formation, un étudiant de Math-info envisage d'ouvrir un stand de limonade. Le stand lui-même coûte 200 dollars. Les ingrédients nécessaires pour faire un verre sont de 0,50 dollar :
a) quel est le coût fixe de cette affaire ? Quel est le coût variable par verre ?
b) Dressez un tableau montrant le coût total, le coût moyen et le coût marginal pour une production de 0 à 10 litres (il y a 10 verres dans un litre)
c) Dessinez les trois courbes de coût.

VALIDEUR LMD-2025

UNIVERSITE DE COCODY-ABIDJAN ANNEE UNIVERSITAIRE 2023-2024

UFR DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

LICENCE 1e ANNEE

ECONOMIE GENERALE

Durée : 2 H

EXAMEN, session du 07 mars 2024

I Questions (4 points)

a) Qu'est-ce qu'un bien normal ?

b) Qu'est-ce qu'un bien inférieur ?

c) Expliquer pourquoi deux courbes d'indifférence ne peuvent se couper ?

d) Définir un isoquant

II Exercices d'application

Exercice 1 (8 points)

Un étudiant de l'UFR-Mi consomme deux biens et sa fonction d'utilité est :

$U(x.y) = x\,y - 2$ où x et y correspondent respectivement aux quantités de biens X et Y. Il dispose d'un revenu R, exclusivement consacré à l'achat des biens X et Y, dont les prix sont respectivement p_x et p_y.

1.1. Établir l'équation des courbes d'indifférence pour un niveau d'utilité donné U_0, et l'équation de la droite de budget pour un revenu donné R.

1.2. À l'aide du lagrangien, déterminer les conditions du 1er ordre.

1.3. Déterminer l'équation du sentier d'expansion du revenu.

1.4. Puis déterminer les coordonnées des points optimaux (notées x• et y•).

1.5. Lorsque px = 6 F, py = 3 F et R = 24 F, calculer :

-1.5.1 les coordonnées de l'optimum (noté Z), - 1.5.2 l'équation du sentier d'expansion,

- 1.5.3 l'équation de la droite de budget (notée D1). 1.5.4- l'équation de la courbe d'indifférence associée à l'optimum (notée U)

Exercice 2 (8 points)

Pour lutter contre la cherté de la vie, l'étudiant crée et fait produire les deux biens par sa propre entreprise qui a pour fonction de production $Q= 3K^{1/3}L^{2/3}$

2.1. Lorsque l'entreprise augmente la quantité de capital employée, la productivité marginale du capital est-elle croissante, décroissante, constante ?

2.2. Définissez le TMST du travail au capital et établissez sont expression dans le cas de la fonction de production donnée. Si on pose L=6 et K=3, quelle sera sa valeur ?

2.3. On sait que l'équation de coût total est donnée par l'expression : .C= wL+ rK .

Supposons que le prix du capital r=6 et le prix du travail w=10. Le coût total est C=90. Déterminez les valeurs optimales des facteurs de production et le coût associé. Déterminez et définissez le sentier d'expansion (en donner l'équation de la forme K=f(L)).

Bonne Chance !

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY-ABIDJAN ANNEE UNIVERSITAIRE 2023-2024

UFR DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

LICENCE I^e ANNEE

EXAMEN D'ECONOMIE

2ème Session
Durée : 2 H

I Questions (6 points)

a) Qu'est-ce qu'un bien normal ?
b) Qu'est-ce qu'un bien inférieur ?
c) Expliquer pourquoi deux courbes d'indifférence ne peuvent se couper ?
d) Définir un isoquant

II Exercices d'application

Exercice I (9 points) ?

Un consommateur possède la fonction d'utilité suivante : $U(x, y) = x^2y + 4$ où x et y correspondent respectivement aux quantités de biens X (banane) et Y (igname) qu'il achète chez « brave paysan ». Initialement, le prix du bien X est de p francs et le prix du bien Y est de 4 francs. De plus nous savons qu'il dispose d'un revenu de 24 francs.

1.1. Etablir l'équation des courbes d'indifférence pour un niveau d'utilité donné U_0.
Par la méthode du lagrangien, déterminer :
1.2. Le lagrangien et les conditions de 1er ordre,
1.3. L'équation du chemin d'expansion du revenu,
1.4. Les coordonnées des points optimaux.
1.5. Lorsque p = 2 francs, calculer l'utilité totale associée au point optimal (noté A), puis en déduire l'équation de la courbe d'indifférence associée (notée U_1)
1.6. Calculer à l'aide de deux méthodes le TMS en A. Raisonnant à partir de l'optimum, s'il souhaitait réduire sa consommation de banane de 0,5 unité, de combien devrait-il faire varier sa consommation d'igname pour maintenir le même niveau d'utilité ?

Exercice 2 (5 points)

L'entreprise « brave paysan » a pour fonction de production $Q = 3K^{1/3}L^{2/3}$
2.1. Lorsque l'entreprise augmente la quantité de capital employée, la productivité marginale du capital est-elle croissante, décroissante, constante ?
2.2. Définissez le TMST du travail au capital et établissez sont expression dans le cas de la fonction de production donnée. Si on pose L=6 et K=3, quelle sera sa valeur ?
2.3. On sait que l'équation de coût total est donnée par l'expression : $C = wL + rK$.
Supposons que le prix du capital r=6 et le prix du travail w=10. Le coût total est C=90. Déterminez les valeurs optimales des facteurs de production et le coût associé. Déterminez et définissez le sentier d'expansion (en donner l'équation de la forme K=f(L)).

Bonne Chance !

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Université FHB Maths-Info 2020-2021

CORRECTION ECONOMIE

SESSION 1

QCM

1- c
2- c
3- b
4- b
5- c
6- c-d
7- c
8- d

Exercice 1

1. Les élasticités
   - Elasticité prix- direct
   - Elasticité prix- indirect
   - Elasticité revenu

2. On suppose la demande Q

$$Q = P^{-0,3}\, P_i^{0,3}\, R^{0,4}$$

Quels sont les modifications ?

• Si P croît de 10% et P_i et R restent inchanger.

$Q' = (P + 10\%\, P)^{-0,3}\, P_i^{0,3}\, R^{0,4}$

$Q' = (1,1\, P)^{-0,3}\, P_i^{0,3}\, R^{0,4}$

$Q' = (1,1)^{-0,3}\, P^{-0,3}\, P_i^{0,3}\, R^{0,4}$

$Q' = (1,1)^{-0,3}\, Q$ donc Q augmente de $(1,1)^{-0,3}$ fois.

• Si P_i croit de 5% et P et R restent inchanger

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$Q' = P^{0,3}(P_i + 0,05\,P_i)^{0,3} R^{0,4}$
$= P^{0,3}(1,05\,P_i)^{0,3} R^{0,4}$
$Q' = (1,05)^{0,3} Q$
Donc Q augmente de $(1,05)^{0,3}$ fois.

• Si R décroit de 10%

$Q' = P^{0,3} P_i^{0,3}(R - 0,1\,R)^{0,4}$
$= P^{0,3} P_i^{0,3}(0,9\,R)^{0,4}$
$= (0,9)^{0,4} P^{0,3} P_i^{0,3} R^{0,4}$
$Q' = (0,9)^{0,4} Q$
Donc Q augmente de 0,9

Exercice 2

A- Equation d'isocoût

On sait que : $C_T = P_K K + P_L L$ Or on a: $P_K = 2F$ et $P_L = 6F$
Donc $C_T = 2K + 6L = 600$. D'où $K + 3L = 300$
est l'équation d'isocoût.

B- Calculons le TMST

$$TMST = \frac{P_m L}{P_m K} \text{ or: } \begin{cases} P_m L = \frac{dQ}{dL} = 30K^{0,4} L^{-0,4} \\ P_m K = \frac{dQ}{dK} = 20K^{-0,6} L^{0,6} \end{cases}$$

Donc $TMST = \frac{30K^{0,4} L^{-0,4}}{20K^{-0,6} L^{0,6}} = \frac{30\,K}{20\,L}$

$$TMST = \frac{15\,K}{10\,L}$$

C- On a: $TMST = \frac{15\,K}{10\,L}$ or à l'équilibre, $TMST = \frac{K}{L} = \frac{6}{2} = 3$

Donc $\frac{15\,K}{10\,L} = 3 \Leftrightarrow K = 2L$

D'où le système: $\begin{cases} K + 3L = 300 \\ K = 2L \end{cases}$ (2) $\Leftrightarrow 2L + 3L = 300$
$\Leftrightarrow 5L = 300$
$\Leftrightarrow L = 60$ (1)

(1) dans (2) donne: $K = 2 \times 60 = 120$ d'où: $\begin{cases} L = 60 \\ K = 120 \end{cases}$

Remplaçons dans Q
$Q^* = 50(120)^{0,4}(60)^{0,6} =$

D- Le rendement.
On a: $\lambda = \alpha + \beta = 0,4 + 0,6 = 1$ donc le rendement à l'échelle est constant car Q est du type Cobb Douglass

E-
On a: $\frac{dQ}{dL} = 30K^{0,4} L^{-0,4} = Q'$ et $\frac{dQ'}{dL} = -12K^{0,4} L^{-1,4}$

Comme $Q'' < 0$ alors la loi des rendements marginaux s'applique.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY-ABIDJAN ANNE UNIVERSITAIRE 2020 – 2021
UFR DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

CORRECTION ECONOMIE
Durée: 2H
EXAMEN, 2ème session 2021

I QUESTIONS A CHOIX MULTIPLES (QCM) (8 points)

1.1) c
1.2) c
1.3) b
1.4) b
1.5) c

II Exercices d.application

2.1 Exercice 1 (7 points)

Soit U_0 le niveau d'utilité.
On a: $U(XY) = U_0 \Leftrightarrow XY - 2 = U_0$

$$\Leftrightarrow XY = U_0 + 2$$

$\boxed{Y = \frac{1}{X}(U_0 + 2)}$ est l'équation des courbes d'indifférences.

* L'équation de la droite de budget pour R.

On a: $XP_X + YP_Y = R \Leftrightarrow YP_Y = R - XP_X$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{R}{P_Y} - X\frac{P_X}{P_Y}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Y = -\frac{P_X}{P_Y}X + \frac{R}{P_Y}}$$ est l'équation de la droite de budget.

2) A l'aide du Lagrangien, déterminons les conditions de l'ordre.

* Formulons le Lagrangien

On a: $\mathcal{L}(X, Y, \lambda) = U(XY) + \lambda\,[R - XP_X - YP_Y]$
$\mathcal{L}(X, Y, \lambda) = XY - 2 + \lambda\,[R - XP_X - YP_Y]$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

C.I.O

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(X,Y,\lambda)}{\partial X} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(X,Y,\lambda)}{\partial Y} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(X,Y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y - \lambda P_X = 0 \\ X - \lambda P_Y = 0 \\ R - XP_X - YP_Y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = \lambda P_X \\ X = \lambda P_Y \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases}$$

3) Déterminons l'équation du sentier d'expression.
L'équation du sentier d'expression étant déterminer à l'équilibre.

$$\text{On a: } \begin{cases} Y = \lambda P_X & (1) \\ X = \lambda P_Y & (2) \\ R = XP_X + YP_Y & (3) \end{cases}$$

En faisant $\dfrac{(1)}{(2)}$, on obtient l'équation du sentier d'expenssion

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{Y}{X} = \frac{\lambda P_X}{\lambda P_Y} \Leftrightarrow \frac{Y}{X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Y = \frac{P_X}{P_Y} X} \text{ est l'équation du sentier d'expension.}$$

4) Déterminons les coordonnées des points optimaux.

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow Y = \frac{P_X}{P_Y} X \quad (a) \quad \text{et } X = \frac{P_Y}{P_X} Y \quad (b)$$

$(3) \Leftrightarrow R = XP_X + YP_Y$.

(a) dans (3) donne: $R = XP_X + \dfrac{XP_X}{P_Y} P_Y$ d'où $R = 2XP_X$

Donc $\boxed{X^\bullet = \dfrac{R}{2P_X}}$

(b) dans (3) donne: $R = \dfrac{YP_Y}{P_X} P_X + YP_Y$ d'où $R = 2YP_Y$

Donc $\boxed{Y^\bullet = \dfrac{R}{2P_Y}}$

5) Lorsque $P_X = 6F$, $P_Y = 3F$ et $R = 24F$

Calculons :

* Les coordonnées de l'optimum noté Z

On a: $X^\bullet = \dfrac{24}{2 \times 6} = 2$; $Y^\bullet = \dfrac{24}{2 \times 3} = 4$ Donc $Z(2,4)$

* L'équation de la droite de budget noté D_1

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

On a: $Y = -\frac{P_X}{P_Y}X + \frac{R}{P_Y}$

A.N: $Y = -\frac{6}{3}X + \frac{24}{3} = -2X + 8$

$(D_1) : \underline{Y = -2X + 8}$

•L'équation de la courbe d'indifférence

On a: $U = U(X^\bullet; Y^\bullet)$

$= X^\bullet Y^\bullet - 2$

$= 2 \times 4 - 2$

$= 8 - 2$

$U = 6$

Donc $Y = \frac{1}{X}(6 + 2) \Rightarrow \boxed{Y = \frac{8}{X}}$

Exercice 2

a) Calculons la productivité moyenne et marginale du travail pour cette fonction.

Soit P_mL : productivité marginale

P_ML : productivité moyenne

$P_ML = \frac{\text{Nombre de chaises}}{\text{Nombre de travailleurs}}$

$P_mL = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$ avec L le facteur capital.

nbre de travailleur/mois	nbre de chaise en unité/mois	P_ML	P_mL
0	0	-	-
1	10	10	-
2	18	9	8
3	24	8	6
4	28	7	4
5	30	6	2
6	28	4,67	-2
7	25	3,57	-3

b) Cette fonction de production présente t-elle des rendements du travail décroissant ?

La fonction de production présente des rendements du travail décroissant car au fur et à mesure que le nombre de travailleurs augmente, la productivité diminue.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

SEMESTRE 2

www.gvivaservices.com

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE FHB

U.F.R Maths-Info

Année

2020-2021

EXAMEN DE CALCUL MATRICIEL

L1

Première Session

Durée : 1H30

EXERCICE 1 (4 points)

Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

EXERCICE 2 (10 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Déterminons deux réels α, β tels que : $A^2 = \alpha A + \beta I_3$

b) En déduire que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de A et de I_3.

c) Donner A^{-1} sous forme matricielle à l'aide de l'expression : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times Com({}^tA)$ où $Com({}^tA)$ est la comatrice de la transposée de A.

EXERCICE 3 (6 points)

Résoudre à l'aide de sa matrice augmentée le système,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ -x - y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE FHB
U.F.R. Maths-Info

Année
2020-2021

EXAMEN DE CALCUL MATRICIEL
M.1. L1 ; 2ème Session ; durée : 1H30

EXERCICE

Répondez par VRAI ou FAUX, dans l'ordre des questionnaires et assertions en justifiant.

Questionnaire 1

Soit A, B et C des matrices d'ordre $n \geq 1$.

1) $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$;
2) $A(BC) = (AC)B$;
3) $A(B + C) = AC + AB$;
4) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Questionnaire 2

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1) $A^2 = 2A$;
2) $A^n = 2^n A$, pour tout entier $n \geq 1$
3) $(A - I_2)^{2n} = I_2$, pour tout entier $n \geq 1$;
4) $(A - I_2)^{2n+1} = A + I_2$, pour tout entier $n \geq 1$.

Questionnaire 3

On considère les matrices :

$A = [\,1\ 0\ 1\,]$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

1) Le rang de A est 3 ;
2) Le rang de B est 1 ;
3) Le rang de C est 3 ;
4) Le rang de D est 3.

Questionnaire 4

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels et I_n la matrice identité d'ordre n :

1) A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B telle que $AB = I_n$;
2) A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B telle que $BA = I_n$;
3) A est inversible si et seulement si les coefficients de A sont inversibles pour la multiplication dans $\mathbb{R}$;
4) A est inversible si et seulement si pour toute matrice Y à une colonne et n lignes, il existe une matrice X à une colonne et n lignes telle que $AX = Y$

Questionnaire 5

On considère le système d'équations, d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

1) $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - 2z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$;
2) Les équations de (S) sont celles de trois plans ;
3) (S) admet une unique solution ;
4) (S) n'admet pas de solution.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Université FHB 2021-2022
UFR MATHS-INFO.

EXAMEN de Calcul Matriciel
1ère Session, Licence 1
Durée : 01H30

EXERCICE 1(5 points)

Répondre par vrai ou faux dans l'ordre des questions, en justifiant.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

1. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$;
2. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(AB) = \det(BA)$;
3. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\det(A^p) = p.\det(A)$;
4. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda A) = \lambda.\det(A)$;
5. Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps non commutatif,
$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) - \det(BA) = 0_{(\mathbb{K},+)}$, l'élément neutre du groupe abelien $(\mathbb{K}, +)$.

EXERCICE 2(15 points)

Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, et $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. a. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, justifier puis déterminer son inverse.
b. Calculer $M = A - xI_3$.
c. Calculer $P(x) = det(M)$.
d. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
2. a. Calculer $A^3 - 3A^2 - 16A - 12I_3$.
b. En déduire l'existence d'une matrice P telle que $AP = I_3$.
c. Donner une écriture de P sous forme de matrice.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$,
a) le système (S_1) suivant :

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 3x + 5y + 3z = 2 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

b) $(S_2) \Leftrightarrow (A - 6I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE FHB
U.F.R.Maths-Info

Année
2021-2022

EXAMEN DE CALCUL MATRICIEL
L1
Deuxième Session
Durée : 1 H 30

EXERCICE 1 :

Répondre par vrai ou faux en justifiant.

1. Si A, B deux matrices carrées de même ordre sont telles que $AB = 0$ alors ni A ni B ne sont inversibles.
2. Il n'existe pas de matrices carrées inversibles dont l'inverse est égale à elle-même.
3. Si on permute 2 lignes d'une matrice inversible, elle reste inversible.
4. Si A est inversible, alors $A\,({}^tA)$ est inversible.
5. Toute matrice carrée d'ordre n, A vérifiant $5A^2 + A + 7I_n = 0$ est inversible.
6. Soit A une matrice carrée quelconque. Alors $A + ({}^tA)$ est symétrique et $A - ({}^tA)$ est antisymétrique.
7. Le produit de deux matrices antisymétriques A et B est antisymétrique si et seulement si $AB = -BA$.
8. Soit A une matrice antisymétrique et inversible. Alors son inverse est antisymétrique.
9. Si deux lignes de A sont proportionnelles, alors le rang de A est strictement inférieur à son nombre de colonnes.
10. Si A est diagonale, alors A est semblable à la matrice identité.

EXERCICE 2

1. Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

2. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

a) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

b) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y - 3z = 3 \\ -3x + 3y - z = 1 \end{cases}.$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

2022-2023

Universté FHB
UFR MATHS-INFO.

EXAMEN de Calcul Matriciel
Session juin 2023
Durée : 01H00
Licence 1

EXERCICE

Pour $\forall m \in \mathbb{R}$, on considère les matrices :

$A_m = \begin{bmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 1 & 2-m \end{bmatrix}$; on note $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer la matrice transposée de A_m, $\forall m \in \mathbb{R}$.
   Que peut-on dire de A_m, $\forall m \in \mathbb{R}$.
2. On pose $f(m) = \det A_m$, $\forall m \in \mathbb{R}$.
   (i) Donner l'expression de $f(m)$ en fonction de m.
   (ii) Vérifier que $f(1) = 0$ et en déduire l'ensemble B des valeurs de m réelle pour lesquelles la matrice A_m est inversible.
3. On pose que $m = 0$. La matrice A_m est alors notée A_0.
   (a) Montrer que $A_0^3 - 6A_0^2 + 9A_0 - 4I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
   (b) En déduire que la matrice A_0 est inversible et donner sa matrice inverse A_0^{-1} en fonction de A_0 et de I_3.
4. Soit (S) le système suivant : $(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$.
   Résoudre le système (S).

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Université FHB 2023-2024
UFR MATHS-INFO.

EXAMEN de Calcul Matriciel

Session

Durée : 01H00

Licence 1

EXERCICE 1(8 points)

Répondre par vrai ou faux dans l'ordre des questions, en justifiant.

1. Si A, B deux matrices carrées de même ordre sont telles que $AB = 0$ alors ni A ni B ne sont inversibles.
2. Soit A une matrice de type (p, q), alors $A\,({}^tA)$ de type (q, q).
3. Si on permute 2 lignes d'une matrice inversible, elle reste inversible.
4. Si A est inversible, alors $A\,({}^tA)$ est inversible.
5. Toute matrice carrée d'ordre n, A vérifiant $5A^2 + A + 7I_n = 0$ est inversible.

EXERCICE 2(12 points)

1. Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

2. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

a) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

b) Résoudre le système (S) suivant dans $\mathbb{R}^3$ à l'aide de sa matrice augmentée :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y - 3z = 3 \\ -3x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with ACE Scanner
Scanned with CamScanner

Universté FHB
UFR MATHS-INFO.

2023-2024

EXAMEN de Calcul Matriciel

Session 2

Durée : 01H00

Licence 1

EXERCICE 1

Pour $\forall m \in \mathbb{R}$, on considère les matrices :

$A_m = \begin{bmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 1 & 2-m \end{bmatrix}$; on note $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer la matrice transposée de A_m, $\forall m \in \mathbb{R}$.

   Que peut-on dire de A_m, $\forall m \in \mathbb{R}$.

2. On pose $f(m) = \det A_m$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

   (i) Donner l'expression de $f(m)$ en fonction de m.

   (ii) Vérifier que $f(1) = 0$ et en déduire l'ensemble B des valeurs de m réelle pour lesquelles la matrice A_m est inversible.

3. On pose que $m = 0$. La matrice A_m est alors notée A_0.

   (a) Montrer que $A_0^3 - 6A_0^2 + 9A_0 - 4I_3 = 0$.

   (b) En déduire que la matrice A_0 est inversible et donner sa matrice inverse A_0^{-1} en fonction de A_0 et de I_3.

   (c) Résolution dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant : $A_0^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with ACE Scanner

Scanned with CamScanner

UFR-MI:L1 Maths-Info 2020-2021

CORRECTION CALCUL MATRICIEL

SESSION 1

Exercice 1

Calculons le déterminant Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

D'où $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$

$\Delta = 2\,(4 + 2 \times 0) - 2(-4)$

$\Delta = 2 \times 4 + 8$

$\boxed{\Delta = 16}$

Exercice 2

a) Déterminons α, β tels que $A^2 = \alpha\, A + \beta\, I_3$

On a: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Par ailleur, $\alpha\, A + \beta\, I_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 6\alpha & -5\alpha & 6\alpha \\ 3\alpha & -3\alpha & 4\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

$\alpha\, A + \beta\, I_3 = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 & 0 \\ 6\alpha & -5\alpha+\beta & 6\alpha \\ 3\alpha & -3\alpha & 4\alpha+\beta \end{pmatrix}$

Ainsi $A^2 = \alpha\, A + \beta\, I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 & 0 \\ 6\alpha & -5\alpha+\beta & 6\alpha \\ 3\alpha & -3\alpha & 4\alpha+\beta \end{pmatrix}$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ 6\alpha=-6 \\ 3\alpha=-3 \\ -5\alpha+\beta=7 \\ 4\alpha+\beta=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=2 \end{cases}$$

Par suite: $A^2=-A+2\,I_3$

b) Déduisons que A est inversible et donnons A^{-1} en fonction de A et I_3

On a: $A^2=-A+2\,I_3 \Leftrightarrow A^2+A=2\,I_3$

$\Leftrightarrow A^2+A\,I_3=2\,I_3$ car $A\,I_3=A$

$\Leftrightarrow A(A+I_3)=2\,I_3$

$\Leftrightarrow A(\frac{1}{2}\,A+\frac{1}{2}\,I_3)=I_3$

$\Leftrightarrow (\frac{1}{2}\,A+\frac{1}{2}\,I_3)A=I_3$

$\Leftrightarrow A$ est inversible

Ainsi donc $\boxed{A^{-1}=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}I_3}$

c) Donnons A^{-1} sous la forme matricielle en utilisant:

$A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\times Com({}^tA)$

On a: $det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$

$det(A)=-20+18$

$det(A)=-2$

Ainsi ${}^tA=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$Com({}^tA)=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$

$C_{11}=\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=-20+18=-2;\ C_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=0$

$C_{13}=\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}=0;\ C_{21}=-\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=-(24-18)=-6$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$; $C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6$

$C_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -3$; $C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3$; $C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5$

Ainsi $Com({}^tA) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

Comme $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \times Com({}^tA)$

Alors $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 3

Resolvons (S) à l'aide de sa matrice augmentée

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+3z=6 \\ -x-y+2z=0 \\ 3x+y-4z=1 \end{cases}$$

Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ la matrice associée à (S)

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$ la matrice augmentée de A

$$B \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -7 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{array}$$

$$B \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 & -8 \end{array}\right) L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$$

$$B \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 7L_3 \end{array}$$

$$B \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$$

$$B \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

D'où $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$

L'ensemble des solutions de (S) est : $S_{\mathbb{R}^3} = \{(1;1;1)\}$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Université FHB Maths-Info 2020-2021

CORRECTION CALCUL MATRICIEL

SESSION 2

Exercice

Questionnaire 1

1. Faux, car pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
   On a: $AB = 0$ mais $A \neq 0$ et $B \neq 0$

2. Faux, car l'anneau des matrices est non commutative

3. Vrai, car la multiplication est distributive par rapport à l'addition

4. Faux, car A et B ne commutent pas

Questionnaire 2

1. Vrai, en effet, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$

2. Faux, car pour $n = 1$, $A \neq 2A$

3. Vrai, En effet, $(A - I_2)^{2n} = \left[(A - I_2)^n\right]^n = (A^2 - 2AI_2 + I_2^2)^n$
   $(A - I_2)^{2n} = (A^2 - 2A + I_2)^2$ or $A^2 = 2A \Rightarrow A^2 - 2A = 0$
   D'où $(A - I_2)^{2n} = (I_2)^n = I_2$

4. Faux,
   En effet, $(A - I_2)^{2n+1} = (A - I_2)^{2n} \times (A - I_2)$ or $(A - I_2)^{2n} = I_2$
   D'où $(A - I_2)^{2n+1} = I_2(A - I_2)$
   $(A - I_2)^{2n+1} = A - I_2 \neq A + I_2$

Questionnaire 3

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

1. Faux, car $rang(A) \leq 1$
   Comme A n'est pas la matrice nulle, alors $rang(A) = 1$

2. Vrai, en effet, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $B \approx \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$

3. Faux. En effet, $det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$

   D'où $rang(C) \leq 2$

4. Faux. En effet, $det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$

   D'où $rang(D) \leq 2$

Questionnaire 4

1. Faux, car la matrice B n'est pas necessairement une matrice carrée d'ordre n

2. Faux, car la matrice B n'est pas necessairement une matrice carrée d'ordre n

3. Faux. En effet, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible mais 0 n'est pas inversible pour la multiplication dans $\mathbb{R}$

4. Vrai; en effet, $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$

Questionnaire 5

1. Vrai. En effet, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 & E_1 \\ 2x \quad 3y + 4z = 1 & E_2 \\ y + z = 1 & E_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 & E_1 \\ y \quad 2z = 1 & E_2' = 2E_1 \quad E_2 \\ y + z = 1 & E_3 \end{cases}$

   $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad y + z = 1 & E_1 \\ y \quad 2z = 1 & E_2' \\ z = 0 & E_3' = E_2' \quad E_3 \end{cases}$

2. Vrai, car ces trois équations sont de la forme $ax + by + cz + d = 0$ qui est l'équation du plan.

3. Vrai. En effet, (S) admet une unique solution qui est: $(2\ 1\ 0)$

4. Faux. En effet (S) admet une unique solurion.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Deuxième session 2021-2022

Calcul matriciel

Répondre par vrai ou faux en justifiant

1) Faux
2) Faux car la matrice identité est l'exemple
3) Vrai
4) Vrai car $\det(A \times (t_A)) = detA \times \det(t_A)$
   $\det(t_A) = (detA)^2 \neq 0$
   Donc $\det(A \times (t_A)) \neq 0$
5) Vrai car $5A^2 + A + 7I_n = 0$
   $\Leftrightarrow 5A^2 + A = -7I_n$
   $\Leftrightarrow -\frac{1}{7}(5A + I_n)A = I_n$
   $\Leftrightarrow -\frac{1}{7}A(5A + I_n) = I_n$
   Donc $A^{-1} = -\frac{1}{7}(5A + I_n)$
6) Vrai
7) Faux car $t_{AB} = t_B t_A = -B(-A) = AB$
8) Vrai
9) Vrai contre-exemple
   $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
   $or\ rg(A) = 1$
10) Vrai

Exercice 2

1) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} l_1 = l_1 + l_4$

$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} c_2 = c_2 + c_1$

$\Delta = -2\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$\Delta = -2\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

$\Delta = 2(4 + 4) = 16$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

a) Montrons que A est inversible et calculons A^{-1}

*Déterminons $detA$

$detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

$detA = c_1 = c_1 + c_2\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

$= 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

$= 2(-1 + 9) - 3(-1 + 3)$

$= 2 \times 8 - 3 \times 2$

$detA = 16 - 6 = 10$

$detA = 10 \neq 0$

Donc A est inversible.

*Calculons A^{-1}

$A^{-1} = \frac{1}{detA} com(t_A)$

Voir session 1 (Exo 2 1-a)

b) Résolvons le système suivant dans $\mathbb{R}^3$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y - 3z = 3 \\ -3x + 3y - z = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 2 \\ -y + z = -1 \\ 6y - 4z = 7 \end{cases}$

$-y = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

$y = \frac{3}{2}$

$x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 2$

$x = 2 - 1 = 1$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\mathbb{S}_{\mathbb{R}^3} = \{(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})\}$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Proposition de solution et barème

session 1 calcul matriciel année 2022-2023

Correction de l'exo

1.La matrice transposée de A_m, $\forall m \in \mathbb{R}$ est :

$$({}^tA_m) = \begin{bmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 1 & 2-m \end{bmatrix} = A_m, \forall m \in \mathbb{R}.$$

On peut dire que A_m est une matrice symétrique, $\forall m \in \mathbb{R}$. (0,5pt)

2. On pose $f(m) = \det A_m$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

(i) Evaluons $\det A_m = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 1 & 2-m \end{vmatrix}$

$$\det A_m = -m^3 + 6m^2 - 9m + 4 \text{ (2pts)}$$

$\det A_m = -(m-4)(m-1)^2 = f(m)$. (1pt)

(ii) Soit $f(m) = \det A_m = -(m-4)(m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m \in \{1,4\}$ (1pt)

Dès lors, on a bien $f(1) = 0$ et $B = \mathbb{R}\setminus\{1,4\}$,((0,5pt+2pts)

ainsi $\forall m \in \mathbb{R}\setminus\{1,4\}$, A_m est inversible. (1pt+0,5pt)

3. On pose que $m = 0$. La matrice A_m est alors notée A_0.

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ (0,5pt)}$$

$$\Rightarrow A_0^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ (1pt)}$$

$$A_0^3 = A_0^2 A_0 = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{bmatrix} \text{ (1pt)}$$

Ainsi :

$$A_0^3 - 6A_0^2 + 9A_0 = \begin{bmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_0^3 - 6A_0^2 + 9A_0 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I_4 \text{ (2pts)}$$

$\Leftrightarrow A_0^3 - 6A_0^2 + 9A_0 - 4I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ (0,5pt)

(a) On a bien $A_0^3 - 6A_0^2 + 9A_0 - 4I_3 = 0$.

(b) On a : $A_0^3 - 6A_0^2 + 9A_0 = 4I_3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(A_0^2 - 6A_0 + 9I_3)A_0 = I_3$ (1pt)

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow A_0$ est inversible et $A_0^{-1} = \frac{1}{4}(A_0^2 - 6A_0 + 9I_3)$ (0,5pt+1pt)

Evaluons matricielle

$$A_0^{-1} = \frac{1}{4}(A_0^2 - 6A_0 + 9I_3)$$

$$A_0^{-1} = \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$A_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$ (1pt)

4. Soit (S) le système suivant : $(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z &= 1 \\ x+2y+z &= 2 \\ x+y+2z &= 3 \end{cases}$.

Résolution du système (S).

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z &= 1 \\ x+2y+z &= 2 \\ x+y+2z &= 3 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow A_0 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A_0^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$ (1pt)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A_0^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$ (1,5pts)

$S_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$. (0,5pt)

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Calcul Matriciel

session 2 2023-2024

Exercice 1

Soit $m \in \mathbb{R}$, on considère les matrices A_m et I_3 définies par :

$$A_m = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 1 & 2-m \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **Déterminer la matrice transposée de A_m, $\forall m \in \mathbb{R}$.**

Par un calcul simple on a :

$$A_m^T = A_m$$

2. **Que peut-on dire de A_m, $\forall m \in \mathbb{R}$?**

On peut dire que A_m est une matrice symétrique.

3. **On pose $f(m) = \det(A_m)$, $\forall m \in \mathbb{R}$.**

- **(i) Donner l'expression de $f(m)$ en fonction de m.**

  La matrice A_m est de la forme suivante :

$$A_m = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 1 & 2-m \end{pmatrix}$$

  On calcule son déterminant par développement le long de la première ligne :

$$\det(A_m) = (2-m) \times \det\begin{pmatrix} 2-m & 1 \\ 1 & 2-m \end{pmatrix} - 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-m \end{pmatrix} + 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-m \end{pmatrix}$$

  En simplifiant, on obtient :

$$\det(A_m) = (2-m) \times \left((2-m)^2 - 1\right) = (2-m) \times (m^2 - 4m + 3) = -(m-3) \times (m-1)^2$$

  Donc :

$$f(m) = \det(A_m) = -(m-3)(m-1)^2$$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

- **(ii) Vérifier que $f(1) = 0$ et en déduire l'ensemble B des valeurs de m réelles pour lesquelles la matrice A_m est inversible.**

$$f(1) = -(1-3)(1-1)^2 = 0$$

Pour que la matrice A_m soit inversible, il faut que $\det(A_m) \neq 0$. Cela implique que $m \neq 1$ et $m \neq 3$. Donc :

$$B = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$$

4. **On pose que $m = 0$. La matrice A_m est alors notée A_0.**

- **(a) Montrer que $A_0^3 - 6A_0^2 + 9A_0 - 4I_3 = 0$.**

Calculons les puissances de A_0 :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_0^2 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_0^3 = \begin{pmatrix} 16 & 12 & 12 \\ 12 & 16 & 12 \\ 12 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

Nous avons donc :

$$A_0^3 - 6A_0^2 + 9A_0 - 4I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 12 & 12 \\ 12 & 16 & 12 \\ 12 & 12 & 16 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En simplifiant :

$$A_0^3 - 6A_0^2 + 9A_0 - 4I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc l'égalité est vérifiée.

- **(b) En déduire que la matrice A_0 est inversible et donner sa matrice inverse A_0^{-1} en fonction de A_0 et de I_3.**

D'après le polynôme caractéristique de A_0 :

$$A_0^3 - 6A_0^2 + 9A_0 = 4I_3$$

En factorisant :

$$A_0(A_0^2 - 6A_0 + 9I_3) = 4I_3$$

Comme A_0 est inversible, on peut multiplier des deux côtés par A_0^{-1} :

$$A_0^{-1} = \frac{1}{4}(A_0^2 - 6A_0 + 9I_3)$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

- **(c) Résolution dans $\mathbb{R}^3$ du système suivant :** $A_0^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

On résout le système linéaire :

$$A_0^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

En utilisant l'expression de A_0^{-1} :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A_0^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

En développant et en simplifiant :

$$A_0^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}26\\28\\28\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}7\\8\\8\end{pmatrix}+9\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-7\\-2\\7\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-7\\-2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{4}\\-\frac{1}{2}\\\frac{7}{4}\end{pmatrix}$$

La solution du système est donc :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{4}\\-\frac{1}{2}\\\frac{7}{4}\end{pmatrix}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE FHB
UFR Maths-Info. 2020 – 2021

EXAMEN D'ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINEAIRES
L1
Durée : $1H30$

Questionnaires Répondez par VRAI ou FAUX dans l'ordre

1. Un espace vestoriel de dimension 4 peut avoir un système de 3 vecteurs libres
2. Un espace vestoriel de dimension 4 peut avoir un système de 5 vecteurs libres.
3. Un espace vestoriel de dimension 4 peut avoir un système de 3 vecteurs générateurs
4. Un espace vestoriel de dimension 4 peut avoir un système de 5 vecteurs générateurs.
5. L'ensemble $V = \{(x, x^2, -2x); x \in \mathbb{R}\}$ est un $\mathbb{R}-$sous-espace de $\mathbb{R}^3$.
6. Soit F et G deux sous-espaces d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. Si tous les vecteurs d'un système générateur de F appartiennent à G, alors $F \subset G$.
7. Si $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y - z = 0 \quad \text{et} \quad x - y + z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 5x = -4y = -2z\}$ alors $E \cup F$ est un $\mathbb{R}-$sous-espace de $\mathbb{R}^3$
8. Soit F et G deux sous-espaces d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E. Si tous les vecteurs d'un système libre de F appartiennent à G, alors $F \subset G$
9. Dans un espace vectoriel, tout système lié contient le vecteur nul.
10. Dans un espace vectoriel de dimension 1, tout singleton de vecteur non nul est une base V

EXERCICE 2

Soient $\mathbb{R}^3$, l'espace vectoriel de base canonique $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$f(e_1) = e_1 + 3e_2; f(e_2) = -2e_1 + e_3; f(e_3) = -e_1 + 2e_2 + e_3.$

1. Déterminer la matrice A associée à f relativement à $\mathcal{B}$.
2. Déterminer une base de $Ker(f)$ et de $Im(f)$.
3. Soit $u = e_1 + e_2 \quad e_3$, montrer que (u, e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de f dans cette base.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Université F.H.B.
MATHS-INFO.

Année : 2020-2021

Examen Espaces vectoriels &
Applications linéaires

L1
2nde session
1h 30.

EXERCICE

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par $f(e_1) = -e_2$, $f(e_2) = e_1 + e_3$ et $f(e_3) = e_2$.
Pour tout réel t, on considère l'endomorphisme g_t définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$g_t(u) = id_{\mathbb{R}^3}(u) + tf(u) + \frac{t^2}{2}f^2(u)$

(où $id_{\mathbb{R}^3}$ désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et f^2 désigne $f \circ f$).

1. Déterminer la matrice A de f dans la base B.
2. Déterminer le noyau $ker(f^2)$ et l'image $Im(f^2)$ de f^2.
3. Déterminer le noyau $ker(f^3)$ et l'image $Im(f^3)$ de $f^3 = f \circ f \circ f$.
4. On désigne par $E(t)$ la matrice de g_t dans la base B.

a. Montrer que $E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2$ et déterminer $E(0)$.

b. Montrer que pour tous réels x et y, $E(x+y) = E(x).E(y)$;
puis déterminer le produit $E(t).E(-t)$.

c. En déduire que pour tout réel t, $E(t)$ est inversible et trouver son inverse $\left(E(t)\right)^{-1}$ en fonction de t, I_3 et A.

5. On prend t= 2 et on note $g = g_2$ et $E = E(2)$.

a. Déterminer la matrice E en fonction de I_3 et A, puis l'écrire sous forme de matrice.

b. On désigne par e_i' le vecteur colonne numéro i de E.

• Montrer que la famille $B' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

• Déterminer les matrices de f et de f^2 dans la base B'.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Université FHB
UFR MATHS-Info.

2021-2022

EXAMEN d'Espaces Vectoriels
1ère Session, Licence 1
Durée : 01H30

EXERCICE 1 (5 pts)

Répondre par vrai ou faux en justifiant.

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ;
2. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X]; P(3) = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ;
3. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X]; P(3) = 0\}$, une base de F est $\{X^2 - 3X, X - 1\}$;
4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$ est une application linéaire ;
5. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, x - y, 2x)$ est une application linéaire.

EXERCICE 2 (15 pts)

$$(\sum) \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}, \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Les variables x_1, x_2, x_3 sont ordonnées naturellement. Trianguler le système d'équations $(\sum)$ à l'aide de l'algorithme de Gauss. Combien a-t-on de variables libres dans ce système ?
2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ constitué par les solutions du système $(\sum)$.
Résoudre le système $(\sum)$ et donner une base de F.
3. Soient $v_1 = (0; 1; 1)$, $v_2 = (1; 2; 1)$, et $v_3 = (1; 1; 0)$. On
désigne par $G =< v_1, v_2, v_3 >$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par v_1, v_2, v_3.
Donner une base de G.
4. Déterminer alors, en suivant par exemple un algorithme du cours, une
équations à 3 inconnues dont G est l'ensemble des solutions.
5. Monter que (v_1, v_2) est une base de G. Préciser l'expression de v_3 dans la base (v_1, v_2) de G.
6. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a). Déterminer $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$, les images respectives de e_1, e_2, e_3 de la base β de $\mathbb{R}^3$ en fonction des éléments du même β.

b). En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ l'image de f.

c). Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Posons $(y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2, x_3)$.
Préciser l'expression de (y_1, y_2, y_3) à l'aide de (x_1, x_2, x_3).

d). Déterminer une base de $\ker(f)$ le noyau de f.

e). Déterminer l'intersection de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

f). A-t-on $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$? Justifier.

Scanned with CamScanner

Université F.H.B.
MATHS-INFO.

Année : 2021-2022

Examen Espaces vectoriels
& Applications linéaires
L1
2^{nde} session
1h 30'.

EXERCICE

Soient A et B les deux matrices suivantes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Vérifier que B est inversible et calculer B^{-1}.
3. On pose $M = AB$. Justifier le fait que M est inversible et calculer M^{-1}, en utilisant les résultats des deux questions précédentes.

Dans toute la suite, $\beta = (b_1, b_2, b_3)$ désigne une base de $\mathbb{R}^3$. On note f (respectivement : g) l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même qui a pour matrice A (respectivement : B) dans la base $\beta = (b_1, b_2, b_3)$.

4. Exprimer en fonction de b_1, b_2, b_3 les vecteurs $f(b_1)$, $f(b_2)$, $f(b_3)$, puis $f \circ f(b_1)$, $f \circ f(b_2)$, $f \circ f(b_3)$. Retrouver le résultat de la question 1.
5. Exprimer les vecteurs $g^{-1}(b_1)$, $g^{-1}(b_2)$, $g^{-1}(b_3)$ en fonction de b_1, b_2, b_3.
6. On note h l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, qui à un vecteur v associe $h(v) = f(v) - g^{-1}(v)$. Ecrire la matrice de h dans la base $\beta = (b_1, b_2, b_3)$.
7. Donner, en fonction de b_1, b_2, b_3, une base de $Ker(h)$ et une base de $Im(h)$.
8. On note $c_1 = f(b_1)$, $c_2 = f(b_2)$, $c_3 = f(b_3)$. Montrer que $\zeta = (c_1, c_2, c_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de l'application f dans la base $\zeta = (c_1, c_2, c_3)$?
9. Calculer les matrices des applications g et g^{-1} dans la base $\zeta = (c_1, c_2, c_3)$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UFR MATHS-Info.

EXAMEN d'Espaces Vectoriels

Session juin 2023

Durée : 01H00

Licence 1

EXERCICE

Soient $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^4$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $f(x, y, z, t) = (x', y', z', t')$ avec

$$\begin{cases} x' &= -3y - z + t \\ y' &= -x + 2t \\ z' &= 2x + 2y + 3z - t \\ t' &= -5x - 6y - z + 6t \end{cases}$$

1. a) Déterminer la matrice A de f dans la base β.
   b) Déterminer $\ker f$.
   c) Déterminer le rang de f et $\operatorname{Im} f$.
2. Soit $F = \{(x, y - x, z, y) \; ; \; x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
   a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   b) Déterminer une base de F et la dimension de F.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE FHB
U.F.R.Maths-Info

Année
2022-2023

EXAMEN D'ESPACES VECTORIELS

MIAGE L1

1ère Session

Durée : 1 H 30

EXERCICE

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ défini par :

$\forall u\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f\,(u) = (x - 3y + 3z\,;\ 3x - 5y + 3z\,;\ 6x - 6y + 4z)$.

1. Déterminer la matrice A associée de f dans la base β.
2. Calculer le polynôme $P(\lambda) = det(A - \lambda I_3)$, où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.
   En déduire les solutions de l'équation $P(\lambda) = 0$.
3. On définit l'endomorphisme g_λ de $\mathbb{R}^3$ par : $g_\lambda = f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}$, où $id_{\mathbb{R}^3}$ est l'application identité de $\mathbb{R}^3$ de matrice associée I_3. Déterminer une base de chacun des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par $E_{\lambda_i} = \ker g_{\lambda_i}$, où i indexe les solutions de $P(\lambda) = 0$.
4. Soit une famille β' de vecteurs :

   $u_1 = e_1 + e_2 + 2e_3$;

   $u_2 = e_1 + e_2$;

   $u_3 = -e_1 + 2e_3$.

a. Montrer que la famille β' est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer la matrice de passage P de la base β à la β'.

c. Déterminer la matrice D de f dans la base β' par la formule $D = P^{-1}AP$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Université FHB
UFR MATHS-Info.

EXAMEN d'Espaces Vectoriels
Session Septembre2023
Durée : 01H30
Licence 1

EXERCICE 1(05 pts)

Soit $F = \{(x, y - x, y)\ ;\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b) Déterminer une base de F et la dimension de F.

EXERCICE 2(15 pts)

Soient $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x', y', z')$ avec

$$\begin{cases} x' &= x - 3y - z \\ y' &= -x + y + z \\ z' &= 2x + 2y + 3z \end{cases}$$

1. a) Déterminer la matrice A de f dans la base β.

b) Déterminer $\ker f$.

c) Déterminer le rang de f et $\operatorname{Im} f$.

2. Soient $v_1 = e_1 - e_2 + 2e_3$, $v_2 = -3e_1 + e_2 + 2e_3$, $v_3 = -e_1 + e_2 + 3e_3$

a) Montrer que $\beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

b) Donner la matrice de passage $P = P_{\beta\beta'}$ de β à β',

c) Donner la matrice B associée à f dans la base β' au moyen de la matrice P.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Année : 2023-2024

Université F.H.B.
MATHS-INFO

Examen Espaces vectoriels
& Applications linéaires
L1
1ère session
1h 30'.

EXERCICE 1

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y = 0\}$ et
$G = \{(a + b, a + b, b) \in \mathbb{R}^3 ; a, b \in \mathbb{R}\}$

1. Montrer que F et G sont des $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
   Donner les dimensions de F et G.
2. Déterminer $F \cap G$ et sa dimension.
3. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

EXERCICE 2

Soient $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$dans $\mathbb{R}^4$ définie par $f(x, y, z, t) = (x', y', z', t')$ avec

$$\begin{cases} x' &= -3y - z + t \\ y' &= -x + 2t \\ z' &= 2x + 2y + 3z - t \\ t' &= -5x - 6y - z + 6t \end{cases}$$

1. a) Déterminer la matrice A de f dans la base β.
   b) Déterminer $\ker f$.
   c) Déterminer le rang de f et $\operatorname{Im} f$.
2. Soit $F = \{(x, y - x, z, y) ; x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
   a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   b) Déterminer une base de F.
   c) On pose $g = f - 2Id_{\mathbb{R}^4}$. A-t-on $g(F) \subset F$?

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Université F.H.B.
MATHS-INFO

Année : 2023-2024

Examen Espaces vectoriels
& Applications linéaires
L1
2^{nde} session
1h 30'.

EXERCICE 1(08pts)

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y = 0\}$ et
$G = \{(a + b, a + b, b) \in \mathbb{R}^3 ; a, b \in \mathbb{R}\}$

1. Montrer que F et G sont des $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
Donner les dimensions de F et G.
2. Déterminer $F \cap G$ et sa dimension.
3. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

EXERCICE 2(12pts)

Soit E un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension 3 et $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère l'application $\mathbb{R}$ - linéaire $u : E \to E$ définie par :
$u(e_1) = e_1 + e_2 + 2e_3, \quad u(e_2) = -u(e_1), \quad u(e_3) = e_1 - e_2.$
Soit M la matrice de u dans la base β. On pose :
$f_1 = e_2 + e_3, \quad f_2 = e_1 + e_3, \quad f_3 = e_1 + e_2$ et $\varsigma = (f_1, f_2, f_3)$.

1) Écrire la matrice M.
2) Calculer la dimension de $Ker(u)$, le rang de u et le rang de M.
3) Montrer que ς est une base de E.
4) Soit P la matrice de passage de la base β à la base ς et
N la matrice de u dans la base ς.

4-a) Déterminer les matrices P, P^{-1} et N.
4-b) Pour tout entier $k \geq 1$, calculer N^k et en déduire M^k.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Université Félix Houphouet-Boigny 2020−2021
UFRMI

CORRECTION ESPACE VECTORIEL
1ERE SESSION

Questionnaires : Repondez par VRAI ou FAUX

1- VRAI

2- FAUX

3- FAUX

4- VRAI

5- FAUX

6- VRAI

7- FAUX

8- FAUX

9- VRAI

10-VRAI

EXERCICE 2

1. Déterminons la matrice A associée à f relativement à β
   $f(e_1) = e_1 + 3e_2$; $f(e_2) = -2e_1 + e_3$; $f(e_3) = -e_1 + 2e_2 + e_3$

   D'où $A \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Déterminons une base de $Ker(f)$ et de $Imf(f)$

   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

   $$(x, y, z) \in Ker(f) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-z=0 \\ -6x-z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-z=0 \\ -6y-z=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

Ainsi $Ker(f)=0_{\mathbb{R}^3}$, $Ker(f)$ n'admet donc pas de base.
Par ailleurs, $Imf =< f(e_1), f(e_2), f(e_3) >$
$Imf =< (1,3,0),(-2,0,1),(-1,2,1) >$. Ces trois vecteurs sont libres donc continuent donc une base de Imf.
Notons β_1 cette base: $\beta_1 = \big((1,3,0),(-2,0,1),(-1,2,1)\big)$

3. Montrons que (μ, e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminons la matrice de f dans cette base.

Notons B la matrice obtenue en disposant en ligne les vecteurs de (μ, e_1, e_2)
$\mu = e_1 + e_2 - e_3 = (1,0,0) + (0,1,0) - (0,0,1)$

$\mu = (1,1,-1)$ d'où $B \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Ainsi (μ, e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^3$

On a: $f(\mu) = A \times (1,1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$f(\mu) = (0,1,0) = e_2$

$$f(e_1) = A \times (1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$f(e_1) = (1,0,0) = e_1$

$$f(e_2) = A \times (0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$f(e_2) = (-2,0,1)$
$f(e_2) = -\mu + e_2 - e_1 = -\mu - e_1 + e_2$
Notons C la matrice de f dans la base (μ, e_1, e_2)

On a: $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Scanned with CamScanner

Université FHB Maths-Info 2020-2021

CORRECTION ESPACE VECTORIEL

SESSION 2

Exercice

1. $f(e_1) = -e_2$; $f(e_1) = e_1 + e_3$ et $f(e_3) = e_2$ d'où la matrice A de f dans la base $B = (e_1, e_2, e_3)$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. A^2 est la matrice associée à f^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\mu = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\text{On a: } \mu \in Ker(f^2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = z$$

D'où $\mu = (x, y, x) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0)$

Ainsi $\boxed{Ker(f^2) = < (1,0,1), (0,1,0) >}$

$$Im(f^2) = \{f(x, y, z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$
$$= \{(-x + z, 0; -x + z), (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$$
$$= \{(-x + z)(1, 0, 1), (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

D'où $\boxed{Im(f^2) = < (1,0,1) >}$

3. La matrice de f^3 est A^3

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$A^3 = 0_{\mathbb{R}^3}$
Ainsi $Ker(f^3) = \mathbb{R}^3$ et $Im(f^3) = 0_{\mathbb{R}^3}$

4. a) Montrons que $E(t) = I_3 + t_A + \frac{t^2}{2}A^2$ et déterminons $E(0)$

Notons $\mu = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$g_t(\mu) = g_t(x, y, z) = id_{\mathbb{R}}(x, y, z) + t\, f(x, y, z) + \frac{t^2}{2}\, f^2(x, y, z)$$

$$= I_3(x, y, z) + t\, A(x, y, z) + \frac{t^2}{2}\, A^2(x, y, z)$$

$$g_t(\mu) = (I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2)(x, y, z)$$

Par identification : $E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2$

D'où $E(0) = I_3 + 0\ A + \frac{0^2}{2}A^2 \Rightarrow \boxed{E(0) = I_3}$

5. a) On a: $E = E(2) = I_3 + 2A + \frac{4}{2}A^2 = I_3 + 2A + 2A^2$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $e'_1 = (-1; -2; -2)$; $e'_2 = (2; 1; 2)$ et $e'_3 = (2; 2; 3)$

* Montrons que B' est une base de $\mathbb{R}^3$

$$det(E) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -(3 - 4)$$

$det(E) = 1$, $det(E) \neq 0$ d'où $rang(E) = rang(\beta') = 3$

Comme $Card(\beta') = rang(\beta') = dim\mathbb{R}^3$, alors β' est une base de $\mathbb{R}^3$.

*Déterminons les matrices de f et f^2 dans B'

Noton M_1, la matrice de f dans B' et M_2 la matrice de f^2 dans B'

• Déterminons M_1

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

$$f(c_1') = A(-1;-2;-2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2e_1 - e_2 - 2e_3$$

$$f(c_1') = -c_2'$$

$$f(c_2') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_1 + e_3$$

$$f(c_2') = c_1' + c_3'$$

$$f(c_3') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2e_1 + e_2 + 2e_3 = c_2'$$

D'où $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

• Déterminons M_2

$$f^2(c_1') = A^2(-1;-2;-2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -e_1 + e_3$$

$$f^2(c_1') = -c_1' - c_3'$$

$$f^2(c_2') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$f^2(c_3') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = e_1 + e_3 = c_1' + c_3'$$

D'où $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^2$

6. Montrons que $\forall x, y \in \mathbb{R}, E(x+y) = E(x).E(y)$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, E(x+y) = I_3 + (x+y)A + \frac{(x+y)^2}{2}A^2$$

$$E(x+y) = I_3 + xA + yA + \frac{x^2}{2}A^2 + \frac{y^2}{2}A^2 + xyA^2 \qquad (1)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, E(x).E(y) = (I_3 + xA + \frac{x^2}{2}A^2)(I_3 + yA + \frac{y^2}{2}A^2)$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$E(x).E(y) = I_3 + yA + \frac{y^2}{2}A^2I_3 + xAI_3 + xyA^2 + \frac{xy^2}{2}A^3 + \frac{x^2}{2}A^2I_3 + \frac{x^2y}{2}A^3 + \frac{x^2y^2}{4}A^4$ Or $A^3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

D'où $\forall x, y \in \mathbb{R}, E(x).E(y) = I_3 + yA + \frac{y^2}{2}A^2 + xA + xyA^2 + \frac{x^2}{2}A^2$

$E(x).E(y) = I_3 + xA + yA + \frac{x^2}{2}A^2 + \frac{y^2}{2}A^2 + xyA^2$ (2)

Comme (1) = (2), alors $\forall x, y \in \mathbb{R}, E(x+y) = E(x).E(y)$

Déterminons $E(t).E(-t)$

Posons $x = t$ et $y = -t$

On obtient donc $E(t-t) = E(t).E(-t)$

$E(t).E(-t) = E(0)$

$E(t).E(-t) = I_3$ car $E(0) = I_3$

On a: $E(t).E(-t) = I_3$, donc $E(t)$ est inversible d'inverse.

$E(-t) = I_3 - tA + \frac{(-t)^2}{2}A^2$

$E(-t) = I_3 - tA + \frac{(t^2)}{2}A^2$ Ainsi $\boxed{(E(t))^{-1} = I_3 - tA + \frac{t^2}{2}A^2}$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

CORRECTION SUJET ESPACE VECTORIEL

Licence 1 Session 1

2021 - 2022

Exercice 1

1. VRAI
2. VRAI
3. FAUX car pour $P(X) = X - 1,\ P(3) = 2 \neq 0$
4. FAUX car pour $f((\lambda x, \lambda y)) \neq \lambda f(x, y)$
5. VRAI

Exercice 2

1) Triangulons le système d'équation $(\sum)$

$$(\sum) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Donc une triangulation est :

$$(\sum) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Il n'y a pas de variable libre.

2) Résolvons $(\sum)$

$$\Longleftrightarrow \begin{matrix} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{matrix} x_3 = -x_2 \\ x_1 + 2x_2 - x_2 = 0 \\ x_1 = -x_2 \end{matrix}$$

On a :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \{(-x_2, x_2, -x_2), x_2 \in \mathbb{R}\}$
Une base de F est $F = \{(-1, 1, -1)\}$

3)

$G = < v_1, v_2, v_3 >$
Une base de G est : $\alpha = \{(0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$

4) Montrons que (v_1, v_2) est base de G.

On a :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Donc (v_1, v_2) est base et comme G est engendré par v_1, v_2, v_3 alors (v_1, v_2) est base de G.

5) Précisons l'expression de v_3 dans la base (v_1, v_2) de G.

$v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 = 1 - 2\lambda_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 = -1 \end{cases}$$

Donc $v_3 = -v_1 + v_2$ et par conséquent v_3 a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base (v_1, v_2)

6)

a) Déterminons $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$
$f(e_1) = e_2 + e_3$
$f(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3$
$f(e_3) = e_1 + e_2$

b) Déduction d'une base de $Im(f)$ de f
Une base de $Im(f)$ est : $\gamma = \{(0,1,1), (1,2,1)\}$

c) Déterminons une base de $Ker(f)$

$$Ker(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

Donc une base de $Ker(f)$ est : $\{(-1,1,1)\}$

d) Déterminons l'intersection de $Ker(f)$ et $Im(f)$
On a :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Donc $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$ et par conséquent $Ker(f) \cap Im(f) = \varnothing$

e) $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$
On a $dimKer(f) + dimIm(f) - dimKer(f \cap Im(f)) = 1 + 2 - 0 = 3$ et $dim\mathbb{R}^3$
On a $dim\mathbb{R}^3 = dimKer(f) + dimIm(f) - dim(f \cap Im(f))$
Donc on a $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

DEUXIEME SESSION ESPACE VECTORIEL 2021-2022

$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

1) vérifions que A est inversible et calculons A^{-1}

$\det(A)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0$ comme $\det(A)\neq 0$ alors A est inversible.

Déterminons A^{-1}

Utilisons la méthode des systèmes d'équation, soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ on a $AX=Y \Leftrightarrow X=A^{-1}Y$

On a $AX=Y <=> \begin{cases}x_1=y_1\\x_2=y_2\\x_1+x_2-x_3=y_3\end{cases} => \begin{cases}x_1=y_1\\x_2=y_2\\x_3=y_1+y_2-y_3\end{cases} => \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

Donc $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$

2 – Vérifions que B est inversible et déterminons son inverse (voir question 1)

$\det(B)=1\neq 0$ donc elle est inversible et $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

3 – on pose M=AB

Justification

$\det(M)=\det(AB)=\det(A)*\det(B)=-1\neq 0$ donc M est iversible

Calculons M^{-1}

$M^{-1}=(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

On a A=mat (f); B=mat (g)

4 – Exprimons en fonction de b_1, b_2, b_3

$A=mat(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$ Donc : $\begin{cases}f(b_1)=b_1\\f(b_2)=b_2+b_3\\f(b_3)=-b_3\end{cases}$;

$B=mat(g)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $Donc$ $\begin{cases}g(b_1)=b_1\\g(b_2)=b_2\\g(b_3)=b_1+b_2+b_3\end{cases}$

5 –exprimons les vecteurs $g^{-1}(b_1)$, $g^{-1}(b_2)$, $g^{-1}(b_3)$ en fonction de b_1, b_2, b_3.

β étant considéré comme la base canonique de $\mathbb{R}^3$ on a B^{-1} est la matrice de g^{-1} donc $g^{-1}(b_1)=b_1$, $g^{-1}(b_2)=b_2$, $g^{-1}(b_3)=-b_1-b_2+b_3$

6 –soit v un vecteur associé a $g(v)=f(v)-g^{-1}(v)$.

Scanned with CamScanner

Soit F la matrice de h dans la base $\beta=(b_1,b_2,b_3)$:

$$h(b_1)=f(b_1)-g^{-1}(b_1)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=0b_1+0b_2+0b_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$h(b_2)=f(b_2)-g^{-1}(b_1)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=b_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$h(b_3)=f(b_3)-g^{-1}(b_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\text{ Donc F=}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

7 –Déterminons une base de Ker(h) et Im(h)

$$Ker(f)=\{(x,y,z)\epsilon\mathrm{R}^3/f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}<=>\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}<=>\begin{cases}z=0\\x=-y\end{cases}$$

$Ker(h)=\langle -1,1,0\rangle$ D'après le théorème des rang on a : $\dim\ker(h)+\dim im(h)=\dim(\mathrm{R}^3)$; $\dim(h)=3-1=2$ Donc $im(h)=\langle(0,0,1),(1,1,-2)\rangle$; une base de Ker(h) est $\beta'=\{(-1,1,0)\}$; une base de Im(h) est $\beta''=\{(0,0,1);(1,1,-2)\}$

$$8-C_1=f(b_1)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};C_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=f(b_2);C_3=f(b_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$\varepsilon=(C_1,C_2,C_3)$ on a : $Card(c)=3=dim\mathrm{R}^3$ et $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0$ Donc ε est une base de R^3

*Déterminons la matrice associé à f donc ε.

On a $P_{\beta\varepsilon}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$; Soit H la matrice de f dans la base ε, $H=P\beta\varepsilon^{-1}AP_{\beta\varepsilon}$

$$H=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}=A^3$$

9 – soit W la matrice de g dans la base ε

On a : $W=P\beta\varepsilon^{-1}AP_{\beta\varepsilon}$

$$W=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$$ la matrice g^{-1} dans la base ε est W^{-1}.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Espaces vectoriels et Applications linéaires

session 1 2023-2024

Exercice 1

1. Sous-espaces vectoriels et dimensions de F et G

Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel, nous devons vérifier les trois propriétés suivantes :

- F contient le vecteur nul : Prenons $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Alors $x + y = 0 + 0 = 0$, donc $(0, 0, 0) \in F$.
- F est stable par addition : Si $(x_1, y_1, z_1) \in F$ et $(x_2, y_2, z_2) \in F$, alors $x_1 + y_1 = 0$ et $x_2 + y_2 = 0$. Donc $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0$. Par conséquent, $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in F$.
- F est stable par multiplication scalaire : Si $(x, y, z) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $x + y = 0$. Donc, $\lambda(x + y) = \lambda \cdot 0 = 0$, ce qui implique que $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in F$.

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

dimension de F: Écrivons x en fonction de y : $x = -y$. Tout vecteur $(x, y, z) \in F$ s'écrit donc sous la forme $(-y, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(0, 0, 1)$. Ainsi, une base de F est vect$\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, ce qui implique que la dimension de F est $\dim(F) = 2$.

Montrons maintenant que G est un sous-espace vectoriel. Comme pour F, nous vérifions :

- G contient le vecteur nul : Prenons $a = 0$ et $b = 0$. Alors $(a + b, a + b, b) = (0, 0, 0)$, donc $(0, 0, 0) \in G$.
- G est stable par addition : Si $(a_1 + b_1, a_1 + b_1, b_1) \in G$ et $(a_2 + b_2, a_2 + b_2, b_2) \in G$, alors $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) = a_1 + b_1 + a_2 + b_2$. Ainsi, $((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2), (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2), b_1 + b_2) \in G$.
- G est stable par multiplication scalaire : Si $(a + b, a + b, b) \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$. Donc, $\lambda(a + b, a + b, b) = (\lambda(a + b), \lambda(a + b), \lambda b) \in G$.

Ainsi, G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Dimension de G : Tout vecteur $(x, y, z) \in G$ s'écrit sous la forme $(a + b, a + b, b) = a(1, 1, 0) + b(1, 1, 1)$. Une base de G est donc $\{(1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, ce qui implique que la dimension de G est $\dim(G) = 2$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

2. Intersection $F \cap G$ et sa dimension

Pour trouver $F \cap G$, nous devons résoudre simultanément les conditions de F et G.
Un vecteur $(x, y, z) \in F \cap G$ doit satisfaire $x + y = 0$ et $x = a + b$, $y = a + b$, $z = b$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$.
Puisque $x = -y$, nous avons $a + b = -a - b$, ce qui implique que $2a = -2b$, donc $a = -b$.
Substituons $a = -b$ dans les équations pour x, y, et z :

$$(x, y, z) = (-b + b, -b + b, b) = (0, 0, b).$$

Ainsi, tout vecteur de $F \cap G$ est de la forme $(0, 0, b)$, où $b \in \mathbb{R}$.
Une base de $F \cap G$ est donc $\{(0, 0, 1)\}$, et la dimension de $F \cap G$ est $\dim(F \cap G) = 1$.

3. Vérifions si F et G sont supplémentaires

Pour que F et G soient supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, il faut que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(F \cap G) + \dim(\mathbb{R}^3)$.
Nous avons :

$$\dim(F) = 2, \quad \dim(G) = 2, \quad \dim(F \cap G) = 1.$$

Ainsi, $\dim(F) + \dim(G) = 4$, tandis que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
Donc, $\dim(F) + \dim(G) \neq \dim(\mathbb{R}^3) + \dim(F \cap G)$, ce qui implique que F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

1a. Déterminer la matrice A de f dans la base β.

Pour trouver la matrice A de f dans la base canonique β, on applique f aux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
Calculons $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (0, -1, 2, -5)^T, \\ f(e_2) &= (-3, 0, 2, -6)^T, \\ f(e_3) &= (-1, 0, 3, -1)^T, \\ f(e_4) &= (1, 2, -1, 6)^T. \end{aligned}$$

La matrice A est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -5 & -6 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1b. Déterminer $\ker(f)$.

$\det A = 53 \neq 0$ donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}^4 \Longrightarrow \ker f = \{0_{\mathbb{R}^4}\} = \{(0, 0, 0, 0)\}$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

1-b rang de f

Le rang de f est de 4 et donc $\text{im}f=\mathbb{R}^4$

2-a montrons que F est un s.e.v de $\mathbb{R}^4$

$F=\{(x,y-x,z,y),x,y,z\in\mathbb{R}\}=\{x(1,-1,0,0)+y(0,1,0,1)+z(0,0,1,0);x,y,z\in\mathbb{R}\}$
$=\text{vect}\{(1,-1,0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\}\subset\mathbb{R}^4\Rightarrow F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

2-b

Une base de F est $\omega=\{(1,-1,0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\}$

2-c

la matrice de $g=f-2Id_{\mathbb{R}^4}$ dans $\beta=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est:

$$A-2I_4=\begin{bmatrix}0&-3&-1&1\\-1&0&0&2\\2&2&3&-1\\-5&-6&-1&6\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A-2I_4=\begin{bmatrix}-2&-3&-1&1\\-1&-2&0&2\\2&2&1&-1\\-5&-6&-1&4\end{bmatrix}$$

$\omega=\{\omega_1=(1,-1,0,0),\omega_2=(0,1,0,1),\omega_3=(0,0,1,0)\}$

$$(A-2I_4)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=A-2I_4=\begin{bmatrix}-2&-3&-1&1\\-1&-2&0&2\\2&2&1&-1\\-5&-6&-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}\notin F$$

Donc $g(\omega_1)=(f-2Id_{\mathbb{R}^4})(\omega_1)=(1,1,0,1)\notin F\Rightarrow g(F)\subsetneq F$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Espaces vectoriels et applications linéaires

session 2 2023-2024

Exercice 1(voir session 1)

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère l'application $\mathbb{R}$-linéaire $u : E \to E$ définie par :

$$u(e_1) = e_1 + e_2 + 2e_3, \quad u(e_2) = -u(e_1), \quad u(e_3) = e_1 - e_2.$$

Soit M la matrice de u dans la base β. On pose :

$$f_1 = e_2 + e_3, \quad f_2 = e_1 + e_3, \quad f_3 = e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad \zeta = (f_1, f_2, f_3).$$

1) Écrire la matrice M

Pour déterminer la matrice M, nous devons exprimer les images des vecteurs de la base β dans cette même base :

$$u(e_1) = e_1 + e_2 + 2e_3 \implies M_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$u(e_2) = -u(e_1) = -(e_1 + e_2 + 2e_3) \implies M_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$u(e_3) = e_1 - e_2 \implies M_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice M s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

2) Calculer la dimension de $\ker(u)$, le rang de u et le rang de M

Dimension de $\ker(u)$:

Pour déterminer $\ker(u)$, il faut résoudre l'équation $u(x) = 0$ pour $x \in E$. Autrement dit, nous devons résoudre le système $M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

La dernière équation donne $x_1 = x_2$. En substituant $x_1 = x_2$ dans les deux premières équations, on obtient $x_3 = 0$. Donc, tout vecteur de $\ker(u)$ s'écrit sous la forme $x = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\ker(u)$ est de dimension 1.

Rang de u et de M :

Le rang de u correspond au rang de la matrice M. On peut voir que M a deux colonnes indépendantes (par exemple, les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes), donc le rang de M est 2.

Par conséquent, $\dim(\ker(u)) = 1$, et $\text{rang}(u) = 2$.

3) Montrer que ζ est une base de E

Pour montrer que $\zeta = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E, nous devons vérifier que les vecteurs f_1, f_2, et f_3 sont linéairement indépendants.

Considérons une combinaison linéaire nulle des f_i :

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$$

Substituons les expressions des f_i :

$$\alpha_1(e_2 + e_3) + \alpha_2(e_1 + e_3) + \alpha_3(e_1 + e_2) = 0$$

En regroupant les termes similaires :

$$(\alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 + \alpha_3)e_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)e_3 = 0$$

Pour que cette égalité soit vérifiée, il faut que chaque coefficient soit nul, ce qui donne le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

La solution de ce système est $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, ce qui prouve que les f_i sont linéairement indépendants. Donc, ζ est bien une base de E.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

4-a) Déterminer les matrices P, P^{-1} et N

Matrice P :

La matrice P est la matrice de passage de la base β à la base ζ. Chaque colonne de P est constituée des coordonnées des vecteurs f_1, f_2, f_3 dans la base β :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice P^{-1} :

P^{-1} est l'inverse de P. Pour trouver P^{-1}, on résout $PP^{-1} = I$, où I est la matrice identité :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrice N :

La matrice N est la matrice de u dans la base ζ. Elle est donnée par :

$$N = P^{-1}MP$$

Calculons N explicitement :

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4-b) Pour tout entier $k \geq 1$, calculer N^k et en déduire M^k

Comme N est une matrice diagonale de la forme :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On peut facilement calculer N^k pour tout entier $k \geq 1$:

$$N^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

Enfin, pour retrouver M^k, on utilise la relation $M^k = PN^kP^{-1}$:

$$M^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3^k \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice M^k s'exprime donc comme une matrice où toutes les entrées sont égales à 3^k. En d'autres termes,

$$M^k = 3^k \cdot \mathbf{1}_3,$$

où 1_3 est la matrice de taille 3×3 dont tous les éléments sont égaux à 1.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

VALIDEUR LMD-2025

Université FHB
UFR Maths-Info

U.E: Analyse Réelle
Session 1: Août 2021
Durée : 2h30
Niveau : L1

Exercice 1

Analyse Réelle

1. Calculer $\int_0^1 \sqrt{\frac{1 \quad x}{1+x}} dx$

2. Calculer la limite, si elle existe, de la suite $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}}$

Exercice 2 Soit $I =]1, +\infty[$. On désigne par $\int$ l'application de I dans $\mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in I$, par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{(t \quad 1)^2} dt$$

1. Déterminer le signe de $f(x)$

2. Justifier la dérivabilité de f sur I et montrer que $f'(x) = -\frac{\ln(x)}{(x+1)^2}$ pour tout $x \in I$.

3. Montrer que pour tout $t \in I \quad t - 1 - \frac{(t \quad 1)^2}{2} \leq \ln(t) \leq t - 1$
   On pourra utiliser la formule de Taylor Lagrange entre 1 et t

4. Montrer que $\ln(x+1) + \frac{x}{2} \quad \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq \ln(x+1)$

5. En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

Exercice 3 (6points)

Intégrer les équations différentielles suivantes :

1. $x'' + ax' + 4x = \cos(2t)$ avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = \frac{1}{\alpha}$ avec $\alpha \in]0, 4[$
2. $y'' + y = cotan(x)$
3. $x^2y'' \quad 3xy' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}^+$. Poser $t = \ln(x)$.

Scanned with CamScanner

VALIDEUR LMD-2025

Université FHB
UFR Maths-Info

U.E: Analyse Réelle

Session 1: 25 Juin 2022
Durée: 3h00
Niveau: L1

Exercice 1 (3 points)
Répondre par vrai ou faux. bonne réponse= 0,5 point
Mauvaise réponse= -0,5 point

1. Toute fonction monotone sur un intervalle fermé et borné sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable.
2. Pour toute fonction f Riemann-intégrable sur $[a, b]$ on a $\forall X \in S_{a,b}, S(f, X) \leq \int_a^b f(x)dx$ où $S_{a,b}$ est l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$ et $S(f, X)$ est la somme de Darboux supérieure de f relativement à X.
3. L'équation différentielle $y'cosx + ysinx + y^3 = 0$ est une équation de Ricatti.
4. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, alors $\exists \zeta \in [a, b]$: $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\zeta)\int_a^b g(x)dx$.
5. On considère la fonction $f : x \mapsto x$ définie sur $[0, 2]$. $\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur I.
6. L'intégrale d'une fonction continue et impaire sur $[-1, 1]$ est nulle .

Exercice 2 (4,5 points) Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}?
2. En déduire I_{2n} et I_{2n+1}.
3. Montrer que $(I_n)_{n\in N}$ est décroissante et strictement positive.
4. Montrer que I_n est équivalente à I_{n+1}

Scanned with CamScanner

5. Calculer nI_nI_{n+1}
6. Donner un équivalent simple de I_n

Exercice 3(7,5 points) Soit F la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{sint}$$

1. Montrer que F est bien définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, puis qu'elle est de classe C^1 sur cet intervalle.
2. Calculer $F'(x)$ et en déduire les variations de F sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
3. A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $t \in [x, 2x] \subset]0, \frac{\pi}{2}[$;

$$0 < t - \frac{t^2}{2} < sint < t$$

4. En déduire que $\frac{1}{t} < \frac{1}{sint} < \frac{1}{t} + \frac{1}{2-t}$
5. Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$ln2 < F(x) < ln2 - ln(\frac{2-2x}{2-x})$$

6. En déduire la limite de $F(x)$ lorsque $x \to 0$.

Exercice 4 (5points)

1. Donner la solution générale de l'équation différentielle $x''+4x = cos(2t)$. Les solutions sont-elles bornées lorsque $t \to +\infty$?
2. Soit $a \in]0, 4[$. Donner la solution générale de l'équation différentielle

$$x'' + ax' + 4x = cos(2t)(E)$$

3. Déterminer la solution de (E)pour les conditions initiales $x(0) = 0; x'(0) = \frac{1}{a}$
4. Déterminer le maximum M_a de cette solution pour $t \geq 0$ en fonction de a.
5. Quelle est la limite de M_a lorsque a tend vers 0?

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

VALIDEUR LMD-2025

Université FHB
UFR Maths-Info

U.E: Analyse Réelle

Session 2: Aout 2022
Durée: 3h00
Niveau: L1

Exercice 1 (3 points)
Répondre par vrai ou faux. bonne réponse= 0,5 point
Mauvaise réponse= -0,5 point

1. Toute fonction Riemann-intégrable sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ est continue sur $[a, b]$.
2. Pour toute fonction f Riemann-intégrable sur $[a, b]$ on a $\forall X \in S_{a,b}, s(f, X) \leq \int_a^b f(x)dx$ où $S_{a,b}$ est l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$ et $s(f, X)$ est la somme de Darboux inférieure de f relativement à X.
3. L'équation différentielle $y'cosx + ysinx + y^3 = 0$ est une équation de Bernouilli.
4. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, alors $\exists \zeta \in [a, b]$: $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\zeta)\int_a^b g(x)dx$.
5. On considère la fonction $f : x \mapsto x$ définie sur $[0, 2]$. $\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur I.
6. L'intégrale d'une fonction continue et paire sur $[-1, 1]$ est nulle .

Exercice 2 (4,5 points) Soit $a \in]0, +\infty[$ et soit $f \in C^1([0, a])$ telle que $f(0) = 0$. Posons $\forall x \in [0, a]$, $F(x) = \int_0^x |f'(t)|dt$

1. Montrer que $\forall x \in [0, a]$, $|f(x)f'(x)| \leq F(x)F'(x)$
2. En déduire que $\int_0^a |f(x)f'(x)|dx \leq \frac{(F(a))^2}{2}$ puis que $\int_0^a |f(x)f'(x)|dx \leq a\int_0^a |f'(t)|^2dt$

Scanned with CamScanner

Exercice 3(5 points) Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(t) = \frac{\ln(t+1)}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(t) = 1$ si $t = 0$.
Soit F la fonction définie sur $]-1,1[$ par: $F(x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt$.

1. Montrer que f est continue sur $]-1,1[$.
2. En déduire que F est de classe C^1 sur $]-1,1[$.
3. Calculer $F'(x)$ pour tout $x \neq 0$ et calculer $F'(0)$.
4. Montrer que F est impaire.
5. Donner les variations de F sur $]0,1[$ puis sur $]-1,0[$

Exercice 4 (7.5 points)

A- On se propose de résoudre l'équation différentielle
(E): $|x|y' + (x-1)y = x^2$

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. On cherche maintenant les solutions f définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   a. Déterminer $f(0)$. Que peut-on dire des restrictions de f à $\mathbb{R}_+^*$ et à $\mathbb{R}_-^*$?
   b. En déduire qu'il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$.

B- Résoudre l'équation différentielle (F) $y'' + y = cotan(x)$ sur $]0,\pi[$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UFHB
UFR MI
Année 2022-2023

Analyse Réelle
1ère session
Durée: 2h30

Exercice 1: (3pts)

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$, avec $p>0$

Exercice 2 (5pts)
Calculer les intégrales indéfinies suivantes:
$\int \dfrac{1-x}{x^2}e^x dx$; $\int \dfrac{\sin(x)+\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}dx$

Exercice 3 (4pts)
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

1) Montrer qu'il existe x_0 et $y_0 \in [a,b]$ tels que $(b-a)f(x_0) \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a)f(y_0)$.

2) En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Exercice 4 (5pts)

On considère l'équation différentielle
(F) : $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$, $x \in]0,+\infty[$
où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
On pose $z(t) = y(e^t)$, une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier, en effectuant le changement de variable ci- dessus dans l'équation (F), que l'on obtient l'équation différentielle linéaire en z : (E) : $az'' + (b-a)z' + cz = 0$.
2. Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y'' - xy' + y = 0$.

Exercice 5 (3pts)

1. Justifier sans calcul que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t(t+1)}$ converge.
2. On pose $F(x) = \int_1^x \dfrac{dt}{t(t+1)}$; $x > 1$.
   a- Calculer $F(x)$.
   b- En déduire la valeur de $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t(t+1)}$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

VALIDEUR-LMD-2025

Université FHB
UFR Maths-Info

U.E: Analyse Réelle

Session 1:Juin 2024
Durée: 2h00
Niveau: L1

Exercice 1 (2 points)

Répondre par vrai ou faux. bonne réponse= 0,5 point
Mauvaise réponse= -0,25 point
On considère la fonction $f : x \mapsto x$ sur l'intervalle $I = [0;2]$

1. $\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n}$ est une somme de Riemann associée à f sur I.
2. $\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur I.
3. $\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur I.
4. $\sum_{i=1}^{n} \frac{4i}{n^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur I.

Exercice 2 (4 points)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, calculer les intégrales

$$I = \int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx \quad \text{et} \quad J = \int_a^b x\sqrt{(x-a)(b-x)}dx$$

(Pour J on pourra poser $t = a + b - x$).

Exercice 3(7 points)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante et telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

1. On suppose que f est dérivable sur $[0, +\infty[$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, posons $G(x) = \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$ où f^{-1} est la fonction réciproque de f.
   a- Montrer que G est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^+, G'(x) = xf'(x)$.

Scanned with CamScanner

b- Montrer que la fonction $\phi : x \mapsto \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x)$ est constante sur $\mathbb{R}_+$.

c- En déduire que $\forall x \in [0, +\infty[; \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x)$

2. Soit b un réel positif fixé, considérons la fonction Ψ, qui à tout $x \in [0, -\infty[$ associe $\Psi(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt - xb$

a- Montrer que Ψ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \in [0, +\infty[; \Psi'(x) = f(x) - b$.

b- Etudier le sens de variation de Ψ, montrer que Ψ admet un minimum au point $f^{-1}(b)$ et calculer $\Psi(f^{-1}(b))$.

c- En déduire que $\forall a \in [0, +\infty[; \int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt \geq ab$

Exercice 4 (7 points)

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : y'' + y = 1 + tan^2 x, x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

(On pourra remarquer que $\frac{1}{cosx} = \frac{1}{2}(\frac{cosx}{1-sinx} + \frac{cosx}{1+sinx})$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$f(x) = 2\int_0^x f(t)cos(x-t)dt + 1 \quad (1)$$

a- Calculer $f(0)$

b- Montrer que (1) s'écrit:

$$f(x) = 2cosx \int_0^x f(t)cos(t)dt + 2sinx \int_0^x f(t)sin(t)dt + 1$$

c- En déduire $f'(x)$ et $f''(x)$ et montrer que f est une solution de l'équation différentielle $(E_1) : y'' - 2y' + y = 1$

d- En remarquant que $f'(0) = 2f(0)$ montrer que $f(x) = 2xe^x + 1$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Université FHB
UFR Maths-Info

U.E: Analyse Réelle

Session 2:Juillet 2024
Durée: 2h00
Niveau: L1

Exercice 1 (4 points)

Déterminer la limite des suites suivantes:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \qquad v_n = \frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{2n} (n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 2 (4 points)

On rappelle que pour une fonction f continue positive sur $[a,b]$ avec $a<b$, $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe dont une équation est $y=f(x)$, les droites $x=a$, $x=b$ et l'axe (OX). Posons

$$I = \int_1^2 \sqrt{(x-1)(2-x)}dx \quad \text{et} \quad J = \int_1^2 x\sqrt{(x-1)(2-x)}dx$$

1. Montrer que $y=\sqrt{(x-1)(2-x)}$ est l'équation d'un demi-cercle dont on précisera les caractéristiques: le centre et le rayon.
2. En déduire la valeur de I
3. En posant $t=3-x$, montrer que $3I-2J=0$
4. En déduire la valeur de J

Exercice 3(3 points)

A l'aide de la formule de la moyenne généralisée , calculer la limite suivante:

$\lim\limits_{x\to 1^+} \int_x^{x^2} \frac{\cos \pi t}{\ln t} dt$

Exercice 4 (9 points)

I- Soit la fonction g de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbb{R}$ telles que $g^{(4)}=g$, $g(0)=1$ et $g^{(1)}(0)=g^{(2)}(0)=g^{(3)}(0)=0$ et soit la fonction f telle que $f=g^{(2)}-g$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

1. Montrer que f est de classe C^2 et vérifie l'équation différentielle E_1: $y" + y = 0$.
2. Déterminer la fonction f
3. Résoudre l'équation différentielle E_2: $y" - y = f$. (On remplacera f par son expression obtenue à la question précédente)
4. En déduire la fonction g

II- Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $x" + ax' + 4x = cos(2t)$ avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = \frac{1}{a}$ avec $a \in]0, 4[$
2. $y" + 4y = \frac{1}{tan(x)}$

VALIDEUR LMD - 2025

Scanned with CamScanner

CORRECTION EXAMEN ANALYSE REEL 2021 SESSION 1

EXERCICE 1

1) Calculons $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

Soit $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

Posons $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Leftrightarrow t^2 = \frac{1-x}{1+x}$

$\Leftrightarrow 1-x = t^2(1+x)$

$\Leftrightarrow 1 \quad x = t^2 + xt^2$

$\Leftrightarrow 1 \quad t^2 = x(t^2+1)$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \quad t^2}{1+t^2}$

Donc $dx = \frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt$

$= \frac{2t(1+t^2+1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt$

$dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt$

- Pour $x = 0$, $t = 1$
- Pour $x = 1$, $t = 0$

I devient donc : $I = \int_1^0 t \times \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt$

On a : $I = \int_1^0 \frac{-4t^2}{(1+t^2)^2}dt$

$= \int_1^0 \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}dt$

$I = \int_1^0 2t \times \frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$

Posons $u(t) = 2t$ $\quad u'(t) = 2$

$v'(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$ $\quad v(t) = -\frac{1}{1+t^2}$

Donc $I = \left[\frac{2t}{1+t^2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$

$= \left[-\frac{2t}{1+t^2} + 2\,arctan(t)\right]_0^1$

D'où $\boxed{I = 1 + \frac{\pi}{2}}$

2) Calculons la limite si possible de :

$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}}$

Soit $v_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}}$

$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n(1-k/n)}{n^3(1+k/n)}}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1-k/n}{1+k/n}}$

$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{1-k/n}{1+k/n}}$

Posons $f(x) = \sqrt{\frac{1-k/n}{1+k/n}}$

Donc $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$v_n = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\,\frac{1-0}{n}\right)$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

(v_n) est du type $v_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + b\frac{b-a}{n}\right)$ avec $b = 1$ et $a = 0$

(v_n) est donc une somme de Riemann associé à f sur $[0; 1]$ relativement à la subdivision $\frac{k}{n}; 0 \leq b \leq n.$

Comme f est continue sur $[0; 1]$ alors elle est Riemann intégrable sur $[0; 1]$. On obtient donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}} = 1 - \frac{\pi}{2}}$$

EXERCICE 2

Soit $I =]1, +\infty[$. On désigne par f l'application de I dans $\mathbb{R}$, définie pour tout $x \in I$, par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}$$

Il faut noter que f est bien définie. En effet $\forall x \in I,\ x > 1 \Longrightarrow \forall x \in [x, x^2]$,

$1 < x < 1 \Longrightarrow t - 1 \neq$ et comme $t \geq x > 1 > 0,\ \ t > 0$ et donc on peut prendre le logarithme (ln) de t. Ainsi la fonction $[x, x^2] \ni t \mapsto \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}$ est continue sur $[x, x^2]$ et donc elle est intégrable.

1) Déterminer le signe de $f(x)$.

On a : $\forall x \in I$, et $\forall t \in [x, x^2], 1 < x \leq t$

$\Longrightarrow 1 < t \Longrightarrow \ln(1) < \ln(t)$ (car la fonction ln est croissante sur $]0, +\infty[$)

Alors $0 = \ln(1) < \ln(t) \Longrightarrow \ln(t) > 0, \forall t \in [x, x^2]$

Aussi, $\forall x \in I,\ \forall t \in [x, x^2], (t-1)^2 > 0$

$$\Longrightarrow \frac{\ln(t)}{(t-1)^2} > 0 \Longrightarrow f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{(t-1)^2} > 0$$

Conclusion, $\forall x \in I, f(x) > 0$ et donc f est positive.

Scanned with CamScanner

2)

$\forall x \in I,\ g:]1,+\infty[\to \mathbb{R}$

$t \mapsto \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}$ est continue. De plus les fonctions $\alpha : I \to \mathbb{R}$ et $\beta: I \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$ $\quad$ $x \mapsto x$

sont dérivables car ce sont des polynômes.

Donc $F : I \mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{(t-1)^2} = \int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} g(t)dt$ est dérivable sur I.

$\forall x \in I,\ f'(x) = g(\alpha(x))\alpha'(x) - g(\beta(x))\beta'(x)$

$$f'(x) = \frac{\ln(x^2)}{(x^2-1)^2} \times 2x - \frac{\ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{4x\ \ln(x)}{(x+1)^2(x-1)^2} - \frac{\ln(x)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}\left[\frac{4x\ \ln(x)}{(x+1)^2} - \ln(x)\right] = \frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{4x\ \ln(x) - (x+1)^2\ln(x)}{(x+1)^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{4x\ \ln(x) - x^2\ln(x) - 2x\ln(x) - \ln(x)}{(x+1)^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{2x\ \ln(x) - x^2\ln(x) - \ln(x)}{(x+1)^2}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{(x-1)^2\ln(x)}{(x+1)^2}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{\ln(x)}{(x-1)^2}\ ,\forall x \in I$$

3) Montrer que $\forall\, t \in I, t-1-\frac{(t-1)^2}{2} \le \ln(t) \le t-1$

Soit $h:\ [1,t] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \ln(x)$

Alors h est de classe C^∞ sur $[1,t]$ car la fonction logarithme l'est.

Alors la formule de Taylor Lagrange nous donne que : $\exists C \in]1,t[$ tel que :

$$h(t) = h(1) + \frac{t-1}{1!}h(1)' + \frac{(t-1)^2}{2!}h(1)'' + \frac{(t-1)^3}{3!}h(1)^{(3)}\ (C)$$

$\forall x \in]1,t[, h'(x) = \frac{1}{x}\ ,\ h''(x) = -\frac{1}{x^2}\ ,\ h^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow h(t) = t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{(t-1)^3}{3C^3}$ avec $h(t) = \ln(t)$

Alors $\ln(t) - \left(t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2}\right) = \frac{(t-1)^3}{3C^3} > 0$

Car $\forall t \in I,\ t > 1 \Rightarrow t - 1 > 0 \Rightarrow (t-1)^3 > 0$

$\forall C \in]1, t[, C > 0 \Rightarrow 3C^3 > 0$

$\Rightarrow \frac{(t-1)^3}{3C^3} > 0$

Donc $\forall t \in I,\ t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} \leq \ln(t)$ (1)

De même, on a : $h(t) = h(1) + \frac{t-1}{1!}h'(1) + \frac{(t-1)^2}{2!}h^{(2)}\ (C)$

$$h(t) = t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2C^2}$$

$$\ln(t) - (t-1) = -\frac{(t-1)^2}{2C^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \ln(t) - (t-1) \leq 0 \Rightarrow \ln(t) \leq (t-1) \quad (2)$$

Finalement, (1) et (2) nous donne le résultat.

4) Montrer que $\ln(x+1) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq \ln(x+1)$

D'après 3), $\forall t \in I, t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} \leq \ln(t) \leq t - 1$

Comme $\forall t \in I, (t-1)^2 > 0, \frac{1}{(t-1)^2} > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{(t-1)^2}\left[t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2}\right] \leq \frac{\ln(t)}{(t-1)^2} \leq \frac{t-1}{(t-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \leq \frac{\ln(t)}{(t-1)^2} \leq \frac{1}{t-1}$$

En appliquant l'intégrale partout sur $[x, x^2]$, on a :

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} - \int_x^{x^2} \frac{dt}{2} \leq f(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$$

$[\ln(t-1)]_x^{x^2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \leq f(x) \leq [\ln(t-1)]_x^{x^2}$ D'où le résultat.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

5) En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

D'après la 4), $\forall x \in I,\ \ln(x+1)+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq \ln(x+1)$

Posons $\gamma(x) = \ln(x+1)+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}$; $\sigma(x) = \ln(x+1)$

On a : $\lim_{x\to 1^+}\gamma(x) = \lim_{x\to 1^+}\sigma(x) = \ln(2)$

Comme $\lim_{x\to 1^+}\gamma(x) \leq \lim_{x\to 1^+} f(x) \leq \lim_{x\to 1^+}\sigma(x)$, on en déduire que $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ existe et en appliquant le théorème des Gendarmes, on a :

$\ln(2) \leq \lim_{x\to 1^+} f(x) \leq \ln(2) \Longrightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) = \ln(2)$

EXERCICE 3

Intégrons les équations différentielles :

1) $x'' + ax' + 4x = \cos(2t)$ avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = \frac{1}{a}$

Soit (E_1) : $x'' + ax' + 4x = \cos(2t)$

- Equation homogène (E_{1H}) associée à (E_1).

(E_{1H}) : $x'' + ax' + 4x = 0$

- Equation caractéristique (E_C).

(E_C) : $r^2 + ar + 4 = 0$

$\Delta = a^2 - 16$ or $a \in]0\,;4[$ donc $\Delta < 0$

d'où $r_1 = \frac{-a-i\sqrt{16-a^2}}{2}$ et $r_2 = \frac{-a+i\sqrt{16-a^2}}{2}$

$$r_1 = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}i\sqrt{16-a^2} \text{ et } r_2 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}i\sqrt{16-a^2}$$

- Solution homogène x_H

$$x_H = \left[A\cos\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right)\right]e^{-\frac{1}{2}at} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- Equation particulière x_P

(E_1) est une équation différentielle du second ordre avec pour second membre $\cos(2t)$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Donc une solution particulière de (E_1) est de la forme :

$x_P = t^s(V(t)\ \cos(2t) + T(t)\ \sin(2t))\ e^{at}$ avec $\deg V = \deg T = 0$ donc $V(t) = c$ et $T(t) = d$; c et $d \in \mathbb{R}$.

Comme $2i$ n'est pas solution de notre équation caractéristique alors $s = 0$

d'où $x_P = c\ \cos(2t) + d\ \sin(2t)$. x_P étant une solution particulière de (E_1) alors :

$$x_p'' + ax_p' + 4x_p = \cos(2t)$$

$$x_P = c\cos(2t) + d\ \sin(2t)$$

- $4x_P = 4c\cos(2t) + 4d\ \sin(2t)$

$$x_p' = -2c\sin(2t) + 2d\ \cos(2t)$$

- $ax_p' = -2ac\sin(2t) + 2ad\ \cos(2t)$
- $x_p'' = -4c\cos(2t) - 4d\ \sin(2t)$

On obtient : $(-4c + 2ad + 4c)\ \cos(2t) + (-4d - 2ac + 4d)\ \sin(2t) = \cos(2t)$

$$2ad\cos(2t) - 2ac\ \sin(2t) = \cos(2t)$$

Par identification : $\begin{cases} 2ad = 1 \\ -2ac = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{1}{2a} \\ c = 0 \end{cases}$

Donc $x_P = \frac{1}{2a}\sin(2t)$

- Solution générale x_G

La solution générale de (E_1) est d. La forme $x_G = x_H + x_P$

Donc $x_G = \left[A\cos\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right)\right]e^{-\frac{1}{2}at} + \frac{1}{2a}\sin(2t)$ avec $A; B \in \mathbb{R}$

$$x'(t) = x_G' = \left[-\frac{A\sqrt{16-a^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right) + \frac{B\sqrt{16-a^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right) - \frac{Aa}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right) - \frac{Ba}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}t\right)\right]e^{-\frac{1}{2}at} + \frac{1}{a}\cos(2t)$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$x'(0) = \frac{B\sqrt{16-a^2}}{2} - \frac{Aa}{2} + \frac{1}{a}$$

$$x\,(0) = x_G(0)$$

$$\begin{cases} x'(0) = \frac{1}{a} \\ x\,(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{B\sqrt{16-a^2}}{2} - \frac{Aa}{2} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \\ A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \frac{B\sqrt{16-a^2}}{2} = 0 \end{cases}$$

D' où $x = \frac{1}{2a}\sin(2t)$

2) $y'' + y = cotan(x)$

Soit (E_2) : $y'' + y = cotan(x)$

- Equation homogène (E_{2H})

$(E_{2H}) : y'' + y = 0$

- Equation caractéristique (E_C)

(E_C) : $r^2 + 1 = 0$

Donc $r = i$ ou $r = -i$

- Solution homogène y_H

$y_H = A\ \cos(x) + B\ \sin(x)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

- Solution particulière y_P

- Déterminons le Wronskien $w(x)$

$$w(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix}$$

$$= cos^2(x) + sin^2(x)$$

$w(x) = 1 \neq 0$, donc les fonctions $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \sin(x)$ sont libres. D'où une solution particulière de (E_2) est la forme $y_P = A(x)\ \cos(x) + B(x)\ \sin(x)$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

On ressourd le système suivant :

$$\begin{cases} A'(x)\cos(x) + B'(x)\sin(x) = 0 \\ -A'(x)\sin(x) + B'(x)\cos(x) = cotan(x) \end{cases}$$

$$A'(x) = \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ cotan(x) & \cos(x) \end{vmatrix}$$

$$= -cotan(x)\sin(x)$$

$$= -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \times \sin(x)$$

$$A'(x) = -\cos(x)$$

$$A(x) = \int -\cos(x)\, dx$$

$$A(x) = -\sin(x) + C$$

Pour $C = 0$; $A(x) = -\sin(x) + C$

$$B'(x) = \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & cotan(x) \end{vmatrix}$$

$$= cotan(x) \times \cos(x)$$

$$B'(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}$$

$$B(x) = \int \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\, dx$$

$$= \int \frac{1 - \sin^2(x)}{\sin(x)}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin(x)}\, dx - \int \sin(x)\, dx$$

$$= \int \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)}\, dx - \int \sin(x)\, dx$$

$$B(x) = \int \frac{\sin(x)}{1 - \cos^2(x)}\, dx - \int \sin(x)\, dx$$

- $\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + C_1$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Pour $C_1 = 0$ on a : $\int \sin(x)\ dx = -\cos(x)$

$$I = \int \frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)}\ dx$$

Posons $t = \cos(x) \Leftrightarrow dt = -\sin(x)\ dx$

$$I = -\int \frac{dt}{1-1^2}$$

$$I = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C_2$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \text{ pour } C_2 = 0$$

$$I = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}\right|$$

Donc $B(x) = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}\right| + \cos(x)$

D'où : $y_P = -\sin(x)\ \cos(x)\ -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}\right|\ \sin(x) + \cos(x)\ \sin(x)$

$$y_P = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}\right|$$

- Solution générale y_G

y_G est de la forme : $y_G = y_H + y_P$

$$y_G = A\cos(x) + B\sin(x) - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}\right| \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

3) $x^2y''(x) - 3xy'(x) + y(x) = x^2$

Soit $(E_3) = x^2y''(x) - 3xy'(x) + y(x) = x^2$

Posons $t = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^t$

On obtient donc :

$$e^{2t}y''(e^t) - 3e^ty'(e^t) + y(e^t) = e^{2t} \qquad (1)$$

Posons $z = y(e^t)$

$$z' = e^ty'(e^t)$$

$$z'' = e^ty'(e^t) + e^{2t}y''(e^t)$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$z'' = z' + e^{2t}y''(e^t)$$
$$z'' - z' = e^{2t}y''(e^t) \qquad (2)$$

(2) dans (1) donne :

$$z'' - z' - zz' + z = e^{2t}$$
$$z'' - 4z' + z = e^{2t} \qquad (E_4)$$

- Equation homogène associé a (E_4) : (E_H)

(E_H) : $z'' - 4z' + z = 0$

- Equation caractéristique (E_C)

(E_C) : $r^2 - 4r + r = 0$

$\Delta = 16 - 4 = 12$

$$r_1 = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} \qquad et \qquad r_1 = \frac{4 + \sqrt{12}}{2}$$

- Solution homogène z_H

$$z_H = C_1 e^{\frac{4-\sqrt{12}}{2}t} + C_2 e^{\frac{4+\sqrt{12}}{2}t} \quad ; \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Solution particulière z_P

(E_4) est une équation avec second membre de type exponentielle polynôme donc z_P est de la forme : $z_P = R(t)\, e^{2t}$ or 2 n'est pas solution de (E_C) donc $\deg R = 0$

d'où $z_P = ae^{2t}, a \in \mathbb{R}$ et comme $z_P'' - 4z_P' + z_P = e^{2t}$

$z_P = ae^{2t}$

$z_P' = 2ae^{2t}$

$-4\, z_P' = -8ae^{2t}$

$z_P'' = 4ae^{2t}$

On obtient : $ae^{2t} - 8ae^{2t} + 4ae^{2t} = e^{2t}$

$$-3ae^{2t} = e^{2t} \Leftrightarrow -3a = 1$$
$$a = -\frac{1}{3}$$

d'où $z_P = -\frac{2}{3}\, e^{2t}$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

- Solution générale de (E_4)

$z_G = z_H + z_P$

$$z_G = C_1 e^{\frac{4-\sqrt{12}}{2}t} + C_2 e^{\frac{4+\sqrt{12}}{2}t} - \frac{2}{3} e^{2t} \quad ; \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Solution générale y_G de (E_3)

On a : $z(t) = y(e^t)$

$z(\ln(x)) = y(x)$

$$y(x) = C_1 e^{\frac{4-\sqrt{12}}{2}\ln(x)} + C_2 e^{\frac{4+\sqrt{12}}{2}\ln(x)} - \frac{2}{3} e^{2\ln(x)}$$

$$\boxed{y_x = C_1 \frac{4-\sqrt{12}}{2} + C_2 \frac{4+\sqrt{12}}{2} - \frac{2}{3} x^2 \quad ; \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

CORRECTION ANALYSE REELLE SESSION 1 2021-2022

EXERCICE 1 QCM

1-FAUX

2-FAUX

3- FAUX

4- FAUX

5- VRAI

6- VRAI

Correction exercice 2

1. Le problème est qu'apparemment il n'y a qu'une fonction, si on fait comme « d'habitude » c'est-à-dire que l'on intègre le « 1 » on va faire apparaître un « t » qui ne donnera rien de bon, la bonne idée c'est d'écrire I_{n+2} de la façon suivante :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin^{n+1}(t)\,dt$$

$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin^{n+1}(t)\,dt$	
$u'(t) = \sin(t)$	$u(t) = -\cos(t)$
$v(t) = \sin^{n+1}(t)$	$v'(t) = (n+1)\sin^n(t)\cos(t)$
$I_n = [-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} -$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos(t))(n+1)\sin^n(t)\cos(t)\,dt$

$$I_{n+2} = [-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^2(t)\,dt$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0)\sin^{n+1}(0) + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,(1-\sin^2(t))dt$$

$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\,dt = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$$

Donc

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n \Rightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$$

2. On pose $n = 2p-2$,

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p}I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}I_{2p-4} = \frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\ldots\times\frac{1}{2}I_0$$

En fait il faudrait faire une récurrence (mais c'est assez évident).

Et

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(t)\;dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

On pose $n = 2p-1$

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} I_{2p-3} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \ldots \times \frac{2}{3} I_1$$

Et

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1(t)\ dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) = 1$$

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \ldots \times \frac{2}{3}$$

3. Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$0 \leq \sin(t) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$$

En intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

$$0 < I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\, dt < I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt$$

Ce qui montre que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et décroissante.

4. On déduit de la question précédente que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (décroissante et minorée par 0). Si cette limite est non nulle, c'est fini, $I_n \sim l$ et $I_{n+1} \sim l$ entraine que $I_n \sim I_{n+1}$, seulement voilà pour l'instant rien n'empêche cette limite d'être nulle, auquel cas on ne peut pas conclure que $I_n \sim 0$, et au point où j'en suis j'ai bien l'impression que la limite est nulle (mais rien ne me permet de l'affirmer !).

Reprenons l'égalité $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

$$0 < I_{n+2} < I_{n+1} < I_n \Rightarrow 0 < \frac{n+1}{n+2} I_n < I_{n+1} < I_n \Rightarrow 0 < \frac{n+1}{n+2} < \frac{I_{n+1}}{I_n} < 1$$

En faisant tendre n vers l'infini on trouve que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$$

Autrement dit $I_{n+1} \sim I_n$

Remarque :

On ne connait toujours pas la valeur de la limite.

5. On ne connait que I_{2p} et I_{2p+1}, alors on va envisager deux cas, $n = 2p$, puis $n = 2p-1$.

$n = 2p$

$$nI_nI_{n+1} = 2pI_{2p}I_{2p+1} = 2p \times \left(\frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \ldots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}\right) \times \left(\frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \ldots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{2p}{2p+1} \times \frac{\pi}{2} = \frac{n}{n+1} \times \frac{\pi}{2}$$

$n = 2p-1$

$$nI_nI_{n+1} = (2p-1)I_{2p-1}I_{2p}$$

$$= (2p-1) \times \left(\frac{2p-2}{2p-1} \times \ldots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \ldots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{2p-1}{2p} \times \frac{\pi}{2} = \frac{n}{n+1} \times \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$nI_nI_{n+1} = \frac{n}{n+1} \times \frac{\pi}{2}$$

Remarque

J'ai bien eu raison de me méfier parce que la limite de I_n est bien nulle. (En fait, je le savais mais je ne vous l'avais pas dit pour ménager le suspense).

Ces intégrales sont connues sous le nom de « intégrales de Wallis»

6.

$$nI_nI_{n+1} \sim nI_n^2 \quad et \quad \frac{n}{n+1} \times \frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}, I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n} \Rightarrow I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Car $I_n > 0$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Correction exercice 3.

Remarque : il est sans doute possible de faire cet exercice d'une autre façon si on sait qu'une primitive de $t \to \frac{1}{\sin(t)}$ est $t \to \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$

1.

$$x \le t \le 2x \Rightarrow 0 < x \le t \le 2x < 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow 0 < \sin(t)$$

Donc $t \to \frac{1}{\sin(t)}$ est continue sur $[x, 2x]$, ce qui montre que F est définie, continue et dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2.

$$F'(x) = \frac{2}{\sin(2x)} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{2}{2\sin(x)\cos(x)} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)\cos(x)}$$

Pour tout $\in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ $1 - \cos(x) > 0$, $\cos(x) > 0$ et $\sin(x) > 0$, donc $F'(x) > 0$

Cette fonction est strictement croissante.

3. comme sin est C^∞ sur $\mathbb{R}$ on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, il existe $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$\sin(t) = \sin(0) + t\sin'(0) + \frac{t^2}{2}\sin''(c)$$

Donc

$$\sin(t) = t - \frac{t^2}{2}\cos(t)$$

Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \cos(t) < 1$ donc

$$-\frac{t^2}{2} < -\frac{t^2}{2}\cos(t) < 0$$

Ce qui entraine que

$$t - \frac{t^2}{2} < t - \frac{t^2}{2}\cos(t) < t$$

Autrement dit

$$t - \frac{t^2}{2} < \sin(t) < t$$

D'autre part

$$t - \frac{t^2}{2} = \frac{t}{2}(2 - t)$$

$$t > 0 \text{ et } t < \frac{\pi}{2} < 2$$

Entraine que $t - \frac{t^2}{2} > 0$

4.

Par conséquent

$$\frac{1}{t} < \frac{1}{\sin(t)} < \frac{1}{t - \frac{t^2}{2}} = \frac{2}{t(2-t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2-t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t-2}$$

A l'aide d'une décomposition en élément simple.

5.

On intègre entre x et $2x$ (on a bien $x < 2x$)

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t} < \int_x^{2x} \frac{dt}{\sin(t)} < \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-2}\right) dt \Leftrightarrow [\ln(t)]_x^{2x} < F(x) < [\ln(t) - \ln(t-2)]_x^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x) - \ln(x) < F(x) < \ln(2x) - \ln(2x-2) - (\ln(x) + \ln(x-2)) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x}{x}\right) < F(x) < \ln\left(\frac{2x}{x}\right) - \ln\left(\frac{2x-2}{x-2}\right) \Leftrightarrow \ln(2) < F(x) < \ln(2) - \ln\left(\frac{2x-2}{x-2}\right)$$

6.

Comme

$$\lim_{x \to 0} \ln\left(\frac{2x-2}{x-2}\right) = \ln(1) = 0$$

On a d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \ln(2)$$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

EXERCICE 4

1 – soit (E_1) : $x'' + 4x = \cos(2t)$ Notons (E_H) : $x'' + 4x = 0$ l'équation Homogène associée à (E_1) et $(E_C) : r^2 + 4 = 0$ *l'équation caractéristique* associée à (E_H)

Les racines sont $2i$ *et* $-2i$, alors la solution Homogène de (E_1) est de la forme

$x_H = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)$ Où λ, μ∈ ℝ. Cherchons une solution particulière de (E_1)

On cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme $x_p = t(A\cos(2t) + B\sin(2t))$

On sait que x_p vérifie (E_1) Alors après avoir calculé x_p' *et* x_p'' remplaçons dans(E_1), on obtient

$x_p + 4x_p = \cos(2t) \iff -4A\sin(2t) + 4B\cos(2t) = \cos(2t)$

Par identification $-4A = 0 \Rightarrow A = 0$, $4B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$ Ainsi $\boxed{x_p = \frac{t}{4}\sin t(2t)}$

La solution générale est $x(t) = x_H + x_p = \lambda\cos(2t) + \left(\mu + \frac{t}{4}\right)\sin(2t)$ *avec* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Les solutions ne sont pas bornées quand $t \to +\infty$ car $\lim_{t\to+\infty}(\mu + \frac{t}{4})\sin(2t) = \infty$

2 - Soit $a \in]0,4[$

L'équation Homogène associée à (E): $x'' + ax' + 4x = 0$, *équation caractéristique* $r^2 + ar + 4 = 0$

$\Delta = a^2 - 4^2$ *Or* $a \in]0,4[\Rightarrow 0 < a < 4 \Rightarrow a^2 < 4^2 \Rightarrow a^2 - 4^2 < 0$

Donc les solutions de (EC) sont 2 conjuguées complexes $r_1 = \frac{-a+\sqrt{-\Delta}}{2\cdot1}$, $r_2 = \frac{-a-\sqrt{-\Delta}}{2\cdot1}$

$r_1 = -\frac{a}{2} + i\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}$ *et* $r_2 = -\frac{a}{2} - i\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}$

La solution Homogène de (E) *est de la forme* $x_H = e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)$ avec

$\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{16-a^2}}{2}$ *et* $A, B \in \mathbb{R}$

Solution particulière sous la forme $x_p = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)$

$x_p'' + ax_p' + 4x_p = -2a\lambda\sin(2t) + 2a\mu\cos(2t) = \cos(2t)$ Par identification $\lambda = 0, \mu = \frac{1}{2a}$

Ainsi$x_p = \frac{1}{2a}\sin(2t)$. Les solutions générales sont de la forme

$$\boxed{x(t) = e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right) + \frac{\sin(2t)}{2a}, \alpha = -\frac{a}{2}, \beta = \frac{\sqrt{16-a^2}}{2} \text{ et } A, B \in \mathbb{R}}$$

3- En utilisant les conditions initiales $x'(0) = \frac{1}{a}$ *et* $x(0) = 0$ on obtient $\boxed{x(t) = \frac{\sin(2t)}{2a}}$

4- Il est clair que $Ma = \frac{1}{2a}$ *ie* cette solution est maximale si $\sin(2t) = 1$

5- $\lim_{a\to0}\frac{1}{2a} = +\infty$

Scanned with CamScanner

CORRECTION ANALYSE REELLE SESSION 2 ANNEE 2021-2022

EXERCICE 1

1- FAUX, 2- VRAI, 3- VRAI, 4- FAUX, 5- VRAI, 6- FAUX

EXERCICE 2

Soit $a \in]0,+\infty[$ *et soit* $f \in C^1([0,a]$ *telle que* $f(0)=0$. *Posons* $\forall x \in [0,a], F(x)=\int_0^x |f'(t)|dt$

1 – Montrons que $\forall x \in [0,a], |f(x)f'(x)| \leq F(x)F'(x)$.

On pose $\forall x \in [0,a], F(x)=\int_0^x |f'(t)|dt$ Comme $f \in C^1([0,a])$, *on a :* $\forall x \in [0,a]$,

$\int_0^x f'(t)dt = [f(t)]_0^x = f(x)-f(0)$, *Or* $f(0)=0$, *Alors* $\int_0^x f'(t)dt = f(x)$.

On a aussi $\forall x \in [0,a], |f(t)| = \left|\int_0^x f'^{(t)}dt\right| \leq \int_0^x |f'(t)|dt = F(x)$ (1)

En outre, comme $f \in C^1([0,a])$, *f'est continue sur* $[0,a]$, $\forall x[0,a]$*et par suite* $|f'|$ *l'est aussi.*

Ainsi f est dérivable sur $[0,a]$ *et* $\forall x \in [0,a]$, $F'(x)=\left(\int_0^x |f'(t)|dt\right)=|f'(t)|$ (2)

En utilisant (1) et (2), On a : $\forall x \in [0,a]$,

$$|f(x)f'(x)| = \left|f'(x)\int_0^x f'(t)dt\right|$$

$$= |f'(x)|\left|\int_0^x f'(t)dt\right|$$

$$\leq |f'(x)|\int_0^x |f'(t)|dt$$

$$|f(x)f'(x)| = F'(x)F(x)$$

2 – Déduisons-en que $\int_0^a |f(x)f'(x)|dx \leq \frac{(F(a))^2}{2}$ Puis $\int_0^a |f(x)f'(x)|dx \leq a\int_0^a |f'(t)|^2 dt$.

D'après la question 1), on a $\forall x \in [0,a]$, $|f(x)f'(x)| = F'(x)F(x)$. Ce résultat nous donne

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|dx \leq \int_0^a F'(x)F(x)dx$$

$$\leq \int_0^a F'(x)F(x)dt \quad \text{Or} \int_0^a F'(x)F(x)dx = \left[\frac{(F(x))^2}{2}\right]_0^a$$

$$= \frac{(F(a))^2-(F(0))^2}{2} = \frac{(F(a))^2}{2}$$

$$car \quad F(0) = \int_0^0 |f'(t)|dt = 0$$

On a ainsi montré que $\int_0^a |f(x)f'(x)|dx \leq \frac{(F(a))^2}{2}$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

. Montrons à présent que $\int_0^a |f(x)f'(x)|dx \leq a\int_0^a |f'(t)|^2 dt$.

On a : $F(a) = \int_0^a |f'(t)|dt$ alors on a $\int_0^a |f(x)f'(x)|\,dx \leq \frac{(\int_0^a |f'(t)|dt)^2}{2}$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous donne

$(\int_0^a |f'(t)|dt)^2 = (\int_0^a 1|f'(t)|dt)^2 \leq (\int_0^a 1^2 dt)(\int_0^a |f'(t)|^2 dt) = a\int_0^a |f'(t)|^2 dt.$

EXERCICE 4

A - (E): $|x|y' + (x-1)y = x^2$

1 – Resolvons (E) *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\mathbb{R}_-^*$

On a $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$

1er cas $x > 0$, (E): $xy' + +(x-1)y = x^2 \Rightarrow y' + \frac{x-1}{x}y = x$

Equation homogène $y' + \frac{x-1}{x}y = 0$, *Solution homogène* $y_H(x) = Ae^{-\int \frac{x-1}{x}dx}, A \in \mathbb{R}$

On a : $\int \frac{x-1}{x}dx = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right)dx = x - \ln(x)$, *Alors on obtient* : $y_H(x) = Axe^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$

Solution particulière par la méthode de la variation de la constant

On pose $y_p(x) = A(x)xe^{-x} = xA(x)e^{-x}$, Comme $y_p(x)$ est solution de de (E), alors

$xy_p'(x) + (x-1)y_p(x) = x^2 \Rightarrow x^2A'(x)e^{-x} = x^2 \Rightarrow A(x) = x$ *Ainsi* $y_p(x) = xe^{-x}e^x = x$

Solution générales de(E): $y(x) = y_H(x) + y_p(x) = x(Ae^{-x} + 1)$, $A \in \mathbb{R}$

2ème cas $x \in \mathbb{R}_-^*$ $(x < 0)$ (E): $-xy' + (x-1)y = x^2 \Rightarrow y' + \frac{1-x}{x}y = -x$ même démarche

$y_H(x) = Be^{x-\ln(x)} = B\frac{1}{x}e^x, B \in \mathbb{R}$, $y_p(x) = B(x)\frac{1}{x}e^x$ Solution particulière par la méthode de la variation de la constant $-xy_p'(x) + (x-1)y_p(x) = -\frac{xB'(x)e^x}{x} = -B'(x)e^x = x^2$

$\Rightarrow B'(x) = -x^2e^{-x}$ En intégrant par partie on obtient $B(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$

Ainsi $y_p(x) = \frac{(x^2+2x+2)}{x}e^{-x}e^x = \frac{(x^2+2x+2)}{x}$

Solutions générales sur $]-\infty, 0[$ sont les fonctions $y(x) = B\frac{1}{x}e^x + \frac{(x^2+2x+2)}{x}, B \in \mathbb{R}$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

2 – On pose $y = f$ et $f \in C^1$ sur $\mathbb{R}$

Alors $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

a – Déterminons $f(0)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x(A\,e^{-x} + 1) = 0 = f(0)$$

b – On raccorde les solutions en 0

B- Résolvons $(F): y'' + y = cotan(x)$ sur $]0, \pi[$, et l' équation homogène $F_H: y'' + y = 0$

L'équation caractéristique E_C: $r^2 + 1 = 0$ => $r = i$ ou $r = -i$

Solutions Homogène $y_H = \beta cosx + \mu sinx$.

Recherche de solution particulière

En posant $y_1 = cosx$ et posant $y_2 = sinx$

(y_1, y_2) est une base fondamentale se solution. On va donc chercher une solution particulière de la forme $y_p = Ay_1 + By_2$ vérifiant : $\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1 + B'y_2 = cotan(x) \end{cases} => \begin{cases} A'cosx + B'sinx = 0 \\ A'(-sinx) + B'cosx = cotan(x) \end{cases}$

Le Wronskien est $W = det\begin{pmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{vmatrix} = 1$

$$\begin{cases} A' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & sinx \\ cotanx & cosx \end{vmatrix}}{W} = -cotanx * sinx = -cosx \\ B' = \frac{\begin{vmatrix} cosx & 0 \\ -sinx & cotanx \end{vmatrix}}{W} = \frac{cos^2x}{sinx} \end{cases} \quad Rémarque\ cotanx = \frac{cosx}{sinx}$$

$\begin{cases} A' = -cosx \\ B' = \frac{cos^2x}{sinx} \end{cases}$ ce qui donne $A = -sinx$ Pour B, on cherche à primitiver $\frac{cos^2x}{sinx}$; Posons $t = cosx$ => $dt = -sinxdx$ Donc $\int \frac{cos^2x}{sinx}dx = -\int \frac{t^2}{1-t^2}dt = \int \frac{-t^2}{1-t^2}dt = \int \frac{1-t^2-1}{1-t^2}dt = t - \int \frac{dt}{1-t^2} = t +$ $\int \frac{dt}{t^2-1} = t + \int \frac{dt}{(t+1)(t-1)}$(décomposition en éléments simples) Donc $\int \frac{cos^2x}{sinx}dx = t - \frac{1}{2}\ln(1+t) +$ $\frac{1}{2}\ln(1-t) = cosx + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-cosx}{1+cosx}\right)$; $B = cosx + \frac{1}{2}\ln(\frac{1-cosx}{1+cosx})$ Par conséquent, $y_p = -sinxcosx +$ $\left(cosx + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-cosx}{1+cosx}\right)\right)sinx$

Les solutions générales sont de la forme $y = y_h + y_p, \mu, \beta \epsilon \mathbb{R}$

Exercice 3

VALIDEUR EMD-2025

Scanned with CamScanner

1 - $\frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{t+0(t)}{t} = 1 + 0(1) = 1 = f(0)$ Donc f est continue en 0, pour $t \neq 0$ est le quotient de fonctions continues.

2 – les bornes sont des fonctions de classe $c^1(x \to -x \; et \; x \to x)$ et f est continue donc F est de classe C^1.

3 – pour $x \neq 0$; $F'(x) = f(x) - 1 f(-x) = f(x) + f(-x) = \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1-x)}{-x} =$

$\frac{1}{x}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{x}\ln(\frac{1+x}{1-x})$ on sait que Fest de classe C^1 en 0 donc $F'(0)$ est la limite de $F'(x)$ lorsque $x \to 0$; $F'(x) = \frac{1}{x}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{x}(x + 0(x) - x + 0(x)) =$

$\frac{1}{x}(2x + 0(x)) = 2 + 0(1) = 2$ Donc$F'(0) = 2$

4 - $F(-x) = \int_x^{-x} f(t)dt = -\int_{-x}^{x} f(t)dt = -F(x), F$ est impaire

5 – pour $< x < 1, 1 + x > 1 - x > 0$ *donc* $\frac{1+x}{1-x} < 1, par \; conséquent \; F'(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) >$ 0 *ce qui montre que F est croissante sur* $]0,1[$.

Pour $-1 < x < 0, 0 < 1 + x < 1 - x$ *donc* $\frac{1+x}{1-x} < 1, par \; conséquent \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) < 0 \; et \; alors \; F'(x) =$ $\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) > 0 ce \; qui \; montre \; que \; F \; est \; croissante \; sur \;]-1,0[$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Analyse Réelle

session 1 2023-2024

Exercice 1
Répondons par vrai ou faux

On considère la fonction $x \longmapsto x$ sur l'intervalle $I = [0, 2]$

1-Faux;2-vrai;3-Faux;4-Vrai

Exercice 2
$(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ d'où $(b - a > 0)$
Calculons $I = \int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx$
Changement de variable
Posons:$\sqrt{(x-a)(b-x)} = t(x-a) \Rightarrow (b-x) = t^2(x-a) \Rightarrow t^2 = \frac{b-x}{x-a}$
Lorsque $x \longrightarrow a, t \longrightarrow +\infty$; $x \longrightarrow b, t \longrightarrow 0$ puisque $b - a > 0$
Exprimons x en fonction de t
$(b-x) = t^2(x-a) \Leftrightarrow b + at^2 = xt^2 + x = x(1+t^2) \Rightarrow x = \frac{at^2+b}{t^2+1}$
$dx = \frac{2at(t^2+1)-2t(b+at^2)}{(t^2+1)^2}dt = \frac{2t(a-b)dt}{(t^2+1)^2} = \frac{-2t(b-a)dt}{(t^2+1)^2}$ d'où $dx = \frac{-2t(b-a)dt}{(t^2+1)^2}$; $\sqrt{(x-a)(b-x)} = t(x-a) = t(\frac{b+at^2}{t^2+1} - a) = \frac{t(b-a)}{t^2+1}$
$I = \int_{+\infty}^0 \frac{t(b-a)}{t^2+1}\frac{-2t(b-a)}{(t^2+1)^2}dt = (b-a)^2 \int_0^{+\infty} \frac{2t^2dt}{(t^2+1)^3}$
Remarques
1) $\frac{2t^2}{(t^2+1)^3} = 2t^2(t^2+1)^{-3}$
2) $(\frac{1}{(t^2+1)^2})' = ((1+2t^2)^{-2})' = -2.2t(1+t^2)^{-3}$
Donc $\frac{2t^2}{(t^2+1)^3} = -\frac{1}{2}t \times -2.2t(1+t^2)^{-3} = -\frac{1}{2}t(\frac{1}{(t^2+1)^2})'$
Calculons l'intégrale:

$$(b-a)^2 \int_0^{+\infty} \frac{2t^2dt}{(t^2+1)^3}$$

Appliquons la méthode de l'intégration par parties puisque $\frac{2t^2}{(t^2+1)^3} = -\frac{1}{2}t(\frac{1}{(t^2+1)^2})'$
Posons: $u = -\frac{1}{2}t \Rightarrow u' = -\frac{1}{2}$
$v' = -\frac{1}{2}t(\frac{1}{(t^2+1)^2})' \Rightarrow v = -\frac{1}{2}t\frac{1}{(t^2+1)^2}$ Nous avons donc
$(b-a)^2 \int_0^{+\infty} \frac{2t^2dt}{(t^2+1)^3} = (b-a)^2[-\frac{t}{2(1+t^2)}]_0^{+\infty} + (b-a)^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)^2}$
$= 0 + (b-a)^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$
Calculons l'intégrale:

$$\frac{1}{2}(b-a)^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

Posons $t = \tan y \Leftrightarrow y = \arctan t \Rightarrow dy = \frac{dt}{1+t^2}$, Pour $t = 0, y = 0$ et pour $t = +\infty, y = \frac{\pi}{2}$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$1+t^2 = 1+\tan^2 y = 1+\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{\sin^2 y+\cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} \Rightarrow \frac{1}{1+t^2} = \cos^2 y$
$\frac{1}{2}(b-a)^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)} \frac{dt}{(1+t^2)}$
$= \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y dy$ Or $\cos^2 y = \frac{1}{2}(1+\cos 2y)$
Donc
$\frac{1}{2}(b-a)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y dy = \frac{1}{4}(b-a)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2y)dy = \frac{1}{4}(b-a)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy + \frac{1}{4}(b-a)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2y dy$
$= \frac{1}{4}(b-a)^2[y]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}(b-a)^2[\frac{1}{2}\sin 2y]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}(b-a)^2 + \frac{1}{4}(b-a)^2(\frac{1}{2}\sin\pi - \frac{1}{2}\sin 0) = \frac{\pi}{8}(b-a)^2 + 0$
En définitive, on trouve:

$$I = \frac{\pi}{8}(b-a)^2$$

Calculons $J = \int_a^b x\sqrt{(x-a)(b-x)}dx$
Changement de variable
$t = a+b-x \Leftrightarrow x = a+b-t$ Pour $x = a, t = b$ et $x = b, t = a$ D'où $x-a = b-t$ et $b-x = t-a$
$dx = -dt$
$J = \int_b^a -(a+b-t)\sqrt{(t-a)(b-t)}dt = \int_a^b (a+b-t)\sqrt{(t-a)(b-t)}dt$
$= \int_a^b (a+b)\sqrt{(t-a)(b-t)}dt - \int_a^b t\sqrt{(t-a)(b-t)}$
$J = (a+b)\int_a^b \sqrt{(t-a)(b-t)}dt - J$
$J = (a+b)I - J \Rightarrow 2J = (a+b)I \Rightarrow J = \frac{a+b}{2}I \Rightarrow J = \frac{a+b}{2} \times \frac{\pi}{8}(b-a)^2$
Ainsi

$$J = \frac{\pi}{16} \times (a+b)(b-a)^2$$

Exercice 3
1) a) $G(x) = \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$
Posons $H(x) = \int_0^x f^{-1}(t)dt \Rightarrow G(x) = H \circ f(x)$
La fonction f est continue,sctritement croissante sur $f(\mathbb{R}_+)$ et f est dérivable sur $[0,+\infty[$, Par conséquent la fonction $H(x) = \int_0^x f^{-1}(t)dt$ est dérivable.
Nous avons donc

$$G(x) = H[f(x)] \Rightarrow G'(x) = f'(x)H'[f(x)]$$

Or $H'(x) = f^{-1}(x)$
Donc
$G'(x) = f'(x)f^{-1}[f(x)] = xf'(x)$ D'où $G(x) = xf'(x)$
b) $\phi(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x)$
Les fonctions $x \longmapsto \int_0^x f(t)dt$, $x \longmapsto G(x) = \int_0^{f(x)} f(t)dt$ et $xf(x)$ sont toutes dérivables sur $\mathbb{R}_+$ comme somme des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.
$\phi(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x) = \int_0^x f(t)dt + H(f(x)) - xf(x)$
$\phi'(x) = f(x) + xf'(x) - f(x) - xf'(x) = 0 \Rightarrow \phi(x) = constante = c$
c) Par hypothèse ,$f(0) = 0$
Donc $\phi(0) = \int_0^0 f(t)dt + \int_0^{f(0)} f^{-1}(t)dt - 0 = \int_0^0 f(t)dt + \int_0^0 f^{-1}(t)dt - 0 = 0 \Rightarrow c = 0$ D'où
$\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x), \forall x \in \mathbb{R}_+$
2) a) $\psi(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt - xb = \int_0^x f(t)dt + H(b) - xb$
Les fonctions $x \longmapsto \int_0^x f(t)dt$, $x \longmapsto \int_0^b f^{-1}(t)dt = H(b)$ et $x \longmapsto -bx$ sont toutes dérivables sur $\mathbb{R}_+$.
Donc ψ x $\mathbb{R}_+$, comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Nous avons:
$\psi'(x) = f(x) + (b)'H'(b) - b = f(x) - b, \forall x \geq 0$
b) Comme f est strictement croissante, on a $\psi'(x) \geq 0$ si et seulement si $f(x) \geq b \Leftrightarrow f^{-1} \circ f(x) \geq f^{-1}(b)$ c'est à dire $x \geq f^{-1}(b)$
Donc ψ est strictement croissante sur $]f^{-1}(b), +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, f^{-1}(b)[$
On peut donc déduire que ψ admet un minimum au point $f^{-1}(b)$
Remarque:
$\psi(f^{-1}(b)) = \int_0^{f^{-1}(b)} f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt - bf^{-1}(b)$ Or $\phi(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x)$
$\psi(f^{-1}(b)) = \int_0^{f^{-1}(b)} f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt - bf^{-1}(b) = \phi(f^{-1}(b)) = 0$
2) c) Ainsi 0 est le minimum de ψ, ce qui implique que $\psi(a) \geq 0 \ \forall \ a \in [0, +\infty[$
Soit $\int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt \geq ab$, $\forall a \in [0, +\infty[$

Exercice 4

1-(E) $y'' + y = 1 + \tan^2 x$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
Equation homogène associé à (E)
$y'' + y = 0$
Equation caractéristiques
$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = -i$ et $r_2 = +i$
Solution de l'équation homogène
$y_H = A\cos x + B\sin x$, $A, B \in \mathbb{R}$
Recherche D'une solution particulière
Les fonctions $y_1 = \cos x$ et $y_2 = \sin x$ sont indépendants le wronstien $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$
$W(y_1, y_2) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$ D'où $y_p = A(x)\cos x + B(x)\sin x$
Donc y_1 et y_2 forment un système fondamental des solutions de (E).Nous avons donc:
$\begin{cases} A(x)\cos x + B(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = 1 + \tan^2 x \end{cases}$
Or $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $A'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos^2} & \cos x \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$
$A'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{dA(x)}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow dA(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx \Rightarrow \int dA(x) = \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$
$A(x) = -\int \frac{(\cos x)'dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos x}$
Ainsi: $A(x) = -\frac{1}{\cos x}$
$B'(x) = \frac{1}{W(y_1,y_2)} \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos} \end{vmatrix}$
$= \frac{1}{W(y_1,y_2)}(\frac{\cos x}{\cos^2 x} - 0)$; $B'(x) = \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$ Or $\frac{1}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{(1-\sin x)} + \frac{1}{(1+\sin x)})$
$B'(x) = \frac{1}{2}(\frac{\cos x}{(1-\sin x)} + \frac{\cos x}{(1+\sin x)}) \Leftrightarrow \frac{dB(x)}{dx} = \frac{1}{2}(\frac{\cos x}{(1-\sin x)} + \frac{\cos x}{(1+\sin x)}) \Leftrightarrow dB(x) = \frac{1}{2}(\frac{\cos x}{(1-\sin x)} + \frac{\cos x}{(1+\sin x)})dx$
$\int dB(x) = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x dx}{(1-\sin x)} + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x dx}{(1+\sin x)} = \frac{1}{2}\int \frac{(\sin x)'dx}{(1-\sin x)} + \frac{1}{2}\int \frac{(\sin x)'dx}{(1+\sin x)} = \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin x)}{(1-\sin x)} + \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin x)}{(1+\sin x)}$
En posant $X = \sin x$, on obtient
$B(x) = \frac{1}{2}\int \frac{dX}{1-X} + \frac{1}{2}\int \frac{dX}{1+X} = -\frac{1}{2}\ln|1-X| + \frac{1}{2}\ln|1+X| = \frac{1}{2}\ln|\frac{1+X}{1-X}| = \frac{1}{2}\ln|\frac{\sin x+1}{1-\sin x}|$
$y_p = A(x)\cos x + B(x)\sin x = -\frac{-\cos x}{\cos x} + \frac{1}{2}\sin x \ln|\frac{\sin x+1}{1-\sin x}| = -1 + \frac{\sin x}{2}\ln|\frac{\sin x+1}{1-\sin x}|$
$y = y_h + y_p = A\cos x + B\sin x - 1 + \frac{\sin x}{2}\ln|\frac{\sin x+1}{1-\sin x}|$ $A, B \in \mathbb{R}$
2) a) $f(x) = 2\int_0^x f(t)\cos(x-t)dt + 1$
$f(0) = 2\int_0^0 \cos(x-t)dt + 1$ Or $\int_0^0 \cos(x-t)dt = 0$, donc $f(0) = 1$
b) $\cos(x-t) = \cos x\cos t + \sin x \sin t$ d'où $f(x) = 2\int_0^x f(t)(\cos x\cos t + \sin x \sin t)dt$
$f(x) = 2\cos x\int_0^x f(t)\cos t dt + 2\sin x\int_0^x f(t)\sin t dt$, f est de classe $C^1(\mathbb{R})$ car les fonctions $\cos x$ et $\sin x$

Scanned with CamScanner

sont de classe $C^1(\mathbb{R})$
$f'(x) = \frac{d(2\cos x)}{dx}\int_0^x f(t)\cos t dt + 2\sin x\frac{d}{dx}(\int_0^x f(t)\cos t dt) + \frac{d(2\sin x)}{dx}\int_0^x f(t)\sin t dt + 2\sin x\frac{d}{dx}(\int_0^x f(t)\sin t dt) =$
$-2\sin x\int_0^x f(t)\cos t dt + 2\cos x f(x)\cos x + 2\cos x\int_0^x f(t)\sin t dt + 2\sin x f(x)\sin x = -2\sin x\int_0^x f(t)\cos t dt +$
$2\cos x\int_0^x f(t)\sin t dt + 2f(x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$
D'où $f'(x) = -2\sin x\int_0^x f(t)\cos t dt + 2\cos x\int_0^x f(t)\sin t dt + 2f(x)$; f est de classe $C^2(\mathbb{R})$ car les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont de classe $C^2(\mathbb{R})$
$f''(x) = (-2\sin x)'\int_0^x f(t)\cos t dt - 2\sin x(\int_0^x f(t)\cos t dt)' + (2\cos x)'\int_0^x f(t)\sin t dt + 2\cos x(\int_0^x f(t)\sin t dt)' +$
$2f(x) = -2\cos x\int_0^x f(t)\cos t dt - 2\sin x f(x)\cos x - 2\sin x\int_0^x f(t)\sin t dt + 2\cos x f(x)\sin x + 2f'(x)$
$f''(x) = -2\cos x\int_0^x f(t)\cos t dt - 2\sin x\int_0^x f(t)\sin t dt + 2f'(x)$
Or nous savons que
$f(x) = 2\cos x\int_0^x f(t)\cos t dt + 2\sin x\int_0^x f(t)\sin t dt + 1 \Rightarrow f(x) - 1 = 2\cos x\int_0^x f(t)\cos t dt + 2\sin x\int_0^x f(t)\sin t dt$
$1 - f(x) = -2\cos x\int_0^x f(t)\cos t dt - 2\sin x\int_0^x f(t)\sin t dt$ D'où $f''(x) = 1 - f(x) + 2f'(x)$
Soit $f''(x) + f(x) - 2f'(x) = 1$ ou $y'' - 2y' + y = 1$ avec $y(x) = f(x)$
(E_1) $y'' - 2y' + y = 1$, $y = f(x)$
Résolvons (E_1)
2) d) Equation homogène associé à (E_1)
$y'' - 2y' + y = 0$
Equation caractéristiques
$r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0$ d'où $r_1 = r_2 = 1$
$y_h = (A + Bx)e^x$, $A, B \in \mathbb{R}$
Recherche d'une solution particulière y_p de (E_1) nous pouvons remarquer que la fonction $x \longmapsto 1$ est solution de (E_1). Donc $y_p = 1$ doù $y = y_h + y_p = (A + Bx)e^x + 1$; $y = (A + Bx)e^x + 1$; $A, B \in \mathbb{R}$
Nous avons $y = f(x)$
$f(0) = 1 \Rightarrow (A + 0)e^0 + 1 = 1 \Rightarrow A + 1 = 1 \Rightarrow a = 0$ d'où $f(x) = bxe^x + 1$
$f'(x) = be^x + bxe^x = be^x(x + 1)$ or $f'(x) = -2\sin x\int_0^x f(t)\cos t dt + 2\cos x\int_0^x f(t)\sin t dt + 2f(x)$
$f'(0) = -2\sin 0\int_0^0 f(t)\cos t dt + 2\cos 0\int_0^0 f(t)\sin t dt + 2f(0) = 0 + 0 + 2f(0) = 2f(0)$ car $f(0) = 1 \Rightarrow b = 2$
$f'(x) = be^x(x + 1) \Rightarrow f'(0) = b$ Finalement $f(x) = 2xe^x + 1$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UFHB UFRMI	2021
	UE : Algorithme et programmation ECUE : Algorithme Examen Session 2 (Oct. 2021) Durée : 1 heure

COURS (QCM)

C1 Parmi ces valeurs affichées par un algorithme lesquelles peuvent provenir de l'instruction *Ecrire ('4*serie') ?*

a) 1
b) 4.3
c) 4*3.14
d) 4*serie
e) serie serie serie serie
f) Pi

C2 Evaluez l'expression et la valeur de palindrome à la fin de l'extrait de l'algorithme.

$Palindrome \leftarrow false$
$Mot \leftarrow 'ELLA'$
$Pour\ i \leftarrow 1\ jusqu'à\ longueur\ DIV\ 2\ faire$
    $Palindrome \leftarrow (Palindrome)\ and\ (mot[i] = mot[longueur - i + 1])$
$Fin\ pour$

a) Vrai
b) Non
c) Oui
d) Faux

C3 Pour le type Booléen, quel est le domaine de valeur et les opérations possibles ?

a) Oui, non, vrai faux
b) Vrai, faux, non, oui, et
c) Vrai, faux, et, non, ou
d) Non, oui, et, ou

C4 Soit la description de la recherche séquentielle dans un tableau de 20 cellules.

Il s'agit de parcourir le tableau de la première à la dernière cellule en comparant l'élément recherché (x=97) à chacune des cellules. En cas d'égalité avec l'une des cellules, on affiche le message : trouvé puis on arrête la recherche.

La structure de contrôle clé de recherche dans le tableau est :

a) $si\ (L[i] = x)\ alors\ ecrire\ ('Trouve')$
    $sinon\ ecrire\ ('Pas\ trouvé')$
b) $pour\ i \leftarrow 1\ jusqu'à\ 20\ faire$
    $si\ (L[i] = x)\ alors\ ecrire('Trouve')$
c) $tantque\ (L[i] <> x)\ et\ (i <= 5)\ faire$
    $1 \leftarrow i + 1\ fintantque$
d) $rechercher\ (L, x)$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

C5 Soit l'extrait de l'algorithme qui permet de remplir un tableau 3000 nombres générés (de 1 à 6) de manière aléatoire par random (6)+1. Le premier indice étant 0.

```
Lire (nblancer)
pour i← 0 à nblancer faire
        lancer [i] ← random (6) +1
finpour
Ecrire ('Generation reussie pour' , nblancer)
```

Quelle est la valeur de nblancer pour remplir le tableau ?

a. 2999
b. Indéterminée
c. 1/6
d. 3000
e. 123456

C6 Soit la fonction :

fonction minus2 (a, b: entier) : ……..// ?
début
retourner (a > b)
fin

Quel est le type retourné par la fonction dans l'entête ?

a) Booléen
b) Réel
c) Entier
d) Indéterminé

C7 *Si …….Alors ……Sinon…….FinSi* permet de vérifier……?

a) Une seule condition
b) Deux conditions
c) Trois conditions
d) Plusieurs conditions

C8 Quelle est l'instruction erronée ?

a) $x \leftarrow x + 2/y$
b) $x \leftarrow x$
c) $5 \leftarrow x.$

C9 Un algorithme peut être de différentes structures (2 réponses attendues)

a) Automatique
b) Conditionnelle
c) Électronique.
d) Itérative
e) Électrique.

C10 Soit le sous algorithme de détermination de la plus grande moyenne dans un tableau, son entête peut être :

a) *Fonction Moyennesup() : booléen*
b) *Procédure MOYsup (t: tableau[1 … 100] de réel)*
c) *Fonction MoyenneSup (t: tableau[1 … 100] de réel) : réel*

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

d) *Procédure recherchermax* (t: *tableau*[1..100]) : *entier*

Exercice 1

Écrire un algorithme qui estime la valeur de la constante mathématique e en utilisant la formule.

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{1\times 2\times 3\times 4} + \cdots = \sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

Pour cela :

a) Définir (Ecrire) la fonction factorielle $factorielle\ (x : tentier) : entier.$

b) Dans votre algorithme principal, saisissez l'ordre n et affichez l'approximation correspondante de e.

c) Dans la pratique avec les entiers représentés en SVA sur un ordinateur 8 bits il est conseillé de saisir n inférieur à 10 factorielle (11) factorielle (11) =39 916 800 apparait comme une valeur négative et fait diverger le résultat. Expliquer pourquoi ? $factorielle(11)$

Exercice 2 : Suite de FIBONACCI

On veut calculer les n premiers termes de la suite de FIBONACCI.

$U_0 = 1, U_1 = 1$ et $\forall\ n$ appartient à $\mathbb{N} : U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$

Le pseudo code suivant a été écrit :

$u \leftarrow u_0$

$v \leftarrow u_1$

Pour i *variant de* 1 à n *faire*

$w \leftarrow u + v$

$u \leftarrow v$

$v \leftarrow w$

2.1 Réécrire l'algorithme après une analyse des données utilisées.

2.2 Donner la trace pour les dix premiers termes.

2.3 On veut insérer les termes dans un tableau de taille 100, Ecrire l'algorithme.

2.4 Ecrire la fonction qui calcule le nombre d'or.

La suite de Fibonacci possède de nombreuses propriétés très utilisées en mathématiques. Une d'entre elles est que le rapport de deux nombres consécutifs de la suite est alternativement supérieur et inférieur au nombre d'or, un nombre remarquable qui vaut exactement : 1.61803398...

En effet : 13/8=1.625 ; 21/13=1.61538... ; 34/21=1.61904... et ainsi de suite... plus on avance dans la suite de Fibonacci, plus l'écart s'amenuise, et plus le rapport des deux nombres successifs (le plus grand/le plus petit) tend vers la valeur du nombre d'or 1,61803...!

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITE DE COCODY ABIDJAN	2021 /2022
UFR DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE	*Algorithme* ***Examen session1*** ***Durée 1H30***

COURS (6pts)

C1 Parmi ces messages affichées par un algorithme lesquels peuvent provenir de l'instruction `Ecrire (a)` : 1 4.3 saisir a 3.14 E+01 a = -100 a

C2 Evaluez l'expression
`Palindrome← (Palindrome) et (mot[i]=mot[longueur-i+1])`
Pour mot='2020' sachant que :

- palindrome a été initialisé à vrai
- i varie de 1 à 2

C3 Ecrire l'entête d'une procédure **RAZ** avec paramètres devant servir de remettre à 0 toutes les cellules d'un tableau de100 cellules.

C4 Pour le type Booléen, quel est le domaine de valeur et les opérations possibles ?

Exercice 1 : Suite de FIBONACCI (8 pts)
On veut calculer les n premiers termes de la suite de FIBONACCI :
$U_0=1$, $U_1=1$ et $\forall n$ appartient à IN $U_{n+2}=U_{n+1}+U_n$
Le pseudo code suivant a été écrit :

```
u ←u0
v ←u1
Pour i variant de 1 à n faire
    w←u+v
    u←v
    v←w
```

1.1 Réécrire l'algorithme après une analyse des données utilisées .Insérer l'affichage du terme courant
1.2 Donner l'exécution du programme pour les dix premiers termes.
1.3 On veut utiliser les termes de la suite de **Fibonnaci** pour construire la spirale du même nom. Il s'agit en effet de construire des arcs de cercle de 90 degrés dans des carrés comme expliqué en annexe. On suppose que vous disposez d'une procédure `cercle (rd, ang)` qui permet de construire des arcs de rayon **rd** et d'angle **ang**.

a) Construire la spirale (sur la grille en annexe 4/4 à rendre)
b) Déduire l'algorithme de construction de la spirale en utilisant la procédure `cercle(rd, ang)` avec des paramètres effectifs.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Exercice 2 (6 pts)
Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs (qui sont alors 1 et lui-même).

1°) Ecrire la fonction qui teste la primalité d'un nombre entier à partir du pseudo code suivant :

```
Fonction premi(n)
     assert n >= 2     // n doit être supérieur ou égal à 2
     Pour i de 2 à n -1
          Si i divise n
          Retourne faux
     Fin Pour
     Retourne vrai
```

2°) Dans un algorithme principal, activer la fonction avec un entier (a) à saisir au clavier.
3°) Donner la trace pour a =13.

4°) Soit le tableau (T [1..100] d'entier) contenant les entiers consécutifs de 1 à 100, écrire l'algorithme de création et d'initialisation du tableau T

1	2	3	.	.	.	.	98	99	100

5°) Utiliser dans un algorithme la fonction de test de primalité pour afficher les nombres premiers du tableau.
La méthode ci-dessus donne le même résultat que le crible d'Eratosthène avec moins d'efficacité.

Le crible d'Ératosthène est un procédé qui permet de trouver tous les nombres premiers inférieurs à un certain entier naturel donné *N*. L'algorithme procède par élimination :
il s'agit de supprimer d'une table des entiers de 2 à N tous les multiples d'un entier. En supprimant tous les multiples, à la fin il ne restera que les entiers qui ne sont multiples d'aucun entier, et qui sont donc les nombres premiers.
On commence par rayer les multiples de 2, puis à chaque fois on raye les multiples du plus petit entier restant.

On peut s'arrêter lorsque le carré du plus petit entier restant est supérieur au plus grand entier restant, car dans ce cas, tous les non-premiers ont déjà été rayés précédemment.

À la fin du processus, tous les entiers qui n'ont pas été rayés sont les nombres premiers inférieurs à N.

6°) Donner le début (jusqu'à la cellule 20) du tableau pour les 4 premières itérations à partir de 2.

	2	3																	

	2	3																	

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Problème (12 pts)
Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs (qui sont alors 1 et lui-même).

1°) Ecrire la fonction qui teste la primalité d'un nombre entier à partir du pseudo code suivant :

```
Fonction premI (n)
    assert n >= 2     // n doit être supérieur ou égal à 2
    test ← Vrai
    Pour i de 2 à n -1
        Si i divise n test ← Faux
        break
    Fin Pour
    Retourne test
```

2°) Dans un algorithme principal, activer la fonction avec un entier (a) à saisir au clavier.
3°) Donner la trace pour a =10

4°) Soit le tableau (T [1..100] d'entier) contenant les entiers consécutifs de 1 à 100, écrire l'algorithme de création et d'initialisation du tableau T

1	2	3	.	.	.	.	98	99	100

5°) Utiliser dans un algorithme la fonction de test de primalité pour afficher les nombres premiers du tableau.
La méthode ci-dessus donne le même résultat que le crible d'Eratosthène avec moins d'efficacité.

Le crible d'Ératosthène est un procédé qui permet de trouver tous les nombres premiers inférieurs à un certain entier naturel donné *N*. L'algorithme procède par élimination :
il s'agit de supprimer d'une table des entiers de 2 à N tous les multiples d'un entier. En supprimant tous les multiples, à la fin il ne restera que les entiers qui ne sont multiples d'aucun entier, et qui sont donc les nombres premiers.
On commence par rayer les multiples de 2, puis à chaque fois on raye les multiples du plus petit entier restant.

On peut s'arrêter lorsque le carré du plus petit entier restant est supérieur au plus grand entier restant, car dans ce cas, tous les non-premiers ont déjà été rayés précédemment.

À la fin du processus, tous les entiers qui n'ont pas été rayés sont les nombres premiers inférieurs à N.

6°) Donner le début (jusqu'à la cellule 20) du tableau pour les 4 premières itérations à partir de 2.

	2	3																	

	2	3																	

VALIDEUR LMD - 2025

	2021 /2022
	Algorithme *Examen session2* *Durée 1H15*

COURS (4pts)

C1 Parmi ces messages affichées par un algorithme lesquels peuvent provenir de l'instruction `Ecrire(a)` : 1 4.3 saisir a 3.14 E+01 a = -100 a

C2 Evaluez l'expression
`Palindrome← (Palindrome) et (mot[i]=mot[longueur-i+1])`
Pour mot='2020' sachant que :

- palindrome a été initialisé à vrai
- i varie de 1 à 2

C3 Ecrire l'entête d'une procédure RAZ avec paramètres devant servir de remettre à 0 toutes les cellules d'un tableau de10 cellules.

C4 Pour le type Booléen, quel est le domaine de valeur et les opérations possibles et un identificateur possible?

Exercice 1 : Suite de FIBONACCI (4 pts)
On veut calculer les n premiers termes de la suite de FIBONACCI :
$U_0=1$, $U_1=1$ et $\forall n$ appartient à IN $U_{n+2}=U_{n+1} + U_n$
Le pseudo code suivant a été écrit :

```
u ←u0
v ←u1
Pour i variant de 1 à n faire
    w←u+v
    u←v
    v←w
```

1.1 Réécrire l'algorithme après une analyse des données utilisées .Insérer l'affichage du terme courant
1.2 On veut utiliser les termes de la suite de Fibonnaci pour construire la spirale du même nom. Il s'agit en effet de construire des arcs de cercle de 90 degrés dans des carrés comme expliqué en annexe. On suppose que vous disposez d'une procédure `cercle (rd, ang)` qui permet de construire des arcs de rayon rd et d'angle ang.

a) Construire la spirale (sur la grille en annexe 4/4 à rendre)
b) Déduire l'algorithme de construction de la spirale en utilisant la procédure `cercle(rd, ang)` avec des paramètres effectifs.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Annexe

La suite de Fibonacci doit son nom au mathématicien italien Leonardo Fibonacci qui a vécut au XIIème et XIIIème siècle. Il est connu pour avoir introduit et popularisé en Europe et en Occident la numérotation indo-arabe qui a remplacé pour les calculs la notation romaine peu pratique aux opérations arithmétiques.

Mais il est aussi connu pour avoir mis en évidence une suite mathématique qui porte désormais son nom. Dans la suite de Fibonacci, il n'est pas nécessaire de mémoriser chacun des termes ou nombres de la suite (qui est d'ailleurs infinie). Il suffit de se rappeler sa règle de construction: **à l'exception des deux premiers, chaque terme de la suite est égal à la somme des deux termes qui le précèdent immédiatement**, dit autrement il s'agit d'une suite de nombres dans laquelle tout nombre (à partir du troisième) est égal à la somme des deux précédents:

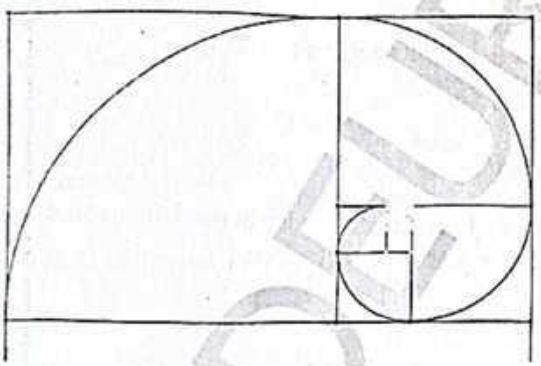
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,...

Il suffit de prendre deux nombres de départ. Les ajouter donne le troisième, puis le deuxième + le troisième donne le quatrième et ainsi de suite. Les termes de cette suite sont appelés nombres de Fibonacci.

La suite de Fibonacci possède de nombreuses propriétés très utilisées en mathématiques. Une d'entre elles est que le rapport de deux nombres consécutifs de la suite est alternativement supérieur et inférieur au nombre d'or, un nombre remarquable qui vaut exactement **1.61803398...**

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(Construction de la spirale) Dans chaque carré, on trace un quart de cercle joignant un sommet au sommet opposé, de sorte que les quarts de cercle soient consécutifs. La courbe obtenue s'appelle la spirale de Fibonacci. Les carrés sont donc de côté 1,1,2,3,5,8,13,.... Cette suite est la suite de Fibonacci.



Dans la nature, on retrouve très souvent des motifs basé sur la suite Fibonacci et sur le nombre d'or. Il semblerait que la nature marque une prédilection pour la suite de Fibonacci et pour le nombre d'or.

- les ananas
- les tournesols
- les étoiles de mer
- les coquilles de mollusques
- les galaxies
- les cyclones météorologiques
- le fœtus humain

Scanned with CamScanner

UFHB - UFRMI	2022 - 2023 UE : Algorithme et programmation ECUE : Algorithme Examen - Session 1 (Juin 2023) Durée :1 H 30

Exercice 1

Soit l'algorithme ci-dessous

```
1.  Algorithme Licence1 ;
2.   Var
3.     A : entier ;
4.     Procedure PROG (Var Z : entier);
5.        Var
6.           Y : Entier ;
7.        Debut
8.           Y ← 2*(Z-1) ;
9.           Z ← (Z*Z) div Y ;
10.          Ecrire('Z : ',Z);
11.       Fin ;
12.  Debut
13.     A ← 5 ;
14.                    // Activation ou appel de la procédure PROG
15.                    // Affichage de la valeur de A
16.  Fin.
```

1.1 : A quelles lignes sont mis en œuvre les concepts suivants :

a) Déclaration de variable locale,

b) Déclaration de paramètre formel

1.2 : Ecrire les lignes 14 et 15

1.3 : Sachant que le mot clé VAR de la ligne 4 permet de garder la modification du paramètre effectif, donner le résultat de l'exécution si la procédure est écrite :

a) avec ce mot clé

b) sans ce mot clé

Exercice 2

Ecrire un algorithme qui estime la valeur de la constante mathématique e en utilisant la formule suivante :

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{1\times 2\times 3\times 4} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Pour cela :

2.1 : Ecrire la fonction factorielle ***Fac (n : entier) : entier*** ;

2.2 : Dans votre algorithme principal, saisissez l'ordre n et affichez l'approximation correspondante de e

Exercice 3

```
ALGORITHME test ;
VAR
   b, i, N : entier ;
   Cumul : Reel ;
DEBUT
   ECRIRE ('Algorithme tester Licence I - UFRMI') ;
   B ←10 ;
   Cumul ← 20 ;
   ECRIRE ('Saisir un nombre entier N') ;
   LIRE(N) ;
   POUR i←1 JUSQUA N FAIRE
     DEBUT
       Cumul ← Cumul + (b^i) ;
       b←b-1;
     FIN ;
   ECRIRE (' Cumul = ', Cumul) ;
   ECRIRE (' b= ', b) ;
   ECRIRE ('Fin du traitement') ;
FIN.
```

Soit l'algorithme ci-contre :

1. Si N=3, donner les résultats de l'exécution du programme tels qu'ils apparaissent exactement à l'écran.
2. Modifier cet algorithme en introduisant un test qui affiche une erreur si l'utilisateur saisi N **négatif**
3. Transformer la boucle **pour** en une boucle **tant que**
4. Ecrire une procédure **connecter** qui peut être appelée dans cet algorithme où l'utilisateur valide sa connexion avec le mot de passe est **licence1UFRMI** et l'utilisateur a au plus trois essais.

Bonne Chance

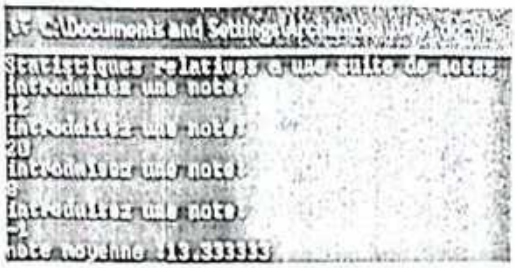
VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

UFHB - UFRMI	2023 - 2024
	UE : Algorithme et programmation ECUE : Algorithme Examen - Session 1 (Juin 2024) Durée : 1 H 30

Exercice 1 (10 points)

Soit l'exécution du programme ci-dessous :



1.1 : Quelle est la structure de données (L) utilisée pour enregistrer les éléments saisis ?

1.2 : Le nombre 57 est recherché de manière séquentielle. Expliquer le principe de la recherche séquentielle (5 lignes maximum)

1.3 : Ecrire l'algorithme permettant non seulement d'enregistrer les données dans L mais également de rechercher séquentiellement un élément

1.4 : Ecrire une fonction qui recherche le minimum de L

Exercice 2 (5 points)

Ecrire un algorithme qui estime la valeur de la constante mathématique e en utilisant la formule suivante :

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{1\times 2\times 3\times 4} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Pour cela :

2.1 : Ecrire la fonction factorielle *Fac (n : entier) : entier* ;

2.2 : Dans votre algorithme principal, saisissez l'ordre n et affichez l'approximation correspondante de e

Exercice 3 : (5 points)

3.1 : Ecrire une fonction paire permettant de tester si un nombre entier est pair.

3.2 : Soit T, un tableau d'entiers positifs de taille 10. Ecrire un algorithme utilisant la fonction paire (question A) pour compter les nombres pairs dans le tableau

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UFHB - UFRMI	2023 - 2024
UE : Algorithme et programmation	Examen - Session 2 (Aout 2024)
ECUE : Algorithme	Durée : 1 H 45

Exercice 1 : Récursivité (4 points)

Ecrire deux (2) versions récursives du sous algorithme permettant de calculer le PGCD de deux nombres

Principe 1 : Par soustractions successives. Si a = b, le PGCD est a. Sinon, on calcule le PGCD du couple formé par la différence entre a et b et le plus petit des deux

Principe 2 : Par division Euclidienne. Si b = 0, le PGCD est a. Sinon, on calcule le PGCD du couple formé par b et le reste de la division de a par b

Exercice 2 : (8 points)

```
ALGORITHME test ;
VAR
   b, i, N : entier ;
   Cumul : Reel ;
DEBUT
  ECRIRE ('Algorithme tester Licence I -
UFRMI') ;
  B ←10 ;
  Cumul ← 20 ;
  ECRIRE ('Saisir un nombre entier N') ;
  LIRE(N) ;
  POUR i←1 JUSQUA N FAIRE
    DEBUT
      Cumul ← Cumul + (b*i) ;
      b←b-1;
    FIN ;
  ECRIRE (' Cumul = ', Cumul) ;
  ECRIRE (' b= ', b) ;
  ECRIRE ('Fin du traitement') ;
FIN.
```

1. Ecrire un programme qui permet de saisir un nombre puis de déterminer s'il appartient à un intervalle donné, sachant que les bornes de l'intervalle sont fixées par l'utilisateur
2. Ecrire un programme qui demande deux (2) nombres à l'utilisateur et l'informe ensuite si leur produit est négatif ou positif.

   Attention : On ne doit pas calculer le produit des 2 nombres
3. Soit l'algorithme ci-contre. Si N=3, donner les résultats de l'exécution du programme tels qu'ils apparaissent exactement à l'écran.
4. Modifier cet algorithme en introduisant un test qui affiche une erreur si l'utilisateur saisi N négatif
5. Transformer la boucle pour en une boucle tant que

Exercice 3 : (8 points)

On considère un tableau de 10 étudiants (matricule, nom et moyenne). Ecrire un algorithme permettant de

- Les saisir
- Les afficher par ordre alphabétique
- Rechercher un étudiant par la méthode de recherche dichotomique

Scanned with CamScanner

UFHB UFRMI	2021
Licence 1	**UE : Algorithme et programmation** **ECUE : Algorithme** **Correction Examen Session 2**

COURS (QCM)

C1) **Réponse :** 4*serie

C2) **Réponse :** Faux

C3) **Réponse :** c) Vrai, faux, et , non, ou

C4) **Réponse :** b)

C5) **Réponse :** a) 2999

C6) **Réponse :** a) Booléen

C7) **Réponse :** a) Une seule condition

C8) **Réponse :** c) 5 ← x

C9) **Réponse :** b) Conditionnelle, d) Itérative

C10) **Réponse :** c) Fonction MoyenneSup(t :tableau[1..100] de réel) : réel

EXERCICE 1

a) Fonction factorielle

```
factorielle(x : entier) : entier
        variable
          fact, j : entier
        début
          Si (x = 0 ou x = 1) alors
            fact ← 1
          Sinon
            Pour j ← 2 jusqu'à x faire
              fact ← fact * j
            Finpour
          Finsi
        retourner fact
fin
```

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

b) L'algorithme principal

```
ALGORITHME                                              approximation
VARIABLE
        n, i : entier
        e : réel
DEBUT
        Ecrire("Entrer l'ordre n : ")
        Lire (n)
        e = 0
        Pour i ← 0 jusqu'à n faire
                e = e + (1/factorielle(i))
        Finpour
        Ecrire("L'approximation correspondante de e est : ", e)
FIN
```

EXERCICE 2 : Suite de FIBONACCI

2.1)

```
ALGORITHME                                              fibonacci
VARIABLE
        u, v, w, i, n : entier
DEBUT
        Ecrire("Entrer la valeur de n : ")
        Lire(n)
        u ←1
        v ← 1
        Pour i variant de 1 à n faire
                w← u + v
                Ecrire(u, " ", v, " ", w)
                u ←v
                v ← w
        Finpour
FIN
```


VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

2.2) La trace pour les 10 premiers termes

J	U	V	W
0	1	1	-
1	1	2	2
2	2	3	3
3	3	5	5
4	5	8	8
5	8	13	13
6	13	21	21
7	21	34	34
8	34	55	55
9	55	89	89
10	89	144	144

tableau

2.3)

```
ALGORITHME
VARIABLE
        tab : tableau[1 .. 100] de entier
        i : entier
DEBUT
        tab[1] ←1
        tab[2] ←1
        Pour i variant de 3 à 10 faire
                tab[i] ← tab[i-2]+tab[i-1]
        Finpour
        Pour i variant de 1 à 10 faire
                Ecrire(tab[i])
        Finpour
FIN
```

2.4)

```
Nombre_or(n  entier) : réel
        variable
                or, u, v, w, i : entier
        début
                u ←1
                v ← 1
                or ← 0
                Pour i variant de 1 à n faire
                        w← u + v
                        or ← w / u
                        u ←v
                        v ← w
                Finpour
        retourner or
fin
```

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

ALGORITHME 2021-2022 SESSION 1

COURS

C1.a
C2.FAUX
C3. PROCEDURE RAZ (t: tableau[1...100] de entier(ou réel))
pour cette procédure nous avons juste besoin de connaitre le tableau a réinitialisé a 0.Les autres variables peuvent être déclarer à l'intérieur de la procédure.
C4.{VRAI,FAUX}

EXERCICE1

1.1)Analyse des données :

u0,u1:premiers termes de la suite à partir desquels l'on calculera les autres termes.
i : variable servant à calculer les autres termes de la suite d'indice i.
u,v: répresentent respectivement les variables u0 et u1.
w: terme courant de la suite.

Ecriture de l'algo :

```
ALGORITHME FIBONACCI

Variable
        u,v,w,i,n:entier
Debut
        (lire = comme une affectation et non comme une egalité)
        u=1
        v=1
        lire(n)
        pour i allant de 1 à n Faire
                w=u+v
                u=v
                v=w
                Ecrire(w)
        Fin pour i
Fin // algorithme
```

1.2 Faire l'execution du programme pour les 10 premiers termes revient à faire la trace de l'algorithme (l'etudiant doit le faire lui même) .Apres cette trace nous obtenons les resultats suivant
1er terme :2
2eme terme:3
.....:5

Scanned with CamScanner

.....:8
.....:13
.....:21
.....:34
.....:55
.....:89
.....:144

Exercice2

1. FONCTION prem1(n) :

```
Variable
        i : entier

Debut
        si (n (sup ou egal) 2) alors
                pour i allant de 2 à n-1 Faire
                        si (n%i == 0) alors
                                Retourner (Faux)
                        Fin si
                Fin pour i
                Retourner(Vrai)

        Fin si
Fin
```

2.Trace pour a=13.
Resultat =Faux

3.Algorithme de création et d'initialisation

```
PROCEDURE Init()
        Variable
                t: tableau[1,..,n] de entier
                i,n:entier

        Debut
                n=100
                pour i allant de 1 à n Faire
                        t[i]=i
                Fin pour i
        Fin
```

4.Algorithme Test

```
variable
        i: entier
Debut
        Init()
        Pour i allant de 1 à 100 Faire
                si(prem1(t[i])==Vrai) alors
                        Ecrire t[i]

                fin si
        fin pour i
fin
```

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UNIVERSITÉ FÉLIX HOUPHOUET BOIGNY
VALIDEUR LMD 2025

ALGORITHME

CORRECTION SESSION 1 2023-2024

Exercice 1

Principe 1 : Par soustractions successives

```
Algorithme PGCD_Soustraction(a, b)
  Si a = b alors
    Retourner a
  Sinon
    Si a > b alors
      Retourner PGCD_Soustraction(a - b, b)
    Sinon
      Retourner PGCD_Soustraction(a, b - a)
  Fin Si
Fin Algorithme
```

Principe 2 : Par division Euclidienne

```
Algorithme PGCD_Euclidien(a, b)
  Si b = 0 alors
    Retourner a
  Sinon
    Retourner PGCD_Euclidien(b, a mod b)
  Fin Si
Fin Algorithme
```

Exercice 2

Question 1

Écrire un programme qui permet de saisir un nombre puis de déterminer s'il appartient à un intervalle donné, sachant que les bornes de l'intervalle sont fixées par l'utilisateur.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

```
DEBUT
  ECRIRE "Saisir la borne inférieure de l'intervalle : "
  LIRE(borne_inferieure)
  ECRIRE "Saisir la borne supérieure de l'intervalle : "
  LIRE(borne_superieure)
  ECRIRE "Saisir un nombre : "
  LIRE(nombre)

  SI (nombre >= borne_inferieure ET nombre <= borne_superieure) ALORS
    ECRIRE "Le nombre appartient à l'intervalle."
  SINON
    ECRIRE "Le nombre n'appartient pas à l'intervalle."
  FIN SI
FIN
```

Question 2

Écrire un programme qui demande deux (2) nombres à l'utilisateur et informe ensuite si leur produit est négatif ou positif. Attention : On ne doit pas calculer le produit des 2 nombres.

```
DEBUT
  ECRIRE "Saisir le premier nombre : "
  LIRE(nombre1)
  ECRIRE "Saisir le deuxième nombre : "
  LIRE(nombre2)

  SI (nombre1 == 0 OU nombre2 == 0) ALORS
    ECRIRE "Le produit des deux nombres est zéro."
  SINON SI (nombre1 > 0 ET nombre2 > 0) OU (nombre1 < 0 ET nombre2 < 0) ALORS
    ECRIRE "Le produit des deux nombres est positif."
  SINON
    ECRIRE "Le produit des deux nombres est négatif."
  FIN SI
FIN
```

Question 3

Soit l'algorithme ci-dessous. Si N = 3, donner les résultats de l'exécution du programme tels qu'ils apparaissent exactement à l'écran.

Algorithme original corrigé et déroulement :

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

```
ALGORITHME test :
VAR
  b, N : entier
  Cumul : réel
DEBUT
  ECRIRE "Algorithme tester Licence I-"
  b ← 10
  Cumul ← 20
  ECRIRE "Saisir un nombre entier N :"
  LIRE (N)
  POUR i ← 1 JUSQU'À N FAIRE
    DEBUT
      Cumul ← Cumul + (b * i)
      b ← b - 1
    FIN
  ECRIRE "Cumul :", Cumul
  ECRIRE "b :", b
  ECRIRE "Fin du traitement"
FIN
```

Exécution pour N = 3 :

- Initialisation : b = 10, Cumul = 20
- Lecture de N avec N = 3
- Boucle POUR de 1 à N (donc de 1 à 3) :
  - Itération 1:
    - Cumul = 20 + (10 * 1) = 30
    - b = 9
  - Itération 2:
    - Cumul = 30 + (9 * 2) = 48
    - b = 8
  - Itération 3:
    - Cumul = 48 + (8 * 3) = 72
    - b = 7
- Affichage final :
  - Cumul : 72
  - b : 7
  - Fin du traitement

Question 4

Modifier cet algorithme pour afficher une erreur si l'utilisateur saisit un nombre négatif pour N.

```
DEBUT
  ECRIRE "Saisir un nombre entier N :"
  LIRE(N)

  SI (N < 0) ALORS
    ECRIRE "Erreur : N doit être positif."
    FIN
  SINON
    POUR i ← 1 JUSQU'À N FAIRE
      DEBUT
        Cumul ← Cumul + (b * i)
        b ← b  1
      FIN
    ECRIRE "Cumul :", Cumul
    ECRIRE "b :", b
    ECRIRE "Fin du traitement"
  FIN SI
FIN
```

Question 5

Transformer la boucle POUR en une boucle TANT QUE dans le même algorithme

```
DEBUT
  i ← 1
  TANT QUE (i ≤ N) FAIRE
    DEBUT
      Cumul ← Cumul + (b * i)
      b ← b-1
      i ← i + 1
    FIN
  ECRIRE "Cumul :", Cumul
  ECRIRE "b :", b
  ECRIRE "Fin du traitement"
FIN
```

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Exercice 3

Objectif : On considère un tableau de 10 étudiants (matricule, nom et moyenne). Écrire un algorithme permettant de :

1. Les saisir
2. Les afficher par ordre alphabétique
3. Rechercher un étudiant par la méthode de recherche dichotomique

1. Saisie des étudiants

```
DEBUT
  POUR i DE 1 A 10 FAIRE
    ECRIRE "Saisir le matricule de l'étudiant ", i, " :"
    LIRE etudiants[i].matricule
    ECRIRE "Saisir le nom de l'étudiant ", i, " :"
    LIRE etudiants[i].nom
    ECRIRE "Saisir la moyenne de l'étudiant ", i, " :"
    LIRE etudiants[i].moyenne
  FIN POUR
FIN
```

2. Affichage par ordre alphabétique

Pour trier les étudiants par ordre alphabétique de leurs noms, on peut utiliser un algorithme de tri simple comme le tri par insertion.

```
DEBUT
  POUR i DE 2 A 10 FAIRE
    courant ← etudiants[i]
    j ← i - 1

    TANT QUE (j > 0 ET etudiants[j].nom > courant.nom) FAIRE
      etudiants[j + 1] ← etudiants[j]
      j ← j - 1
    FIN TANT QUE

    etudiants[j + 1] ← courant
  FIN POUR

  ECRIRE "Étudiants triés par ordre alphabétique :"
  POUR i DE 1 A 10 FAIRE
    ECRIRE etudiants[i].matricule, etudiants[i].nom, etudiants[i].moyenne
  FIN POUR
FIN
```

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

3. Recherche dichotomique

La recherche dichotomique (ou binaire) nécessite que les données soient triées. Donc, après avoir trié les étudiants par ordre alphabétique, on peut appliquer cet algorithme pour rechercher un étudiant par son nom.

```
DEBUT
  ECRIRE "Saisir le nom de l'étudiant à rechercher :"
  LIRE recherche_nom
  debut ← 1
  fin ← 10
  trouve ← FAUX

  TANT QUE (debut ≤ fin ET trouve = FAUX) FAIRE
    milieu ← (debut + fin) DIV 2

    SI etudiants[milieu].nom = recherche_nom ALORS
      trouve ← VRAI
    SINON SI etudiants[milieu].nom < recherche_nom ALORS
      debut ← milieu + 1
    SINON
      fin ← milieu - 1
    FIN SI
  FIN TANT QUE

  SI trouve ALORS
    ECRIRE "Étudiant trouvé : ", etudiants[milieu].matricule, etudiants[milieu].nom,
etudiants[milieu].moyenne
  SINON
    ECRIRE "Étudiant non trouvé."
  FIN SI
FIN
```

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UFRMI 2020 – 2021
L_1

Programmation Python
Examen session 2
Durée: 1H15

EXERCICE 1: Questions de cours

11 Parmi ces valeurs lesquelles ne sont pas des entiers (int):
1 -43 21.0 $4E-06$ $5C$

12 Traduire en python l'algorithme et donner le résultat de la ligne 11

```
1 ALGORITHME exemple3bis
2   VARIABLE a, b, c : reel
3 FONCTION produit (x,y:reel): reel {parametres}
4   DEBUT
5     retourner(x • y)
6   FIN
7 DEBUT
8   Ecrire ('a,b')
9   Lire (a,b)
10  c← produit (a,b)
11  ecrire (produit (5, 10))
12  ecrire ('c=' c);
13FIN
```

13- for i in range (1,11);
print (i)
Quelle est la dernière valeur de i ? justifier.

14 Qu'est-ce que le transtypage ? Donner un exemple utilisé pendant la saisie des données en python.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

15 Soit l'exécution du programme

[1, 4, −5, 0, 21, 58, −69]
Le plus petit est: -69 indice: 6
Trouver les erreurs de syntaxe du programe ci-dessous

```
def recherchemin(t):
        min=int(t[1])
        i=1;
        while i <len(t)do:
                if min <= i + 1
                    i == i + 1
                else:
                    min=int (t[i])
        return (i)
#programme principal
tb= [1, 4, −5, 0, 21, 58, −69]
print (tb)
print("le plus petit est ", recherchemin(tb)),
'indice:', tb.index(recherchemin(tb))
```

EXERCICE 1

```
1 def MaFonction(n):# définition de fonction
2         res=[ ]
3         k=n
4         iter=0
5         while k>0
6             iter=iter+1
7             res.apprend(k%2)
8             k=k//2
9         return res
10 #programme principal
11 tb= MaFonction(16)
12 print(tb)
```

1.1 Donner l'explication de chaque ligne.
1.2 Donner la trace et le résultat d'exécution (le tableau) pour 4; 9 et 16.
1.3 En déduire l,objectif de ce programme.
1.4 Les fonctions 'bin' et 'hex' permettent de faire plus simple. Ecrire un programme qui demande un nombre, le convertit en binaire et en hexadécimal.

EXERCICE 2

On veut tester la simulation d'un dé par un ordinateur. Pour cela on génère

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

dans un tableau des nombres compris entre 1 et 6 représentant les faces.

```
import random
i=input (random.randint(1,6))
print(1)
```

La déclaration des ressources est la suivante:

```
algorithme de_test;
type
tablo=tableau[1..1000] de entier;
variable
lancers:tablo;(*l'ensemble des lancer*)
nblancer,i,face:entier
```

procedure range_lance(t:tablo) //conserver les lancers dans le tableau(a)
//pour les 1000 cellules, générer le nombre compris entre 1 et 6 et le conserver dans la cellule constante

fonction probabilite_face(t:tablo, f:integer): réel (b)
//parcourir le tableau et rechercher les cellules qui contiennent la valeur f.
A chaque Egalité avec f.
//Augmenter le nombre d'apparition de la face par une incrémentation

2.1 Définir la procédure (a)
2.2 Définir la fonction (b)
2.3 Dans un programme principal, déclarer les variables globales
2.4 Remplir le tableau lancers [ ]
2.5 Tester la génération pour la face 1

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

	2022
UFRMI L1	*Programmation Python* *Examen session1* *Durée 1H00*

EXERCICE I (12 pts)
Soit l'algorithme d'approximation de racine selon Héron d'Alexandrie:

```
algorithme carre1
variable
      a,a0,an: reel
      i:entier
debut
      ecrire('calcul de racine carree de :')
      lire(a) // le nombre dont on cherche la racine carrée
      ecrire( 'le carree le plus proche')
      lire(a0)
      pour i  ←  1 jusqu'à 5 faire
            an← (1/2)*(a0+a/a0)
            ecrire(an)
            a0← an
      finpour
      ecrire(an)
fin
```

1.1Traduire l'algorithme en python.
1.2 Donner la trace et le résultat d'exécution pour 9 et 15. (faites au moins 5 itérations de la boucle en suivant les valeurs de i, a0, a et an)
1.3 Ecrire une version plus simple du programme en python en utilisant le module 'math'
1.4 Transformer le programme (1.1) en une fonction python *def carre1(n) : .....return an*
1.5 Ecrire un programme principal permettant de calculer la difference entre la valeur approchee et la valeur réelle.

EXERCICE 2 (8 pts)
The Gregory-Leibniz series

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 4\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots\right) = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ddots}}}}$$

2.1 Ecrire un programme permettant d'afficher pour n allant de 1 jusqu'à 100 les valeurs $(-1)^n$

2.2 Utiliser la formule de Leibniz pour ecrire un programme itératif en python qui permettra d'avoir une valeur approchée de Pi.

*Indications :from math import * : à faire avant toute utilisation de fonction mathématique telles que : cos (n), abs(n), sin(n), sqrt(t),*math.pow(*x, y*) *Retourne x élevé à la puissance y.*

Scanned with CamScanner

Annexe

La suite de Fibonacci doit son nom au mathématicien italien Leonardo Fibonacci qui a vécut au XIIème et XIIIème siècle. Il est connu pour avoir introduit et popularisé en Europe et en Occident la numérotation indo-arabe qui a remplacé pour les calculs la notation romaine peu pratique aux opérations arithmétiques.

Mais il est aussi connu pour avoir mis en évidence une suite mathématique qui porte désormais son nom. Dans la suite de Fibonacci, il n'est pas nécessaire de mémoriser chacun des termes ou nombres de la suite (qui est d'ailleurs infinie). Il suffit de se rappeler sa règle de construction: **à l'exception des deux premiers, chaque terme de la suite est égal à la somme des deux termes qui le précèdent immédiatement**, dit autrement il s'agit d'une suite de nombres dans laquelle tout nombre (à partir du troisième) est égal à la somme des deux précédents:

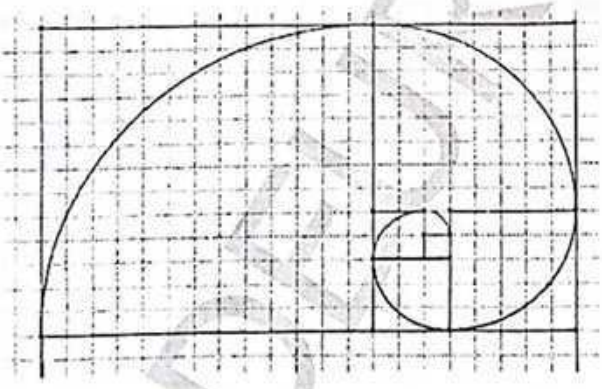
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,...

Il suffit de prendre deux nombres de départ. Les ajouter donne le troisième, puis le deuxième + le troisième donne le quatrième et ainsi de suite. Les termes de cette suite sont appelés **nombres de Fibonacci.**

La suite de Fibonacci possède de nombreuses propriétés très utilisées en mathématiques. Une d'entre elles est que le rapport de deux nombres consécutifs de la suite est alternativement supérieur et inférieur au nombre d'or, un nombre remarquable qui vaut exactement 1.61803398...

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(Construction de la spirale) Dans chaque carré, on trace un quart de cercle joignant un sommet au sommet opposé, de sorte que les quarts de cercle soient consécutifs. La courbe obtenue s'appelle la spirale de Fibonacci. Les carrés sont donc de côté 1,1,2,3,5,8,13,.... Cette suite est la suite de Fibonacci.



Dans la nature, on retrouve très souvent des motifs basé sur la suite Fibonacci et sur le nombre d'or. Il semblerait que la nature marque une prédilection pour la suite de Fibonacci et pour le nombre d'or.

- les ananas
- les tournesols
- les étoiles de mer
- les coquilles de mollusques
- les galaxies
- les cyclones météorologiques
- le fœtus humain

Scanned with CamScanner

2023

UFRMI	UE : Algorithme et programmation ECUE : **Python** Examen (Juin 2023) Durée : 1 H15min

COURS (QCM)

C1 - Pour produire un fichier « .py : », on utilise un
a) Un éditeur
b) Un exécuteur
c) Un compilateur
d) Interpréteur de commandeur

C2 Pour le type **bool**, quel est le domaine de valeur et les opérations possibles ?
a) yes , not, True ,False
b) True , False , != , ++, and
c) True, False, and , not , or
d) no ,yes, and ,or

C3 Dans l'instruction python y = int((b) / 2)
a) b est déclaré comme un int
b) b est converti en int avant la division qui s'effectue sur deux int.
c) c'est le résultat de la division qui est converti en int
d) il y a une erreur

C4 Soit l'extrait de code python ci-dessous :

```
x=int(0)
if (x==0):
   i = 17
i=i+20
print("The value of i = " , i)
```

Quel est le résultat de l'exécution de la ligne 5
(a) 0
(b) 37
(c) erreur
(d) 17

C5 Soit la fonction :

```
def minus2(a, b):
    return(a>b)
```

Quel est le type retourné par la fonction minus2 ?

a) bool
b) float
c) int
d) infinity

C6 - Lequel des mots réservés de python permet de forcer la sortie d'une boucle :

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

For i in range(n) :

(a) try .. catch
(b) break
(c) exception
(d) main

C7 Quelle est l'instruction python erronée sachant x et y sont des **int**?

a) `x = x + 2/y`
b) `x = x`
c) `5 = x`

C8 Soit la fonction

```
def f(x):
  return 3*x-7
```

Comment peut-on l'appeler dans un programme principal?

(a) f(int x)
(b) f(a)
(c) f(a,b)
(d) f(10)

Exercice 1

Soit l'algorithme d'approximation de racine selon Héron d'Alexandrie:

```
algorithme carre1
variable
      a,a0,an: réel
      i:entier
debut
      ecrire('calcul de racine carrée selon Heron ')
      ecrire('racine carrée de : ? Saisir le nombre : ')
      lire(a) // le nombre dont on cherche la racine carrée
      ecrire( 'Saisir le carré le plus proche :')
      lire(a0)
      pour i←1 jusqu'à 5 faire
            an← (1/2)*(a0+a/a0)
            ecrire(an)
            a0←an
      finpour
      ecrire(an)
fin
```

a) Traduire l'algorithme en python.
b) Donner la trace et le résultat d'exécution pour 9 et 21. (Faites au moins 5 itérations de la boucle en suivant les valeurs de i, a0, a et an)
c) Transformer en fonction *RacineHeron(a)* et tester dans un programme principal.
d) Ecrire une version plus simple du programme en python en important 'math'.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

VALIDEUR LMD-2025

Exercice 2

Soit la fonction ci-dessous

a)Trouver les erreurs de syntaxe du programme ci-dessous

```
def recherchemin(t):
    min=int(t[1])
    i=1 ;
    while i< len(t)do :
        if min <= t[i]:
            i==i+1
        else :
            min=int(t[i])
    return (i)
```

Dans un programme principal,

b)Initialiser et afficher la liste tb contenant [1,4,-5,0,21,58,-69]

c).Activer après correction la fonction recherchemin(t) pour afficher la position du minimum et donner sa valeur.

tb.index(i) donne la valeur contenue dans la liste a la position i

8-6-6

Scanned with CamScanner

	Le sujet peut être une translation, une rotation ou réflexion ou une homothétie. Barème 10 - 5 - 5
UFRMI L1 *Réponse juste 1pt ,* *réponse fausse -0,5pt ,* *sans réponse et réponse incomplète 0*	UE : Algorithme et programmation ECUE : Prog. Python Examen (Juin 2023) Durée : 1 H15min

COURS (QCM) recopier le numéro de la bonne réponse

C1 - Pour produire un fichier « .py : », on peut utiliser
- a) Un éditeur de texte
- b) Un exécuteur python
- c) Idle
- d) Interpréteur de commandeur

C2 Pour le type bool, quel est le domaine de valeur et les opérations possibles ?
- a) yes , not, True ,False
- b) True , False , != , ++, and
- c) True, False, and , not , or
- d) no ,yes, and ,or

C3 Dans l'instruction python y = int((b) / 2)
- a) b est déclaré comme un int
- b) b est converti en int avant la division qui s'effectue sur deux int.
- c) c'est le résultat de la division qui est converti en int
- d) il y a une erreur

C4 Soit l'extrait de code python ci-dessous :

```
k=290
for i in range(0,6):
   k=k+1
print("The value of k= " , k)
```

Quel est le résultat de l'exécution de la ligne 5
- (a) 296
- (b) 5
- (c) erreur
- (d) 6

C5 Quel est le résultat de l'exécution

```
i=1
while (1==1):
  if i % 3 == 0:
     break
  print(i)
  i=i+1
```

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

(a) 1 2 3
(b) 1 2
(c) Erreur
(d) Aucun des trois

C6 Soit la fonction :

```
def minus2(a, b):
    return(a>b)
```

Quel est le type retourné par la fonction minus2 ?

a) bool
b) float
c) int
d) infinity

C7 - Lequel des mots réservés de python permet de forcer la sortie d'une boucle :
For i in range(n) :

(a) try .. catch
(b) break
(c) exception
(d) main

C8 Quelle est l'instruction python erronée sachant x et y sont des int?

a) x = x + 2/y
b) x = x
c) 5 = x

C9 Soit la fonction

```
def f(x):
  return 3*x-7
```

Comment peut-on l'appeler dans un programme principal?

(a) f(int x)
(b) f(a)
(c) f(a,b)
(d) f(10)

C10 Quelle instruction permet d'ajouter 100 à la liste q ci dessous ?
[47, 28, 33, 54, 15]

(a) q+100
(b) q[5]=100
(c) q.append(100)
(d) q[5]=int(input('Saisir q[5]')

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Exercice 1

Soit l'algorithme d'approximation de racine selon Héron d'Alexandrie:

```
algorithme carre1
variable
      a,a0,an: réel
      i:entier
debut
      ecrire('calcul de racine carrée selon Heron ')
      ecrire('racine carrée de : ? Saisir le nombre : ')
      lire(a) // le nombre dont on cherche la racine carrée
      ecrire( 'Saisir le carré le plus proche :')
      lire(a0)
      pour i←1 jusqu'à 5 faire
            an← (1/2)*(a0+a/a0)
            ecrire(an)
            a0←an
      finpour
      ecrire(an)
fin
```

a) Traduire l'algorithme en python.
b) Donner la trace et le résultat d'exécution pour 6 et 16. (Faites au moins 5 itérations de la boucle en suivant les valeurs de i, a0, a et an)
c) Transformer l'algorithme en fonction ***RacineHeron(a)*** et tester dans un programme principal.
d) Ecrire une version plus simple du programme en python en important 'math' qui contient sqrt(x)

Exercice 2

Soit la fonction ci-dessous qui permet de trouver le minimum dans un liste

a)Traduire en Python

```
Fonction recherchemin( t : tableau[1..imax] de entier) : entier
variable
  min,i:entier
Debut
  i←1
  min← t[i]
  tant que (i<= imax) faire
    si (min <= t[i]) alors i←i+1
      sinon min=t[i]
    finsi
  retourner(min)
Fin// fonction
```

b) Expliquer l'instruction `i< len(t)`.

c) Dans un programme principal, *initialiser et afficher la liste* **tb** *contenant [1,4,-5,0,21,58,-69]*

c)Activer la fonction recherchemin(t) pour afficher la valeur du minimum

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

	2021
UFRMI L1	**Programmation Python** **Correction Examen Session 1 & 2** **Durée 1H15**

EXRERCICE 1 : Questions de cours

11 Les valeurs qui ne sont pas des entiers (int) sont : 21.0 ; 4E-06 ; 5C

12

- Traduction de l'Algorithme en Python

```
# Programme exemple5bis
def Produit (x, y) :
        return (x * y)
# Programme principale
a = float(input(" a = ? "))
b = float(input(" a = ? "))
c = Produit(a, b)
print("c = ", c)
# Fin du programme
```

- Le résultat de la ligne 11 sera : **50.0**

13 La dernière valeur de i est : **10**

14

- Définition

Le transtypage correspond à un changement de type de variable, comme transformer une variable de type **string** en **int**.

- Exemple :

```
nombre = input("Entrer un nombre : ")
nombre = int(nombre)
```

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

15 Les erreurs de syntaxe sont :

; (ligne 3) , **do** (ligne 4) , == (ligne 6) , **(i)** (ligne 9)

EXRERCICE 1

1.1 L'explication de chaque ligne

1 : Définition d'une fonction nommée **MaFonction** avec pour paramètre formel **n**
2 : Affectation à la variable **res** une **liste vide**
3 : Affectation à la variable **k** la valeur du paramètre **n**
4 : Affectation à la variable **iter** la valeur **0** (initialisation)
5 : Définition de la condition **k > 0** avec la structure itérative **while**
6 : Incrémentation de la variable **iter**
7 : Ajout du reste de la division de **k** par **2** dans la liste **res** avec la fonction append
8 : Affectation à la variable **k** la valeur de la division entière de **k** par **2** (condition d'arrêt de la structure itérative)
9 : La valeur retourner (**return**) par la fonction **MaFonction** est **res**
10 : Un commentaire pour marquer le début du programme principal
11 : Affectation à la variable **tb** la valeur retourner par la fonction **MaFonction** avec comme paramètre effectif **16** (appel de la fonction)
12 : Afficher la valeur de la variable **tb** avec la fonction **print**

1.2 La trace et le résultat d'exécution (le tableau) pour 4 ; 9 et 16

- Pour n = 4

iter	k	res
0	4	-
1	2	0
2	1	0
3	0	1

Le résultat de l'exécution est : [0, 0, 1]

- Pour n = 9

iter	k	res
0	9	-
1	4	1
2	2	0
3	1	0
4	0	1

Le résultat de l'exécution est : [1, 0, 0, 1]

Scanned with CamScanner

- Pour n = 19

ite	k	res
0	16	-
1	8	0
2	4	0
3	2	0
4	1	0
5	0	1

Le résultat de l'exécution est : [0, 0, 0, 1]

1.3 L'objectif de ce programme : est de convertir est un nombre entier en binaire

1.4

```
# Programme conversion
n = int(input(" Entrer un nombre entier : "))
print(" La valeur binaire est : ", bin(n))
print(" La valeur hexadécimal est : ", hex(n))
# Fin du programme
```

EXRERCICE 2

2.1 La procédure (a)

```
def range_lance(t) :
    for i in range (0, 100) :
        t[i]=input(random.randint(1, 6))
```

2.2 La fonction (b)

```
def probabilite_face(t, f) :
    nblancer = 0
    for i in range(0, 100) :
        if f == t[i]
            nblancer = nblancer + 1
    return nblancer
```

2.3

```
# Programme principal
lancers = [ ]
nblancer = 0
i = 0
f = 0
```

2.4

```
# Remplissage du tableau lancers [ ]
range_lance(lancers)
```

2.5

```
# Programme principal
nblancer = probabilite_face(lancers, 1)
```

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

PROGRAMMATION PYTHON 2021-2022 SESSION 1

Exercice1

1.1 Traduction

```
print('calcul de racine carrée de :')
float(input(a))
print('le carrée le plus proche')
float(input(a0))
for i in range(1,5):
        an=(1/2)*(a0+a/a0)
        print(an)
        a0=an
print(an)
```

1.2 Laissé au soin de l'etudiant

1.3 version plus simple

```
from math import *

print('Entrez le nombre dont on doit calculer la racine carrée :')
float(input(a))
racine=math.sqrt(a)
print(racine)
```

1.4

```
def racine(a,a0):

        for i in range(1,5):
                an=(1/2)*(a0+a/a0)
                a0=an
        return(an)
```

1.5

```
from math import *

def racine(a,a0):

        for i in range(1,5):
                an=(1/2)*(a0+a/a0)
                a0=an
        return(an)

print('calcul de racine carrée de :')
float(input(a))
print('le carrée le plus proche')
float(input(a0))

racine1=racine(a,a0)
racine2=math.sqrt(a)
difference=racine2-racine1
print(difference)
```

Exercice2

1.1

```
for n in range(1,100):
        f (n%2==0):
                e=1
        else:
                e=-1
        print(e)
```

1.2

```
s=0
for n in range(0,1000):
        if(n%2==0):
                e=1
        else:
                e=-1

        var=s+(e/(2*n+1))
pi=4*var
print(pi)
```

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Université Félix H.Boigny
UFR Maths Info, Filière classique
UE: Probabilités-Statistique,L1
ECUE: Probabilités

Année Universitaire
2020/2021

Examen de final : Durée: $1h30$

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction.

Exercice 1

(1) Donner les différents principes de dénombrement.

(2) On suppose le code du coffre fort de Mr Proba est constitué de 6 chiffres non ordonné et ne pouvant pas se répéter pris dans l'ensemble des chiffres de la numérotation décimale. L'ayant oublié, il essaie au hasard un code en une minute. On cherche le temps maximal qu'il lui faudra pour ouvrir son coffre.

(a) Donner le modèle de dénombrement dont il a besoin.

(b) A l'aide de ce modèle donner le temps maximal qu'il lui faudra pour ouvrir son coffre fort.

(3) On réalise une expérience aléatoire ε dont l'univers est $\mathcal{U}$ est fini.

(a) Qu'est ce qu'une expérience aléatoire ?

(b) Donner la définition de l'univers $\mathcal{U}$.

(c) Donner la définition d'une probabilité sur cette univers.

(d) Qu'est ce qu'une expérience équiprobable ?

(e) On suppose que l'expérience est équiprobable. Soit A un évènement de cette expérience. Déterminer l'expression de la probabilité de A.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Exercice 2

Dans une ville, il ya cinq boulangéries qui ferment un jour par semaine. on désire attribuer un jour de fermeture à chacune d'elle.

(1) Donner le modèle de dénombrement qui permet de trouver le nombre de possibilités.

(2) Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire ?

(3) Déterminer la chance d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour ?

(4) Déterminer la chance d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.

Exercice 3

Pendant un examen, trois candidats sur cinq sont supposés être des tricheurs (ou équivalent), deux sur cinq sont des étudiants consciencieux : 75% des candidats tricheurs sont admis. 90% des candidats consciencieux sont admis.

(1) Quel est le taux global de personnes admis ?

(2) Quel est la probabilité pour qu'un étudiant soit un tricheur sachant qu'il est admis ?

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Université Félix H. Boigny
UFR Maths Info, Filière classique: L1
UE: Probabilité

1

Année Universitaire
2021/2022

Examen de rattrapage, Durée: 1h30

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction.

Un étudiant décide de participer à un concours avec la possibilité de choisir deux types d'examens E_1 et E_2 qui sont réglées de la façon suivante :

- la probabilité d'être admis au type d'examen E est de $\frac{1}{5}$;
- la probabilité d'être admis au type d'examen E' est de $\frac{1}{10}$

Comme l'étudiant sait que les deux type examen n'ont pas les même ordre de difficulté, mais ne sait pas lequel est la plus facile, il décide d'adopter la stratégie suivante:

- il commence par choisir un type d'examen au hasard ;
- après chaque session, il change de type d'examen s'il vient d'être ajournée, il compose avec le même type d'examen s'il est admis.

On définit pour tout $k \geq 1$ les évènements suivants:

- D_k: "L'étudiant est admis au k-ième concours
- E_k: "Le k-ième concours se déroule avec le type d'examen E.

(1) Déterminer la probabilité d'être admis au premier concours.

(2) Déterminer la probabilité d'être ajourné au deuxième concours.

(3) Traduire mathématiquement l'expression "β est la probabilité d'avoir composer le premier concours avec le type d'examen E si l'étudiant a été admis au deuxième concours" en fonction des différents évènement E_1, D_2.

(4) Déterminer la valeur de β

(5) Soit $k \geq 1$.

(a) L'élève ditvrai dit ceci: On peut être admis au k ème concours en composant avec le type d'examen E ou avec la type d'examen E'. Déterminer $\mathbb{P}(D_k)$.

(b) Montrer que

$$\mathbb{P}(E_{k+1}) = -\frac{1}{7}\mathbb{P}(E_k) + \frac{9}{10}$$

(c) En déduire $\mathbb{P}(E_k)$ puis $\mathbb{P}(D_k)$ en fonction de k.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Université Félix H. Boigny
UFR Maths Info, Filière classique: L1
ECUE: Probabilité

Année Universitaire
2021/2022

Examen de rattrapage corrigé, Durée: 1h30

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction.

Exercice 1

(1) Donner la définition d'une probabilité sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.

(2) Donner les deux principes du dénombrement.

(3) On suppose qu'un type habillement d'une étudiante est composé d'une chaussure, une jupe et une chemise. Miss Proba veut dénombrer le nombre de types d'habillement différents qu'elle peut avoir.

(a) Donner le principe de dénombrement dont elle a besoin.

(b) Soit α, δ et γ le nombre de chaussures, de jupes et de chemises respective de Miss Proba. Déterminer le nombre de différents types d'habillement de Miss Proba.

c) On suppose qu'elle a deux fois plus de chemises que de jupe et quatre fois moins de chaussure que de jupes. Déterminer le nombre minimal de chaussures, de jupes et de chemises que Miss Proba doit possédés pour que chaque jour elles porte un type d'habillement différent pendant une année bissextille.

(4) Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire d'univers Ω.

(i) Donner la définition d'une expérience aléatoire.

(ii) Donner la définition de l'univers d'une expérience aléatoire.

(iii) Donner la condition pour que $\mathcal{E}$ soit équiprobable.

(5) On suppose que $\mathcal{E}$ est équiprobable et Ω est fini. Soit A un évènement issue de cette expérience. Donner l'expression de la probabilité de A.

(6) On réalise une expérience aléatoire non équiprobable. Soit B un évènement issu de cette expérience. Donner le mécanisme qui permet de calculer la probabilité de A.

Exercice 2

A leur entrée en L1, les étudiants, choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand. Avec un raisonnement rigoureux à l'aide de notion ensembliste, indiquer la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

Exercice 3

On dispose de deux urnes u_1 et u_2 . L'urne u_1 contient trois boules blanches et une boule noire. L'urne u_2 contient une boule blanche et deux boules noires. On lance un dé non truqué. Si le dé donne un numéro d inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne u_1. Sinon on tire une boule dans l'urne u_2 . (On suppose que les boules sont indiscernables au toucher).

(1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.

(2) On a tiré une boule noire. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne u_1

Scanned with CamScanner

Université Félix H. Boigny
UFR Maths Info, Filière classique
UE: Probabilités-Statistique, L1

Année Universitaire
2022-2023

Examen final de Probabilité: Durée: 1h30

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction.

Exercice 1 (6 pts)

(1) Donner la définition d'une mesure de probabilité sur Ω, l'univers d'une expérience aléatoire.
(2) Donner les deux principes du dénombrement.
(3) On suppose qu'un type habillement d'une étudiante est composé d'une chaussure, une jupe et une chemise. Miss Proba veut dénombrer le nombre de type d'habillement différent qu'elle peut avoir.
   (a) Donner le principe de dénombrement dont elle a besoin.
   (b) Soit a, b et c le nombre de chaussures, de jupes et de chemises respective de Miss Proba. Donner le nombre de différents types d'habillement de Miss Proba.
(4) Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire d'univers Ω.
   (i) Donner la définition d'une expérience aléatoire.
   (ii) Donner la définition de l'univers d'une expérience aléatoire.
   (iii) Donner la condition pour que $\mathcal{E}$ soit équiprobable.
(5) On suppose que $\mathcal{E}$ est équiprobable et Ω est fini. Soit A un évènement issue de cette expérience. Donner l'expression de la probabilité de A.
(6) On suppose que $\mathcal{E}$ est non équiprobable et Ω est fini. Donner le protocole à mettre en place pour déterminer la probabilité de A et donner son expression.

Exercice 2 (7pts)

A leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand. On désigne par:

- A_1 l'ensemble des étudiants inscrits en anglais
- A_2 l'ensemble des étudiants inscrits en allemand
- A_3 l'ensemble des étudiants inscrits en astronomie
- C l'ensemble des étudiants inscrits en chimie
- I l'ensemble des étudiants inscrits en informatique

(1) Décrire toutes les situation à l'aide des ensembles ci-dessous et déterminer leur cardinal.
(2) En déduire le nombre d'étudiants inscrit dans chaque discipline.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Avec un raisonnement rigoureux, indiquer la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

Exercice 3 (7pts)

Une urne contient trois dés équilibré. Deux d'entre eux sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est truqué : il possède deux faces numérotées 1 et quatre faces portant le numéro 6. On prend un dé au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de celui-ci. On note :

- N l'événement: " le dé tiré est normal";
- U l'événement: " on obtient 1 au premier lancer";
- pour n entier non nul, S_n l'événement : "on obtient 6 à chacun des n premiers lancers".

(1) Montrer que $\mathbb{P}(U) = \frac{2}{9}$. (2 pts)

(2) Pour tout entier n non nul, Montrer que $\mathbb{P}(S_n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. (3 pts)

(3) Pour n entier non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé truqué, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n premiers lancers.

Montrer qu'on a:

$$p_n = \frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}. \quad (2\text{pts})$$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

EXAMEN DE PROBABILITE 2022-2023 SESSION 2

Exercice 1 (5 pts)

(1) Donner la définition d'une mesure de probabilité sur Ω, l'univers d'une expérience aléatoire.

(2) Donner les deux principes du dénombrement.

(3) On suppose qu'un type habillement d'une étudiante est composé d'une chaussure, une jupe et une chemise. Miss Proba veut dénombrer le nombre de type d'habillement différent qu'elle peut avoir.

(a) Donner le principe de dénombrement dont elle a besoin.

(b) Soit a, b et c le nombre de chaussures, de jupes et de chemises respective de Miss Proba. Donner le nombre de différents types d'habillement de Miss Proba.

(4) Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire d'univers Ω.

(i) Donner la définition d'une expérience aléatoire.

(ii) Donner la définition de l'univers d'une expérience aléatoire.

(iii) Donner la condition pour que $\mathcal{E}$ soit équiprobable.

(5) On suppose que $\mathcal{E}$ est équiprobable et Ω est fini. Soit A un évènement issue de cette expérience. Donner l'expression de la probabilité de A.

(6) On suppose que $\mathcal{E}$ est non équiprobable et Ω est fini. Donner le protocole à mettre en place pour déterminer la probabilité de A et donner son expression.

Exercice 2 (5 pts)

Une compagnie d'assurance répartit ses assurés en trois catégories : conducteur à faible risque, conducteur à risque moyen et conducteur à haut risque. Les statistiques de la compagnie indiquent que la probabilité d'accident sur une période de un an est 0.05, 0.15 et 0.30 selon la catégorie. Par ailleurs, la répartition des assurés est la suivante : 20% sont à bas risque, 50% à risque moyen et 30% à haut risque. Un assuré est choisi au hasard.

(1) Quelle est la probabilité qu'il ait un accident au cours de l'année?

(2) Sachant que l'assuré n'a pas eu d'accident lors de l'année écoulée, quelle est la probabilité qu'il soit à faible risque?

Exercice 3 (6 pts)

Dans une entreprise, il y a 500 employés, 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués.

(1) Formuler cette situation en terme d'ensembles et leurs cardinaux

(2) Déterminer l'ensemble représentant les femmes célibataires non syndiquées.

(3) Déterminer son cardinal.

Exercice 4 (5 pts)

A l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de 12 touches: trois lettres A, B et C, et les neuf chiffres autres que 0. Le code d'ouverture de la porte est composé d'une lettre suivie d'un nombre de quatre chiffres. Par exemple A 1998.

(1) Déterminer la probabilité d'obtenir un code dont les quatre chiffres sont différents

(2) Déterminer la probabilité d'obtenir un code dont les quatre chiffres sont dans l'ordre croissant

Scanned with CamScanner

Licence 1 MI - Semestre 2
— ECUE Probabilités —

Année Académique
2023-2024

Première session - Durée : 1 h 30

Exercice 1

Un élève dispose de 20 billes indiscernables qu'il range de la même façon dans trois cases numérotés 1,2,3, chaque fois après avoir joué avec ses amis. Lorsque les billes sont bien rangées, une alarme déclenche. Un jour, ayant oublié la disposition de ses billes dans les cases, il essaie de la retrouver en répartissant au hasard ses billes dans les trois cases en une minute. On cherche le temps maximal qu'il lui faudra pour retrouver la bonne disposition.

1. Donner le modèle de dénombrement dont il a besoin.
2. Quel est donc le temps maximal qu'il lui faudra pour retrouver la bonne disposition ?
3. Il se souvient qu'aucune des cases n'est vide. Dans ce cas, combien de temps lui faudra-t-il ?

Exercice 2

On dispose de trois urnes : A, B et C. L'urne A contient deux jetons rouges et trois jetons bleus ; l'urne B : deux jetons bleus et quatre jetons verts, et l'urne C : un jeton vert et un jeton rouge. On considère le jeu suivant : le joueur lance d'abord un dé non truqué. Il tire ensuite un jeton dans une urne choisie en fonction du résultat du dé. L'urne A est choisie quand le dé donne 1, 2 ou 3 ; l'urne B quand on obtient 4 ou 5 et l'urne C quand on obtient 6.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton rouge par ce procédé ?
2. On obtient un jeton vert. Quelle est la probabilité que ce jeton soit issu de l'urne B ?
3. Est-ce que l'évènement «choisir dans l'urne C» et l'évènement «obtenir un jeton rouge» sont indépendants ? Justifiez votre réponse.

Exercice 3

Le centre de santé d'un village dispose de r médecins traitants. On compte dans la population n personnes malades. Pour la consultation, chaune des n personnes malades fait appelle à un des r médecins traitants.

On définit $X_i = \begin{cases} 1, & \text{si aucune personne de fait appel au médecin } N_i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$, et on pose $S_r = \sum_{i=1}^{r} X_i$.

1. Que représente S_r ?
2. Calculer $\mathbb{E}(X_i)$, puis $\mathbb{E}(S_r)$
3. On suppose $r = 10$. Combien de personnes malades au minimum faut-il pour qu'en moyenne la proportion des médecins non consultés soit inférieur à 5% ?

Exercice 4

Dans un lot de pièces fabriquées, 25% sont défectueuses. Un marchand reçoit un lot de 12 pièces. I met en vente un échantillon de 5 pièces prélevées au hasard de son lot. Un service de contrôle inspect les pièces avant la vente : si une pièce est mauvaise, le marchand paye 150 F à ce service pour s destruction, sinon elle est vendue à 300 F. Soit S le gain sur l'échantillon après le contrôle.

1. Déterminer la loi de S.
2. Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathrm{Var}(S)$.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Deuxième Session - Durée : 1 h 30

Exercice 1

On dispose dans un sac 10 billets dont 2 gagnent 0.7$, 3 gagnent 1.7$ et les autres font perdre 1.3$. On choisit au hasard une poignée de 4 billets, chaque billet ayant la même probabilité d'être attrapé.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. (a) Quelle est la probabilité de n'avoir choisi aucun billet de 0.7$?
   (b) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu au moins un billet de chaque valeur ?
2. On désigne par X et Y les variables aléatoires donnant respectivement le nombre de billets gagnant 0.7$ et 1.7$ dans cette poignée.
   (a) Donner la loi de probabilité de X et celle de Y.
   (b) On note S la variable aléatoire représentant le gain algébrique associé à cette poignée. Exprimer S en fonction de X et Y.
   (c) En déduire le gain moyen associé à cette poignée.

Exercice 2

La société ASR, un grand producteur d'ordinateurs, sait que 3 machines sur mille sortant de son usine sont défectueuses. Afin de détecter ces ordinateurs défectueux, les ingénieurs de ASR ont mis au point un test de fiabilité qu'ils ont éprouvé sur un échantillon test connu d'avance. Parmi les ordinateurs en parfait état, 94% réussissent le test et parmi ceux défectueux, seulement 2% réussissent le test. Il a été décidé que les ordinateurs n'ayant pas passé le test avec succès seront détruits, sinon, vendus à 100 euros.

1. (a) Quelle est la probabilité qu'un ordinateur ne réussisse pas le test ?
   (b) Quelle est la proportion d'ordinateurs vraiment défectueux qui sont détruits ?
2. On s'appréte à réaliser le test sur 3 ordinateurs. On suppose que les résultats du test sur les ordinateurs sont indépendants entre eux. On désigne par X le nombre d'ordinateurs détruits.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X. (On donnera l'arrondi d'ordre 6 des résultats)
   (b) Déterminer le nombre moyen d'ordinateurs détruits après le test ainsi que la dispersion absolue autour de ce nombre.
   (c) Quel est le chiffre d'affaire moyen réalisé sur ces 3 ordinateurs ?
3. Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p_n la probabilité qu'au moins un ordinateur soit détruit après le test réalisé sur n ordinateurs. Déterminer la valeur minimale de n pour qu'on ait $p_n \geq 0,99999$.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Université Félix H. Boigny — Année Universitaire
UFR Maths Info, Filière classique — 2022-2023
UE: Probabilités-Statistique, L1

session 1

Examen final de Probabilité corrigé +barème: Durée: 1h30

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction.

Exercice 1 **(6 pts)**

(1) Donner la définition d'une mesure de probabilité sur Ω, l'univers d'une expérience aléatoire. **1 pts, non divisible**

Une probabilité sur cette univers est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ tel que

$\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ disjoints deux à deux. On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n).$$

(2) Donner les deux principes du dénombrement. **0,25 pt+0,25 pt**

Les différents principe de dénombrement sont: le principe additif et le principe multiplicatif.

(3) On suppose qu'un type habillement d'une étudiante est composé d'une chaussure, une jupe et une chemise. Miss Proba veut dénombrer le nombre de type d'habillement différent qu'elle peut avoir.

(a) Donner le principe de dénombrement dont elle a besoin.**0,25 pt**

Etant donné que pour s'habiller Miss Proba doit faire successivement trois sous action, le principe utilisé est le principe multiplicatif.

(b) Soit a, b et c le nombre de chaussures, de jupes et de chemises respective de Miss Proba. Donner le nombre de différents types d'habillement de Miss Proba. **0,75 pt**

Soit α le nombre de différents types d'habillement de Miss Proba. D'après le principe multiplicatif, on a:

$$\alpha = a \times b \times c.$$

(4) Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire d'univers Ω.

(i) Donner la définition d'une expérience aléatoire. **0,5 pt non divisible**

Une expérience aléatoire est une expérience qui vérifie les conditions suivantes

- On ne peut pas prévoir les résultats
- On connait tous les résultats à l'avance
- Répété dans les mêmes conditions, il peut donner lieu à des résultats différents.

(ii) Donner la définition de l'univers d'une expérience aléatoire. **0,5 pt**

L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble constitué des tous les résultats possibles de cette expérience.

VALIDEUR LMD-2023

Scanned with CamScanner

(iii) Donner la condition pour que $\mathcal{E}$ soit équiprobable. **0,5 pt**

Pour q'une expérience aléatoire soit équiprobable il faut que tous les évènement élémentaire aient la même chance de se réaliser.

(5) On suppose que $\mathcal{E}$ est équiprobable et Ω est fini. Soit A un évènement issue de cette expérience. Donner l'expression de la probabilité de A. **1 pt**

Dans ces condition on a:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

(6) On suppose que $\mathcal{E}$ est non équiprobable et Ω est fini. Donner le protocole à mettre en place pour déterminer la probabilité de A et donner son expression.

- On détermine $(B_k)_{1\leq k\leq n}$ un système complet d'évènement. **0,25 pt**
- En suite à l'aide de la formule des probabilité totales on a: **0,75 pt**

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_k) \times \mathbb{P}(B_k)$$

Exercice 2 **(7pts)**

A leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand. On désigne par:

- A_1 l'ensemble des étudiants inscrits en anglais
- A_2 l'ensemble des étudiants inscrits en allemand
- A_3l'ensemble des étudiants inscrits en astronomie
- C l'ensemble des étudiants inscrits en chimie
- I l'ensemble des étudiants inscrits en informatique

(1) Décrire toutes les situation à l'aide des ensembles ci-dessous et déterminer leur cardinal.

D'après l'énoncé, on a: $card(A_3) = 12$ **(0,25pt)**, $card(C) = 15$ **(0,25pt)**, $card(A_2) = 16$ **(0,25pt)**, $card(A_3 \cap A_1) = 8$ **(0,25pt)**, $card(I \cap A_1) = 3$ **(0,25pt)**, $card(C \cap A_2) = 2$ **(0,25pt)**

(2) En déduire le nombre d'étudiants inscrit dans chaque discipline.

D'après l'énoncé, il reste à déterminer $card(A_1)$ et $card(I)$. On sait que $card(A_1 \cup A_2) = card(A_3 \cup C \cup I)$. On a

$$\begin{aligned} card(A_1) &= card(A_1 \cap A_3) + card(A_1 \cap C) + card(A_1 \cap I) \\ &= card(A_1 \cap A_3) + card(C) - card(C \cap A_2) + card(A_1 \cap I) \\ &= 8 + 15 - 2 + 3 = 24. \end{aligned}$$

2 pts, si toutes les différentes étapes ont été respecté

Scanned with CamScanner

et

$$\begin{aligned} card(I) &= card(I \cap A_1) + card(I \cap A_2) \\ &= card(A_1 \cap I) + card(A_2) - card(A \cap C) - card(A_3) + card(A_3 \cap A_1) \\ &= 3 + 16 - 2 - 12 + 8 = 13. \text{ 2 pts, si toutes les différentes étapes ont été respecté} \end{aligned}$$

(3) Indiquer la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.
On a

$$Card(A_1) = 24,\ card(A_2) = 16,\ card(A_3) = 12,\ card(C) = 15,\ card(I) = 13.$$

Soit G l'ensemble des étudiants, on a:

$$G = A_3 \cup I \cup C = A_1 \cup A_2. \ (0,5\text{pt})$$

Finalement

$$\begin{aligned} card(G) &= card(A_3) + card(I) + card(C) = card(A_1) + card(A_2) \\ &= 12 + 13 + 15 = 24 + 16 = 40. \ (1\text{pt}) \end{aligned}$$

Exercice 3 (7pts)

Une urne contient trois dés équilibré. Deux d'entre eux sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est truqué : il possède deux faces numérotées 1 et quatre faces portant le numéro 6. On prend un dé au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de celui-ci. On note :

- N l'événement: " le dé tiré est normal";
- U l'événement: " on obtient 1 au premier lancer";
- pour n entier non nul, S_n l'événement : "on obtient 6 à chacun des n premiers lancers".

(1) Montrer que $\mathbb{P}(U) = \frac{2}{9}$. (2 pts)
D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U) &= \mathbb{P}(U|N)\mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(U|\bar{N})\mathbb{P}(\bar{N}) \ (1\text{pt}) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{3} \ (1\text{pt}) \\ &= \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

(2) Pour tout entier n non nul, Montrer que $\mathbb{P}(S_n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. (3 pts)
Soit V_i l'évènement : " on obtient 6 au ième lancer. On a

$$S_n = \bigcap_{i=1}^{n} V_i (0,5\text{pt})$$

Scanned with CamScanner

et de la même manière que précédemment, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n) &= \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} V_i|N)\mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} V_i|\bar{N})\mathbb{P}(\bar{N}) \quad (1\text{pt})\\ &= \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(V_i|N)\mathbb{P}(N) + \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(V_i|\bar{N})\mathbb{P}(\bar{N}) (0,5\text{pt})\\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3}.(1\text{pt})\end{aligned}$$

(3) Pour n entier non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé truqué, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n premiers lancers.

Montrer qu'on a:

$$p_n = \frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}. \quad (2\text{pts})$$

D'après sa définition, on a

$$p_n = \mathbb{P}(\bar{N}|S_n). \quad (0,5\text{pt})$$

Or d'après la formule de Bayes on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bar{N}|S_n) &= \frac{\mathbb{P}(S_n|\bar{N}) \times \mathbb{P}(\bar{N})}{\mathbb{P}(S_n)} \quad (0,5\text{pt})\\ &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3}}\\ &= \frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}. \quad (1\text{pt})\end{aligned}$$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Université Félix H. Boigny
UFR Maths Info, Filière classique
UE: Probabilités-Statistique, L1
ECUE: Probabilités

Année Universitaire
2022-2023

Examen de rattrapage de Probabilité: Durée: 1h30

NB: la clarté de la rédaction sera prise en compte dans la correction.

Exercice 1 **(5 pts)**

(1) Donner la définition d'une mesure de probabilité sur Ω, l'univers d'une expérience aléatoire. **1 pts, non divisible**

Une probabilité sur cette univers est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ tel que

$\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ disjoints deux à deux. On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n).$$

(2) Donner les deux principes du dénombrement. **0,25 pt+0,25 pt**

Les différents principe de dénombrement sont: le principe additif et le principe multiplicatif.

(3) On suppose qu'un type habillement d'une étudiante est composé d'une chaussure, une jupe et une chemise. Miss Proba veut dénombrer le nombre de type d'habillement différent qu'elle peut avoir.

(a) Donner le principe de dénombrement dont elle a besoin.**0,25 pt**

Etant donné que pour s'habiller Miss Proba doit faire successivement trois sous action, le principe utilisé est le principe multiplicatif.

(b) Soit a, b et c le nombre de chaussures, de jupes et de chemises respective de Miss Proba. Donner le nombre de différents types d'habillement de Miss Proba. **0,5 pt**

Soit α le nombre de différents types d'habillement de Miss Proba. D'après le principe multiplicatif, on a:

$$\alpha = a \times b \times c.$$

(4) Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire d'univers Ω.

(i) Donner la définition d'une expérience aléatoire. **0,5 pt non divisible**

Une expérience aléatoire est une expérience qui vérifie les conditions suivantes

- On ne peut pas prévoir les résultats
- On connait tous les résultats à l'avance
- Répété dans les mêmes conditions, il peut donner lieu à des résultats différents.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

(ii) Donner la définition de l'univers d'une expérience aléatoire. **0,5 pt**
L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble constitué des tous les résultats possibles de cette expérience.

(iii) Donner la condition pour que $\mathcal{E}$ soit équiprobable. **0,5 pt**
Pour q'une expérience aléatoire soit équiprobable il faut que tous les événement élémentaire aient la même chance de se réaliser.

(5) On suppose que $\mathcal{E}$ est équiprobable et Ω est fini. Soit A un évènement issue de cette expérience. Donner l'expression de la probabilité de A. **0,5 pt**
Dans ces condition on a:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

(6) On suppose que $\mathcal{E}$ est non équiprobable et Ω est fini. Donner le protocole à mettre en place pour déterminer la probabilité de A et donner son expression.

- On détermine $(B_k)_{1\leq k\leq n}$ un système complet d'évènement. **0,25 pt**
- En suite à l'aide de la formule des probabilité totales on a: **0,5 pt**

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_k) \times \mathbb{P}(B_k)$$

Exercice 2 **(5 pts)**

Une compagnie d'assurance répartit ses assurés en trois catégories : conducteur à faible risque, conducteur à risque moyen et conducteur à haut risque. Les statistiques de la compagnie indiquent que la probabilité d'accident sur une période de un an est 0.05, 0.15 et 0.30 selon la catégorie. Par ailleurs, la répartition des assurés est la suivante : 20% sont à bas risque, 50% à risque moyen et 30% à haut risque. Un assuré est choisi au hasard.

Soit

- R_F l'évènement " avoir un faible risque d'accident",
- R_M l'évènement " avoir un moyen risque d'accident",
- R_H l'évènement " avoir un haut risque d'accident",
- A l'évènement "avoir un accident au cours de l'année".

(1) Quelle est la probabilité qu'il ait un accident au cours de l'année? **(3 pts)**
Cela revient à déterminer $\mathbb{P}(A)$. En utilisant la formule des probabilités totales associée au système complet $\{R_F, R_M, R_F\}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|R_F) \times \mathbb{P}(R_F) + \mathbb{P}(A|R_M) \times \mathbb{P}(R_M) + \mathbb{P}(A|R_H) \times \mathbb{P}(R_H)\\ &= 0,05 \times 0,2 + 0,15 \times 0,5 + 0,3 \times 0,3\\ &= 0,175.\end{aligned}$$

(2) Sachant que l'assuré n'a pas eu d'accident lors de l'année écoulée, quelle est la probabilité qu'il soit à faible risque? **(2 pts)**

Scanned with CamScanner

Cela revient à déterminer $\mathbb{P}(R_F|\bar{A})$. Pour cela d'après la formule de Bayes, on a:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_F|\bar{A}) &= \frac{\mathbb{P}(\bar{A}|R_F)\times\mathbb{P}(R_F)}{\mathbb{P}(\bar{A})}\\ &= \frac{(1-\mathbb{P}(A|R_F))\times\mathbb{P}(R_F)}{1-\mathbb{P}(A)}\\ &= \frac{(1-0,05)\times 0,2}{1-0,175}\\ &\quad 0,2303.\end{aligned}$$

Exercice 3 **(6 pts)**

Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués.

(1) Formuler cette situation en terme d'ensembles et leurs cardinaux. **(0,5 pt)** par cardinal trouvé.

(0,25 pt)

Soit

- E l'ensemble des employés
- H l'ensemble des hommes
- M l'ensemble des mariés
- S l'ensemble de syndiqués

D'après l'énoncé on a:

$$card(E)=800,\ card(H)=300,\ card(S)=352,\ card(M)=424$$
$$card(H\cap M)=166,\ card(S\cap M)=208,\ card(H\cap S)=188$$
$$card(H\cap M\cap S)=144.$$

(2) Déterminer l'ensemble représentant les femmes célibataires non syndiquées. **(1 pt)**

Soit A l'ensemble des femmes célibataire non syndiquées. On a

$$A=\bar{H}\cap\bar{M}\cap\bar{S}.$$

(3) Déterminer son cardinal. **(3 pts)**

Donc on a:

$$\begin{aligned}card(A) &= card(\bar{H}\cap\bar{M}\cap\bar{S})\\ &= card(\overline{H\cup M\cup S})\\ &= card(E)-card(H\cup M\cup S)\\ &= card(E)-card(H)-card(M)-card(S)+card(H\cap M)+card(H\cap S)+card(S\cap M)\\ &\quad -card(H\cap M\cap S)\\ &= 800-(300+352+424)+(166+188+208)-144\\ &= 142.\end{aligned}$$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Exercice 4 **(5 pts)**

A l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de 12 touches: trois lettres A, B et C, et les neuf chiffres autres que 0. Le code d'ouverture de la porte est composé d'une lettre suivie d'un nombre de quatre chiffres. Par exemple A 1998.

Ecrire un code revient à faire l'expérience suivant: Choisir une lettre parmi 3 puis choisir quatre chiffre parmi 9. Soit Ω l'ensemble des codes possibles. On a

$$\begin{aligned} card(\Omega) &= 3 \times 9^4 \\ &= 1963 \end{aligned}$$

(1) Déterminer la probabilité d'obtenir un code dont les quatre chiffres sont différents. **(2,5 pts)**

D'après la description du problème, l'on se situe dans un cadre d'équiprobabilité. Par conséquent, si on note A l'évènement " obtenir un code dont les quatre chiffres sont différents" on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \frac{card(A)}{cardd(\Omega)} \\ &= \frac{3 \times A_9^4}{1963} \\ &= \text{à calculer} \end{aligned}$$

(2) Déterminer la probabilité d'obtenir un code dont les quatre chiffres sont dans l'ordre croissant. **(2,5 pts)**

Soit B l'évènement " obtenir un code dont les quatre chiffres sont dans l'ordre croissant". Alors cela revient Choisir les 4 chiffres sans tenir compte de l'ordre. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \frac{card(B)}{card(\Omega)} \\ &= \frac{3 \times C_9^4}{1963} \\ &= \text{à calculer} \end{aligned}$$

VALIDEUR EMD-2025

Scanned with CamScanner

Probabilité L1

session 1 2023-2024

Exercice 1

1. Donner le modèle de dénombrement dont il a besoin.

L'élève doit trouver la répartition correcte des 20 billes dans les trois cases. Chaque case peut contenir un nombre arbitraire de billes, donc on cherche à dénombrer les différentes façons de répartir ces billes. On utilise ici une combinaison avec répétition car on peut supposer les billes identiques et faire une combinaison de p éléments parmis n éléments ou parmis les n éléments, il y a des répétitions, c'est faire une combinaison avec répétition. Dans notre cas ici les les 20 billes peuvent être supposer identiques car elles sont indiscernables c'est-a-dire on ne peut les distinguer.

$$\text{Nombre de répartitions} = \binom{20+3-1}{20-1} = \binom{22}{19} = 1540$$

Il y a donc 1540 façons de répartir les 20 billes dans les trois cases.

2. Quel est donc le temps maximal qu'il lui faudra pour retrouver la bonne disposition ?

Puisque l'élève a une minute pour essayer une disposition, et qu'il y a 1540 dispositions possibles, le temps maximal nécessaire pour retrouver la bonne disposition est de :

$$\text{Temps maximal} = 1540 \times 1 \text{ minute} = 1540 \text{ minutes}$$

3. Si on se souvient qu'aucune des cases n'est vide. Dans ce cas, combien de temps lui faudra-t-il ?

Si aucune case n'est vide, alors on doit exclure les cas où une ou deux cases sont vides. On cherche alors le nombre de partitions strictes de 20 billes en 3 cases.
Le nombre de telles solutions est donné par :

$$\binom{22}{19} - \left[\binom{20+2-1}{2} + \binom{20+1-1}{1}\right] = 1349$$

Ainsi, le temps maximal est de 1349 minutes.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Exercice 2

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton rouge par ce procédé ?

On a trois urnes et on choisit une urne de manière aléatoire. Les probabilités d'obtenir un jeton rouge pour chaque urne sont :

- Urne A : $P(R|A) = \frac{2}{5}$ (2 jetons rouges sur 5).
- Urne B : $P(R|B) = 0$ (obtenir jeton rouge dans l'urne B).
- Urne C : $P(R|C) = \frac{1}{2}$ (1 jeton rouge sur 2).

La probabilité totale est donnée par :

$$P(R) = \sum_{i=A,B,C} P(R|i) \cdot P(i)$$

d'apres l'énoncé on a , $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{1}{6}$, on a :

$$P(R) = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right) + 0 \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{17}{60}$$

2. On obtient un jeton vert. Quelle est la probabilité qu'il ait été tiré de l'urne B ?

On utilise ici le théorème de Bayes :

$$P(B|V) = \frac{P(V|B) \cdot P(B)}{P(V)}$$

or

$$P(V) = \sum_{i=A,B,C} P(V|i) \cdot P(i)$$

et $P(V|B) = \frac{2}{3}$, $P(V|A) = 0$; $P(V|C) = \frac{1}{2}$ ce qui donne

$$0 \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$$

Remplaçons par les valeurs :

$$P(B|V) = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{11}{36}} = \frac{8}{11}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

3. Est-ce que l'événement "choisir dans l'urne C" et l'événement "obtenir un jeton rouge" sont indépendants ? Justifiez votre réponse.

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Calculons les probabilités :

- $P(C) = \frac{1}{6}$
- $P(R) = \frac{17}{60}$
- $P(C \cap R) = P(R|C) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

Vérifions l'égalité :

$$P(C \cap R) = \frac{1}{12}, \quad \text{et} \quad P(C)P(R) = \frac{17}{60} \times \frac{1}{6} = \frac{17}{360}$$

Puisque $\frac{1}{12} \neq \frac{17}{360}$, les événements "choisir dans l'urne C" et "obtenir un jeton rouge" ne sont pas indépendants.

Exercice 3

1. S_r représente le nombre de médecins parmi les r médecins traitants qui n'ont été consultés par aucune des n personnes malades.

2. Pour calculer $\mathbb{E}(X_i)$:

   Chaque malade a une probabilité égale de consulter n'importe quel médecin. Donc, pour un médecin N_i, la probabilité qu'une personne ne consulte pas N_i est $\frac{r-1}{r}$.

   La probabilité qu'aucune des n personnes ne consulte le médecin N_i est $\left(\frac{r-1}{r}\right)^n$. Donc,

   $$\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \left(\frac{r-1}{r}\right)^n.$$

   Puisque $S_r = \sum_{i=1}^{r} X_i$, par linéarité de l'espérance :

   $$\mathbb{E}(S_r) = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{E}(X_i) = r \cdot \left(\frac{r-1}{r}\right)^n.$$

3. On veut que la proportion moyenne des médecins non consultés soit inférieure à 5%, donc :

   $$\frac{\mathbb{E}(S_r)}{r} < 0.05.$$

   Remplaçons $\mathbb{E}(S_r)$ par sa valeur :

   $$\frac{r \cdot \left(\frac{r-1}{r}\right)^n}{r} < 0.05 \implies \left(\frac{r-1}{r}\right)^n < 0.05.$$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Avec $r = 10$, on obtient :

$$\left(\frac{9}{10}\right)^n < 0.05.$$

Prenons le logarithme de chaque côté :

$$n \cdot \log\left(\frac{9}{10}\right) < \log(0.05).$$

Comme $\log\left(\frac{9}{10}\right) < 0$, on divise par ce logarithme négatif, ce qui inverse l'inégalité :

$$n > \frac{\log(0.05)}{\log\left(\frac{9}{10}\right)}.$$

Calculons cette valeur :

$$n > \frac{\log(0.05)}{\log\left(\frac{9}{10}\right)} \approx \frac{-1.301}{-0.045757} \approx 28.44.$$

Donc, n doit être au moins 29 pour que la proportion moyenne des médecins non consultés soit inférieure à 5%.

Exercice 4

1. **Détermination de la loi de S**

   Soit X le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon de 5 pièces. X suit une loi hypergéométrique avec les paramètres suivants :

   - Taille du lot : $N = 12$
   - Nombre de pièces défectueuses dans le lot : $K = 0.25 \times 12 = 3$
   - Taille de l'échantillon : $n = 5$

   La probabilité d'avoir x pièces défectueuses dans l'échantillon est donnée par :

   $$P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

   où $\binom{a}{b}$ représente le coefficient binomial "a choisi b".

   Le gain S est calculé comme suit :

   $$S = 300 \times (5 - X) - 450 \times X$$

   On cherche donc les différentes valeurs possibles de S en fonction de X :

   $$S(X) = 300 \times (5 - X) - 450 \times X = 1500 - 750X$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, ou 3 (car il y a au maximum 3 pièces défectueuses dans le lot de 12). On a donc :

X	$S(X)$
0	1500
1	750
2	0
3	−750

2. **Calcul de $\mathbb{E}(S)$ et $\mathrm{Var}(S)$**

Pour calculer l'espérance $\mathbb{E}(S)$, utilisons la formule de l'espérance pour une variable aléatoire discrète :

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{x=0}^{3} S(x)P(X = x)$$

Les probabilités $P(X = x)$ peuvent être calculées en utilisant la formule de la loi hypergéométrique :

$$P(X = x) = \frac{\binom{3}{x}\binom{9}{5-x}}{\binom{12}{5}}$$

Calculons chaque probabilité :

$$P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{9}{5}}{\binom{12}{5}} = \frac{1 \times 126}{792} = \frac{126}{792} = \frac{21}{132},$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{9}{4}}{\binom{12}{5}} = \frac{3 \times 126}{792} = \frac{378}{792} = \frac{63}{132},$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{9}{3}}{\binom{12}{5}} = \frac{3 \times 84}{792} = \frac{252}{792} = \frac{42}{132},$$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{9}{2}}{\binom{12}{5}} = \frac{1 \times 36}{792} = \frac{36}{792} = \frac{6}{132}.$$

On peut donc calculer l'espérance :

$$\mathbb{E}(S) = 1500 \times \frac{21}{132} + 750 \times \frac{63}{132} + 0 \times \frac{42}{132} - 750 \times \frac{6}{132}.$$

$$\mathbb{E}(S) = \frac{31500 + 47250 - 4500}{132} = \frac{74250}{132} \approx 562.5.$$

Pour la variance $\mathrm{Var}(S)$, on a besoin de $\mathbb{E}(S^2)$:

$$\mathbb{E}(S^2) = \sum^{3} S(x)^2 P(X = x)$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$S(0)^2 = 1500^2 = 2250000,$$
$$S(1)^2 = 750^2 = 562500,$$
$$S(2)^2 = 0^2 = 0,$$
$$S(3)^2 = (-750)^2 = 562500.$$

Donc :

$$\mathrm{E}(S^2) = 2250000 \times \frac{21}{132} + 562500 \times \frac{63}{132} + 0 \times \frac{42}{132} + 562500 \times \frac{6}{132}.$$

$$\mathrm{E}(S^2) = \frac{47250000 + 35437500 + 0 + 3375000}{132} = \frac{86062500}{132} \approx 651171.875.$$

La variance est alors :

$$\mathrm{Var}(S) = \mathrm{E}(S^2) - (\mathrm{E}(S))^2 = 651171.875 - (562.5)^2.$$

$$\mathrm{Var}(S) = 651171.875 - 316406.25 = 334765.625.$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

U.F.H.B

Année académique
2020 – 2021

Licence 1 MI - Semestre 2
ECUE statistique Descriptive

Examen 2ème Session
Durée: 1h30

Exercice 1

Soit la série statistique suivantes: 11, 8, 12, 0, 20, 9, 4, 12, 16, 8

1. Déterminer les quartiles de cette série.
2. calculer les limites des moustaches, puis construire la boite à moustaches.
3. Y a-t-il des données extrêmes ? si oui, préciser les et placer les sur la figure.

Exercice 2

On a observé le salaire mensuel X (en centaines d'euros) des employés d'une entreprise. Et on a les résultats suivants:

X	[1;4[	[4;10[	[10;14[	[14;16[	[16;20[
Effectifs	48	144	80	56	72

1. Déterminé le salaire le plus observé de l'entreprise.
2. Quelle est la proportion des employés dont le salaire mensuel est : a) inférieur à 1000 euros ? b) supérieur à 1400 euros ? c) comprise entre 600 et 1700 euros ?
3. Environ 25% des employés ont un salaire mensuel inférieur à combien d'euros ?

Exercice 3

On a observé deux caractères X et Y sur cinq personnes. Et on a les résultats suivants :

X	6	2	4	3	5
Y	9	3	6	5	7

1. Déterminer la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées.
2. Calculer le coéfficient de corrélation linéaire. Le modèle linéaire est-il justifié ? Si oui, estimer la valeur de Y pour $X = 8$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Licence 1 MI - Semestre 2
ECUE Statistique Descriptive

Année Académique
2021-2022

Examen 2ème Session

Durée : 90 mn

Consignes : Sans documents. Le sujet comporte deux exercices indépendants. L'étudiant pourra les traiter dans l'ordre qu'il souhaite. On accordera un soin tout particulier à la présentation et à la rédaction. Le temps moyen par question est de 9 mn.

Exercice 1

L'utilisation en vase clos d'un insecticide a donné les résultats suivants sur la durée de vie des insectes (exprimée en secondes) :

Durée de vie	[0;4[	[4;8[	[8;12[	[12;a[	[a;22[	[22;30[	[30;42[
Fréquence	0,06	x	y	0,17	0,14	0,11	0,03

Certaines données sont illisibles et ont été remplacées par a, x et y.

1. Déterminer x et y sachant que le quatrième décile est égal à 9,5 secondes.
2. Déterminer a sachant que la durée de vie moyenne des insectes soumis à l'insecticide est égale à 13 secondes.
3. On prend comme unité d'amplitude 4 secondes. Donner les fréquences corrigées.
4. Calculer et interpréter le mode et la médiane de cette distribution.
5. Quelle est la proportion des insectes qui ont une durée de vie entre 10 et 25 secondes ?

Exercice 2

Une population de n ménages où les deux conjoints occupent un emploi est étudiée. Les variables X et Y désignent respectivement les revenus du mari et de la femme (en dizaine d'euros).
Une étude a montré que $\overline{X} = 125$, $\overline{Y} = 80$, $\sigma_X^2 = 16$, $\sigma_Y^2 = 9$ et $\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = 8$.

1. Lequel des revenus est le plus dispersé ?
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. Commenter le résultat.
3. Calculer la variance du revenu total $S = X+Y$ et du revenu disponible après impôt W=0,8X+0,7Y.
4. Déterminer par la méthode des moindres carrés, la droite de régression de W en S et celle de S en W.
5. Existe-t-il une relation linéaire entre S et W ? Si oui, estimer le montant de l'impôt pour un revenu total de 2 500 euros.

On admettra que : $Cov(\alpha X, \beta Y) = \alpha\beta Cov(X,Y)$ et $Cov(Z, X+Y) = Cov(Z,X) + Cov(Z,Y)$.

Bonne chance !

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Licence 1 MI - Semestre 2
ECUE Statistique Descriptive

Année Académique
2021-2022

Examen 2ème Session
Durée : 90 mn

Consignes : Sans documents. Le sujet comporte deux exercices indépendants. L'étudiant pourra les traiter dans l'ordre qu'il souhaite. On accordera un soin tout particulier à la présentation et à la rédaction. Le temps moyen par question est de 9 mn.

Exercice 1

Une enquête a été réalisée auprès de 500 employés d'une usine, pour étudier la distribution des salaires journaliers en milliers de francs.

Salaires	[5;6[	[6;7[	[7;?[	[?;9[	[9;10[
Nombre d'employés	80	150	200	60	10
Centre de classe			7,75		
Fréquence cumulée			0,86		

1. Déterminer la population statistique, le caractère étudié et sa nature.
2. Compléter le tableau en ajoutant les fréquences, les fréquences cumulées croissantes, les centres, les amplitudes et les effectifs corrigés (on prendra comme unité d'amplitude 1,5 milliers de francs).
3. Calculer et interpréter le mode, la médiane et la moyenne de cette distribution.
4. Déterminer l'écart interquartile.
5. Quelle est la proportion des employés qui perçoivent un salaire entre 6500 et 8000 francs par jour ?
6. Le syndicat des employés de l'usine a demandé une augmentation des salaires de 16% pour chaque employé. Quel sera le montant du salaire journalier moyen dans le cas de cette augmentation

Exercice 2

En vue d'étudier le lien entre la catégorie socio-professionnelle et le sexe, on a observé 800 personnes dans une population active. Parmi-celles-ci, on a compté 400 ouvriers et 80 cadres supérieures; 500 hommes dont 196 cadres moyens. Parmi les femmes, on a 20 cadres supérieures.

1. Préciser la population et les caractères étudiés ainsi que leurs types.
2. Construire le tableau de contingence correspondant à ces observations.
3. Établir le tableau des éffectifs théoriques.
4. Calculer le coefficent de Cramer et apprecier la liaison entre entre la catégorie socio-professionnelle et le sexe.

Bonne chance !

Scanned with CamScanner

Licence 1 MI (Filières classiques) - Semestre 2
— ECUE Statistique Descriptive

Année Académique
2022-2023

Examen 1ère Session - Durée : 1h30

Exercice 1

La statistique administrative d'une entreprise présente le tableau suivant résultant d'une enquête sur le revenu (en centaines d'Euros) et le sexe des employés

Sexe \Revenu	[10; 14[	[14; 20[	[20; 22[	[22; 26[
Homme	140	210	105	35
Femme	100	150	75	25

1. Préciser la population et les caractères étudiés ainsi que leurs types.
2. Déterminer les distributions marginales (on donnera les effectifs et les fréquences).
3. Déterminer les profils-lignes de cette statistique. Le revenu dans cette entreprise dépend-il du sexe des employés ? Justifier votre réponse.
4. Dans la suite, on considère la distribution des revenus dans cette entreprise.
   (a) Déterminer le revenu le plus observé dans cette entreprise.
   (b) Calculer le revenu moyen et le revenu médian et expliquer leur signification.
   (c) Quelle est la proportion des employés qui ont un revenu compris entre 2000 et 2500 euros ?
   (d) 75% des employés ont un revenu mensuel au dessus de combien d'euros ?

Exercice 2

On veut prédire la hauteur H d'un arbre en fonction de son diamètre D. Pour faire une régression linéaire, on effectue un changement de variable en posant $Y = \ln(H)$ et $X = \ln(D)$. Voici les mesures faites sur 5 arbres :

X	-1,61	-1,20	-0,97	-0,51	-0,42
Y	2,22	2,27	2,38	2,60	2,65

On donne :

$$\sum_i x_i = -4,71\ ;\ \sum_i y_i = 12,12\ ;\ \sum_i x_i^2 = 5,4095\ ;\ \sum_i y_i^2 = 29,5282\ ;\ \sum_i x_i y_i = -11,0455.$$

1. Déterminer l'équation de la droite de régression de Y par rapport à X.
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.
3. Pour la prédiction de la hauteur en fonction du diamètre, on fait l'hypothèse d'un modèle de la forme $h = \alpha d^\beta$ ($\alpha > 0$). Cette hypothèse est-elle justifiée ? si oui, estimer les coefficients α et β.
4. Donner la hauteur prévue d'un arbre de diamètre 0,8.
5. Le modèle précédent est-il approrié pour donner une estimation du diamètre d'un arbre dont on connait la hauteur ? Justifier votre réponse, puis donner une estimation du diamètre d'un arbre de hauteur 18.

NB : Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.

Bonne chance !

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Licence 1 MI - Semestre 2
— 1 CUE Statistique Descriptive —

Année Académique
2023-2024

Deuxième Session - Durée : 1 h 30

Exercice 1

Une enquête réalisée auprès de 400 employés d'une usine a donné les résultats suivants sur leurs salaires mensuels (en centaines d'euros).

Salaires (en milliers de francs)	$[5,6[$	$[6,7[$	$[7,a[$	$[a,9[$	$[9,10[$
Nombre d'employés	x	120	160	48	y

Malheureusement, certaines données sont illisibles et ont été remplacées par a, x et y.

1. Déterminer la population statistique, le caractère étudié et sa nature.
2. Déterminer a, x et y sachant que le centre de la classe $[7; a[$ est $7,75$ et que la fréquence cumulée sur cette classe est $0,86$.
3. Calculer et interpréter le mode et les quartiles de cette distribution.
4. Déterminer l'écart interquartile et les limites des moustaches.
5. Quel est le nombre d'employés qui perçoivent un salaire entre 675 et 825 euros par mois ?
6. Le syndicat des employés de l'usine a demandé une augmentation des salaires de 20% pour chaque employé. Quel sera le montant du salaire mensuel moyen dans le cas de cette augmentation ?

Exercice 2

On s'intéresse à une éventuelle relation entre le sexe de 200 personnes et la couleur des yeux. L'enquête a fourni les résultats suivants : 110 personnes ont des yeux verts et 30 des yeux bleus ; on a 120 femmes dont 40 ont des yeux marrons. Parmi les hommes, 10 ont des yeux bleus.

1. Préciser la population et les caractères étudiés ainsi que leurs types.
2. Construire le tableau de contingence correspondant à ces observations.
3. Établir le tableau des effectifs théoriques.
4. Calculer le coefficient de Cramer. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3

Soient X et Y deux variables quantitatives. On a calculé les deux droites de régression, celle de Y sur X et celle de X sur Y, par la méthode des moindres carrés. On a obtenu les deux droites suivantes :

$$y = 0,5x + 2,525 \text{ et } x = 1,6y - 3,835$$

1. Déterminer les valeurs moyennes de X et de Y.
2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de ces variables. Le modèle linéaire est-il justifié ?

Bonne chance !

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Licence 1 MI - Semestre 2
—— ECUE Statistique Descriptive ——

Année Académique
2023-2024

Deuxième Session - Durée : 1 h 30

Exercice 1

Une étude sur le budget consacré aux vacances d'été auprès de ménages Bretons a donné les résultats suivants Malheureusement, certaines données sont illisibles et ont été remplacées par a, b et c.

Budgets (en centaines d'euro)	[a ;10[	[10 ;b[	[b ;c[	[c ;20[	[20 ;24[	[24 ;40[
Fréquence cumulée	0,08	0,18	0.34	0,64	0,73	1

1. Déterminer la population. Quel est le caractère étudié? Préciser sa nature.
2. (a) Déterminer a sachant que l'étendue des budgets consacrés aux vacances d'été est de 3200 euros.
   (b) Déterminer b et c sachant que le centre de la classe [b ;c[est 15 et que le budget moyen consacré aux vacances d'été est de 2034 euros.
   (c) Quel est le budget que la plupart des ménages consacrent aux vacances d'été?
3. Déterminer le budget médian consacré aux vacances d'été.
4. Quel est le pourcentage des ménages qui consacrent un budget entre 1500 et 3000 euros aux vacances d'été
5. Sachant que $\sum_i n_i x_i^2 = 4741200000$ et $V(x) = 604044$, retrouver l'effectif total des ménages enquêtés ains que les effectifs correspondant à chacune des tranches de budgets.

Exercice 2

Une population de 40 ménages où les deux conjoints occupent un emploi est étudiée. Les variables X et Y désignen respectivement les revenus de la femme et du mari (en dizaine d'euros).
Une étude a montré que $\overline{X} = 120$, $\overline{Y} = 140$, $\sigma_X^2 = 9$, $\sigma_Y^2 = 16$ et $\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = 10,5$.

1. Lequel des revenus X et Y est le plus dispersé?
2. (a) Le revenu dans les ménages dépend-t-il du sexe des conjoints? Justifier votre réponse.
   (b) Calculer le revenu moyen et la variance du revenu dans les ménages.
   (c) Quelle est la proportion de la variation du revenu expliquée par le sexe?
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. Commenter le résultat.
4. On note $S = X + Y$ le revenu total et $W = 0,7X + 0,8Y$ le revenu disponible après impôt.
   (a) Calculer la variance σ_S^2 de S et la variance σ_W^2 de W. Puis, la covariance σ_{SW} de S et W.
   (b) Déterminer par la méthode des moindres carrés, la droite de régression de W en S.
   (c) Existe-t-il une relation linéaire entre S et W? Si oui, estimer le montant de l'impôt pour un reven total de 4 500 euros.

On admettra que : $Cov(\alpha X, \beta Y) = \alpha\beta Cov(X,Y)$, $Cov(Z, X+Y) = Cov(Z,X) + Cov(Z,Y)$ et $V(Z) = \sigma_Z^2 = Cov(Z,Z)$.

Bonne chance !

Scanned with CamScanner

Licence S2 MI - Filières classiques — ECUE Statistique Descriptive — Année Académique 2022-2023

sujet + correction seesion 2 année 2022-2023

Corrigé - Rattrapage Examen - Durée : 1h30

Exercice 1

L'utilisation en vase clos d'un insecticide a donné les résultats suivants sur la durée de vie des insectes (exprimée en secondes) :

Durée de vie	$[0;4[$	$[4;8[$	$[8;12[$	$[12;r[$	$[r;22[$	$[22;30[$	$[30;42[$
Fréquence	0,06	p	q	0,17	0,14	0,11	0,03

Malheureusement, certaines données sont illisibles et ont été remplacées par r, p et q. Mais, on sait que le quatrième décile est égal à 9,5 secondes et que la durée de vie moyenne des insectes soumis à l'insecticide est égale à 13 secondes.

1. **Montrer que p et q vérifient le système** $\begin{cases} 8p+3q=2,72 \\ p+q=0,49 \end{cases}$.

Rep. (2,5 pts)

En posant $s=p+q$, on a :

Durée de vie X	$[0;4[$	$[4;8[$	$[8;12[$	$[12;r[$	$[r;22[$	$[22;30[$	$[30;42[$	Total
Fréquence f_j	0,06	p	q	0,17	0,14	0,11	0,03	1
Centre c_j	2	6	10	$6+\frac{r}{2}$	$\frac{r}{2}+11$	26	36	
FCC F_j	0,06	$0,06+p$	$0,06+s$	$0,23+s$	$0,37+s$	$0,48+s$	$0,51+s$	
Amplitude a_j	4	4	4	$r-12$	$22-r$	8	12	

On a $D_4=q_{0,4}=9,5$ et $9,5\in[8;12[$, ainsi $0,06+p<0,4<0,06+p+q$ et par interpolation, on a :

$$\frac{0,4-(0,06+p)}{(0,06+p+q)-(0,06+p)}=\frac{9,5-8}{12-8}$$

D'où, $8p+3q=2,72$.

D'autre part, puisque $\sum_{j=1}^{k} f_j=1$, on a : $p+q=0,49$. D'où le système : $\begin{cases} 8p+3q=2,72 \\ p+q=0,49 \end{cases}$.

2. **Déterminer les valeurs de p, q et r.**

Rep. (2 pts)

- Par résolution du système : $\begin{cases} 8p+3q=2,72 \\ p+q=0,49 \end{cases}$, on obtient : $p=0,25$ et $q=0,24$.

- D'autre part, on a $\overline{X}=\sum_{j=1}^{k} f_j c_j=10,52+0,155r$.

Or par hypothèse, $\overline{X}=13$. Donc $10,52+0,155r=13$. Ainsi, $r=16$

3. **On prend comme unité d'amplitude 4 secondes. Donner les fréquences corrigées.**

Rep. (2 pts)

On a : fréquence corrigée : $f'_j=\frac{f_j}{a_j}\times U$ (ici, $U=4$). Donc, on a le tableau :

Scanned with CamScanner

Durée de vie X	[0;4[	[4;8[	[8;12[	[12;16[	[16;22[	[22;30[	[30;42[
Fréquence f_j	0,06	0,25	0,24	0,17	0,14	0,11	0,03
Centre c_j	2	6	10	14	19	26	36
FCC F_j	0,06	0,31	0,55	0,72	0,86	0,97	1
Amplitude a_j	4	4	4	4	6	8	12
Fréquence corrigé f'_j	0,06	0,25	0,24	0,17	0,093	0,055	0,01

4. **Calculer et interpréter le mode et la médiane de cette distribution.**
   Rep. (2 pts)
   - Mode (Mo). La classe modale est $[4;8[$.
   Donc, $Mo = x_m + a_m \times \frac{\Delta_i}{\Delta_i+\Delta_s}$ avec $x_m = 4$, $a_m = 4$, $\Delta_i = 0,25 - 0,06 = 0,19$
   et $\Delta_s = 0,25 - 0,24 = 0,01$. D'où : $\mathbf{Mo = 4 + 4 \times \frac{0,19}{0,20} = 7,8}$
   - Médiane ($Me = q_{0,5}$). D'après FCC, on a : $0,31 < 0,5 < 0,55$, donc $Me \in [8,12[$. Ainsi, par interpolation : $\mathbf{Me = 8 + 4 \times \frac{0,5-0,31}{0,55-0,31} = 10 + \frac{7}{6} = \frac{67}{6} = 11,167}$
5. **Quelle est la proportion des insectes qui ont une durée de vie entre 10 et 25 secondes ?**
   Rep. (2,5 pts)
   On a : $p(10 < X < 25) = F(25) - F(10)$.
   Comme $10 \in [8,12[$, on a : $F(10) = F(8) + d_{[8,12[}(10-8) = 0,31 + \frac{0,24}{4}(2) = 0,43$.
   Puisque $25 \in [22,30[$, on a : $F(25) = F(22) + d_{[22,30[}(25-22) = 0,86 + \frac{0,11}{8}(3) = 0,90125$.
   D'où, $\mathbf{p(10<X<25) = F(25) - F(10) = 0,90125 - 0,43 = 0,47125}$

Exercice 2

On veut prédire la hauteur h d'un arbre en fonction de son diamètre d. L'unité est le mètre. Pour faire une régression linéaire, on effectue un changement de variable en posant $y = \ln(h)$ et $x = \ln(d)$. Voici les mesures faites sur 5 arbres :

x	-1,61	-1,20	-0,97	-0,51	-0,42
y	2,22	2,27	2,38	2,60	2,65

On donne :

$$\sum_i x_i = -4,71 \; ; \; \sum_i y_i = 12,12 \; ; \; \sum_i x_i^2 = 5,4095 \; ; \; \sum_i y_i^2 = 29,5282 \; ; \; \sum_i x_i y_i = -11,0458.$$

NB : Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.

1. **Déterminer l'équation de la droite de régression de Y par rapport à X.**
   $(D_{Y|X})$: $y = ax + b$ avec
   $$a = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} \quad \text{et} \quad b = \overline{Y} - a\overline{X}.$$
   $Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum x_i y_i - \overline{X} \times \overline{Y}$, $Var(X) = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \overline{X}^2$ et
   On a $\overline{X} = \frac{-4,71}{5} = -0,942$ et $\overline{Y} = \frac{12,12}{5} = 2,424$. **(0,5 pts)**
   Ainsi,
   $$Cov(X,Y) = \frac{-11,0458}{5} - (-0,942) \times 2,424 = -2,20916 + 2,283808 = 0,074248, \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

Scanned with CamScanner

$$Var(X) = \frac{5,4095}{5} - (-0,942)^2 = 1,0819 - 0,887364 = 0,194536; \quad (0,5 \text{ pts})$$

Donc,

$$a = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} = \frac{0,074248}{0,194536} = 0,3816671464 \approx \mathbf{0,3817}; \quad (0,5 \text{ pts})$$

$$b = \overline{Y} - a\overline{X} = 2,424 - 0,3816671464 \times (-0,942) = 2,783530452 \approx \mathbf{2,7835}. \quad (0,5 \text{ pts})$$

D'où

$$(D_{Y|X}) \ : \ y = \mathbf{0,3817}x + \mathbf{2,7835}. \quad (0,5 \text{ pts})$$

2. **Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.**

On a : $r(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \times Var(Y)}}$.

$Var(Y) = \frac{1}{n}\sum y_i^2 - \overline{Y}^2$, donc

$$Var(Y) = \frac{29,5282}{5} - (2,424)^2 = 5,90564 - 5,875776 = 0,029864. \quad (0,5 \text{ pts})$$

D'où

$$r(X,Y) = \frac{0,074248}{\sqrt{0,194536 \times 0,029864}} = 0,9741162323 \approx 0,9741 \quad (0,5 \text{ pts})$$

3. **On fait l'hypothèse d'un modèle de la forme $h = kd^m$ $(k > 0)$. Cette hypothèse est-elle justifiée ? si oui, estimer les coefficients k et m.** (2=0,5+0,5+0,5+0,5 pts)

Oui, cette hypothèse est justifiée. En effet, $r(X,Y) \simeq 0,9741$ est très proche de 1, il y a une forte corrélation linéaire entre X et Y et on peut donc estimer Y par le modèle linéaire $y = ax + b$ or $y = \ln(h)$ et $x = \ln(d)$ donc $\ln(h) = a\ln(d) + b$; ainsi, on a : $h = e^b d^a$ avec $k = e^b$ et $m = a$. D'où $k = e^{2,7835} = \mathbf{16,1755}$ et $m = \mathbf{0,3817}$. Par suite, $h = \mathbf{16,1755}d^{\mathbf{0,3817}}$.

4. **Prévoir la hauteur de l'arbre si son diamètre est de 0,35 mètre.** (1 pts)

Comme on peut estimer la hauteur h d'arbre de diamètre d par le modèle $h = \mathbf{16,1755}d^{\mathbf{0,3817}}$. Alors pour pour $d = 0,35$, la hauteur h prévue est $h = \mathbf{16,1755} \times (0,35)^{\mathbf{0,3817}} \approx \mathbf{10,835}$.

5. **Le modèle précédent est-il approrié pour donner une estimation du diamètre d'un arbre dont on connaît la hauteur ? Justifier votre réponse, puis donner une estimation du diamètre d'un arbre dont la hauteur est de 12 mètres.** (2=0,5+0,5+0,5+0,5 pts)

Non, le modèle précédent n'est pas approrié pour estimer le diamètre D connaissant la hauteur H, car $r(X,Y) = r(\ln(D), \ln(H)) \neq 1$. Il n'y a donc pas de relation afine entre $Y = \ln(H)$ et $X = \ln(D)$. Dans ce cas, connaissant H, pour estimer D, on doit faire la régression de D en H. Pour cela, on fait d'abord l'ajustement linéaire de $X = \ln(D)$ en $Y = \ln(H)$: $x = a'y + b'$ avec

$$a' = \frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)} = \frac{0,074248}{0,029864} \approx \mathbf{2,4862} \quad \text{et} \quad b' = \overline{X} - a'\overline{Y} = -0,942 - \mathbf{2,4862} \times 2,424 \approx \text{-}\mathbf{6,9685}.$$

Ainsi, on a la régression de D en H : $d = k'h^{m'}$ avec $k' = e^{b'} = e^{\text{-}\mathbf{6,9685}} \approx \mathbf{0,00094}$ et $m' = a' \approx \mathbf{2,4862}$. D'où $d = \mathbf{0,00094}h^{\mathbf{2,4862}}$. Alors pour $h = 12$, on a : $d = \mathbf{0,00094}(12)^{\mathbf{2,4862}} \approx \mathbf{0,4531}$.

Bonne chance !

Scanned with CamScanner

UFHB-UFRMI / Licence 1 - Semestre 2
UE Probabilités et Statistique

Année Académique
2020-2021

Statistique - Semestre 2
Corrections et barèmes
Examen 1ère Session Août 2021
Durée : 1 h 30

Exercice 1 **(12.5 pt)**

Lors d'une enquête, on a interrogé 20 individus sur leur taille. On a obtenu les valeurs (exprimées en mètre) suivantes :

1,72	1,87	1,66	1,73	1,64	1,77	1,82	1,81	1,60	1,78
1,83	1,75	1,70	1,58	1,68	1,66	1,93	1,75	1,80	1,83

(1) Déterminer la population et la variable statistique étudiées. Quelle est la nature de cette variable ?

Rep. - Population : l'ensembe des 20 individus interrogés. **(0,5 pt)**
- Variable statistique : la taille (d'un individu) **(0,5 pt)**
- Nature : quantitative continue **(0,5 pt)**

(2) Calculer et interpréter la taille moyenne et médiane. Que pouvez-vous conclure de la comparaison de ces deux valeurs?

Rep. Notons X la taille d'un individu.

- Taille moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{34.91}{20} = 1,7455$. **(1 pt)**

Interprétation : Dans la population étudiée,
en moyenne, un individu mesure 1,7455 mètre **(0,5 pt)**

- Taille médiane : $M_e = q_{0.5}$ (ici on va juste ordonner les données : $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ...$)

1,58	1,60	1,64	1,66	1,66	1,68	1,70	1,72	1,73	1,75
1,75	1,77	1,78	1,80	1,81	1,82	1,83	1,83	1,87	1,93

On a : $0.5 \times 20 = 10$. Donc $M_e = q_{0.5} = \frac{x_{(10)}+x_{(11)}}{2} = \frac{1.75+1.75}{2} = 1,75$. **(1 pt)**

Interprétation : Environ 50% des individus interrogés ont une taille au plus égale (inférieur ou égale) à 1,75 mètre. **(0,5 pt)**

On a : $Me = 1.75$ et $\bar{X} = 1.7455$, on a $Me \cong \bar{X}$, la distribution des données est sesiblement symétrique. **(0.5 pt)**

(3) Quelle est la proportion des individus qui ont une taille inférieur à 1,74 mètre ?

Rep. D'après la série ordonnée, 9 individus ont une taille inférieur à 1,74 mètre. Soit une proportion $p(X < 1.74) = \frac{9}{20} = 0.45 = 45\%$. **(0,5 pt)**

(4) On regroupe les données en 5 classes définies comme suit :
la borne inférieure et la borne supérieure des intervalles sont 1,55 et 2,00 respectivement; la

Scanned with CamScanner

première, la troisième et la dernière classes ont pour amplitudes 0,1 ; 0,03 et 0,16 respectivement; les deux autres classes sont de même amplitude a.

(a) Trouver la valeur de a. **(1,5 pt)**

Rep. * 1ère classe : $[1.55, 1.55 + 0.1[= [1.55, 1.65[$. 2ème classe : $[1.65, 1.65 + a[$.
3ème classe : $[1.65 + a, 1.68 + a[$. 4ème classe : $[1.68 + a, 1.68 + 2a[$.
5ème classe : $[2.00 - 0.16, 2.00[= [1.84, 2.00[$. Donc on a : $1.68 + 2a = 1.84$.
d'où $a = \frac{1.84-1.68}{2} = 0.08$.

* Ou bien, on peut procéder ainsi : La 1ère classe est : $[1.55, 1.55 + 0.1[= [1.55, 1.65[$.
La 5ème classe est $[2.00 - 0.16, 2.00[= [1.84, 2.00[$. Comme la 3ème a pour amplitude 0,03 et que les deux autres sont de même amplitude a, alors on a : $a + 0.03 + a = 1.84 - 1.65$,
$\Rightarrow\ 2a + 0.03 = 0.19$, ainsi $a = \frac{0.19-0.03}{2} = 0.08$.

* Ou bien encore, on peut faire la somme de toutes les amplitudes et l'égaler à l'étendue :
$0.1 + a + 0.03 + a + 0.16 = 2.00 - 1.55$, $\Rightarrow\ 2a + 0.29 = 0.45$, d'où $a = \frac{0.45-0.29}{2} = 0.08$

(b) Etablir le tableau donnant les effectifs, les effectifs par unité d'amplitude, les fréquences et les fréquences cumulées croissantes. On prendra 0,08 comme unité d'amplitude.

Rep. On a effectif par unité d'amplitude : $n'_j = \frac{n_j}{a_j} \times U = h_j \times U$, avec $U = 0.08$. **(2 pt)**

X	[1.55,1.65[	[1.65,1.73[	[1.73,1.76[	[1.76,1.84[	[1.84,2.00[	Total
n_j	3	5	3	7	2	20
a_j	0.1	0.08	0.03	0.08	0.16	
n'_j	2.4	5	8	7	1	
f_j	0.15	0.25	0.15	0.35	0.1	1
FCC	0.15	0.40	0.55	0.9	1	

(c) Calculer et interpréter le mode et la médiane de cette distribution.

Rep.

- Le mode : Mo

La classe modale est : $[1.73, 1.76[$, car son effectif par unité d'amplitude est le plus grand soit $n'_3 = 8$. Donc

$$Mo = x_m + a_m \times \frac{\Delta_i}{\Delta_i + \Delta_s}$$

avec $x_m = 1.73$, $a_m = 0.03$, $\Delta_i = 8 - 5 = 3$ et $\Delta_s = 8 - 7 = 1$. Ainsi,

$$Mo = 1.73 + 0.03 \times \frac{3}{3+1} = 1.7525. \ \textbf{(1,5 pt = 1+0.5)}$$

- La médiane : $Me = q_{0.5}$

D'après FCC, on a : $0.40 < 0.5 < 0.55$, alors $Me \in [1.73, 1.76[$.

Donc par interpolation, $\frac{Me - 1.73}{1.76 - 1.73} = \frac{0.5 - 0.40}{0.55 - 0.40}$. Ainsi,

$$Me = 1.73 + 0.03 \times \frac{0.1}{0.15} = 1.75. \ \textbf{(1 pt)}$$

Scanned with CamScanner

(d) Avec ce regroupement en classe, reprendre la question (3). **(1 pt)**

Rep. La proportion des individus qui ont une taille inférieur à 1,74 mètre est :

$p(X < 1.74) = F(1.74)$, où $F(x) = F(b_{j-1}) + \frac{f_i}{a_j} \times (x - b_{j-1})$, si $x \in [b_{j-1}, b_j[$.

On a : $1.74 \in [1.73, 1.76[$, donc

$$F(1.74) = F(1.73) + \frac{0.15}{0.03} \times (1.74 - 1.73) = 0.40 + \frac{0.15}{0.03} \times 0.01 = 0.45 = 45\%.$$

Exercice 2 **(08.5 pt)**

On veut étudier le lien entre le risque cardio-vasculaire et le type d'huile consommée. Pour cela, on a observé pendant dix ans, 500 individus et on a les résultats suivants. Parmi-ceux-ci :

- 200 ont consommé de l'huile d'arachide.
- 53 ont consommé de l'huile d'olive et ont eu des problèmes cardio-vasculaires.
- 173 ont consommé de l'huile d'arachide et n'ont eu aucun problème.

(1) Préciser la population et les caractères étudiés ainsi que leurs types et les modalités.

Rep.

- Population : l'ensemble des 500 individus observés **(0,5 pt)**
- Caractères : le type d'huile consommée (TypHC) et le risque cardio-vasculaire (RisqCV), tous deux qualitatifs. **(0,5 pt)**

Les modalités :

* Type d'huile consommée : huile d'olive et huile d'arachide **(0,5 pt)**
* Risque cardio-vasculaire : problèmes CV et pas de problèmes CV **(0,5 pt)**

(2) Construire le tableau des éffectifs observés, puis le tableau des éffectifs théoriques.

Rep.

- Tableau des éffectifs observés : n_{ij}. **(2 pt)**

TypHC \ RisqCV	problèmes CV	pas de problèmes CV	Total $n_{i.}$
Huile d'arachide	27	173	200
Huile d'olive	53	247	300
Total $n_{.j}$	80	420	500

- Tableau des éffectifs théoriques : $n^*_{ij} = \frac{n_{i.} n_{.j}}{n}$. **(1 pt)**

TypHC \ RisqCV	problèmes CV	pas de problèmes CV	Total
Huile d'arachide	32	168	200
Huile d'olive	48	252	300
Total	80	420	500

Scanned with CamScanner

(3) Calculer la distance de khi-deux entre le risque cardio-vasculaire et le type d'huile consommée.

Rep.

- Tableau des résidus : $e_{ij}^* = n_{ij} - n_{ij}^*$. **(0,5 pt)**

TypHC \ RisqCV	problèmes CV	pas de problèmes CV	Total
Huile d'arachide	-5	5	0
Huile d'olive	5	-5	0
Total	0	0	0

- Donc

$$\chi^2_{obs} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{(e_{ij}^*)^2}{n_{ij}^*} = \frac{(-5)^2}{32} + \frac{5^2}{48} + \frac{5^2}{168} + \frac{(-5)^2}{252} = \frac{3125}{2016} \cong 1.5501. \text{ ; (1,5 pt)}$$

(4) Calculer le coeffcent de Cramer et apprecier la liaison entre le risque cardio-vasculaire et le type d'huile consommée.

Rep.

- Coeffcent de Cramer : $C = \sqrt{\frac{\chi^2_{obs}}{\chi^2_{Max}}}$ avec $\chi^2_{Max} = 500 \times \min(2-1, 2-1) = 500.$

Donc $C = \sqrt{\frac{3125}{2016 \times 500}} \cong 0.0557.$ **(1 pt)**

- Appreciation : Nous avons une relation faible entre le risque cardio-vasculaire et le type d'huile consommée (car $C \in]0; 0,2]$). **(0,5 pt)**

Bonne chance !

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

UFR-MI:L1 Maths-Info 2020-2021

CORRECTION DE STATISTIQUE

SESSION 2

Exercice 1

- Serie ordonnée: 0 4 8 8 9 11 12 12 16 20

1. Les quartiles

$Q_1 = q_{0,25}$

On a: $np = 10 \times 0,25 = 2,5$. Donc $Q_1 = X_3 = 8$

$Q_2 = q_{0,5}$

On a: $np = 10 \times 0,5 = 5$

Donc $Q_2 = \dfrac{X_5 + X_6}{2} = \dfrac{9+11}{2} = 10$

$Q_2 = 10 = Me$

$Q_3 = q_{0,75}$

On a: $np = 10 \times 0,75 = 7,5$

Donc $Q_3 = X_8 = 12$

2. Calculons m_{inf} et m_{sup}

$$\begin{aligned} m_- &= Q_1 - 1,5(Q_3 - Q_1) \\ &= 8 - 1,5(12-8) \\ &= 8 - 6 \end{aligned}$$

$m_- = 2$

Donc $m_{inf} = min\{X_i : X_i \geq m_-\}$

$m_{inf} = 4$

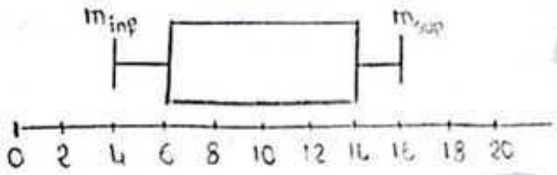
$$\begin{aligned} m_+ &= Q_3 + 1,5(Q_3 - Q_1) \\ &= 12 + 1,5(12-8) \end{aligned}$$

$m_- = 18$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$m_{sup} = max\{X_i : X_i \leq m_+\}$
$m_{sup} = 16$



3. Les données extrêmes sont: 0 2 18 et 20

Exercice 2

1. Salaire le plus observé: Mo
On constate que les amplitudes des classes sont différentes. Corrigeons alors les effectifs.

X	[1, 4[	[4, 10[	[10, 14[	[14, 16[	[16, 20]
n_i	48	144	80	56	72
a_i	3	6	4	2	4
d_i	$\frac{48}{3} = 16$	24	20	28	18
$n_i^\bullet$	16	24	20	28	18
f_i	0,12	0,36	0,2	0,14	0,18
FCC	0,12	0,48	0,68	0,82	1

L'unité d'amplitude est 1
$(PPCM(1,1,1,1,1) = 1)$

Soit $n^\bullet$ l'effectif corrigé.
On a: $n_i^\bullet = U\, d_i$
Ainsi la classe modale est [14, 16[
.

$$M_o = X_m + a\frac{\Delta_i}{\Delta_i + \Delta_S}$$
$$= 14 + (16-14)\frac{28-20}{(28-20)+(28-18)}.$$
$$= 14 + 2 \times \frac{8}{18}$$
$$M_o \simeq 14,9$$

Scanned with CamScanner

Donc le salaire le plus observé est environ 1490 euros.

2.a) $P(X < 10) = F(10)$. P le pourcentage.

* Cherchons P

$q_P \in [10; 14[$, par interpolation linéaire, on a:

$$q_P = 10 + (14 - 10) \times \frac{P - F910)}{F(14) - F(10)} = 10$$

Donc $10 + 4\dfrac{P - 0,48}{0,68 - 0,48} = 10$

D'où $4\dfrac{P - 0,48}{0,2} = 0 \Leftrightarrow P = 0,48$

Par conséquent, 48% des employés ont salaire inférieur à 1000 euros.

b)

$$\begin{aligned} P(X > 14) &= 1 - P(X \leq 14) = 1 - F(14) \\ &= 1 - 0,68 \\ &= 0,32 \end{aligned}$$

Donc 32% des employés ont un salaire superieur à 1400 euros

c)

$$\begin{aligned} P(6 < X < 17) &= P(X > 6) + P(X < 17) \\ &= 1 - P(X < 6) + P(X < 17) \\ &= 1 - 0,12 + 0,82 \\ &= 1 - 0,7 \\ &= 0,3 \end{aligned}$$

Donc 30% des employés ont un salaire compris entree 600 et 1700 euros.

3) On a: $0,12 < 0,25 < 0,48$

$Q_1 \in [4; 10[$

Par interpolation linéaire, on a:

$$\frac{Q_1 - 4}{10 - 4} = \frac{0,25 - 0,12}{0,48 - 0,12} \Leftrightarrow \frac{Q_1 - 4}{6} = \frac{0,13}{0,36}$$

Donc $Q_1 \simeq 6,17$

25% des employés ont un salaire inférieur à 6, 17 euros.

Exercice 3

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

(a) par la méthode des moindres carrés, on a: $Y = aX + b$ avec

$a = \dfrac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2}$ et $b = \overline{Y} - a\,\overline{X}$

X	6	2	4	3	5
Y	9	3	6	5	7
XY	54	6	24	15	35
X^2	36	4	16	9	25

$\overline{X} = \dfrac{1}{5}(6+2+4+3+5) = 4$

$\overline{Y} = \dfrac{1}{5}(9+3+6+5+7) = 6$

$\overline{X}\,\overline{Y} = 4 \times 6 = 24$

$\overline{XY} = \dfrac{1}{5}(54+6+24+15+35) = 26,8$

$\overline{X^2} = \dfrac{1}{5}(36+4+16+9+25) = 18$

$\overline{X}^2 = 4^2 = 16$

Donc $a = \dfrac{26,8-24}{18-16} = 1,4$

$b = \overline{Y} - a\,\overline{X}$
$b = 6 - 1,4 \times 4$
$b = 0,4$

D'où $\boxed{Y = 1,4X + 0,4}$ par la méthode des moindres carrés.

(b) $r(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}$

On a: $Cov(X,Y) = \dfrac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} n_i x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y}$

$Cov(X,Y) = \dfrac{1}{5}(54+6+24+15+35) \quad 24 = 2,8$

$V(X) = \dfrac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} n_i x_i^2 \quad \overline{X}^2$

$V(X) = \dfrac{1}{5}(36+4+16+9+25) \quad 4^2 = 2$

$V(Y) = \dfrac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} n_i y_i^2 \quad \overline{Y}^2$

$V(Y) = \dfrac{1}{5}(81+9+36+25+49) \quad 6^2 = 4$

Donc $r(X,Y) = \dfrac{2,8}{\sqrt{2 \times 4}} = 0,99$

Le modèle linéaire est justificatif car $r(X,Y) > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

* Estimons Y pour $X = 8$

On a: $Y = 1,4X + 0,4$
A.N: $Y = 1,4 \times 8 + 0,4$
$Y = 11,6$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

CORRECTION EXAMEN STATISTIQUE SESSION 1 ANNEE 2021-2022

EXERCICE 1

1 – Déterminons x et y sachant que $q_{0,4} = 9,5$

F. C	0,006	0,55-y	0,55	0,72	0,86	0,97	1

Notons $F(i)$ la fréquence cumulée de i

$8 < 9,5 < 12 \Rightarrow F(8) < 0,4 < F(12) \iff 0,55 - y < 0,4 < 0,55$

On a : $8 < 9,5 < 12$

$0,55 - y < 0,4 < 0,55$ Par interpolation on a : $\frac{9,5-8}{12-8} = \frac{0,4-0,55+y}{0,55-0,55+y} \Rightarrow y = 0,24$

$0,55 - y - x = 0,06 \Rightarrow x = 0,25$

2 - $\bar{X} = \sum_{i=1}^{6} f_i c_i = 13$

Centre	2	6	10	$\frac{12+a}{2}$	$\frac{a+22}{2}$	26	36

$$\iff 2 * 0,06 + 6 * 0,25 + 10 * 0,24 + \frac{(12+a)}{2} * 0,17 + \frac{(a+22)}{2} * 0,14 + 26 * 0,11 + 36 * 0,03 = 13 \Rightarrow a = 16$$

Densité	0,015	0,0625	0,06	0,0425	0,023	0,01375	$8,33*10^{-4}$

3) fréquence corrigé $= \frac{f_i}{a_i} * u$

Fréquence corrigé	0,06	0,25	0,24	0,17	0,93	0,055	0,01

EXERCICE 2

1) $CV_X = \frac{\sigma_x}{\bar{X}} = \frac{4}{125} = 0,032$

$CV_Y = \frac{\sigma_y}{\bar{Y}} = \frac{3}{80} = 0,0375$

$CV_x < CV_y$ donc les revenus de la femme sont les plus dispersés

2) $r(X;Y) = \frac{cov(X;Y)}{\sigma_x \sigma_y} = 0,667$; $r^2(X;Y) = 0,44889 < \frac{3}{4}$. Donc il n'y a pas de liaison linéaire impaire en X et Y.

3) Var(S)=Var(x)+Var(Y)+2Cov(X;Y)

Var(S)=16+9+2*8=43

Scanned with CamScanner

Var(W)=Var(0,8X+0,7Y)=23,61

4) La droite de régression de W en S

$W = \hat{a}s + \hat{b}$ avec $\hat{a} = \frac{Cov(W;S)}{Var(S)}$ et $\hat{b} = \bar{w} - \hat{a}\bar{s}$

*Cov(W ;S)=Cov(X+Y ;0,8X+0,7Y)

Posons X+Y=Z donc Cov(7N;S)=Cov(Z;0,8X+0 ,7Y)

Cov(W ;S)=Cov(z ;0,8X)+Cov(Z ;0,7Y)=0,8Cov(Z ;X)+0,7Cov(Z ;Y)=

En remplaçant Z par sa valeur on a:

Cov(w ;S)=0,8Cov(X ;X+Y)+0,7Cov(Y ;X+Y)=0,8*16+0,8*8+0,7*8+0,7*9=51,1

$$\hat{a} = \frac{Cov(W,S)}{Var(S)} => \hat{a} = \frac{31,1}{43} = 0,72 \ ; \ \bar{w} = \frac{0,8\bar{X} + 0;7\bar{Y}}{2} = 78 \ ; \ \bar{S} = 102,5 \ ;$$

$$\hat{b} = \bar{W} - \hat{a}S = 4,2 \text{ par consequent } W = 0,725 + 4,2$$

*Droite de régression de S en W

S=$\hat{a}w + \hat{b}$ avec $\hat{a} = \frac{Cov(s;w)}{Var(w)}$ et $\hat{b} = \hat{s} - \hat{a}\bar{w}$; $\hat{a} = \frac{31,1}{23,61} \Leftrightarrow \hat{a} = 1,32$; $\hat{b} = 102,5 - 1,32 * 78 = -0,46$; $s = 1,32w - 0,46$

5_oui. Pour w=2500 ; s=1,32*2500-0,46=3300

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

CORRECTION STATISTIQUE SESSION 2 ANNEE 2021-2022

EXERCICE 1

1 – Population : Ensemble des 500 employés interrogé

Le caractère : Le salaire

Nature : Le caractère étudié est une variable quantitative continue

2-

Salaire	[5 ; 6[	[6 ; 7[	[7 ; 8,5[	[8,5 ; 9[	[9 ; 10[
Nbre d'employé	80	150	200	60	10
Centre de classe	5,5	6,5	7,75	8,75	9,5
Amplitude	1	1	1,5	0,5	1
Fréquence	0,16	0,3	0,4	0,12	0,02
FCC	0,16	0,46	0,86	0,98	1
Effectif corrigé	120	225	200	180	15

3- • Calculons le mode

La classe modale est [6 ; 7[(on regarde la classe qui a le plus grand effectif corrigé)

$M_0 = 6 + 1 * \frac{100}{105+25} = 6{,}8077$

- Calculons la moyenne

  $Moy = \frac{1}{500}(80 * 5{,}5 + 150 * 6{,}5 + 200 * 7{,}75 + 60 * 8{,}75 + 10 * 9{,}5) = 7{,}17$

- Calculons la médiane

  On a: $F(7) < 0{,}5 < F(8{,}5)$ $\quad Donc\ Me = 7 + (8{,}5 - 7) * \frac{0{,}5-0{,}46}{0{,}86-0{,}46} = 7{,}1538$

  Interprétation

  On a: $Mo < Me < Moy$, On a donc une distribution dissymétrique à gauche

4 – Cet intervalle est : $[Q_1, Q_3[$

- Calculons $Q_3 = q_{0{,}75}$

  On a : $F(7) < 0{,}75 < F(8{,}5)$ $\quad Q_3 = 7 + (8{,}5 - 7) * \frac{0{,}75-0{,}16}{0{,}86-0{,}46} \Rightarrow Q_3 = 8{,}0875$

- Calculons $Q_1 = q_{0{,}25}$

  $On\ a:\ F(6) < 0{,}25 < F(7),$ $\quad Q_1 = (7 - 6) * \frac{0{,}25 - 0{,}16}{0{,}46 - 0{,}16} = 6{,}3$

Donc l'intervalle interquartile est : [8,0875; 6,3[

2 - $P(6{,}5 \leq X \leq 8) = F(8) - F(6{,}5)$

- $7 \leq 8 < 8{,}5 \Rightarrow F(8) = 0{,}46 + (8 - 7) * \frac{0{,}4}{1{,}5} = 0{,}7267$

VIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

- $6 \leq 6{,}5 < 7 \Rightarrow F(6) = 0{,}16 + (6{,}5 - 6) * \frac{0{,}3}{1} = 0{,}31$

Donc $P(6{,}5 \leq X \leq 8) = 0{,}7267 - 0{,}31 = 0{,}4167$

6 – Si la variable X est pour l'ancien salaire et $Y = X + \frac{16}{100}X$

$Y = 1{,}16X$

D'après le théorème de la moyenne

$\bar{Y} = 1{,}16\bar{X}$ ($\bar{X}$ Est la moyenne calculer au début)

$\bar{Y}$=8 ,3172

EXERCICE 2

1)

Population l'ensemble des 800 personnes interrogées

Caractères catégorie socioprofessionnelle qualitative

Sexe (qualitative)

2)

CATEGORIE SP / SEXE	OUVRIERS	CARDRES MOYENNE	CARDRES SUP	TOTAL
H	244	196	60	500
F	156	124	20	300
TOTAL	400	320	80	800

3

CATEGORIE SP / SEXE	O	CM	CS
H	250	200	50
F	150	120	30

Pour trouver l'affectif théorique des hommes ouvriers, on fait le $\frac{nombre\ d'homme * nombre\ d'ouvrier}{800}$

On fait pareil pour les autres effectifs

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

PROPOSITION DE CORRETION DE L'EXAMEN DE STATISTIQUE DESCRIPTIVE 22-23 SESSION 1

EXERCICE 1 :

1 . * population : l'ensemble des employés de l'entreprise ;

* Caractères étudiés et les types : le sexe : variable qualitative nominale

Le revenu : variable quantitative continue.

2. * Distribution marginale de la variable sexe :

Sexe	Homme	Femme	Total
Effectif	490	350	840
fréquence	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$	1

*Distribution marginale de la variable revenu :

Revenu	[10 ; 14[	[14 ; 20[	[20 ; 22[	[22 ; 28[	Total
Effectif	240	360	180	60	840
Fréquence	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{14}$	1

3. * Les profils-lignes

Sexe/Revenu	[10 ; 14[	[14 ; 20[	[20 ; 22[	[22 ; 28[	Total
Homme	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{14}$	1
Femme	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{14}$	1

Les profils-lignes sont identiques et égaux à la distribution marginale de la variable revenu, donc le revenu ne dépend pas du sexe des employés.

4-a)

Revenu	[10 ; 14[	[14 ; 20[	[20 ; 22[	[22 ; 28[	Total
Effectif	240	360	180	60	840
Fréquence	0,29	0,43	0,21	0,07	1
FCC	0,29	0,72	0,93	1	-
Centre	12	17	21	25	-
amplitude	4	6	2	6	-
Effectif corrigé	60	60	90	10	-

[20 ; 22[est la classe modale, car elle a le plus grand effectif par unité d'amplitude.

Soit M_O Le mode : $M_O = X_m + a.\frac{\Delta_i}{\Delta_i+\Delta_s}$ avec $X_m = 20,\ a = 22 - 20 = 2,$

$\Delta_i = 90 - 60 = 30,$ $\Delta_s = 90 - 10 = 80.$

Scanned with CamScanner

Ainsi $M_O = 20 + 2 * \frac{30}{30+80} \Rightarrow M_O = 20{,}55$. Le revenu le plus observé est 2055 euros.

4-b) * revenu moyen, soit y le revenu d'un employé.

$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{4} n_i c_i \Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{840}(240 * 12 + 360 * 17 + 180 * 21 + 60 * 25)$

$\bar{y} = 17$ Donc le revenu moyen est 1700 euros.

Interprétation : En moyenne, les employés de cette entreprise ont un revenu égal à 1700 euros

*revenu médian, soit M_e le revenu médian. $M_e = q_{0,5}$

On a : $0{,}29 < 0{,}5 < 0{,}72$, $donc\ 14 < M_e < 20$

Par interpolation: $\frac{M_e-14}{20-14} = \frac{0{,}5-0{,}29}{0{,}72-0{,}29} \Rightarrow M_e = 16{,}93$. Donc le revenu médian est 1693 euros

Interprétation : 50% des employés ont un revenu inférieur ou égal à 1693 euros.

4-c) soit p la proportion, p=F(25)-F(20) p=F(25)-0,72

_Calculons F(25) on a : $22 < 25 < 28, donc\ 0{,}93 < F(25) < 1$

Par interpolation $\frac{F(25)-0{,}93}{1-0{,}93} = \frac{25-22}{28-22} \Rightarrow F(25) = 0{,}97$

Ainsi p=0,97-0,72 ; p=0,25.

En somme 25% des employés ont un revenu compris entre 2000 et 2500 euros

4-d) Il s'agit de calculer le quantile d'ordre 0,25 : $q_{0,25}$

On a : $0 < 0{,}25 < 0{,}29\ \ donc\ \ 0 < q_{0,25} < 14$

Par interpolation : $\frac{q_{0,25}-0}{14-0} = \frac{0{,}25-0}{0{,}29-0} \Rightarrow q_{0,25} = 12{,}07$

Ainsi 75% des employés ont un revenu au dessus de 1207 euros

EXERCICE 2 :

1-) équation de la droite de régression de Y par rapport à X est : Y = Ax+b avec $a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)}$

$$b = \bar{Y} - a\bar{X},\quad a = \frac{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i y_i - \bar{X}\bar{Y}}{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i{}^2 - \bar{X}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i y_i - 5\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{5} x_i{}^2 - 5\bar{X}^2} = \frac{-11{,}0458 - 5\left(\frac{-4{,}71}{5} * \frac{12{,}12}{5}\right)}{5{,}4095 - 5\left(-\frac{4{,}71}{5}\right)^2}$$

$$\Rightarrow a = 0{,}3815$$

$$b = \frac{12{,}12}{5} - 0{,}3815 * \left(-\frac{4{,}71}{5}\right) \Rightarrow b = 2{,}7834$$

Ainsi $\boxed{Y = 0{,}3815X+2{,}78134}$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

2-) * Coefficient de corrélation linéaire : $r = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)*V(Y)}} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i y_i - 5\bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 5\bar{X}^2} * \sqrt{\sum_{i=1}^{5} y_i^2 - 5Y^2}}$

$r = \frac{-11,0458 - 5\left(\frac{-4,71}{5} * \frac{12,12}{5}\right)}{\sqrt{5,4095 - 5\left(\frac{-4,71}{5}\right)^2} * \sqrt{29,5282 - 5\left(\frac{12,12}{5}\right)}} \Rightarrow r = 0,9741$

3-) comme $r = 0,9741 > 0,87$, *alors* il y a une forte corrélation linéaire entre Y et X .

L'équation Y = 0,3815X+2,7834 est bien justifiée. De plus on a d'après l'énoncé X=ln(d) et Y=ln(h) d'où $\ln(h) = 0,3815\ln(d) + 2,7834 \Rightarrow h = e^{0,3815\ln(d)} * e^{2,7834}$

$$\Rightarrow h = e^{2,7834} * d^{0,3815}$$

Ainsi l'hypothèse $h = \alpha d^{\beta}$ *est justifiée avec* $\alpha = e^{2,7834}$ *et* $\beta = 0,3815$

4-) pour d=0,8 , on a : $h = e^{2,7834} * 0,8^{0,3815} \Rightarrow h = 14,8540$

5-) oui le modèle est apprécié. En effet, vue la bonne corrélation entre X et Y le modèle est justifié pour faire une prédiction de h ou d.

Pour h=18, on a : $18 = e^{2,7834} * d^{0,3815} \Rightarrow d = \left(\frac{18}{e^{2,7834}}\right)^{\frac{1}{0,3815}} \Rightarrow d = 1,3237.$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Statistique descriptive

sujet et correction session 1 2023-2024

Exercice 1

Enoncé

Lors d'une enquête sur le poids des habitants d'une localité, on a obtenu les valeurs suivantes, exprimées en kilogrammes :

66, 93, 75, 80, 78, 64, 70, 58, 68, 83, 77, 82, 81, 60, 83, 72, 87, 66, 73, 75

1. Déterminer la population et la variable statistique étudiées. Quelle est la nature de cette variable ?
2. Calculer et interpréter le poids moyen et les quartiles de cette série statistique.
3. Quelle est la proportion des individus qui ont un poids supérieur à 74 kg ?
4. On regroupe les données en 5 classes définies comme suit : la borne inférieure et la borne supérieure des intervalles sont 55 et 100 respectivement ; la première, la troisième et la dernière classes ont pour amplitudes 10 ; 3 et 16 respectivement ; les deux autres classes sont de même amplitude a.
   (a) Déterminer la valeur de a. Puis, établir le tableau statistique donnant les effectifs, les effectifs par unité d'amplitude, les fréquences et les fréquences cumulées croissantes.
   (b) Calculer et interpréter le mode et la médiane de cette distribution.
   (c) À partir des données regroupées en classe, déterminer la proportion des individus qui ont un poids supérieur à 74 kg.

NB: On prendra 8kg comme unité d'amplitude.

Correction

1. Détermination de la population et de la variable statistique

- **Population** : Il s'agit de l'ensemble des habitants de la localité étudiée.
- **Variable statistique** : Le poids des habitants, exprimé en kilogrammes.
- **Nature de la variable** : Il s'agit d'une variable quantitative continue.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

2. Calcul du poids moyen et des quartiles

Poids moyen

Le poids moyen est calculé par la formule suivante :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

où $n = 20$ est le nombre total d'observations.

$$\bar{x} = \frac{66+93+75+80+78+64+70+58+68+83+77+82+81+60+83+72+87+66+73+75}{20} = 73.85\,\text{kg}$$

Quartiles

Pour calculer les quartiles, nous ordonnons les données de manière croissante :

58, 60, 64, 66, 66, 68, 70, 72, 73, 75, 75, 77, 78, 80, 81, 82, 83, 83, 87, 93

Les positions des quartiles sont données par :

$$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)^{\text{ème}} = \left(\frac{20+1}{4}\right)^{\text{ème}} = 5.25^{\text{ème}}\text{élément}$$

$$Q_2 = \left(\frac{2(n+1)}{4}\right)^{\text{ème}} = \left(\frac{2\times 21}{4}\right)^{\text{ème}} = 10.5^{\text{ème}}\text{élément}$$

$$Q_3 = \left(\frac{3(n+1)}{4}\right)^{\text{ème}} = \left(\frac{3\times 21}{4}\right)^{\text{ème}} = 15.75^{\text{ème}}\text{élément}$$

Les valeurs des quartiles sont :

$$Q_1 = 66 + 0.25 \times (68 - 66) = 66.5\ \text{kg}$$
$$Q_2 = 75 + 0.5 \times (75 - 75) = 75\ \text{kg}$$
$$Q_3 = 80 + 0.75 \times (81 - 80) = 80.75\ \text{kg}$$

3. Proportion des individus ayant un poids supérieur à 74 kg

Il y a 10 individus ayant un poids supérieur à 74 kg. La proportion est donc :

$$\text{Proportion} = \frac{10}{20} = 0.5$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

4. Regroupement des données en classes

(a) Détermination de la valeur de a

On connaît les amplitudes des classes comme suit :

- Classe 1 : amplitude = 10
- Classe 3 : amplitude = 3
- Classe 5 : amplitude = 16

Soit a l'amplitude des classes 2 et 4.
On a donc la relation suivante :

$$10 + a + 3 + a + 16 = 100 - 55 = 45$$

Ce qui donne :

$$2a + 29 = 45 \quad \Rightarrow \quad 2a = 16 \quad \Rightarrow \quad a = 8$$

Tableau statistique

Classes	Effectif	Effectif par unité d'amplitude	Fréquence	Fréquence cumulée croissante
$[55, 65[$	5	$\frac{5}{10} = 0.5$	$\frac{5}{20} = 0.25$	0.25
$[65, 73[$	8	$\frac{8}{8} = 1$	$\frac{8}{20} = 0.4$	0.65
$[73, 76[$	4	$\frac{4}{3} = 1.33$	$\frac{4}{20} = 0.2$	0.85
$[76, 84[$	9	$\frac{9}{8} = 1.125$	$\frac{9}{20} = 0.45$	1.3
$[84, 100[$	3	$\frac{3}{16} = 0.1875$	$\frac{3}{20} = 0.15$	1.45

(b) Mode et Médiane

- **Mode** : La classe modale est celle ayant le plus grand effectif, soit la classe $[76, 84[$.
- **Médiane** : La médiane se trouve dans la classe $[73, 76[$ car la fréquence cumulée juste avant cette classe est de 0.65 et celle de la classe est 0.85, contenant donc la position médiane.

(c) Proportion des individus ayant un poids supérieur à 74 kg après regroupement

Dans les classes $[76, 84[$ et $[84, 100[$, il y a un total de $9 + 3 = 12$ individus. La proportion est donc :

$$\frac{12}{20} = 0.6$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Exercice 2

Enoncé

Le volume d'air expiré Y est une mesure standard du fonctionnement pulmonaire. Pour identifier une population possédant un fonctionnement pulmonaire anormal, il faut établir un modèle pour le volume d'air expiré dans une population normale. Pour cela, on mesure le volume Y en litres et la taille X en centimètres sur 12 garçons âgés de 10 à 15 ans. On obtient les résumés numériques suivants :

$$\sum_i x_i = 1872, \quad \sum_i y_i = 32.3, \quad \sum_i x_i^2 = 294320, \quad \sum_i y_i^2 = 93.11, \quad \sum_i x_i y_i = 5156.20$$

1. Calculer le coefficient de corrélation.
2. Calculer les estimations des coefficients de la droite de régression linéaire de Y sur X.
3. Quel volume d'air devrait expirer un garçon mesurant 1,60 m ?
4. On a mesuré le volume d'air expiré par un enfant de 13 ans et on a obtenu 2,5 litres. Quelle devrait être sa taille ?

Correction

1. Calcul du coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation linéaire de Pearson est donné par la formule :

$$r = \frac{n\sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{\sqrt{\left(n\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2\right)\left(n\sum_i y_i^2 - (\sum_i y_i)^2\right)}}$$

où $n = 12$ est le nombre de paires de données.
Substituons les valeurs fournies :

$$r = \frac{12 \times 5156.20 - 1872 \times 32.3}{\sqrt{(12 \times 294320 - 1872^2) \times (12 \times 93.11 - 32.3^2)}}$$

Calculons les différents termes :

$$r = \frac{61874.4 - 60465.6}{\sqrt{(3531840 - 3504384) \times (1117.32 - 1042.29)}}$$

$$r = \frac{1408.8}{\sqrt{27456 \times 75.03}} = \frac{1408.8}{\sqrt{2059471.68}} = \frac{1408.8}{1435.11} \approx 0.9816$$

Le coefficient de corrélation $r \approx 0.9816$ indique une très forte corrélation positive entre la taille et le volume d'air expiré.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

2. Estimations des coefficients de la droite de régression linéaire

La droite de régression linéaire de Y sur X est donnée par :

$$Y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$$

où :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\sum i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{n\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}$$

et

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum i y_i}{n} - \hat{\beta}1\frac{\sum i x_i}{n}$$

Substituons les valeurs pour $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1408.8}{27456} = 0.0513$$

Pour $\hat{\beta}_0$:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{32.3}{12} - 0.0513 \times \frac{1872}{12} = 2.6917 - 0.0513 \times 156 = 2.6917 - 8.0028 = -5.3111$$

Ainsi, l'équation de la droite de régression est :

$$Y = -5.3111 + 0.0513X$$

3. Volume d'air expiré pour un garçon mesurant 1,60 m

Convertissons 1,60 m en centimètres : $X = 160$ cm.
Substituons $X = 160$ dans l'équation de régression :

$$Y = -5.3111 + 0.0513 \times 160 = -5.3111 + 8.208 = 2.8969 \text{ litres}$$

Un garçon mesurant 1,60 m devrait expirer environ 2,90 litres d'air.

4. Taille estimée pour un volume d'air expiré de 2,5 litres

Pour $Y = 2.5$ litres, nous résolvons l'équation de régression pour X :

$$2.5 = -5.3111 + 0.0513X$$

$$0.0513X = 2.5 + 5.3111 = 7.8111$$

$$X = \frac{7.8111}{0.0513} \approx 152.25 \text{ cm}$$

Un enfant de 13 ans qui expire 2,5 litres d'air devrait mesurer environ 152,25 cm.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Exercice 3

Enoncé

Une entreprise est composée de trois usines A, B et C qui emploient respectivement 40, 50 et 30 salariés. Les salaires mensuels moyens dans les usines A, B et C sont respectivement 90, 80 et 75 Euros, avec des écarts-types respectifs de 10, 15 et 5 Euros.

1. Calculer le salaire moyen et la variance totale des salaires dans l'entreprise.
2. Déterminer le rapport de corrélation. Commenter.

Correction

1. Calcul du salaire moyen et de la variance totale

Soient $n_A = 40$, $n_B = 50$, $n_C = 30$ les effectifs des usines A, B et C respectivement. Les salaires moyens dans ces usines sont $\bar{x}_A = 90$ Euros, $\bar{x}_B = 80$ Euros, et $\bar{x}_C = 75$ Euros. Les écarts-types correspondants sont $\sigma_A = 10$ Euros, $\sigma_B = 15$ Euros, et $\sigma_C = 5$ Euros.
Le salaire moyen global dans l'entreprise, $\bar{x}$, est donné par :

$$\bar{x} = \frac{n_A\bar{x}_A + n_B\bar{x}_B + n_C\bar{x}_C}{n_A + n_B + n_C}$$

Substituons les valeurs :

$$\bar{x} = \frac{40 \times 90 + 50 \times 80 + 30 \times 75}{40 + 50 + 30} = \frac{3600 + 4000 + 2250}{120} = \frac{9850}{120} \approx 82.08 \text{ Euros}$$

La variance totale des salaires dans l'entreprise, σ^2, est la somme de la variance inter-groupes et de la variance intra-groupes. La variance intra-groupes est donnée par :

$$\sigma^2_{\text{intra}} = \frac{n_A\sigma_A^2 + n_B\sigma_B^2 + n_C\sigma_C^2}{n_A + n_B + n_C}$$

Substituons les valeurs :

$$\sigma^2_{\text{intra}} = \frac{40 \times 10^2 + 50 \times 15^2 + 30 \times 5^2}{120} = \frac{40000 + 112500 + 7500}{120} = \frac{160000}{120} \approx 1333.33 \text{ Euros}^2$$

La variance inter-groupes est donnée par :

$$\sigma^2_{\text{inter}} = \frac{n_A(\bar{x}_A - \bar{x})^2 + n_B(\bar{x}_B - \bar{x})^2 + n_C(\bar{x}_C - \bar{x})^2}{n_A + n_B + n_C}$$

Substituons les valeurs :

$$\sigma^2_{\text{inter}} = \frac{40(90 - 82.08)^2 + 50(80 - 82.08)^2 + 30(75 - 82.08)^2}{}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$\sigma^2_{\text{inter}} = \frac{40 \times 62.3364 + 50 \times 4.3264 + 30 \times 50.1264}{120}$$

$$\sigma^2_{\text{inter}} = \frac{2493.456 + 216.32 + 1503.792}{120} = \frac{4213.568}{120} \approx 35.11 \text{ Euros}^2$$

La variance totale est donc la somme des deux :

$$\sigma^2 = \sigma^2_{\text{intra}} + \sigma^2_{\text{inter}} = 1333.33 + 35.11 = 1368.44 \text{ Euros}^2$$

2. Rapport de corrélation

Le rapport de corrélation η^2 est défini comme le rapport entre la variance inter-groupes et la variance totale :

$$\eta^2 = \frac{\sigma^2_{\text{inter}}}{\sigma^2} = \frac{35.11}{1368.44} \approx 0.0257$$

Le rapport de corrélation $\eta \approx \sqrt{0.0257} \approx 0.1603$ indique une faible proportion de la variance totale expliquée par la différence entre les salaires moyens des différentes usines. En d'autres termes, les variations salariales entre les usines expliquent une petite partie de la variance totale des salaires dans l'entreprise.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Statistique descriptive

session 2 2023-2024

Exercice 1

1. Détermination de la population et du caractère étudié

La population étudiée est l'ensemble des ménages Bretons ayant été enquêtés. Le caractère étudié est le budget consacré aux vacances d'été par ces ménages. Ce caractère est quantitatif continu puisqu'il est mesuré en euros et peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné.

2. Calcul de a, b et c

(a) Détermination de a

L'étendue des budgets est donnée par :

$$\text{Étendue} = c - a = 3200 \text{ euros}$$

Ainsi, en tenant compte des classes fournies, l'étendue est également donnée par $24 - 40 = -16$, donc $a = 24 - 16 = 8$.

(b) Détermination de b et c

Le centre de la classe $[b; c[$ est donné par :

$$\frac{b+c}{2} = 15$$

Ainsi, on a $b + c = 30$.
De plus, le budget moyen est donné par la moyenne pondérée des centres des classes :

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = 2034$$

Étant donné que $\bar{x} = 2034$, on peut résoudre ce système pour trouver les valeurs de b et c.

(c) Budget majoritaire

Le budget que la plupart des ménages consacrent aux vacances d'été correspond à la classe modale, c'est-à-dire la classe avec la fréquence la plus élevée. D'après les fréquences cumulées, cette classe se situe entre $[b; c[$.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

3. Budget médian

Le budget médian est celui qui divise la population en deux parties égales, soit un budget pour lequel la fréquence cumulée est égale à 0,5. On détermine alors la classe médiane et on applique la formule de la médiane.

4. Pourcentage des ménages

Le pourcentage des ménages consacrant un budget entre 1500 et 3000 euros est déterminé à partir de la classe correspondant à cet intervalle et des fréquences cumulées associées.

5. Calcul des effectifs

En utilisant les formules de la variance et la somme des carrés des budgets, nous pouvons retrouver l'effectif total ainsi que les effectifs pour chaque classe.

Exercice 2

1. Comparaison des dispersions

La dispersion d'une variable est mesurée par sa variance. Comparons les variances des revenus X et Y :

$$\sigma_X^2 = 9 \quad \text{et} \quad \sigma_Y^2 = 16$$

Ainsi, le revenu Y (celui du mari) est plus dispersé que le revenu X (celui de la femme).

2. Analyse du revenu des ménages

(a) Dépendance du revenu au sexe

Pour vérifier si le revenu dépend du sexe des conjoints, on compare les moyennes $\bar{X}$ et $\bar{Y}$:

$$\bar{X} = 120 \quad \text{et} \quad \bar{Y} = 140$$

Le revenu moyen du mari est supérieur à celui de la femme. Cela pourrait indiquer une dépendance au sexe, mais pour une conclusion précise, il faudrait une analyse plus approfondie avec des tests statistiques appropriés.

(b) Revenu moyen et variance du revenu dans les ménages

Le revenu total dans chaque ménage est donné par $S = X + Y$. Le revenu moyen dans les ménages est donc :

$$\bar{S} = \bar{X} + \bar{Y} = 120 + 140 = 260 \text{ (dizaines d'euros)}$$

La variance du revenu total S est donnée par :

$$\sigma_S^2 = \text{Var}(S) = \text{Var}(X + Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY}$$

$$\sigma_S^2 = 9 + 16 + 2(10,5) = 46 \text{ (dizaines d'euros carrés)}$$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

(c) Proportion de la variation du revenu expliquée par le sexe

Pour trouver la proportion de la variation expliquée par le sexe, on peut calculer le coefficient de détermination R^2 à partir du coefficient de corrélation linéaire ρ_{XY} (voir section suivante).

3. Coefficient de corrélation linéaire

Le coefficient de corrélation linéaire ρ_{XY} est donné par :

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$\rho_{XY} = \frac{10,5}{\sqrt{9} \times \sqrt{16}} = \frac{10,5}{12} = 0,875$$

Le coefficient de corrélation est très proche de 1, indiquant une forte corrélation positive entre les revenus des conjoints.

4. Analyse des revenus totaux et disponibles après impôt

(a) Calcul des variances de S et W, et covariance σ_{SW}

La variance de $W = 0,7X + 0,8Y$ est :

$$\sigma_W^2 = \text{Var}(W) = 0,7^2\sigma_X^2 + 0,8^2\sigma_Y^2 + 2(0,7)(0,8)\sigma_{XY}$$

$$\sigma_W^2 = 0,49 \times 9 + 0,64 \times 16 + 2(0,7)(0,8)(10,5) = 4,41 + 10,24 + 11,76 = 26,41$$

La covariance entre S et W est :

$$\sigma_{SW} = \text{Cov}(S, W) = \text{Cov}(X + Y, 0,7X + 0,8Y)$$

$$\sigma_{SW} = 0,7\sigma_X^2 + 0,8\sigma_{XY} + 0,7\sigma_{XY} + 0,8\sigma_Y^2 = 0,7(9) + 1,5(10,5) + 0,8(16) = 6,3 + 15,75 + 12,8 = 34,85$$

(b) Droite de régression de W en S

La droite de régression de W en S est donnée par : $W = aS + b$ où $a = \frac{\sigma_{SW}}{\sigma_S^2} = \frac{34,85}{46} \approx 0,7587$

et $b = \bar{W} - a\bar{S}$

Pour trouver b, on calcule $\bar{W} = 0,7\bar{X} + 0,8\bar{Y} = 0,7(120) + 0,8(140) = 224$

$b = 224 - 0,7587(260) \approx 26,742$ Ainsi, la droite de régression est $W = 0,7587S + 26,742$.

(c) Estimation de l'impôt

Pour estimer le montant de l'impôt pour un revenu total de 4500 euros, on remplace $S = 450$ dans l'équation de la droite de régression :

$W = 0,7587(450) + 26,742 \approx 368,712$ L'impôt est donc estimé à $4500 - 3687,12 = 812,88$ euros.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

L1 MATH-INFORMATIQUE
UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

2020-2021

EXAMEN D'ÉLECTRICITÉ

Session 1

Durée : 2H

ECUE 1 : ÉLECTROCINÉTIQUE

Il est rappelé aux étudiants que :

- **Aucun document n'est autorisé**
- **Les Smartphones doivent rester éteints**

Exercice

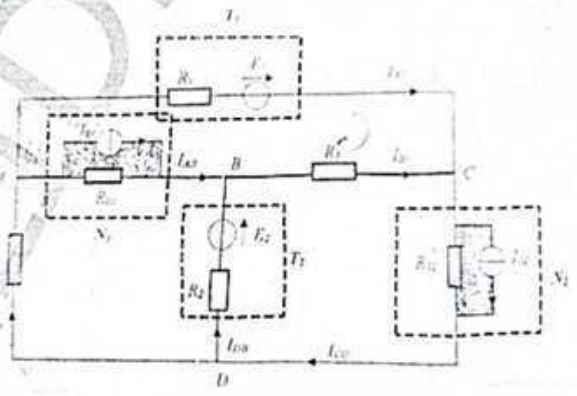
Dans le circuit électrique ci-dessous constitué de *générateurs de courants*, de *générateurs de tension* et de *résistances*, on souhaite calculer les intensités de courants dans chacune des branches du circuit en utilisant la **méthode des courants fictifs de maille.**

1) Transformer les générateurs N_1 et N_2 en *générateurs de tension réelle.*
2) Qu'est-ce qu'une maille indépendante ? Combien ce circuit en comporte-t-il ?

Après avoir transformé tous les *générateurs de courant* en *générateurs de tension*, on affectera à chaque maille indépendante un courant fictif J_i orienté dans le **sens horaire.**

3) Trouver la relation de couplage entre les courants fictifs J_i et le courant de branches I_{xy} comme orienté dans le circuit.
4) Ecrire l'équation matricielle permettant de calculer les courants fictifs J_i et la résoudre par la méthode de Cramer.
5) En déduire les intensités des courants de branches $I_{AC}, I_{AB}, I_{BC}, I_{DB}, I_{CD}, I_{DA}$.
6) Quel est le régime de fonctionnement (générateur ou récepteur) des générateurs T_1, T_2, N_1 et N_2 ?

On donne : $E_1 = 20V\,;E_2 = 20V\,;R_1 = 2\Omega\,;\mathrm{R}_2 = 1\Omega\,;\mathrm{I}_{01} = 400mA\,;I_{02} = 300mA\,;$
$R_{01} = R_{02} = 10\Omega\,;R_3 = 3\Omega\,;\mathrm{R}_4 = 2\Omega.$



VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

L1 MATH-INFORMATIQUE
UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

2020-2021

ECUE 2 : ELECTROSTATISTIQUE

Exercice

Toutes les questions de l'exercice sont indépendantes.

I- Soit une sphère de centre O et de rayon R. Elle est chargée en surface par une densité de charge non-uniforme $\sigma(\theta) = \sigma_0 sin\theta$ avec $\sigma_\theta = cte$. Donnez l'expression d'une surface élémentaire ds sur la sphère. En déduire l'expression de la charge totale Q de la sphère ?

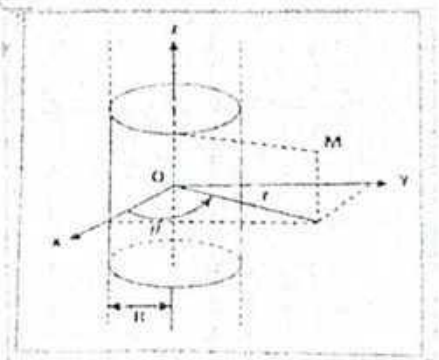
II- Par les considérations de symétries et d'invariances, montrer qu'en un point de l'espace M, le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par les distributions suivantes ne peut se calculer que par la méthode directe c'est-à-dire *les lois de Coulomb :*

a- Fil de longueur 2L de densité de charge uniforme $\lambda = \lambda_0$.
b- Disque de rayon a de densité de charge $\sigma = \sigma_0$.

III- Soit la distribution D formée par deux charges ponctuelles placées dans un référentiel cartésien tel que : en $A(-2,0)$: $-3Q$; en $B(+1,-1)$: $+Q$. Déterminer l'ensemble des points M dans le plan (xOy) pour lequel $V = 0$.

IV- On considère un cylindre de rayon R, de longueur infinie, chargée uniformément en volume par une densité volumique $\rho = \rho_0$ ($\rho_0 > 0$). On désire déterminer le champ électrostatique $\vec{E}$ et le potentiel électrostatique V créés par cette distribution en tout point M de l'espace (Voir figure).

a- Quelle est la direction du champ électrostatique $\vec{E}$(M) et de quelle(s) variable(s) dépend sa norme ?
b- Après avoir justifié de l'application du *théorème de Gauss* pour le calcul du champ électrostatique $\vec{E}$(M), exprimer le champ $\vec{E}$(M) dans les cas suivants : ($r > R$) et ($r < R$).
c- En déduire le potentiel électrique $V(r)$ dans les deux cas ci-dessus. On prendra en un point de donné r_0 ($r_0 > R$) le potentiel $V(r_0) = 0$.
d- Tracer les variations de la norme du champ électrique $\vec{E}(r)$ en fonction de r.



VALIDE UMD 2025

Scanned with CamScanner

L1 MATH-INFORMATIQUE
UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

2020-2021

EXAMEN D'ÉLECTROMAGNETISME

Session 2

Durée : 2H

Il est rappelé aux étudiants que :

- **Aucun document n'est autorisé**
- **Les Smartphones doivent rester éteints**

ECUE 2 : ÉLECTROSTATIQUE (10 points)

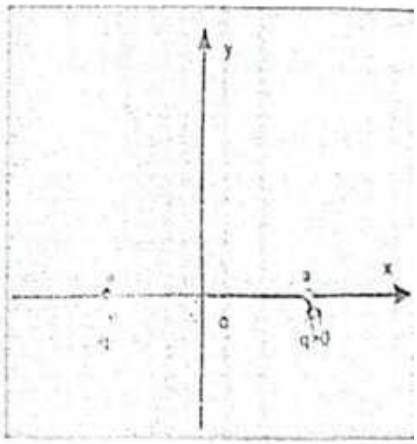
Exercice 1

Une spire de rayon α et d'axe (Ox) est chargée uniformément par une densité de charge linéique λ_0. Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}$ en un point M quelconque sur l'axe (Oz) en fonction de $\lambda_0, z, a, \epsilon_0$.

Exercice 2

On travaille en coordonnées cartésiennes d'origine O. On considère une charge $q > 0$ placée en P $(x = a, y = 0, z = 0)$ et une autre charge ponctuelle opposée $-q$ placée en N $(x = -a, y = 0, z = 0)$. On s'intéresse au champ en un point $M(x, y, z)$. Voir figure ci-dessous comme illustration.

1) En utilisant les symétries, que peut-on dire de la direction du champ (Montrer par un schéma) ?
   - En un point M $(x = 0, y, z)$
   - En un point M $(x, y = 0, z = 0)$
2) Déterminer l'expression du champ sur l'axe Ox. On distinguera trois cas $(x < -a\,; -a < x < a\,; x > a)$
3) Tracer E en fonction de x.
4) Déterminer l'expression du champ en un point M de l'axe Oy.
5) Tracer E en fonction de y.
6) Déterminer l'expression du potentiel V au point O.



VALIDE UFHB 2025

Scanned with CamScanner

L1 MATH-INFORMATIQUE 2020-2021
UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

ECUE 2 : ELECTROCINETIQUE (10 points)

EXERCICE 1

1. Déterminer le potentiel au point A en utilisant le pont diviseur de tension.
2. En déduire les intensités de courant dans les différentes branches.

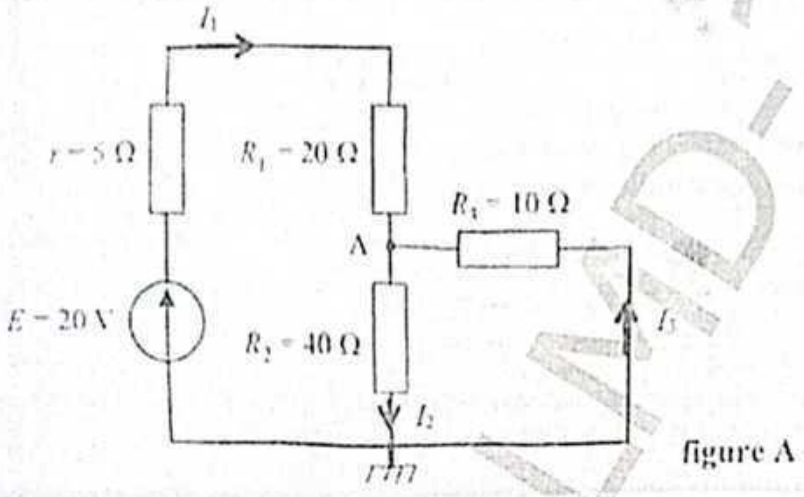


figure A

EXERCICE 2

1. Exprimer puis calculer l'intensité I du courant qui traverse R_3 de le **figure B** en utilisant le théorème de superposition.
   A.N : $E_1 = 10V, I_0 = 0.1A,\ R_1 = 10\Omega, R_2 = R_4 = 15\Omega,\ R_3 = 8\Omega, R_5 = 5\Omega.$

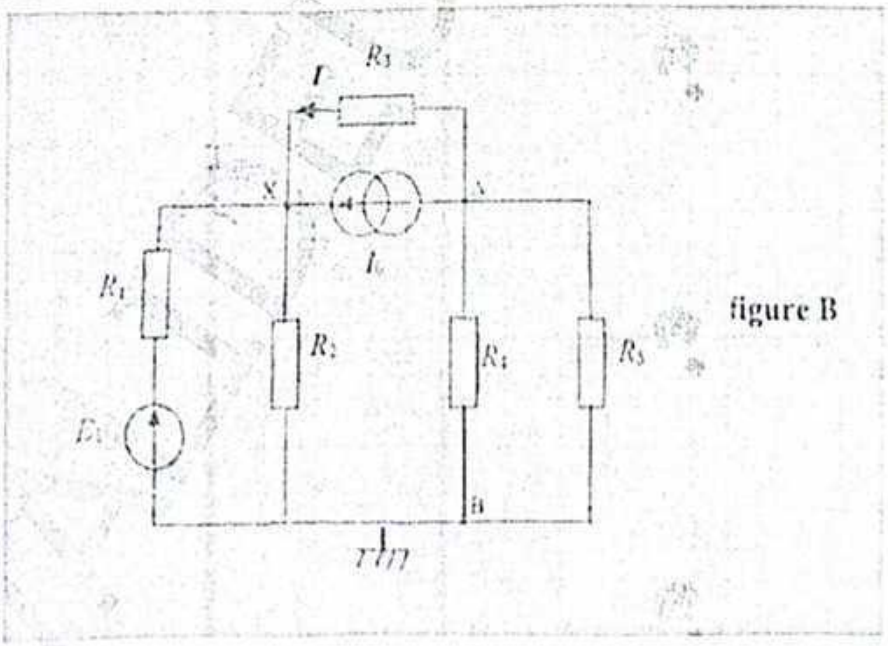


figure B

Scanned with CamScanner

EXAMEN D'ÉLECTRICITE

ECUE 1 : ELECTROSTATIQUE (SESSION 2)

Durée : 1H

Exercice 1

1) Sur un axe *x'ox* d'origine O sont placées :
   - Une charge ponctuelle *(+3q)* en O.
   - Une charge ponctuelle *(-q)* en *A*, d'abscisse *x*=a (a > 0)

a) Déterminer le potentiel électrique *V(x)* et le champ électrique *E(x)* aux divers points de l'axe *x'ox*.

Une charge ponctuelle positive *q'* peut se déplacer sans frottement sur l'axe *x'ox*.

b) A quelle condition cette charge est en équilibre sur l'axe *x'ox* ?

c) Déterminer la ou les positions d'équilibre de cette charge mobile

d) Déterminer la stabilité de cette équilibre (instable ou stable) ?

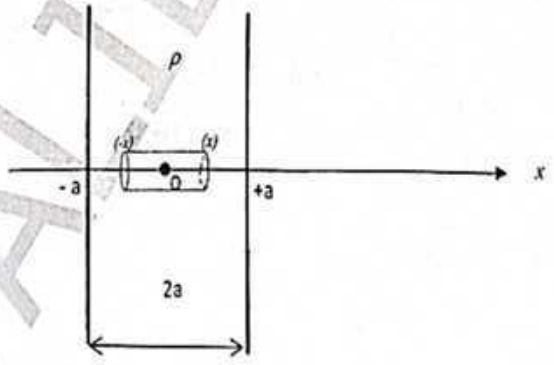
NB : Un équilibre est stable si $\frac{df}{dx} < 0$ *sinon il est instable. f étant la force électrostatique exercée sur cette charge ?*

Exercice 2 : Champ d'une couche électrisée entre deux plans

1) Montrer en appliquant ***le théorème de Gauss*** que le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ est : $E = \sigma/\varepsilon_0$

2) On s'intéresse maintenant au champ électrostatique créé par une distribution constituée entre deux plans infinis situés en *x*= -a et *x*= +a symétriques par rapport au point O. L'intérieur des plans est chargé par une densité de volumique de charge de densité $\rho > 0$ uniforme et positive. A l'extérieur, on considère que la charge est surfacique et se repartie sur une surface infinie d'épaisseur 2a.

   a) Déterminer la direction et les variables dont dépend le champ **E** à l'intérieur des plans.
   b) Que peut-on dire du plan π passant par O et perpendiculaire à l'axe (*Ox*)? En déduire la relation entre les vecteurs **E***(x)* et **E***(-x)*.
   c) En appliquant le théorème de Gauss sur le cylindre de hauteur *h*=2x, déterminer le champ **E** en fonction de ρ :
      - à l'interieur des plans -a < *x* <+a
      - à l'extérieur des plans |x|<a
   d) En déduire le potentiel électrique **V** en tout point de l'espace. On prendra V(O) =0.



VALIDEUR LMD-2025
Scanned with CamScanner

EXAMEN D'ÉLECTRICITE

ECUE 2: ELECTROCINETIQUE (SESSION 2)

Durée : 1H

EXERCICE 1:

Soit le circuit de la figure A ci-dessous avec : E_1= 5V ; E_2= 3V et R= 1Ω.

1- Déterminer la résistance équivalente R_{CA} entre C et A.
2- Quelle est la différence de potentiel $U_{AB} = V_A - V_B$?
3- En déduire l'intensité du courant I_1.
4- Déterminer l'intensité du courant I débité par le générateur E_1.
5- En déduire l'expression et la valeur de l'intensité du courant I_2 circulant dans E_2. Quel est alors le fonctionnement de E_2 (générateur ou récepteur) ?

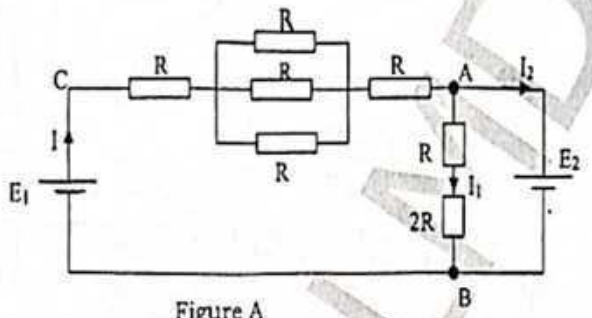


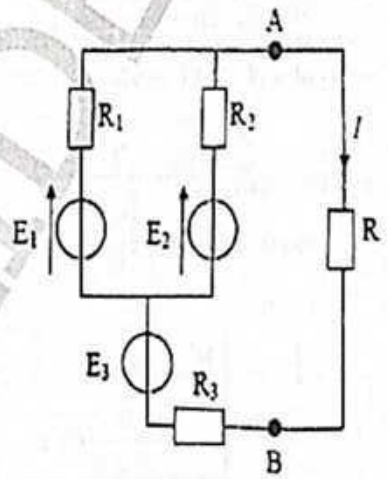
Figure A

EXERCICE 2

Dans la **figure B**, déterminer l'intensité du courant I dans la résistance R en utilisant le **théorème de Thévenin.** (*Les équivalences des générateurs de Norton ↔ Thévenin peuvent vous être utiles).*

AN: $E_1 = 3V$, $E_2 = 1V$, $E_3 = 2V$, $R_1 = R_2 = R_3 = 2\Omega$, $R = 5\Omega$.

Figure B



VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UFHB
UFR-MI

Année universitaire 2021-2022

EXAMEN DE PHYSIQUE L1

ECUE 1 : EPREUVE D'ELECTROSTATIQUE PREMIERE SESSION.

Durée 1 h 30mn.

Exercice1

On considère un disque de rayon R, de centre O, portant une densité de charge surfacique $\sigma > 0$.

1) En s'appuyant sur les éléments de symétrie retrouver, par un calcul direct, le champ $\vec{E}$ créé par le disque en un point M de son axe $z'Oz$ ($OM = z > 0$).
2) Que devient ce champ $\vec{E}$ lorsque le rayon R du disque tend vers l'infini?
3) On considère un plan portant une densité de charge surfacique $\sigma > 0$, percé d'un trou circulaire de centre O et de rayon r (figure 1). En s'appuyant sur le principe de superposition, calculer le champ en un point M de l'axe $z'Oz$ du trou.

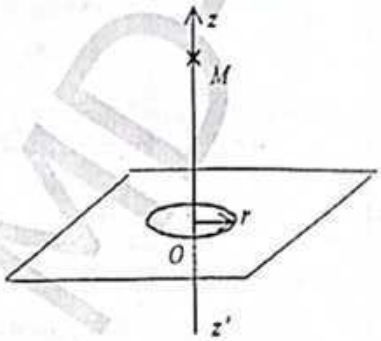


Figure 1

Exercice 2

Aux quatre sommets d'un carré de centre O et de côte $a\sqrt{2}$, situé dans le plan xOy, sont fixées quatre charges q positives (voir figure 2).

1) En utilisant les éléments de symétrie déterminer le champ électrostatique au centre $O(0,0,0,)$ du carré. Quelle est son orientation au point $M(0,0,z)$?
2) Déterminer le potentiel électrique V au centre du carré.
3) Déterminer le potentiel électrique V en un point $M(0,0,z)$.
4) En déduire l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$ au point $M(0,0,z)$.
5) Un proton de charge $+e = q$ (e est la charge élémentaire) est mobile le long de l'axe z'Oz. Exprimer la force $\vec{F}$ que subit le proton lorsqu'il se trouve au point $M(0,0,z)$.
6) Calculer de deux façons différentes l'expression de l'énergie potentielle E_{p1} du proton lorsqu'il se trouve en un point quelconque $M(0,0,z)$:
   a) Par la méthode directe
   b) A l'aide du théorème de l'énergie cinétique.
7) Calculer l'énergie potentielle E_p, du système formé par les quatre charges.

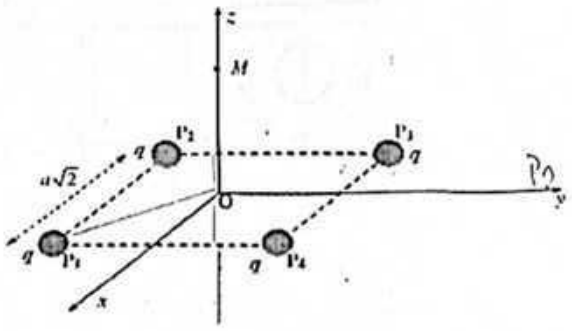


Figure 2

VALIDEUR LMD 2025
Scanned with CamScanner

UFHB *Année universitaire 2021-2022*

UFR-MI

ECUE 2 : EPREUVE D'ELECTROCINETIQUE PREMIERE SESSION.

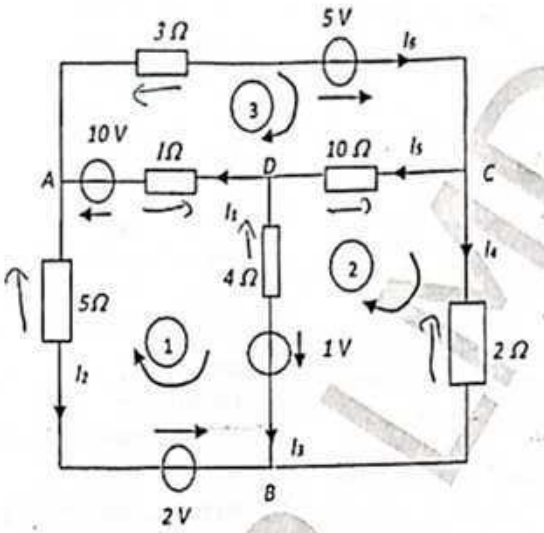
Durée 1 h 30 mn

Exercice 1

On considère le réseau représenté par la figure 1.

Déterminer les intensités des courants dans toutes les branches à l'aide des lois de Kirchhoff, le nœud *B* étant le nœud de référence et toutes les mailles orientées dans le sens horaire.

Figure 1

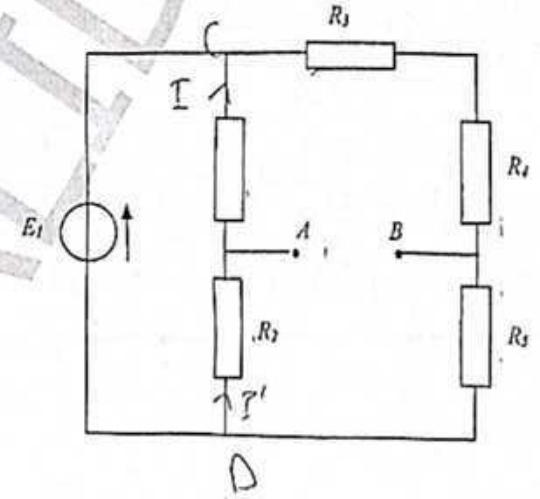


Exercice 2

Soit le réseau représenté par la figure 2 ci-dessous :

1) Quelle est l'expression de la résistance équivalente R_{TH} du dipôle actif vu entre les points *A* et *B*.
2) Donner l'expression de la f.é.m. E_{TH} du dipôle.
3) On monte entre les bornes du dipôle une résistance *R* en série avec une f.é.m. E_2. Calculer le courant *I* traversant la résistance *R* dans le sens *A* vers *B*.
4) Calculer la puissance dissipée dans cette résistance.
5) *AN : $R_1 = R_2 = R = 100\ k\Omega$; $R_3 = R_5 = 25\ k\Omega$; $R_4 = 50\ k\Omega$ et $E_1 = E_2 = 10\ V$*

Figure 2



VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UFHB *Année universitaire 2022-2023*

MI_LI

EXAMEN DE PHYSIQUE L1

ECUE 2 : EPREUVE DE L'ELECTROCINETIQUE PREMIERE SESSION JUIN 2023.

Durée 1 h

Exercice 1

On considère le réseau électrique représenté sur la figure ci-dessous. On se propose de calculer les courants circulants dans les différentes branches du réseau.

1. A l'aide des lois de Kirchhoff, écrire les équations nécessaires aux calculs du réseau électrique. Le nœud B est pris comme nœud de référence de potentiel zéro.
2. En utilisant la méthode des courants fictifs, écrire directement la relation matricielle $[R].[J] = [E]$, toutes les mailles étant orientés dans le sens horaire.
3. *A.N*: Calculer les courants fictifs. En déduire les courants réels du réseau électrique et les tensions V_A, V_C et V_D.

Exercice 2

Un générateur de f.é.m. $E = 100\ V$, de résistance interne négligeable, alimente par l'intermédiaire d'un conducteur ayant une résistance $R = 9\ \Omega$ un moteur dont la résistance $r = 1\ \Omega$.

1. Calculer le courant dans le circuit lorsque le moteur :

a) est calé,

b) tourne à vide.

2. Désormais le moteur fournit une puissance P.

a) Etablir la relation entre P et le courant I.

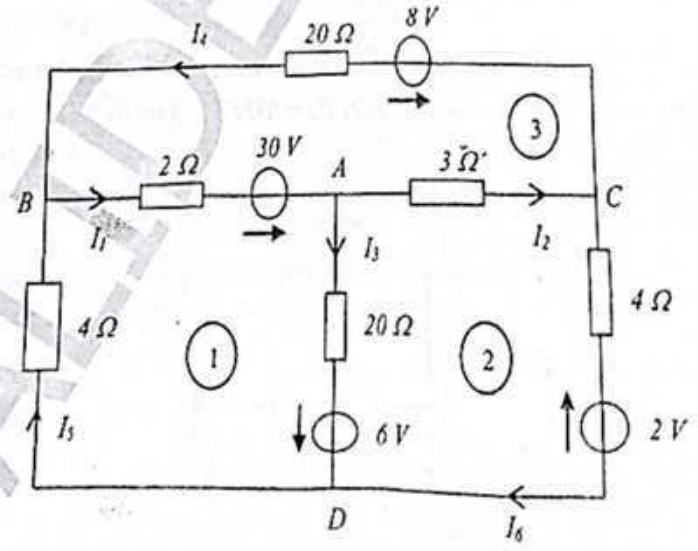
b) Quelle puissance maximale peut-on demander au moteur ?

3. La puissance $P = 160\ W$.

a) Calculer les deux valeurs possibles du courant dans le circuit.

b) Parmi les deux valeurs précédentes, quelle est celle qui correspond au meilleur rendement du montage ? Quel est ce rendement ?

N.B. On néglige les pertes mécaniques.



VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

UFH
MI_L1

Année universitaire 2022-2023

EXAMEN DE PHYSIQUE L1
ECUE 1 : EPREUVE DE L'ELECTROSTATIQUE PREMIERE SESSION JUIN 2023.
Durée 1h

Exercice 1

1. Décrire les différentses distributions de charges possibles. Comment s'écrit dQ dans chacun des cas ?
2. Donner l'expression du champ électrostatique créé par les différentes distributions (discrète ou continue) en un point M. Quelle est la loi sur laquelle on s'appuie pour exprimer ces champs ?
3. Définir une ligne de champ et un tube de champ.
4. Comment évoluent les lignes de champ au voisinage d'une charge positive / négative ?
5. Comment est le champ électrostatique par rapport à un plan de symétrie / d'antisymétrie d'une distribution de charges ?
6. Définir la circulation du champ électrostatique entre deux points A et B. Pourquoi dit-on qu'elle est conservative ?
7. Définir le potentiel électrostatique. Donner la relation entre potentiel et champ électrostatique.
8. Définir le flux du champ électrostatique.
9. Donner le théorème de Gauss.

Exercice 2

Un dipôle électrostatique de moment dipolaire $\vec{p} = qa\vec{i}$ est constitué de deux charges ponctuelles $-q$ et $+q$ placées dans le vide aux points A et B de l'axe (Ox) de part et d'autre de O. La distance $AB = a$. Un point M éloigné des charges est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z).

1. Calculer le potentiel $V(M)$ au point M *(les calculs seront faits à l'aide d'un schéma explicatif)*.
2. En déduire le champ électrostatique $\vec{E}(M)$, son module et son orientation au point M.

Le dipôle est maintenant placé dans un champ extérieur orienté suivant l'axe (Ox). Le potentiel V_0 de ce champ est nul à l'origine O $(V_0(O) = 0)$.

3. Donner l'expression du potentiel électrostatique total V_{Total} au point M.
4. Quelles sont les surfaces équipotentielles $V_{Total} = 0$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny *Année universitaire 2023-2024*

MI_ L1

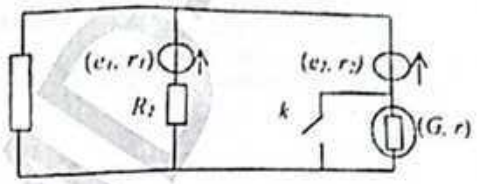
UE : Electricité. ECUE : Electrostatique

EXAMEN D'ELECTROCINETIQUE PREMIERE SESSION

Durée 1 h

Exercice 1

Le circuit électrique suivant est formé deux piles électriques (e_1, r_1)et (e_2, r_2), d'un galvanomètre (G, r), de deux résistances R_1 et R_2 et d'un interrupteur k (figure ci-contre)



A) k est fermé :

1. Donner les nombres de nœuds N, de Branches B et de mailles indépendantes M. Donner l'équation qui lie ces trois nombres.
2. En appliquant les lois de Kirchhoff, calculer les courants qui circulent dans chaque branche du circuit.
3. Calculer les puissances : fournies, consommées et perdues dans le circuit.
4. En déduire le rendement.

B) k est maintenant ouvert :

5. Pour quelle nouvelle valeur de la f.é.m. e_2 le galvanomètre G affiche un courant nul.

On donne : $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $e_1 = 12$ V, $r_1 = 2\ \Omega$, $e_2 = 9$ V et $r_2 = 1\ \Omega$.

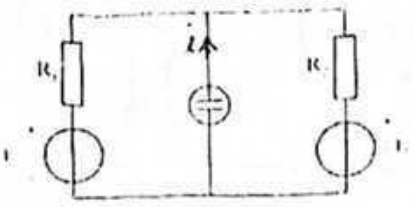
N.B : le galvanomètre est un appareil très sensible souvent employé dans les méthodes de zéro pour vérifier qu'un courant ou une différence de potentiel entre deux bornes s'annule. Il possède une résistance r.

Exercice 2

On considère le montage ci-dessous.

Le générateur de tension de *f.é.m.* $E_1 = 1{,}5$ V possède une résistance interne $R_1 = 6\ \Omega$; celui de *f.é.m.* E_2 a une résistance interne $R_2 = 6\ \Omega$. Le dipôle actif parcouru par le courant i est un électrolyseur de *f.c.é.m.* $E' = 1{,}5$ V et de résistance interne $R' = 3\ \Omega$.

1. En utilisant la transformation Thévenin-Norton déterminer le générateur de Thévenin équivalent, de caractéristiques (E_{Th}, R_{Th}), vu aux bornes de l'électrolyseur.
2. On a $E_2 = 6$ V. Déterminer le courant i dans l'électrolyseur.
3. Reprendre l'étude quand $E_2 = 1$ V. Déterminer à nouveau le courant i.
4. L'électrolyseur fonction-t-il dans les deux cas $E_2 = 6$ V, et $E_2 = 1$ V ? Justifier la réponse.



VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Université Félix Houphouët Boigny *Année universitaire 2023-2024*

MI_ L1

UE : Electricité. ECUE : Electrostatique

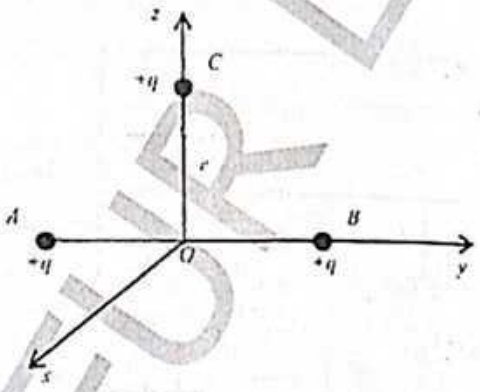
EXAMEN D'ELECTROSTATIQUE PREMIERE SESSION

Durée 1 h

Exercice 1

Aux points A et B de coordonnées respectives $(0, -a, 0)$ et $(0, a, 0)$ sont placées des charges identiques positive $(+q)$. Le point $C\ (0, 0, r)$ porte une charge mobile $(+q)$.

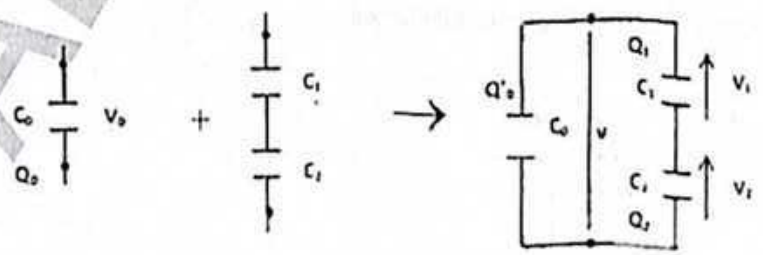
1) Calculer le champ électrostatique créé au point C.
2) Calculer la force électrostatique $\overrightarrow{F_e}(C)$ que subit la charge mobile $(+q)$ au point C.
3) Calculer les positions de la charge mobile pour que $\overrightarrow{F_e}(C)$ soit maximal.
4) Calculer la position d'équilibre.
5) Calculer l'énergie potentielle électrostatique de ce système à la position d'équilibre.
6) Montrer qu'elle est minimale dans cette position.



Exercice 2

Soit un condensateur plan de capacité $C_0 = 100\ \mu F$ portant une charge initiale $Q_0 = 600\ mC$.

1) Calculer sa tension initiale V_0 et son énergie potentielle initial E_0. Ce même condensateur est ensuite relié à deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 monté en série et initialement décharges (figure ci-dessous).
2) Calculer la charge et la tension de chaque condensateur.
3) Calculer l'énergie potentielle finale E.
4) En déduire ΔE.



VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

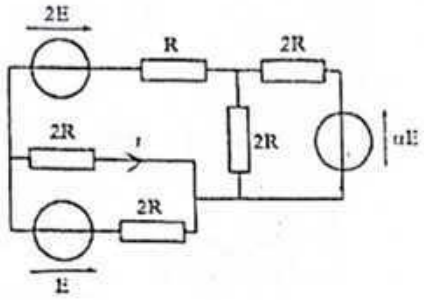
UFR MATH-INFORMATIQUE
UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

2023-2024

EXAMEN D'ÉLECTRICITE
LI MATH-INFO
ECUE 2 : ELECTROCINETIQUE-SESSION 2
Durée : 1H

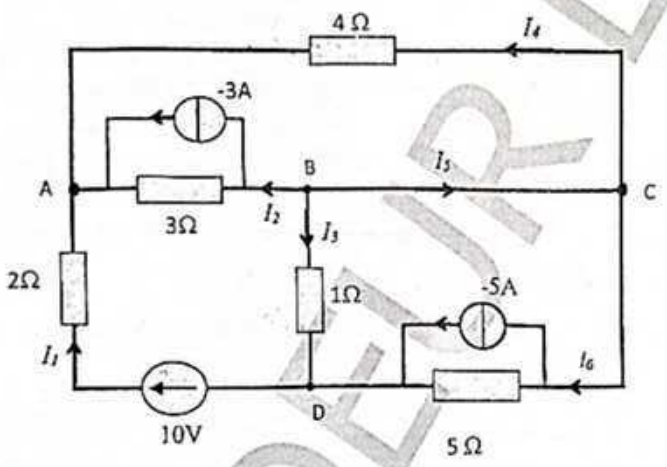
Exercice 1 : Méthode des équivalences des générateurs (6 points)

En utilisant la méthode des équivalences des générateurs de Thévenin ↔ Norton, déterminer l'expression de l'intensité du courant *i* en fonction de α, E et R.



Exercice 2 : Méthode de Kirchhoff (12 points)

Soit le réseau ci-dessous constitué de résistances, de générateurs de courant et de tension :



1. Déterminez le nombre de mailles indépendantes du circuit électrique ci-dessus.
2. Après avoir transformer le circuit électrique établir :
   a- La loi des nœuds aux différents nœuds A, B et D (Nœud C étant la référence)
   b- La loi des mailles appliquée différentes mailles indépendantes dont le sens positif sera choisi dans le sens trigonométrique pour chacune des mailles.
3. Calculer les intensités de courants dans les différentes branches du circuit en s'appuyant sur les équations de la question 2.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

L1 MATH-INFORMATIQUE
UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

2023-2024

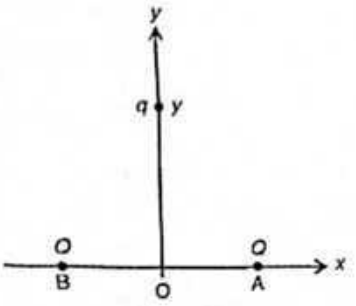
EXAMEN D'ÉLECTRICITE

ECUE 1 : ELECTROSTATIQUE-SESSION 2

Durée : 1H

Exercice 1 : Charges ponctuelles(8pts)

On considère deux charges égales Q positives placées sur un axe Ox en deux points A et B d'abscisses respectives $+a$ et $-a$ et une charge q placée sur l'axe Oy en un point M d'ordonnée y positive quelconque :



a. Quelle est la force électrostatique résultante s'exerçant sur la charge q.

b. Déterminer en fonction de Q la charge Q_0 qui, placée en O, exercerait la même force sur q que le couple de charges placées en A et B.

c. Montrer que si $y \gg a$, on a : $Q \approx 2Q_0$.

d. À partir de quelle distance y_0 peut-on considérer que cette charge Q_0 est égale à 2Q à 5 % près ? Application numérique : $a = 10^{-2}$ m.

Exercice 2 : Sphère chargée(12pts)

Une sphère (S) de rayon $R = 2\ cm$ et de centre O porte une charge totale $Q \geq 0$ distribuée uniformément en volume. On notera que tout point M de l'espace est repéré par le vecteur et que le potentiel électrique créé par (S) est nul à l'infini :

1- a) En utilisant le théorème de Gauss, établir l'expression du champ électrique créé par (S) pour r > R.

b) En déduire l'expression du potentiel électrique V(r) pour cette région.

2. a) Calculer le flux F1 du champ électrique à travers la sphère, de centre O et de rayon R1 = 30 cm, sachant que $E(R_1) = 4{,}103$ V/m.

b) Quelle relation y a-t-il entre le flux F_1 et le flux F_2 du champ électrique à travers la sphère de centre O et de rayon R_2 ($R_2 > R_1$) ?

3. a) Calculer la charge totale de (S) ainsi que sa densité volumique de charge ρ.

b) Calculer les potentiels $V(R1)$ et $V(R2)$.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

ECUE 2 : Electrostatique (Session 1) 2020-2021

I. $\sigma(\theta) = \sigma_0 sin\theta$ avec $\sigma_0 = cte.$

Donnons l'expression d'une surface élémentaire ds sur la sphère.

$ds = R^2.sin\theta.d\theta.d\varphi$; $dq = \sigma(0).ds$

L'expression de la charge totale Q de la sphère .

Soit Q la charge totale de la sphère.

$Q = \int\int_s \sigma ds$ avec $\sigma(\theta) = \sigma_0 sin\theta.$

$$Q = \int\int_s \sigma_0 sin\theta.ds$$

$$Q = \int\int_s \sigma_0 sin\theta.R^2.sin\theta.d\theta.d\varphi$$

$$Q = \sigma_0 R^2 \int_0^{\pi} sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Car $\theta \in [0;\pi]$ et $\varphi \in [0;2\pi]$

$$Q = \sigma_0 R^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$Q = \frac{1}{2}\sigma_0 R^2 \left[\int_0^{\pi} d\theta - \int_0^{\pi} (\cos(2\theta))\, d\theta\right] \int_0^{2\pi} d\varphi$$

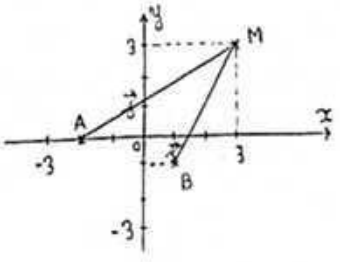
$$Q = \frac{1}{2}\sigma_0 R^2 \left[[\theta]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi}\right].[\varphi]_0^{2\pi}$$

$$Q = \frac{1}{2}\sigma_0 R^2.\pi.2\pi$$

$$\boxed{Q = \sigma_0 R^2.\pi^2}$$

D'où l'expression de la charge totale Q.

III. $A(-2,0) : -3Q$ et $B(1,-1) : +Q$



VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Déterminons l'ensemble des points M dans le plan (xOy) pour lequel $V = 0$.

$V(M) = V(A) + V(B)$. D'après le théorème de superposition.

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times -\frac{3Q}{AM} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{Q}{BM}$$

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{3}{AM} + \frac{1}{BM}\right)$$

Avec

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-0 \end{pmatrix} \Rightarrow AM = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} \Rightarrow BM = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{3}{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}}\right)$$

On sait que $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \neq 0$ alors pour $V = 0$

$$\Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

Après les calculs, on obtient :

$$\Rightarrow \left(x - \frac{11}{8}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{8}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{10}}{8}\right)^2$$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre $(\frac{11}{8}; -\frac{9}{8})$ et de rayon $\frac{3\sqrt{10}}{8}$.

IV.

a) Direction du champ $\vec{E}(M)$

*Système de coordonnées.

Le repère de cylindrique (r, θ, z) est mieux adapté à notre étude, donc chaque point aura pour coordonnée $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$. Par raison de symétrie le champ $\vec{E}$ est porté par le vecteur $\overrightarrow{e_r}$. Par raison d'invariance la norme du champ $\vec{E}$ dépend de la variable r.

Donc $\vec{E}(M) = E_r\overrightarrow{e_r}$

VALIDEUR LMD-2025

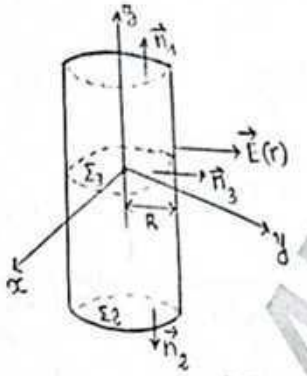
Scanned with CamScanner

b)

$$\phi = \iint \vec{E}(r)\overrightarrow{ds} = \iint \vec{E}(r)\vec{n}.ds = \frac{\Sigma Q_{int}}{\epsilon_0}$$

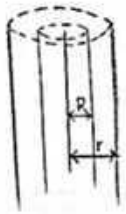
$$\phi = \iint \vec{E}(r)\overrightarrow{n_1}ds + \iint \vec{E}(r)\overrightarrow{n_2}ds + \iint \vec{E}(r)\overrightarrow{n_z}ds$$

$$\phi = \iint E(r)\overrightarrow{n_z}ds$$



$$\phi = E.ds = E \times 2\pi r l_2$$

1er cas $(r > R)$



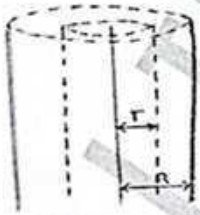
$$\Sigma Q_{int} = \rho_0 V = \rho_0 . \pi R^2 h$$

$$\Rightarrow E \times 2\pi r h = \frac{\rho_0 . \pi R^2 h}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho_0 . R^2}{2r\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho_0 . R^2}{2r\epsilon_0}\overrightarrow{e_r}$$

2ème cas $(r < R)$



$$\Sigma Q_{int} = \rho_0 . V = \rho_0 . \pi r^2 h$$

$$\Rightarrow E \times 2\pi r h = \frac{\rho_0 . \pi r^2 h}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho_0 . r}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho_0 . r}{2\epsilon_0}\overrightarrow{e_r}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

c) $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,\vec{V} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e_r}$

$V = -\int E.dr$

1er cas $(r > R)$

$$V = -\int \frac{\rho_0.R^2}{2r\epsilon_0}.dr = -\frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\ln(r) + k_1; k_1 \in \mathbb{R}$$

2ème cas $(r < R)$

$$V = -\int \frac{\rho_0.r}{2\epsilon_0}.dr = -\frac{\rho_0.r^2}{4\epsilon_0} + k_2; k_2 \in \mathbb{R}$$

On prend un point donné $r_0(r_0 > R)$, le potentiel $V(r_0) = 0$

$$V(r_0) = -\frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\ln(r_0) + k_1 = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\ln(r_0)$$

Donc $V(r > R) = -\frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\ln(r) + \frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\ln(r_0) = \frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$

Comme $V(r)$ est une fonction continue au point $r = R$, par conséquent

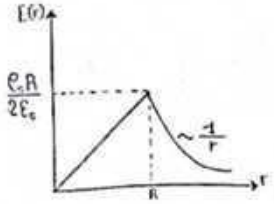
$$\lim_{r\to R^-} V(r) = \lim_{r\to R^+} V(r) \Rightarrow -\frac{\rho_0.R^2}{4\epsilon_0} + k_2 = \frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{r_0}{R}\right)\right)$$

Finalement

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right) & r > R \\ -\frac{\rho_0.r^2}{4\epsilon_0} + \frac{\rho_0.R^2}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{r_0}{R}\right)\right) & r < R \end{cases}$$

4) Traçons les variations de E.



VALIDEUR LMD-2025

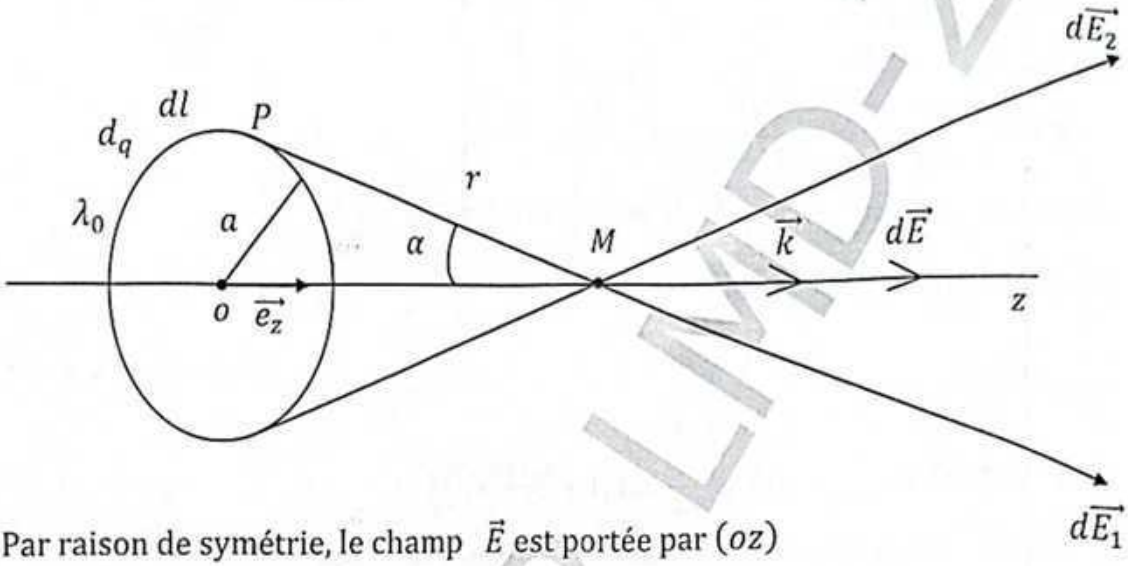
Scanned with CamScanner

CORRECTION EXAMEN ELECTRICITE SESSION 2 2021
ECUE 1 : ELECTROSTATIQUE

EXERCICE 1

Déterminons l'expression du champ électrique $\vec{E}$ en un point quelconque sur l'axe (oz) en fonction de $\lambda_0, z, \alpha, \varepsilon_0$

Figure 1



Par raison de symétrie, le champ $\vec{E}$ est portée par (oz)

$$\Longrightarrow \vec{E}(M) = E_z\,\vec{e_z} = E_z\vec{k}$$

$$dE = dE_1.\cos\alpha = dE_2.\cos\alpha$$

$$dq_1 = dq_2 = dq = \lambda_0\, dl$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_1}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0\, dl}{(a^2+z^2)} \times \frac{z}{(a^2+z^2)^{1/2}}$$

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda_0\, dl\, z}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E = \int dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda_0\, dl\, z}{(a^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi a} dl$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

d'où

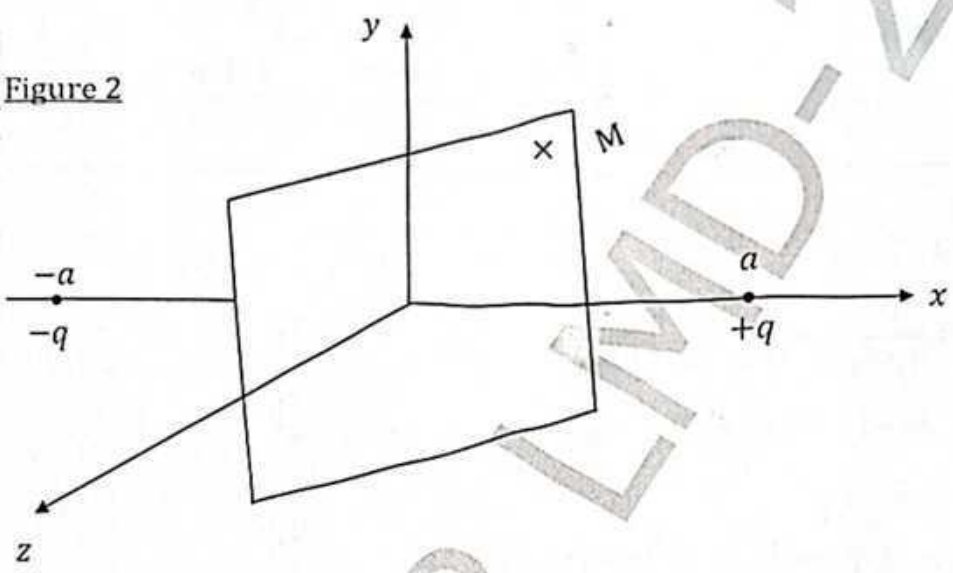
$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0\, a\, z}{2\,\varepsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}\,.\vec{k}$$

EXERCICE 2

1) En utilisant les symétries, que peut-on dire de la direction du champ

* En un point $M(x = 0, y, z)$

Figure 2



$M \in$ plan oyz plan d'antisymétrie donc $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire à ce plan

$\vec{E}(M) = E_x\,\overrightarrow{u_x}$

- En un point $M(x, y = 0, z = 0)$

M est sur l'axe Ox (voir figure)

$M \in$ plan Oxz plan de symétrie

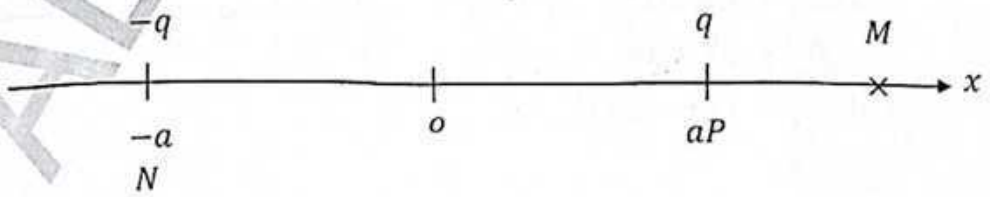
$M \in$ plan Oxy plan de symétrie

$\vec{E}(M) = E_x\,\overrightarrow{u_x}$

2) Déterminons l'expression du champ sur l'axe Ox

On écrire $\vec{E} = E_x\,\overrightarrow{u_x}$

Figure 3



VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Par le principe de superposition

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_N(M) + \vec{E}_P(M)$$

$$= \frac{-q\,\overrightarrow{NM}}{4\pi\varepsilon_0\left\|\overrightarrow{NM}\right\|^3} + \frac{q\,\overrightarrow{PM}}{4\pi\varepsilon_0\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} - \frac{\overrightarrow{NM}}{\left\|\overrightarrow{NM}\right\|^3}\right)$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x-a}{|x-a|^3} - \frac{x+a}{|x+a|^3}\right)\overrightarrow{u_x}$$

1er Cas

$x < -a$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-4ax}{(x^2-a^2)^2}\right)\overrightarrow{u_x} \qquad Car$$

$|x+a| = -(x+a)$ et $|x-a| = -(x-a)$

2ème Cas

$$-a < x < a \Rightarrow |x-a| = -(x-a)$$

$$|x+a| = x+a$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2}\right)\overrightarrow{u_x}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{-2(x^2-a^2)}{(x^2-a^2)^2}\overrightarrow{u_x}$$

3ème Cas

$$x > a \Rightarrow |x-a| = x-a$$

$$|x+a| = x+a$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x-a}{(x-a)^3} - \frac{x+a}{(x+a)^3}\right)\overrightarrow{u_x}$$

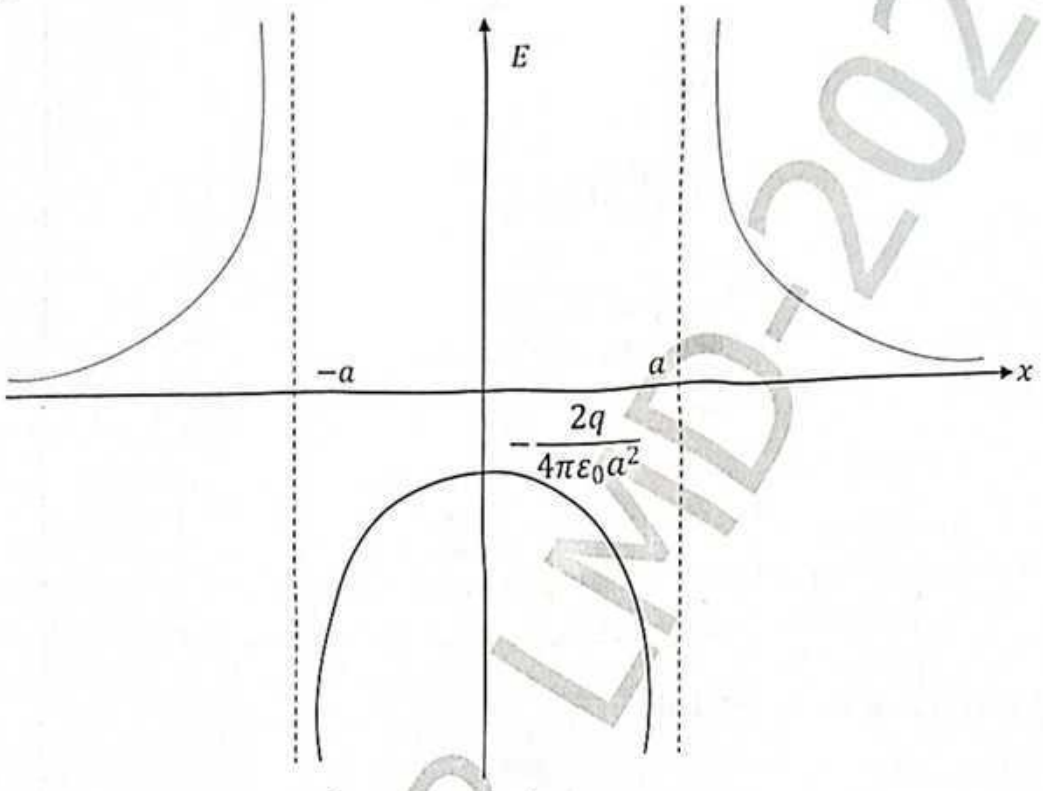
$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{4ax}{(x^2-a^2)^2}\overrightarrow{u_x}$$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

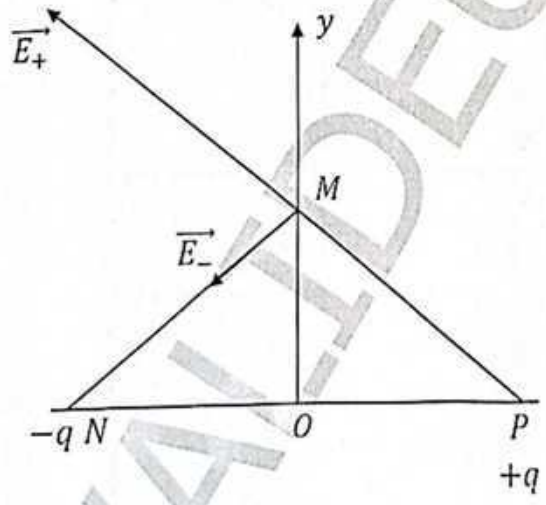
3) Traçons E en fonction de x

Figure 4



On remarque que E est une fonction paire de x.

4) Déterminons l'expression du champ en un de Oy



$$\overrightarrow{PM}\begin{vmatrix}-a\\ y\\ 0\end{vmatrix} \quad \overrightarrow{NM}\begin{vmatrix}a\\ y\\ 0\end{vmatrix}$$

D'après le théorème de superposition

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$\vec{E}(M) = \overrightarrow{E_+} + \overrightarrow{E_-}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\overrightarrow{NM}}{\left\|\overrightarrow{NM}\right\|^3}$$

On a :

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{-a}{(a^2+y^2)^{3/2}} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{a}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

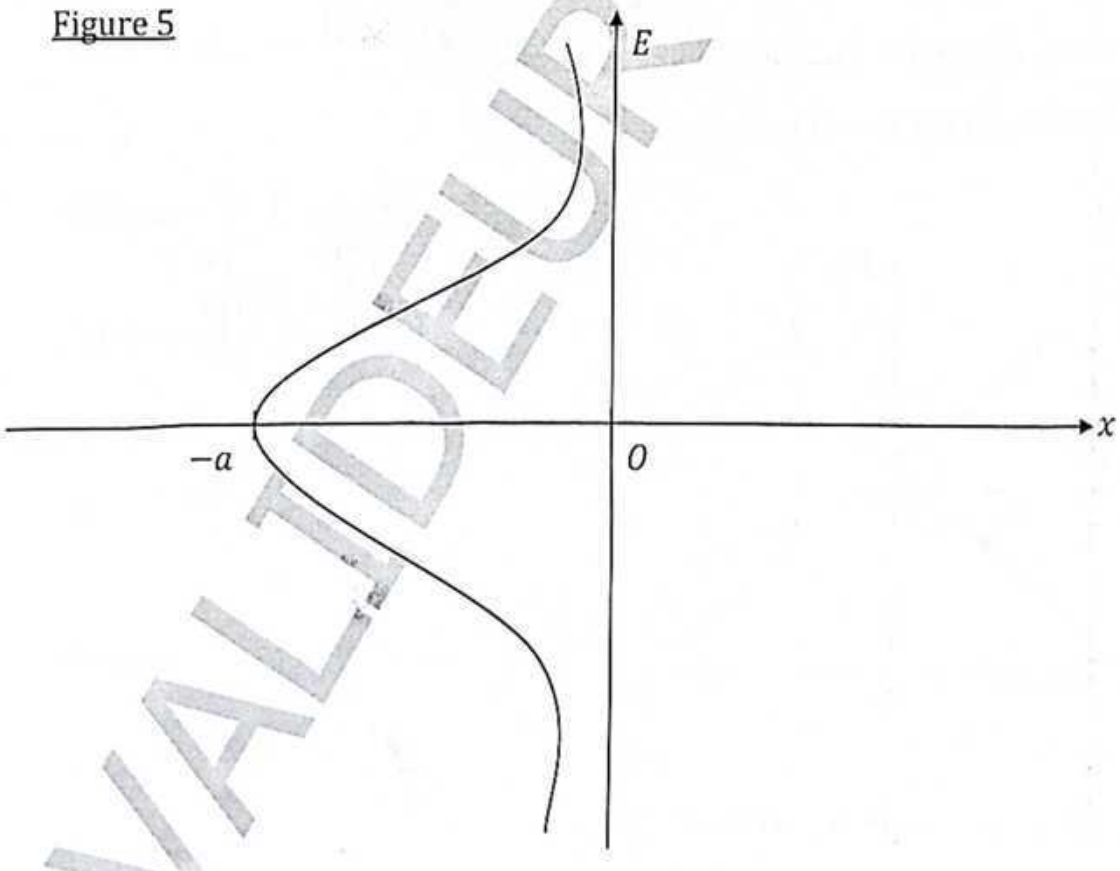
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{-2a}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{-2a\,q}{4\pi\varepsilon_0\,(a^2+y^2)^{3/2}}\overrightarrow{u_x}}$$

5) Traçons E en fonction de y

Figure 5



VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

6) Déterminons V au point O

$$V(O) = V(N) + V(\varphi)$$

$$= \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 NO} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PO}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{NO} + \frac{1}{PO}\right), \quad NO = PO = a$$

$$V(O) = 0$$

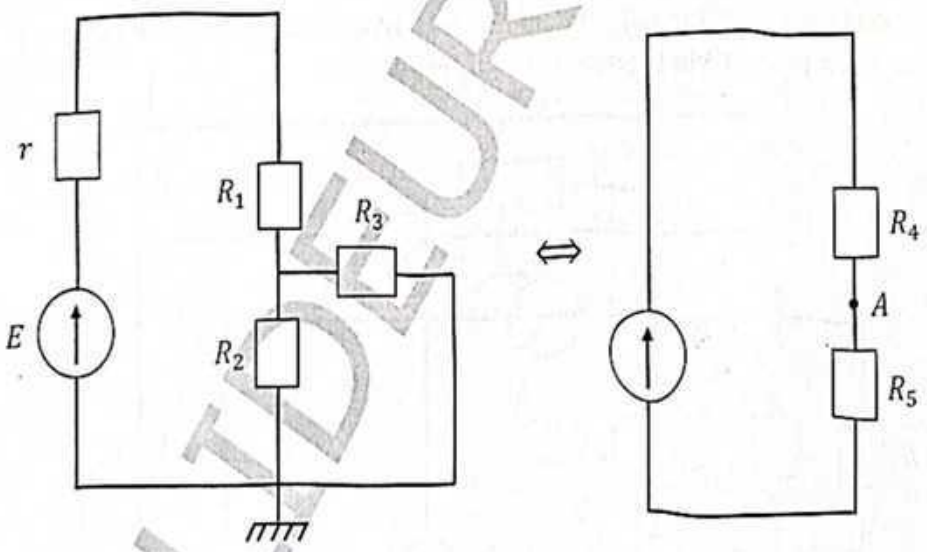
ECUE 2 : ELECTROCINETIQUE

EXERCICE 1

1) Déterminer le potentiel au point A en utilisant le pont diviseur de tension

Nous ne pouvons pas directement appliquer le principe du diviseur de tension au point A, compte tenu du fait qu'une dérivation est issue de ce point et que des courants différents circulent donc R_2 et R_3. En revanche, transformons légèrement la figure A comme indiqué ci-dessous

Figure A



$R_4 = r + R_1$ (association en série)

$$\frac{1}{R_5} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_3 + R_2}{R_2 . R_3}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$R_5 = \frac{R_2.R_3}{R_3 + R_2}$$

On peut appliquer le principe du diviseur de tension :

$$V_A = E \times \frac{R_5}{R_4 + R_5} \text{ ; AN: } V_A = 4{,}85\ V$$

2) Déduisons-en les intensités de courant dans les différentes branches

Le courant I_1 s'obtient en considérant qu'aux bornes de l'association série ($R_4 = r + R_1$) règne une différence de potentiel égale à $E - V_A$.

$$I_1 = \frac{E - V_A}{r + R_1} = \frac{20 - 4{,}85}{25} = 606\ mA$$

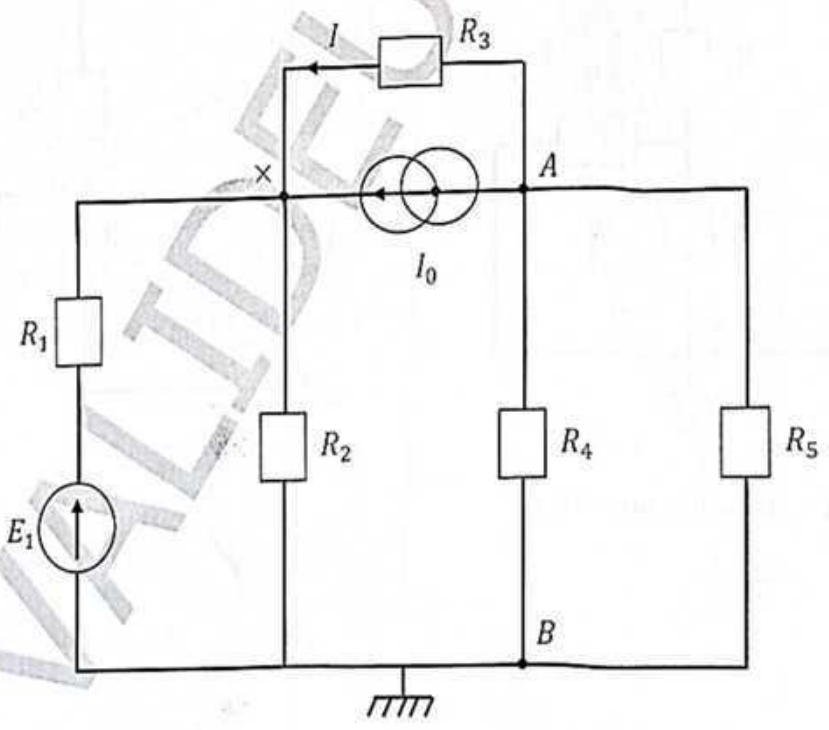
En appliquant la loi d'Ohm aux résistances R_2 et R_3, on obtient immédiatement :

$$I_2 = \frac{V_A}{R_2} = \frac{4{,}85}{40} = 121\ mA$$

$$I_3 = \frac{V_A}{R_3} = \frac{4{,}85}{10} = 485\ mA$$

EXERCICE

1) Exprimons puis calculons l'intensité du courant qui traverse R_3 de la figure B ci-dessous en utilisant le théorème de superposition



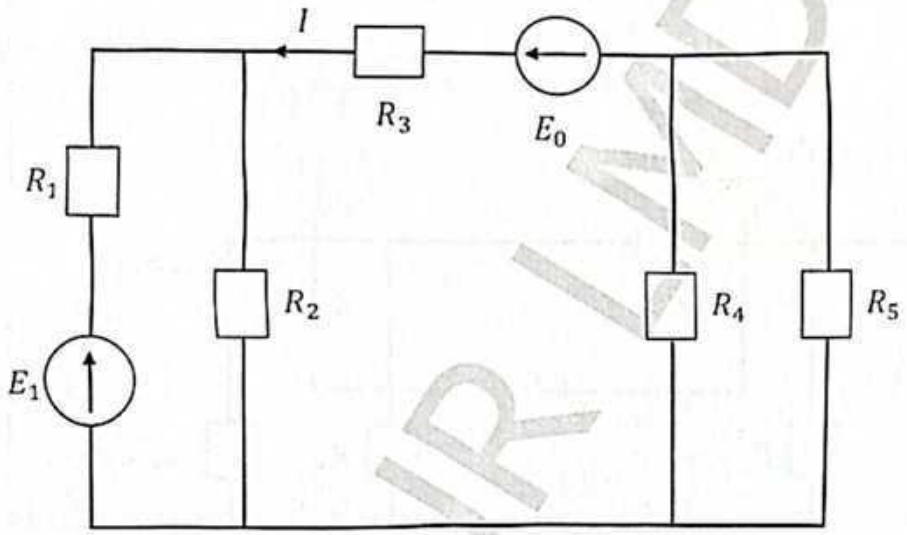
VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

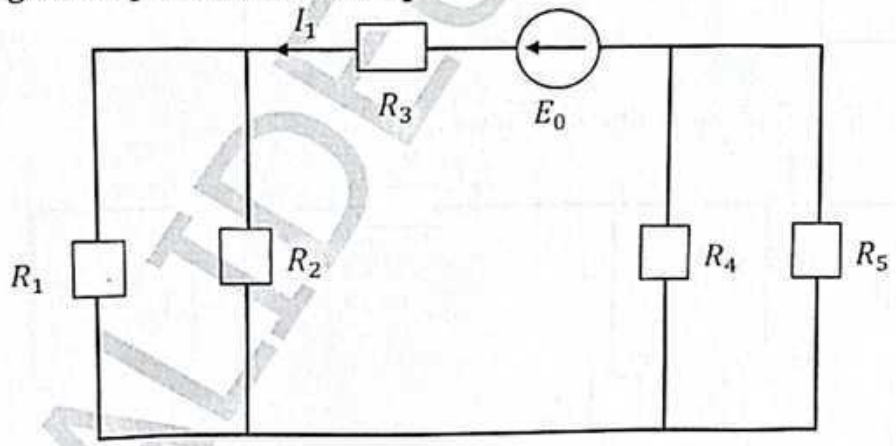
Figure *B*

Dans ce schéma nous pouvons considérer que la résistance R_3 est alimenté par le dipôle AX. Nous allons rechercher le générateur de Thévenin équivalent à ce dipôle AX (autrement dit du circuit démuni de sa résistance R_3), ce qui permettra de répondre facilement à la question. Dans ce dipôle AX, le générateur de courant I_0 placé en parallèle avec la résistance R_3 est équivalent à un générateur parfait de tension E_0 en série avec cette même résistance R_3. Avec $E_0 = R_3\, I_0 = 0{,}8\ V$

Après cette transformation, le dipôle AX se présente comme indiqué sur la figure

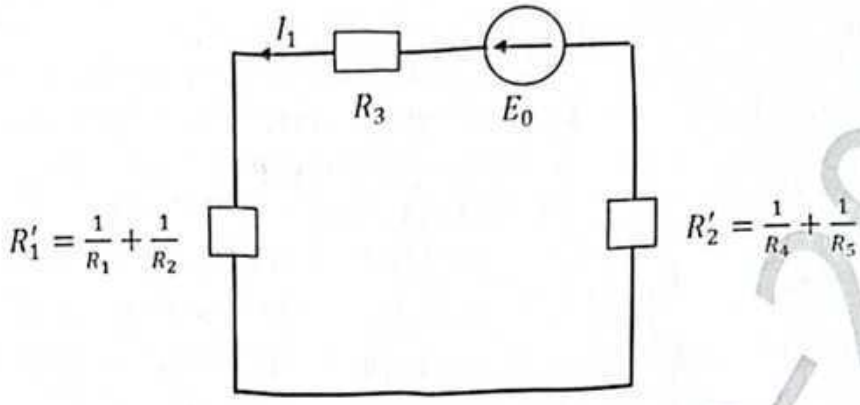


- Eteignons E_1 et déterminons I_1



VALIDEUR LMD-2025

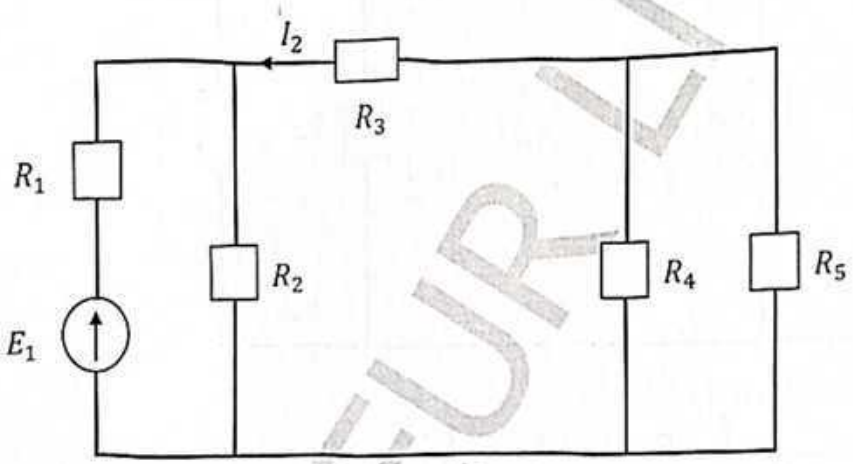
Scanned with CamScanner



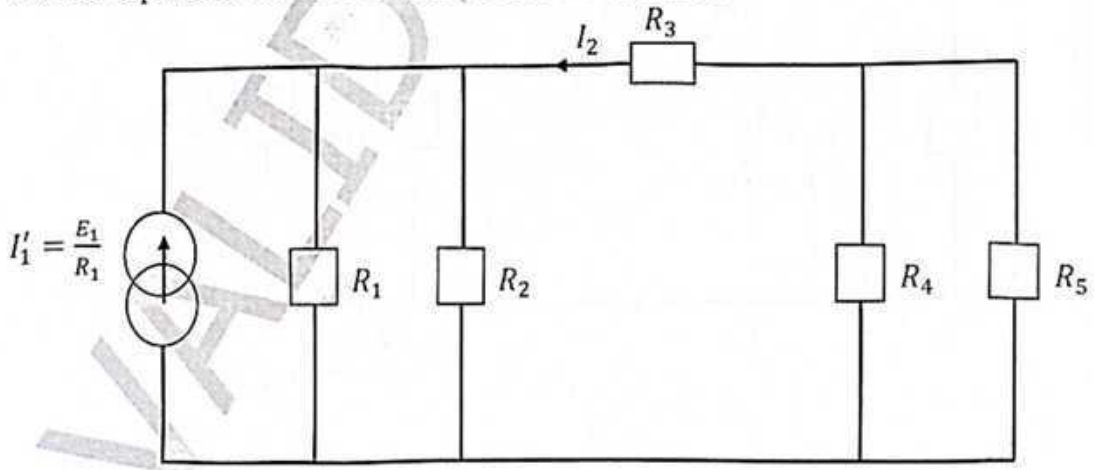
Appliquons Pouillet :

$$I_1 = \frac{\sum E + e}{\sum R + r} \Rightarrow I_1 = \frac{E_0}{R_1' + R_3 + R_2'}$$

- Eliminons E_0 et déterminons I_2

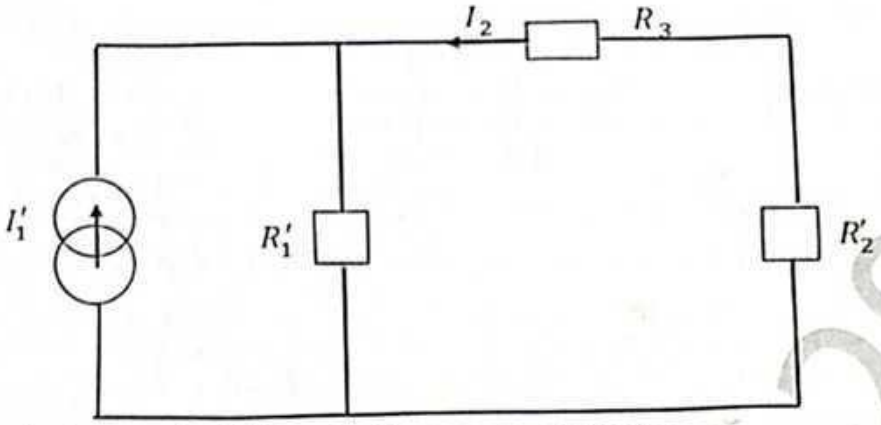


Par les équivalences de Thévenin-Norton on obtient :

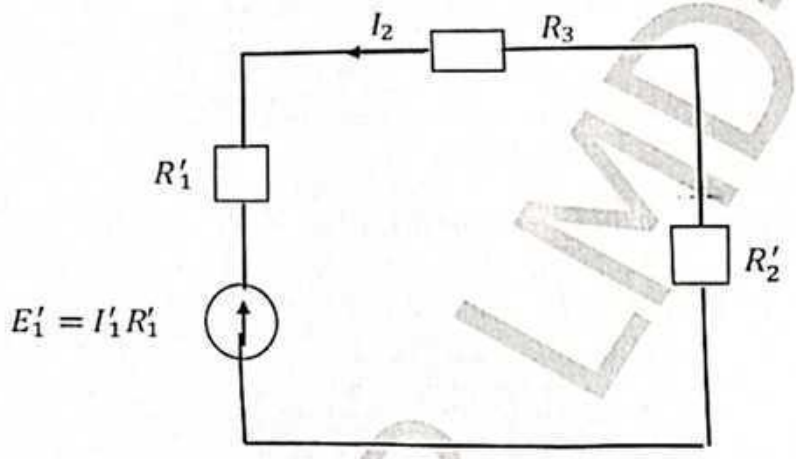


VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner



Par les équivalences de Thévenin Norton on obtient :



Appliquons Pouillet

$$I_2 = \frac{\sum E + e}{\sum R + r} \Rightarrow I_1 = \frac{-E_1'}{R_1' + R_3 + R_2'}$$

Finalement par le théorème de superposition

$$I = I_1 + I_2 \quad ; \quad I = \frac{E_0 - E_1'}{R_1' + R_3 + R_2'}$$

Avec $R_1' = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_1' = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \times R_2}$

$R_1' = \frac{15+10}{15*10} = 0{,}16\,\Omega$

$R_2' = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \Rightarrow R_1' = \frac{R_5 + R_4}{R_4 \times R_5}$

$R_2' = \frac{5+15}{5*15} = 0{,}16\ \Omega$

Et $I_1' = \frac{E_1}{R_1} \Rightarrow I_1' = \frac{10}{10} = 1A$

$E_1' = I_1' \times R_1' = \frac{10}{10} = 1 \times 0{,}16$

$E_1' = 0{,}16\,V$

d'où $I = \frac{0{,}8 - 0{,}16}{0.16 + 8 + 0.26} = 0{,}076\ A$

donc, $I = 76\,mA$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Corrigé électricité session 1 année 2021-2022

exercice 1

1) Tout plan contenant Oz est un plan de symétrie, donc sur l'axe $\vec{E} // \overrightarrow{Oz}$.
Le champ créé par un élément de surface dS est: $\overrightarrow{d^2E} = K\dfrac{\sigma\, dS}{PM^2}\vec{u}_{PM}$

avec $dS = dr\, r d\theta$ et $PM = \dfrac{z}{\cos\alpha}$ $\quad \overrightarrow{d^2E} = \dfrac{K r\, dr\, d\theta}{z^2}\sigma\cos^2\alpha$

Le champ dE_z créé par la couronne comprise entre les deux rayons r et $r + dr$ est :

$$dE_z = \frac{K r dr}{z^2}\sigma\cos^3\alpha \int_0^{2\pi} d\theta = K\frac{2\pi r\, dr}{z^2}\sigma\cos^3\alpha$$

On a, pour tous les éléments de la couronne :

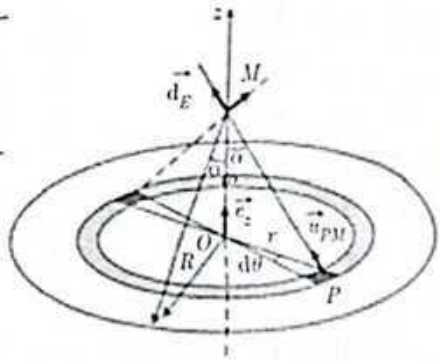
$$\tan\alpha = \frac{r}{z} \Longrightarrow \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{dr}{z}$$

$$dE_z = K\,\frac{2\pi}{z^2} z(\tan\alpha) z\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}\sigma\cos^3\alpha$$
$$= K 2\pi\sigma\sin\alpha\, d\alpha$$

Le champ E_z créé par le disque de rayon R est donc :

$$E_z = K\,2\pi\sigma\int_0^{\alpha_0}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\cos\alpha_0)$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{(z^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\vec{e}_z}$$



2) Quand R tend vers l'infini, alors :

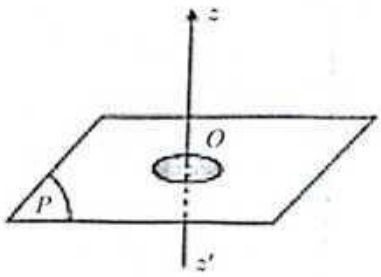
$$\boxed{\vec{E} \longrightarrow \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z}$$

3) D'après le principe de superposition, le champ $\vec{E}$ créé par le plan percé d'un trou est :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

où $\vec{E}_1$ est le champ créé par le plan infini chargé avec une densité $+\sigma$,

$\vec{E}_2$ est le champ créé par le disque chargé avec une densité $-\sigma$,



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} + \left[-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{(z^2+r^2)^{1/2}}\right)\right]\vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\frac{z}{(z^2+r^2)^{1/2}}\,\vec{e}_z}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

EXERCICE 2

1 - Par raison de symétrie le champ électrostatique crée au centre du carré est nul et en un point M (0, 0, z), il est suivant l'axe z

2 – Déterminons le potentiel électrique V au centre du carré

$V = \sum_{i=1}^{4} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 P_i O}$ $\quad avec \quad P_1O = P_2O = P_3O = P_4O = a\ (Pythagore)$

$P_1P_3^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 4a^2 \quad => P_1P_3 = 2a \quad$ Or $P_1O = \frac{P_1P_3}{2}$

$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q \quad Alors\ V = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 a}$

3 – Déterminons le potentiel électrique en un point M (0, 0, z)

$V = \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 P_1 M}$ Déterminons P_1M. $P_1M = \sqrt{z^2 + a^2}$ Alors $V = \frac{q}{\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+a^2}}$

4 – Expression de $\vec{E}$ en un point M

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z\right) = \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\vec{E} = \frac{qz}{\pi\varepsilon_0(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_z$$

5 - $\vec{F} = e\vec{E}$

6 – a- Expression de E_{P1} par la méthode directe

$E_{P1} = eV \quad (V\ c'est\ l'expression\ du\ potentiel)$

-b- à l'aide du théorème de l'énergie cinétique

$\Delta E_C = \sum W(\vec{f}_{ext}) = \frac{1}{2}mV_\infty^2 - \frac{1}{2}mV_M^2 = W(\vec{f}_c) + W(\vec{f}_{équateur})$

Or $V_\infty = V_M = 0 => W(\vec{f}_c) = -W(\vec{f}_{équateur})\ avec\ W(\vec{f}_{équateur}) = E_{Pi} - E_{Pf}$

Or $E_{Pi} = 0 => W(\vec{f}_{équateur}) = -E_{Pf}$

$$W(\vec{f}_c) = -(-E_{Pf}) => W(\vec{f}_c) = E_{Pf} \quad donc\ W(\vec{f}_c) = E_{P1}$$

7 - Expression de E_{P2} formée par ces 4 charges $E_{P2} = \sum_{i=1}^{4} Q_i V_i = 2eV$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

CORRECTION ECUE 2 ELCTROCINETIQUE SESSION 1 2021-2022

EXERCICE 1

Déterminons les intensités dans toutes les branches

Nombre de nœuds dépendants : n=4 Nombre de nœuds indépendants: N= (n-1)=3

Nombre de branches : b=6 Mailles indépendantes : M = b-N = 3

Loi des nœuds Loi des mailles

- Nœuds A : $I_1 = I_6 + I_2$ mailles 1 : $I_1 - 4I_3 + 5I_2 - 11 = 0$
- Nœuds C : $I_6 = I_4 + I_5$ mailles 2 : $I_3 + 10I_5 - 2I_4 - 1 = 0$
- Nœuds D : $I_5 = I_3 + I_1$ mailles 3 : $I_1 + 3I_6 - 10I_5 - 15 = 0$

En utilisant les combinaisons possibles, on obtient les systèmes matriciels suivant avec les inconnus I_1, I_2 *et* I_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 10 & 2 & 16 \\ 14 & -3 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Résolution par la méthode de CRAMER (voir cours de maths) on obtient

$I_1 = 2{,}2A \quad I_2 = 0{,}64A \quad I_3 = -1{,}4A$ *et d'après la loi des noeuds on obtient*

$$I_4 = 0{,}76A \quad I_5 = 0{,}8A \quad I_6 = 1{,}56A$$

EXERCICE 2

1 – Déterminons R_{th} entre A et B

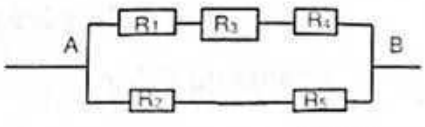


Figure 1

Après avoir éteint E_1 on obtient (voir figures 1)

$(R_1, R_3, R_4)//(R_2, R_5)$ Donc $R_1 + R_3 + R_4 = R_6$ *et* $R_2 + R_5 = R_7$

Le schéma dévient (voir figures 2)

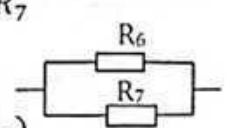


Figure 2

$$\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} \quad => R_{th} = \frac{(R_1 + R_3 + R_4)(R_2 + R_5)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5}$$

2 – Expression de E_{th}

Branchons la tension E_{th} *aux bornes de A et B* et elle est dirigée de B vers A car

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Elle représente la tension U_{AB} (voir figure 3). Considérons les courants I_0, I_1, I_2 circulants dans les différentes branches. Ces différents courants serviront la détermination de E_{th}

- Mailles 1 : $-(R_1 + R_2)I_2 + E_1 = 0 \quad => \quad I_2 = \frac{E_2}{R_1+R_2}$
- Mailles 2 : $R_2 I_2 - E_{th} - R_5 I_1 = 0$
- Mailles 3 : $R_1 I_2 - R_3 I_1 - R_4 I_1 + E_{th} = 0$

On obtient $I_1 = \frac{E_1}{R_3+R_4+R_5}$ $\qquad E_{th} = \frac{[R_2(R_3+R_4)-R_5R_1]}{(R_3+R_4+R_5)(R_1+R_2)} E_1$

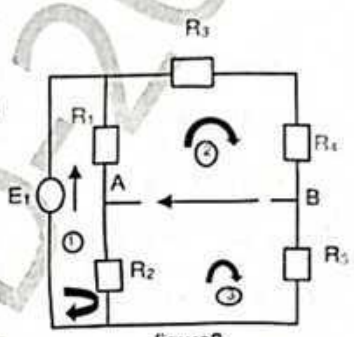


figure3

3 - Calculons I voir figure 4

D'après la loi de Pouillet on : $I = \frac{E_{th}+E_2}{R_{th}+R}$

4 – Calculons la puissance dissipée dans cette résistance

$$P = RI^2 \quad => \quad P = R\left[\frac{E_{th} + E_2}{R_{th} + R}\right]^2$$

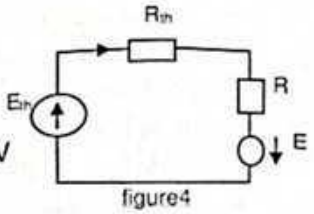


figure4

5 – Applications numériques

$R_{th} = 72{,}92\,\Omega$, $E_{th} = 2{,}5\,V$, $I = 0{,}072\,A$ *et* P=0, 52 W

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

CORRECTION ECUE 2 ELCTROCINETIQUE 21-22 SESSION 2

EXERCICE 1

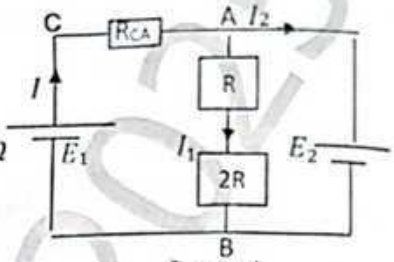
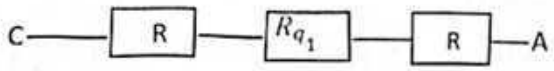


figure 1

1- Déterminons la résistance équivalente R_{CA}

$\frac{1}{R_{q1}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}$ => $R_{q1} = \frac{R}{3}$ $alors$ $R_{CA} = R + R_{q1} + R = \frac{7}{3}R\ \Omega$



2- La différence de potentiel $U_{AB} = V_A - V_B$

$U_{AB} = V_A - V_B = E_2$

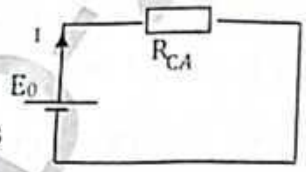


Figure 2

3 – La loi d'OHM donne en convention récepteur dans la branche AB

$(R + 2R)I_1 - E_2 = 0$ => $I_1 = \frac{E_2}{3R}$ $AN:\ I_1 = 1A$

4 – Déterminons l'intensité du courant débité par le générateur E_1

- Du point de vue de la branche {A,R,2R,B} est inutile puisqu'une force électromotrice E_2 en parallèle impose la tension à ses bornes. On peut l'enlever sur un schéma équivalent. Il apparait deux forces électromotrices en série qui s'oppose : On peut donc les remplacer par une seule et unique f.e.m de valeur $E_0 = E_1 - E_2 = 2V$ et de même sens que E_1
- Le circuit est maintenant équivalent à un circuit formé d'une seule maille parcourue par I d'une force f.e.m E_0 de même sens que I et de la résistance R_{CA} (voir figure 2)

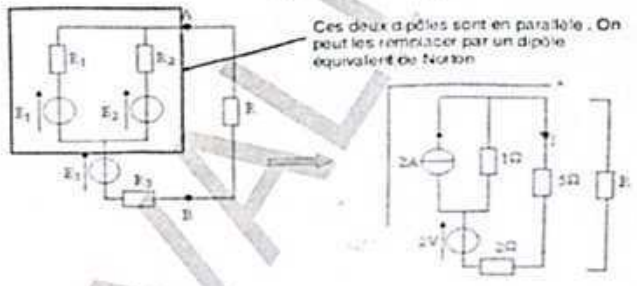
Loi des mailles donne $E_0 - I * R_{CA} = 0$ $I = \frac{3E_0}{7R}$ $I = 0{,}85\ A$

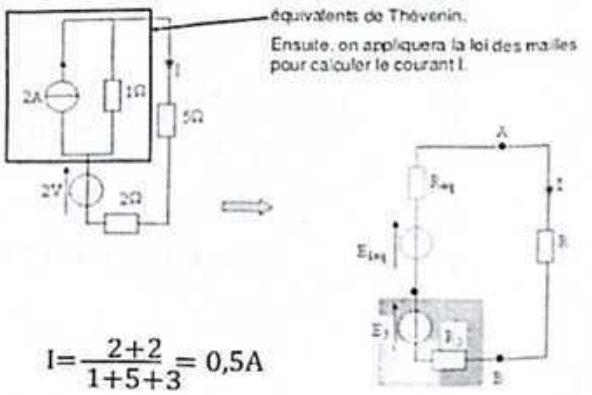
5 – Loi des nœuds (voir nœud A figure 1)

$I = I_1 + I_2$ => $I_2 = -0{,}15A$ $E_2\ fonctionne\ en\ convention\ récepteur$

Exercice 2

calculons l'intensité du courant I





$I = \frac{2+2}{1+5+3} = 0{,}5A$

VALIDEUR LMD 2025

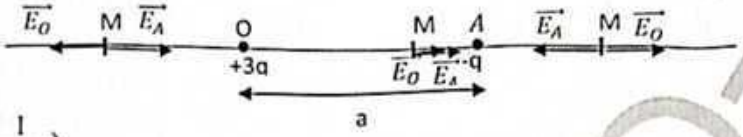
Scanned with CamScanner

CORRECTION 21-22 ECUE1: ELECTROSTATIQUE SESSION 2

Exercice 1

$$\vec{E}_O = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i$$

1-a) **Cas 1:** x >a, M est à gauche de A, OM=x



$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x-a}\right)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(x-a)^2}\right)$$

Cas 2: 0<x<a

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{a-x}\right)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{x^2} + \frac{1}{(x-a)^2}\right)$$

Cas 3: x<0

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{3}{x} - \frac{1}{a-x}\right)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{(x-a)^2}\right)$$

1-b) A l'équilibre: $\vec{f}=q'\vec{E}=\vec{0}$ 1-c) ; dans le cas 2, le champ ne peut jamais être nul.

D'après 1 et 3), $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \frac{3}{x^2} = \frac{1}{(x-a)^2} \Rightarrow 2x^2 - 6ax + 3a^2 = 0$

2 solutions: $\Delta = 9a^2 - 6a^2 = 3a^2$

$x = 3a \pm \sqrt{3}a$ ou x=2,37 et x=0,63.

1-d) L'équilibre et stable ou instable suivant que la variation de f par rapport à x soit positive ou négative:

$$\frac{df}{dx} = q'\frac{dE}{dx} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{6}{x^3} - \frac{2}{(x-a)^3}\right]$$

Pour x=2.37, $\frac{df}{dx} < 0$ équilibre stable

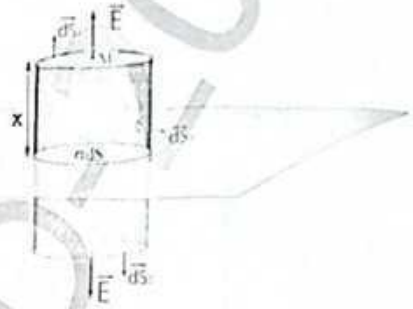
Pour x=0,63, $\frac{df}{dx} > 0$ équilibre instable

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Exercice 2 :

1) On étudie les éléments de symétrie. Tout plan, passant par M et perpendiculaire au plan chargé, est un plan de symétrie. On en déduit que le champ est perpendiculaire au plan.
Pour calculer le champ électrostatique à une distance z du plan chargé, on prend comme surface de Gauss adaptée à la symétrie du problème qui est un cylindre de hauteur h et de rayon R dont l'axe est perpendiculaire au plan chargé et qui est symétrique par rapport au plan chargé.



Pour déterminer le champ $\vec{E}$ en tout point de l'espace, on utilise le théorème de Gauss,

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

avec Q_{int} la charge enfermée par la surface de Gauss et Φ le flux du champ électrostatique donné par : $\Phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS}$

On constate qu'il existe trois surfaces dS_1, dS_2 et dS_R (S_R surface de révolution ou surface latérale). Pour cela, on doit calculer le flux à travers ces trois surfaces, ainsi

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_1} + \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_2} + \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_R}$$

Avec : $\Phi_1 = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_1}$, $\Phi_2 = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_2}$ $\Phi_3 = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_R}$

Comme le champ électrostatique est perpendiculaire au plan chargé, son flux à travers la surface de révolution du cylindre est nul, d'où : $\Phi_3 = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_R} = 0$

D'où : $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_1} + \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_2}$

La surface de Gauss étant un cylindre symétrique par rapport au plan chargé, on trouve que : $\Phi = 2\Phi_1 = 2\Phi_2 \Longrightarrow \Phi = 2\oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_1} = 2\oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_2}$

Sur ces surfaces de Gauss, $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS_1}$ sont colinéaires (de même pour $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS_2}$), on peut écrire alors :

$$\Phi = 2\oiint E.dS_1$$

Le champ ne dépend que de x, il est donc constant sur toute la surface S_1. On obtient donc : $\Phi = 2\,ES_1 = 2\pi ER^2$

On détermine la charge enfermée par la surface de Gauss

$$Q_{int} = \iint dq = \iint \sigma dS = \sigma \iint dS = \sigma S = \pi \sigma R^2$$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

En appliquant le théorème de Gauss :

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2\pi ER^2 = \frac{\pi \sigma R^2}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{x}$$

2)- On a deux plans parallèles chargés en surfaces avec des densités + σ et -σ selon la figure ci-contre.

En utilisant le principe de superposition

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

On utilise l'expression du champ créé un plan chargé en tout point de l'espace de la question (1).

On distingue trois zones :

-Zone 1 :

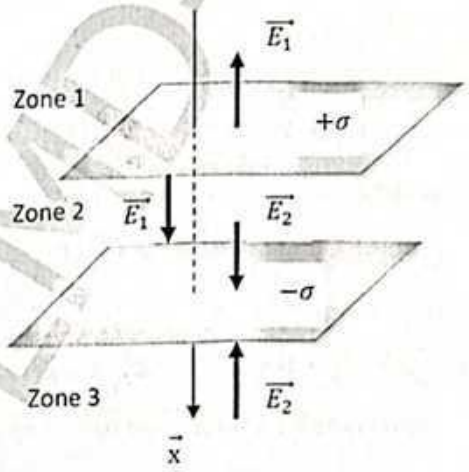
$$\vec{E}_{tot} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{x} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{x} = \vec{0}$$

-Zone 2 :

$$\vec{E}_{tot} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{x} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{x} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{x}$$

-Zone 3 :

$$\vec{E}_{tot} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{x} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{x} = \vec{0}$$



2)a- Déterminons la direction et les variations dont depend le champ $\vec{E}$ à l'interieur des plan.
On travail en coordonnées caresiennes.

$\vec{E}(M)=E_x(x,y,z)\vec{x}+Ey(x,y,z)\vec{j}+Ez(x,y,z)\vec{k}$ soit ox la normale au plan chargé.

La distribution étant invariante par toute translation selon $\vec{j}$ et $\vec{k}$, le champ ne depend que de la coordonnée x. tout plan passant par M et perpendiculaire au plan (yoz) est plan de symetrie. le champ électrostatique en M est donc contenu dans l'intersection de tous ces plan, il est porté par l'axe (Mx)

$\overrightarrow{E(M)}=E_x(x)\vec{x}$

b- Le plan chargé est un plan de symetrie de la distribution. Au point M'(-x,y,z) symetrie de M(x,y,z) par rapport à (yoz), le champ E(M') est le symetrie du champ E(M). On deduit que la fonction E(x) est donc impaire d'ou E(-x)=-E(x)

c-Déterminons le champ E

* D'après la question 1 on a: $\Phi E=2E(x)S=\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

x>a $Q_{int}=2Sa\rho$

$E(x)=\frac{\rho a}{\varepsilon_0}$ Pour tout x>a l'exterieur

$0\leq x\leq a$ $Q_{int}=2xS\rho$

$E(x)=\frac{\rho x}{\varepsilon_0}$ Pour tout $0\leq x\leq a$ l'interieur

Pour tout x, E(x)=-E(-x)

d- Le potentiel V avec V(0)=0 $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V$

* à l'exterieur pour x>a

$E=-\frac{dv}{dx}$ $v=-\int Edx=-\frac{\rho ax}{\varepsilon_0}$

*à l'interieur pour $0\leq x\leq a$

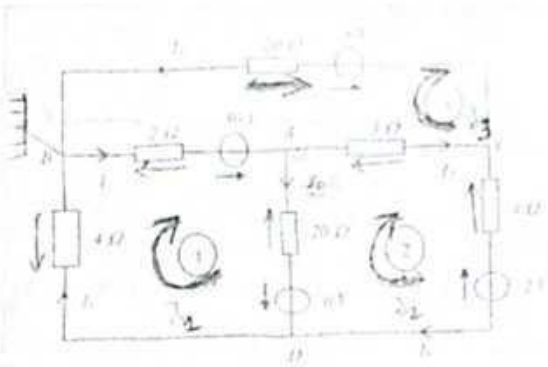
$v=-\frac{\rho ax^2}{2\varepsilon_0}$

NB: faire les autres cas de E(-x)

Scanned with CamScanner

CORRECTION EXAMEN ELECTROCINETIQUE SESSION 1 ANNEE 2022-2023

EXERCICE 1 :



1-) Nombre de nœud : 4 ; nombre de mailles indépendantes : 3 ; nombre de branche : 6

Loi des nœuds : A : $I_1 = I_3 + I_2$ C : $I_2 = I_4 + I_6$ D : $I_5 = I_3 + I_6$.

Loi des mailles : utilisons la convention récepteur

①: $-30 + 2I_1 + 4I_5 - 6 + 20I_3 = 0 \Rightarrow 2I_1 + 20I_3 + 4I_5 = 36$.

②: $-20I_3 + 6 + 2 + 4I_6 + 8 = 0 \Rightarrow 3I_2 - 20I_3 + 4I_6 = -8$.

③ $-3I_2 - 8 + 20I_4 - 2I_1 + 30 = 0 \Rightarrow -2I_1 - 3I_2 - 20I_4 = -22$.

Exprimons les courants en fonctions de I_4, I_5, I_6 : $I_1 = I_5 + I_4$, $I_2 = I_4 + I_6$, $I_3 = I_5 - I_6$

En remplaçant I_1, I_2, I_3 dans les équations des mailles on a : $\begin{cases} 26I_5 - 20I_6 + 2I_4 = 36 \ ① \\ -20I_5 + 27I_6 + 3I_4 = -8 \ ② \\ 2I_5 + 3I_6 + 25I_4 = -22 \ ③ \end{cases}$

2) méthode des courants fictifs, relation matricielle : mailles orientées dans le sens horaire.

Considérons $J_1, J_2 et J_3$ *les courants fictifs respectifs*: $\begin{bmatrix} 26 & -20 & -2 \\ -20 & 27 & -3 \\ -2 & -3 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ -8 \\ -22 \end{bmatrix}$

3) *calculons les courants fictifs : on a $\Delta_R = 6968$ $\Delta_{J_1} = 17420$ $\Delta_{J_2} = 10452$ $\Delta_{J_3} = -3484$

donc $J_1 = \frac{\Delta_{J_1}}{\Delta_R} = 2{,}5\ A$ $J_2 = \frac{\Delta_{J_2}}{\Delta_R} = 1{,}5\ A$ $J_3 = \frac{\Delta_{J_3}}{\Delta_R} = -0{,}5\ A$

* déduisons les courants réels et les tensions V_A, V_C, V_D.

On a : $I_1 = J_1 - J_3 = 3\ A$; $I_2 = J_2 - J_3 = 2\ A$; $I_3 = J_1 - J_2 = 1\ A$;

$I_4 = -J_3 = 0{,}5\ A$; $I_5 = J_1 = 2{,}5\ A$; $I_6 = J_2 = 1{,}5\ A$

On a : $U_{AB} = V_A - V_B = V_A = 30 + 2I_1 \Rightarrow V_A = 36\ A$;

$U_{CB} = V_C - V_B = V_C = 8 + 20I_4 \Rightarrow V_C = ?$; $U_{DB} = V_D - V_B = V_D = 4I_5 \Rightarrow V_D = 10\ A$.

EXERCICE 2 :

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

1_1-a) lorsque le moteur est calé, on a :

$$I = \frac{E}{R+r} = 10\,A$$

1-b) lorsque le moteur tourne à vide, on a :

$I = 0\,A$ car le moteur ne fournit pas de puissance ($P = E'I = 0\,A$)

2_2-a) on a : $I = \frac{E-E'}{R+r}$ => $E' = E - (R+r)$ donc $\boxed{P = E'I = EI - (R+r)I^2}$

2-b) on a : $\frac{dP}{dI} = 0$ => $E - 2(R+r)I = 0$ => $I_{max} = \frac{E}{2(R+r)} = 5\,A$

Donc $P_{max} = EI_{max} - (R+r)I_{max} = 250\,W$

3_ 3-a) on a : $P = 160$ => $EI - (R+r)I^2 = 160$ => $I^2 - 10I + 16 = 0$

Δ=36 ce qui donne $I_1 = 8\,A$ et $I_2 = 2\,A$

3-b) le meilleur rendement est obtenu pour 2 A car le générateur fournit moins de puissance.

Le rendement : $\eta = \frac{P\ du\ moteur}{P\ du\ générateur} = \frac{160}{100\times2} = 0{,}8$.

CORRECTION EXAMEN ELECTROSTATIQUE SESSION 1 ANNEE 2022-2023

EXERCICE 1 :

1-) description des différentes distributions de charges possible :

*Distribution de charges linéique : $\lambda = \frac{dQ}{dl}$ => $dQ = \lambda.dl$ $avec\ l\ la\ longueur$

*Distribution de charges surfaciques : $\sigma = \frac{dQ}{dS}$ => $dQ = \sigma.dS$ $avec\ S\ la\ surface$

*Distribution de charges volumique : $\rho = \frac{dQ}{dv}$ => $dQ = \rho.dv$ $avec\ v\ le\ volume$

2-) expression du champ électrostatique crée par les différentes distributions en un point M

*Distribution discrète : $\overrightarrow{E(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{\|\overrightarrow{O_iM}\|^2}\overrightarrow{u_{O_iM}}$ $avec$ $\overrightarrow{u_{O_iM}} = \frac{\overrightarrow{O_iM}}{\|\overrightarrow{O_iM}\|}$

*Distribution continue : $\overrightarrow{E(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dQ}{\|\overrightarrow{OM}\|^2}\overrightarrow{u_{OM}}$

linéique : $\overrightarrow{E(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda.dl}{\|\overrightarrow{OM}\|^2}\overrightarrow{u_{OM}}$ surfacique : $\overrightarrow{E(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma.dS}{\|\overrightarrow{OM}\|^2}\overrightarrow{u_{OM}}$

volumique : $\overrightarrow{E(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho.dv}{\|\overrightarrow{OM}\|^2}\overrightarrow{u_{OM}}$

La loi sur laquelle on s'appuie pour exprimer le champ est la LOI DE COULOMB.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

3-) *Une ligne de champ est une courbe telle que le vecteur champ électrostatique soit en tous ses points

*Un tube de champ est un ensemble de ligne de champ s'appuyant sur une surface fermée

4-) les lignes de champ sont divergents au voisinage d'une charge positive et convergents au voisinage d'une charge négative.

5-) le champ électrostatique est contenu dans le plan de symétrie et perpendiculaire au plan d'antisymétrie.

6-) la circulation du champ électrostatique entre deux points A et B est la différence de valeur que prend une fonction scalaire de position V(r) au point de départ A et au point d'arrivé B. Elle est conservative car elle est indépendante du trajet emprunté.

7-) le potentiel électrostatique est l'énergie potentielle par unité de charge associée à la force électrostatique. La relation est : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$

8-) le flux du champ électrostatique est le produit scalaire $d\emptyset = \vec{E}.d\vec{S}$

9-) théorème de Gauss : Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ sortant d'une surface fermée (S) est égal au quotient par ε_0 de la somme algébrique de toutes les charges électriques situées à l'intérieur de la surface (S) appelée surface de Gauss. $\boxed{\emptyset = \oiint \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.}$

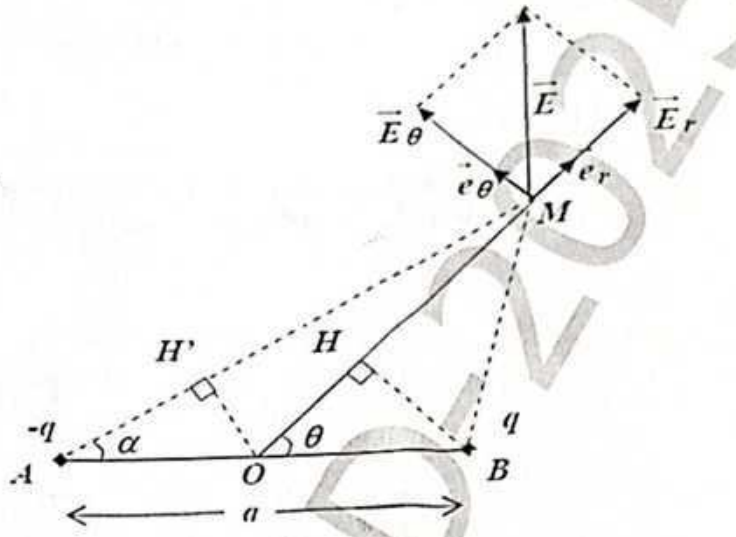
VALIDEUR WAD-2025

Scanned with CamScanner

CORRECTION EXERCICE 2

$r = OM = OH + HM$
$r_1 = AM = AH' + H'M$
$r_2 = BM$

$r >> a \Rightarrow \theta \approx \alpha$



$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

$r_1 = AH' + H'M \approx \frac{a}{2}\cos\alpha + r$ et $r = OH + HM \approx \frac{a}{2}\cos\theta + r_2$

On en déduit : $r_1 - r_2 \approx a\cos\theta$ et $r_1 r_2 = r^2 - \frac{a^2}{4}\cos^2\theta \approx r^2$

Soit : $V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\cos\theta}{r^2}$

2- $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\cos\theta}{r^3}$ et $E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\sin\theta}{r^3}$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\sqrt{4a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

L'orientation du champ peu être définie par l'angle φ que fait E avec OM : $tg\varphi = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2}tg\theta$

3- Le nouveau potentiel est la somme du potentiel du dipôle et du potentiel extérieur issu de E_0.
$V'(M) = V(M) + V_0$.
$\vec{E}_0 = E_0\vec{i}$ et la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ donnent : $V_0 = -\int E_0 dx = -E_0 x + Cte$
A l'origine $V_0(O) = 0 \Rightarrow Cte = 0$. d'où $V_0 = -E_0 x$. avec $x = r\cos\theta$.

$$V_{Total}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\cos\theta}{r^2} - E_0 r\cos\theta$$

4- $V_{Total} = 0 \Rightarrow \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{r^2} - E_0 r\right)\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{r^2} - E_0 r\right) = 0$ et dans ce cas $r = \sqrt[3]{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{E_0}}$, ce qui définit une sphère de rayon r et de centre O comme surface équipotentielle.

Ou $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$. ce qui définit le plan médiateur OY comme surface équipotentielle.

VALIDEUR LMD 2025

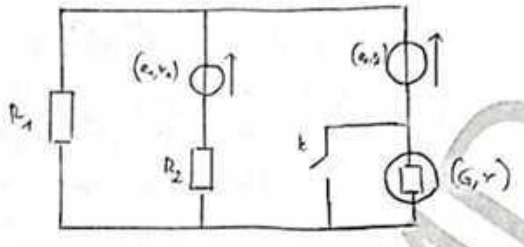
Scanned with CamScanner

Correction de l'examen d'électrocinétique première session

2023-2024

EXERCICE 1

Le circuit électrique suivant est formé de deux piles électriques ***(e1, r1)*** et ***(e2, r2)***, d'un galvanomètre ***(G, r)***, de deux résistances R_1 et R_2 et d'un interrupteur ***k*** (figure ci-dessous)

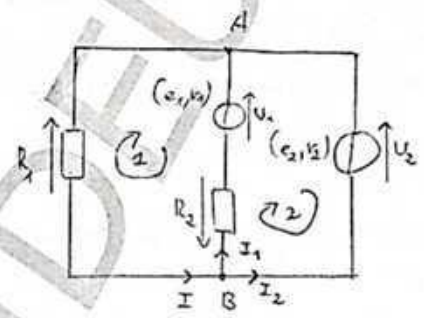


A) ***k*** est fermé :

1. Donnons les nombres de nœuds ***N***, de branches ***B*** et de mailles indépendantes ***M***. Donnons l'équation qui lie ces trois nombres.

Nombres de nœuds : ***N*=2**
Nombres de branches : ***B*=3**
Nombres de mailles : ***M* = *B*−*N*+1=2**

2. En appliquant les lois de Kirchhoff, calculons les courants qui circulent dans chaque branche du circuit.



- **Loi des nœuds :** $I = I_1 + I_2$
- **Loi des mailles :**

$$(1): \quad R_1 I - U_1 + R_2 I_1 = 0 \Leftrightarrow R_1(I_1+I_2) - e_1 + r_1 I_1 + R_2 I_1 = 0$$
$$\Leftrightarrow e_1 = (R_1+r_1+R_2)I_1 - R_1 I_2$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$\textcircled{2} : U_1 - R_2 I_1 - U_2 = 0 \Leftrightarrow e_1 - r_1 I_1 - R_2 I_1 - e_1 + r_2 I_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow e_1 - e_2 = (R_1 + r_1) I_1 - r_2 I_2$$

D'où $\begin{cases} e_1 = (R_1 + r_1 + R_2) I_1 - R_1 I_2 \ (\bullet) \\ e_1 - e_2 = (R_1 + r_1) I_1 - r_2 I_2 \ (\bullet\bullet) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} R_1 + r_1 + R_2 & -R_1 \\ R_1 + r_1 & -r_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_1 - e_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 302 & -200 \\ 102 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Soit B la matrice associée, alors **det(B) = 20098**

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -200 & 12 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{20098} = -0{,}03\ A$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 302 & 12 \\ 102 & 3 \end{vmatrix}}{20098} = -0{,}0158\ A$$

$$I = I_1 + I_2 = -0{,}0458\ A$$

3. Calculons les Puissances

- **Puissances fournies: P_f**

$$P_f = e_1 I_1 + e_2 I_2 \approx 0{,}502\ w$$

- **Puissances consommées: P_c**

$$P_c = R_1 I^2 + R_2 I_1^2 \approx 0{,}509\ w$$

- **Puissances perdues: P_p**

$$P_p = r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 \approx 0{,}002\ w$$

4. Deduction du rendement.

$$\text{On a : } R = \frac{P_c}{P_f} = \frac{0{,}509}{0{,}502} = 1{,}01$$

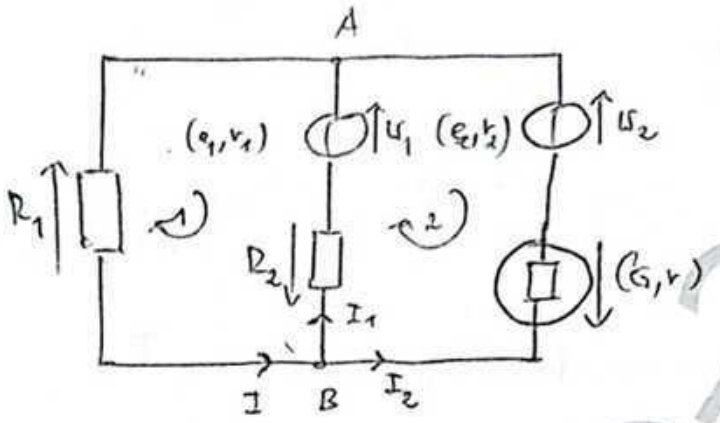
B) k est maintenant ouvert:

5. Pour quelle valeur de la f.é.m. e_2 le galvanomètre G affiche un courant nul.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

On a le schéma suivant :



(1) : $\boxed{e_1 = (R_1+r_1+R_2)I_1 - R_1I_2}$

(2) : $U_1 - R_2I_1 - U_2 + rI_2 = 0 \Leftrightarrow e_1 - r_1I_1 - R_2I_1 - e_1 + r_2I_2 + rI_2 = 0$

$\Leftrightarrow e_1 - e_2 = (R_1+r_1)I_1 - (r+r_2)I_2$

$$\begin{cases} e_1 = (R_1+r_1+R_2)I_1 - R_1I_2 \\ e_1 - e_2 = (R_1+r_1)I_1 - (r+r_2)I_2 \end{cases}$$

On veut une nouvelle valeur de la f.é.m. e_2, lorsque le galvanomètre G affiche un courant nul. C'est-à-dire, le courant I_2 qui circule dans le galvanomètre est nul ($I_2=0$).

D'après (1) : $I_1 = \frac{e_1+R_1I_2}{R_1+r_1+R_2}$

Donc (2) devient : $e_1 - e_2 = (R_1+r_1)\left(\frac{e_1+R_1I_2}{R_1+r_1+R_2}\right) - (r+r_2)I_2$

Pour $I_2 = 0$, on a : $e_1 - e_2 = \frac{(R_1+r_1)e_1}{R_1+r_1+R_2}$

On tire e_2: $e_2 = \frac{R_1e_1}{R_1+r_1+R_2}$

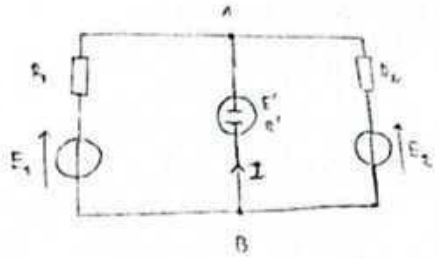
AN : $e_2 = \frac{200\times12}{302} = 7{,}95\ V$

EXERCICE 2

VALIDEUR LMD-2025

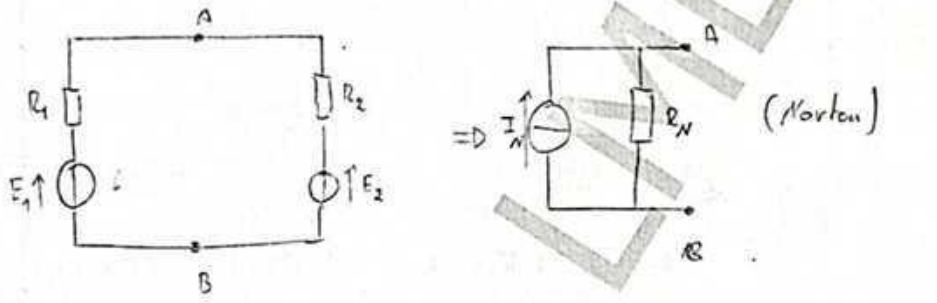
Scanned with CamScanner

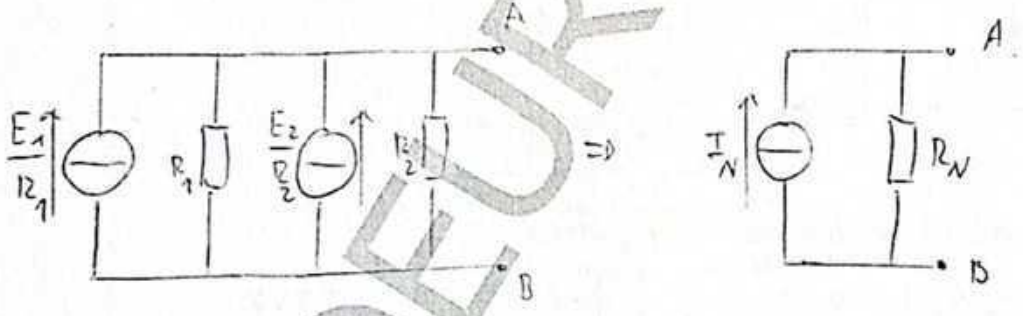
On considère le montage ci-dessous:



1. En utilisant la transformation Thevenin-Norton déterminons le générateur de Thevenin équivalent de caractéristiques (E_{th}, R_{th}) vu aux bornes de l'électrolyseur.

On veut exprimer I en fonction de E_1, R_1, E_2, R_2, E' et R'. Pour ce faire, on peut remplacer tout le montage par un schéma équivalent plus simple sans prendre en compte la branche qui contient I.

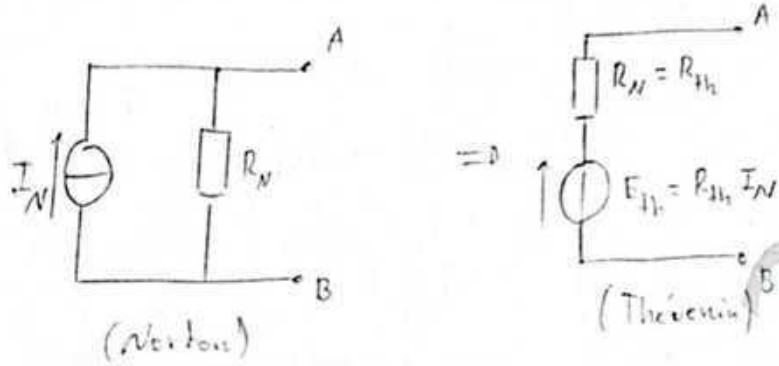




Donc $I_N = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$ et $\frac{1}{R_N} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Leftrightarrow R_N = \frac{R_1 \times R_2}{R_2 + R_1}$

VALIDEUR LMD 2025

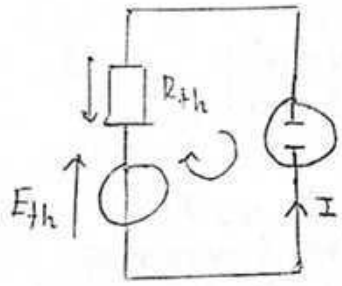
Scanned with CamScanner



$R_{th} = R_N = \frac{R_1 \times R_2}{R_2 + R_1}$ et $E_{th} = \frac{R_1 \times R_2}{R_2 + R_1} \times \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}\right)$

$$R_{th} = \frac{R_1 \times R_2}{R_2 + R_1}$$

$$E_{th} = \frac{E_1 \times R_2 + E_1 \times R_1}{R_1 + R_2}$$



Loi des mailles:

$E_{th} - R_{th} I + E' - R' I = 0 \Leftrightarrow (R_{th} + R')I = E_{th} + E'$

$$I = \frac{E_{th} + E'}{R_{th} + R'}$$

2. On a E_2=6 V, Déterminons I dans l'électrolyseur.

$R_{th} = \frac{R_1 \times R_2}{R_2 + R_1} = \frac{6 \times 6}{6+6} = 3\,\Omega$ et $E_{th} = \frac{E_1 \times R_2 + E_1 \times R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1{,}5 \times 6 + 6 \times 6}{6+6} = 3{,}75\ V$

$I = \frac{E_{th} + E'}{R_{th} + R'} = \frac{3{,}75 + 1{,}5}{3+3} = 0{,}875\ A$

3. Determinons I pour E_2=1V.

$R_{th} = 3\,\Omega$ et $E_{th} = \frac{E_1 \times R_2 + E_1 \times R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1{,}5 \times 6 + 1 \times 6}{6+6} = 1{,}25\ V$

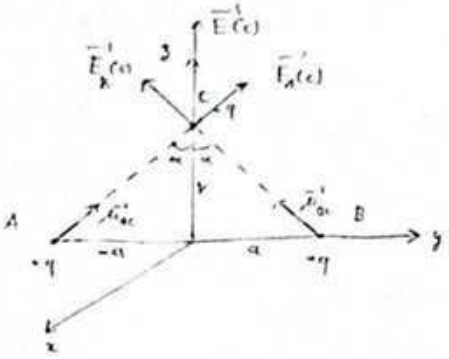
donc $I = \frac{E_{th} + E'}{R_{th} + R'} = \frac{1.25 + 1{,}5}{3+3} = 0{,}458\ A$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Correction de l'examen électrostatique première session 2023-2024

Exercice 1



1. Calculons le champ électrostatique crée au point C.

D'après le principe de superposition, on a : $\overrightarrow{E(C)} = \overrightarrow{E_A(C)} + \overrightarrow{E_B(C)}$

$\overrightarrow{E_A(C)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \|AC\|^2}\overrightarrow{u_{AC}}$ et $\overrightarrow{E_B(C)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \|BC\|^2}\overrightarrow{u_{BC}}$

$$\overrightarrow{u_{AC}} = \cos\alpha\,\vec{k} + \sin\alpha\,\vec{j} \quad et \quad \overrightarrow{u_{BC}} = \cos\alpha\,\vec{k} - \sin\alpha\,\vec{j}$$

Or $\|AC\| = \|BC\|$ donc $\overrightarrow{E(C)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\|BC\|^2}(\cos\alpha\,\vec{k} + \sin\alpha\,\vec{j} + \cos\alpha\,\vec{k} - \sin\alpha\,\vec{j})$

$$\overrightarrow{E(C)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(2\cos\alpha\,\vec{k})$$

$$\|BC\|^2 = r^2 + a^2 \Leftrightarrow \|BC\| = \sqrt{r^2 + a^2} \quad et \quad \cos\alpha = \frac{r}{\|BC\|}$$

$$\boxed{\overrightarrow{E(C)} = \frac{qr}{2\pi\varepsilon_0(r^2 + a^2)^{3/2}}\vec{k}}$$

2. Calculons la force électrostatique.

On a une relation entre la force et le champ électrostatique :

$$\overrightarrow{F_e(C)} = q\overrightarrow{E(C)} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{F_e(C)} = \frac{q^2 r}{2\pi\varepsilon_0(r^2 + a^2)^{3/2}}\vec{k}}$$

3. Calculons les positions de la charge mobile pour que $\overrightarrow{F_e(C)}$ soit maximale.

La force électrostatique est maximale si : $\frac{d\overrightarrow{F_e(C)}}{dr} = \vec{0}$

VALIDE LMD-2025

Scanned with CamScanner

$$\frac{d\overrightarrow{F_e(C)}}{dr} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(r^2+a^2)^{3/2} - 3r^2(r^2+a^2)^{1/2}}{(r^2+a^2)^3}\right)\vec{k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (r^2+a^2)^{3/2} - 3r^2(r^2+a^2)^{1/2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r^2+a^2)^{3/2} = 3r^2(r^2+a^2)^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3r^2 = r^2 + a^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2r^2 = a^2 \Leftrightarrow \boxed{r_{max} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a}$$

4. Calculons la position d'équilibre

A l'équilibre, on a : $\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{F_e(C)} = \vec{0}$

$$\frac{q^2 r}{2\pi\varepsilon_0(r^2+a^2)^{3/2}}\vec{k} = \vec{0} \Leftrightarrow r = 0$$

5. Calculons l'énergie potentielle électrostatique à la position d'équilibre.

On a : $E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i = \frac{1}{2}(q_A V_A + q_B V_B + q_C V_C)$

Or $V_A = V_B + V_C = \frac{kq}{2a} + \frac{kq}{(r^2+a^2)^{1/2}}$

$$V_B = V_A + V_C = \frac{kq}{2a} + \frac{kq}{(r^2+a^2)^{1/2}}$$

$$V_C = V_A + V_B = \frac{kq}{(r^2+a^2)^{1/2}} + \frac{kq}{(r^2+a^2)^{1/2}}$$

$$E_p(r) = \frac{kq^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{(r^2+a^2)^{1/2}}\right)$$

$$\boxed{E_p(r=0) = \frac{5kq^2}{2a}}$$

6. Montrons qu'elle est minimale dans cette position.

L'energie potentielle est minimale si : $\frac{dE_p}{dr} = 0$

$$\frac{dE_p}{dr} = \frac{kq^2}{2}\left(-\frac{2\times 2r(r^2+a^2)^{-1/2}}{r^2+a^2}\right) = 0 \Leftrightarrow -4r = 0 \Leftrightarrow r = 0$$

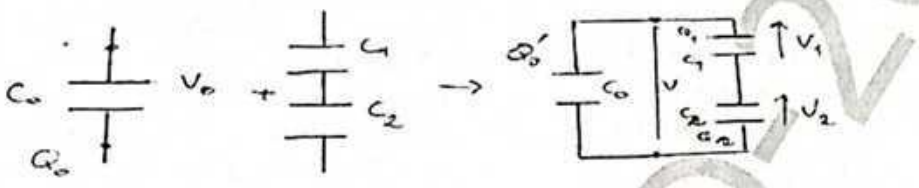
VALIDE UVMD-2025

Scanned with CamScanner

D'où $$\boxed{E_{min} = E(r=0) = \frac{5kq^2}{2a}}$$

Exercice 2

Soit un condensateur plan de capacité $C_0 = 100\mu F$ portant une charge initiale $Q_0 = 600$ mC.

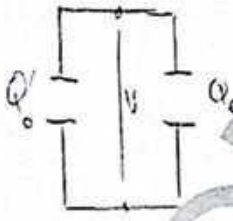


1. Calculons sa tension initiale V_0 et son énergie potemtielle initiale E_0.

$$\boxed{V_o = \frac{Q_o}{C_o}} \quad et \quad \boxed{E_p = \frac{1}{2}Q_oV_o}$$

$$AN: V_o = \frac{600 \times 10^{-3}}{100 \times 10^{-6}} = 6000\,V \quad et \quad E_p = \frac{1}{2} \times 600 \times 10^{-3} \times 6000 = 1800\,J$$

2. Calculons la charge et la tensiom de chaque condensateur.
D'après le principe de conservation de charge : $Q_1 = Q_2 = Q_{eq}$



$$Q_o = Q'_o + Q_{eq} = Q'_o + Q_1 \qquad (1)$$

$$\text{Or } V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow \frac{Q'_o}{C_o} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = Q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow Q'_o = Q_1C_o\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = Q_1C_o\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1C_2}\right)$$

D'après (1) $$Q_1 = Q_o - Q'_o = Q_o - Q_1C_o\left(\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow Q_1 + Q_1C_o\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1C_2}\right) = Q_o \Leftrightarrow Q_1\left(1 + C_o\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1C_2}\right)\right) = Q_o$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Q_1 = \frac{Q_o}{1 + C_o\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1C_2}\right)}}$$

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Connaissant $Q_1 = Q_2$, on peut tirer Q'_o dans la relation (1)

D'où $V = \frac{Q'_o}{C_o}$, $V_1 = \frac{Q_1}{C_1}$ et $V_2 = \frac{Q_2}{C_2}$

3. Énergie potentielle finale E.

On a : $E = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} Q_i V_i = \frac{1}{2}(Q'_0 V + Q_1 V_1 + Q_2 V_2)$

4. La difference d'énergie ΔE.

$$\boxed{\Delta E = E - E_o}$$

E_o: *Energie potentielle initiale.*

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny
(Abldjan-Cocody-Rép. Côte d'Ivoire)

UFR MI

LICENCE 1 MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE
UE OPTIQUE PREMIERE SESSION 2020-2021
Durée : 2 heures

Questions de cours (06 points)

1. On considère un dioptre sphérique (D_s), de centre C et de sommet S, séparant deux milleux transparents homogènes et isotropes d'indices n et n', avec $n > n'$.
a) Le centre C étant dans le milieu d'indice n, que peut-on conclure ?
b) Le point objet A de l'axe optique ayant pour image le point A', établir les relations de conjugaison de (D_s) écrites avec des mesures algébriques ayant pour origines les foyers principaux F et F' de (Ds). Comment appelle-t-on ces relations ?

2. On considère une lentille mince à bords minces L, de centre optique O, de foyers principaux objet F et image F', et un objet AB obéissant aux conditions de Gauss. Construire à l'aide des trois rayons remarquables l'image $A'B'$ de AB à travers L, dans chacun des cas suivants :
Cas 1 : Objet AB situé avant le foyer objet F
Cas 2 : Objet AB situé entre le foyer objet F et le centre optique
Cas 3 : Objet AB situé entre le centre optique et le foyer image F'
Cas 4 : Objet AB situé après l'image foyer F'

Problème (14 points)

Le plus simple des microscopes visuels est constitué de deux lentilles convergentes considérées comme minces. La première, l'objectif, devra donner de l'objet une image agrandie. La seconde, l'oculaire, rendra cette image observable à l'œil.
Dans tout ce problème, on note L les lentilles minces, O la position de leur centre optique, F celle du foyer objet et F' celle du foyer image. On notera AB les objets, A étant leur position sur l'axe optique et $\overline{AB}$ leur taille algébrique. Ces objets seront considérés comme plans et perpendiculaires à l'axe optique.

A/ L'objectif :

Il sera réalisé avec une lentille convergente L_1 placée en O_1, de distance focale f_1'. On prend f_1' = 1,0 cm, $\overline{O_1A}$ =-1,5 cm, $\overline{AB}$ = a = 0,50 cm.
a) Construire A_1B_1, l'image de AB à traverser L_1.
b) Calculer l'abscisse $\overline{O_1A_1}$ de A_1 et le grandissement γ_1 de L_1 en fonction de f_1' et $p_1 = \overline{O_1A}$. Donner les valeurs numériques de $\overline{O_1A_1}$ et γ_1.
c) Où doit-on placer un objet AB pour que son image A_1B_1 à travers L_1 soit réelle et agrandie ?

B/ L'oculaire :

a) Pour observer une image réelle directement à l'œil nu, où doit-elle se situer ?
b) où faut-il placer l'oculaire L_2 pour qu'un œil emmétrope puisse observer l'image $A'B'$ de A_1B_1 à travers L_2 sans accommodation ?
c) Sur place l'oculaire L_2 à cet endroit. On prendra f_2' = 4,0 cm. Peut-on dessiner l'image A'B' de A_1B_1 ?
d) Représenter l'angle α' sous lequel on voit $A'B'$ et exprimer cet angle en fonction de γ_1 et f_2'.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

$\overline{O_1O_2} = 9cm$; $f_1' = 1{,}5\ cm$; $f_2' = 4\ cm$; $\overline{AO_1} = 2\ cm$; $AB = 0{,}5\ cm$.
Construire l'image de AB donnée par le microscope (échelle unité).
Quel est l'intérêt de l'appareil ?

2/ En réalité un microscope est tel que, par exemple : $\overline{O_1O_2} = 12cm$; $f_1' = 2\ mm$; $f_2' = 2\ cm$.
Un objet AB de longueur 1μ m est placé perpendiculairement à l'axe principal, à 2,04 mm devant L_1.
Calculer la position $\overline{O_2A'}$ et la taille $\overline{A'B'}$ de l'image.

3/ l'observateur met son œil au foyer image de l'oculaire. Déterminer le diamètre apparent de l'image, c'est-à-dire l'angle θ' sous lequel elle est observée.

4/ Calculer le diamètre apparent θ de l'objet AB lorsqu'on l'observe à l'œil nu à la distance de 25 cm. Calculer le grossissement $G = \theta' / \theta$ du microscope (rapport du diamètre apparent de l'image au diamètre apparent de l'objet).

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny (Cocody)
(Rép. Côte d'Ivoire)
UFR MI

LICENCE PREMIERE ANNEE MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE

UE OPTIQUE

Durée : 2 heures

PREMIERE SESSION 2021-2022

Exercice 1 : (12 points)

Une demi-sphère en flint d'indice n = 1,71, de centre O, de sommet S et de rayon R = $\overline{OS}$ = 6 cm constitue une lentille demi-boule. La lumière pénètre dans cette lentille par sa face plane.

A) La lentille est plongée dans un milieu (eau) d'indice n_0 = 1,33 :

1) a) Etablir la formule de conjugaison de cette lentille, avec origine en O ;

b) Etablir la formule de grandissement linéaire de cette lentille ;

c) Déterminer la position et la grandeur de l'image A'B' d'un petit objet AB = 10 mm disposé parallèlement à la face d'entrée de la lentille, au point A diamétralement opposé à S. On tracera la marche d'un rayon quelconque issu de A.

2) Déterminer littéralement, puis numériquement, pour cette lentille :

a) Les positions du foyer image F' et du foyer objet F ;

b) Les positions des points principaux H et H' ;

c) Les distances focales objet f et image f'. En déduire la vergence V de la lentille.

B) La lentille baigne maintenant dans l'air (d'indice 1) :

3) Déterminer littéralement, puis numériquement, les distances focales f et f' et la vergence V de la lentille.

4) On éclaire la lentille par un faisceau de rayons parallèles à l'axe, d'axe OS, qui couvre grâce à un diaphragme la moitié de la face plane d'entrée. Le foyer Φ' des rayons marginaux ne coïncide pas avec le foyer F' des rayons paraxiaux. Calculer l'aberration sphérique $\overline{\Phi' F'}$.

Exercice 2 : (08 points)

Un objectif photographique est constitué d'une lentille convergente L_1 de centre O_1, de distance focale image $f_1' = \overline{O_1 F_1'}$ = 75 mm. La pellicule π est placée dans le plan focal image de l'objectif. On ajoute à cet objectif deux lentilles additionnelles :

- Une lentille L_2 divergente, de centre O_2 et de distance focale f_2' = −25 mm, que l'on accole à L_1 ; on a ainsi $O_2 = O_1$;

- Une lentille L_3 convergente, de centre O_3 et de distance focale f_3' = 100 mm, que l'on fixe devant le système L_1-L_2. La distance O_3O_1 est réglée de manière à ce que l'image d'un objet éloigné soit nette sur la pellicule.

1) Faire un schéma représentant les lentilles avec les positions relatives des centres optiques et des foyers. Compléter ce schéma par un tracé de rayons définissant la position du foyer image F' de ce téléobjectif constitué par l'ensemble L_1-L_2-L_3.

2) Calculer l'encombrement de cet appareil, c'est-à-dire la distance du centre O_3 de L_3 à la pellicule π.

3) Calculer la grandeur $\overline{A'B'}$ de l'image d'une tour $\overline{AB}$ de 60 m de hauteur, située à une distance d=3 km de l'objectif.

4) Calculer l'encombrement d'un appareil qui aurait comme objectif une seule lentille donnant une image de même grandeur. Conclusion ?

Scanned with CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny
(Rép. Côte d'Ivoire)

Année 2021-2022

LICENCE 1 MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE

DEUXIEME SESSION 2021 – 2022

UE OPTIQUE GEOMETRIQUE

Durée : 2 heures

Questions de cours ***(06 points)***

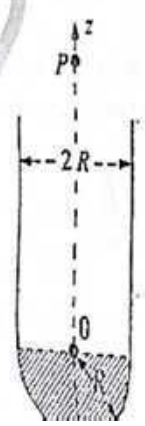
1) Enoncer le principe de Fermat dans un milieu transparent quelconque.
2) A partir du principe de Fermat, établir les deux (2) lois de Snell-Descartes pour la réfraction.
3) Quand dit-on qu'un système optique est rigoureusement stigmatique pour le couple de points (A , A') ?
4) Quelle est la nature (réelle ou virtuelle) de l'image dans les cas suivants ? Justifier votre réponse.
   a) Un nageur qu'on regarde au fond d'une piscine.
   b) Une femme qui se maquille face à un miroir plan.
   c) L'image d'un immeuble prise par un appareil photographique.
5) On considère un dioptre sphérique D_S de centre C et de sommet S, séparant les milieux d'indices n et n '.
   a) Donner, sans démonstration, la relation de conjugaison (de position) de D_S avec des mesures algébriques ayant pour origine le sommet S. On se placera dans les conditions de Gauss ;
   b) A partir de cette formule, déterminer les positions des foyers principaux F et F ' de D_S par rapport à S ;
   c) En assimilant le miroir sphérique à un cas particulier de dioptre sphérique, montrer que les deux foyers principaux du miroir sphérique sont confondus.

Exercice 1 **(06 points)**

On considère un tube en verre, cylindrique, d'axe vertical Oz, d'épaisseur négligeable et de diamètre 2R = 8 cm. Le tube est terminé à sa partie inférieure par une surface hémisphérique de centre O, de sommet S et de rayon R. Une source lumineuse ponctuelle P est placée sur l'axe Sz du tube, à la cote $\overline{OP}$ = 27 cm au-dessus de O. On ne s'intéresse qu'aux rayons lumineux voisins de l'axe Sz. L'eau d'indice n = 4/3 remplit la partie hémisphérique du tube, son niveau horizontal contenant O (voir figure).

1/ Déterminer la position $\overline{OP'}$ de l'image P' de P à travers ce système. Construire la marche d'un rayon lumineux issu de P.

2/ Déterminer la position $\overline{OF'}$ du foyer image F' de ce système.



VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Exercice 2 (08 points)

Un oculaire de distance focale f ' = 40 mm est formé de deux lentilles minces L_1 et L_2 convergentes taillées dans le même verre, de centres optiques O_1 et O_2, constituant un doublet de symbole (4,3,2).

La lumière se propage dans le sens O_1O_2.

1/ Déterminer les distances focales f_1' et f_2' de L_1 et L_2, ainsi que leur écartement $d = O_1O_2$.

2/ Déterminer les positions des foyers F et F' de cet oculaire. S'agit-il d'un oculaire convergent ou divergent ?

3/ En déduire les positions des points principaux H et H'.

4/ Etablir la relation entre f_1', f_2' et d pour qu'un doublet plongé dans l'air soit achromatique, c'est-à-dire que sa distance focale f ' soit indépendante de la longueur d'onde de la radiation qui l'éclaire. L'oculaire étudié est-il achromatique ?

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Université Felix Houphouët-Boigny
(Abidjan – Cocody / Rép Côte d'Ivoire)

UFR M

LICENCE 1 MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE / 1ERE SESSION 2022-2023

UE OPTIQUE

Durée : 2 heures

Exercice 1 (08 points)

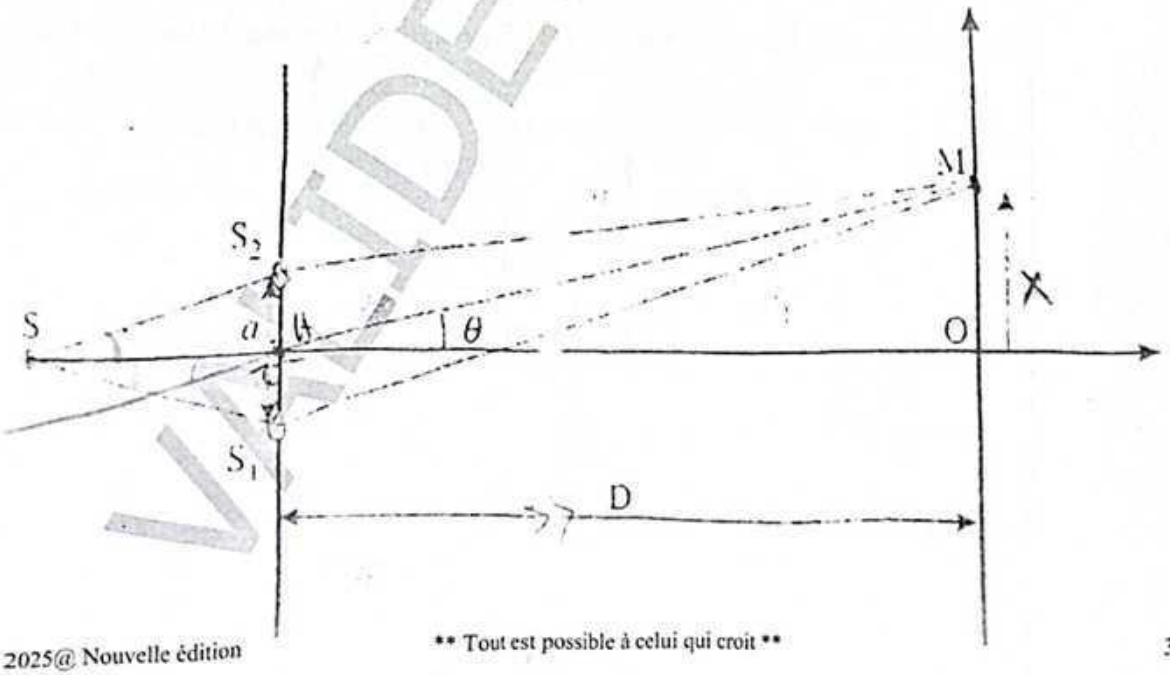
On réalise l'expérience des trous d'Young : deux trous très petits (on ne prendra pas en compte ici la diffraction) S_1 et S_2, distants de a, sont éclairés par un faisceau de lumière issu de S, monochromatique, de longueur d'onde λ. La source S est située sur la médiatrice des trous. Le plan de figure contient la source initiale et les sources secondaires. On observe la figure d'interférences sur un écran perpendiculaire au plan de figure, à une distance D de l'axe S_1S_2.

1/ On se place en un point M de l'écran dans le plan de figure. L'écran étant à grande distance des trous (D>>a) et le point M étant peu éloigné de l'axe (D>>x), exprimer la différence de marche δ (M) en fonction de a, D et x.

On rappelle que la différence de marche au point M est la différence entre les chemins parcourus par les deux rayons lumineux SS_1M et SS_2M.

2/ Déterminer les positions X_{FB} des franges brillantes et X_{FS} des franges sombres, puis l'expression, en fonction de D, a et λ, de l'interfrange i, c'est-à-dire la distance entre deux franges brillantes (ou deux franges obscures) successives.

On rappelle que les interférences sont constructives (les franges brillantes) lorsque $\delta = n.\lambda$ et elles sont destructives (les franges sombres) lorsque $\delta = (n + \frac{1}{2}).\lambda$, où $n \in Z$.



VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Exercice 2 : (12 points)

Une demi-sphère en flint d'indice n = 1,71, de centre O, de sommet S et de rayon R = $\overline{OS}$ = 6 cm constitue une lentille demi-boule. La lumière pénètre dans cette lentille par sa face plane.

A/ La lentille est plongée dans un milieu (eau) d'indice n_0 = 1,33 :

1) a) Etablir la formule de conjugaison de cette lentille, avec origine en O ;

b) Etablir la formule de grandissement linéaire de cette lentille ;

c) Déterminer la position et la grandeur de l'image A'B' d'un petit objet AB = 10 mm disposé parallèlement à la face d'entrée de la lentille, au point A diamétralement opposé à S. On tracera la marche d'un rayon quelconque issu de A.

2) Déterminer littéralement, puis numériquement, pour cette lentille :

a) Les positions du foyer image F' et du foyer objet F ;

b) Les positions des points principaux H et H' ;

c) Les distances focales objet f et image f'. En déduire la vergence V de la lentille.

B/ La lentille baigne maintenant dans l'air (d'indice 1) :

3) Déterminer littéralement, puis numériquement, les distances focales f et f' et la vergence V de la lentille.

4) On éclaire la lentille par un faisceau de rayons parallèles à l'axe, d'axe OS, qui couvre grâce à un diaphragme la moitié de la face plane d'entrée. Le foyer Φ' des rayons marginaux ne coïncide pas avec le foyer F' des rayons paraxiaux. Calculer l'aberration sphérique $\overline{\Phi' F'}$.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Université Felix Houphouët Boigny
(Abidjan Cocody – Rép. Côte d'Ivoire)

PREMIERE ANNEE CLASSE ETOILE
UE OPTIQUE PREMIERE SESSION 2022-2023
Durée : 2 heures 30 minutes

Questions de cours (04 points)

1. On considère un dioptre sphérique (D_S), de centre C et de sommet S, séparant deux milieux transparents homogènes et isotropes d'indices n et n', avec n > n'.
a) Le centre C étant dans le milieu d'indice n, que peut-on conclure ?
b) Le point objet A de l'axe optique ayant pour image le point A', établir les relations de conjugaison de (D_S) écrites avec des mesures algébriques ayant pour origines les foyers principaux F et F' de (D_S). Comment appelle-t-on ces relations ?

2. On considère une lentille mince à bords minces L, de centre optique O, de foyers principaux objet F et image F', et un objet AB obéissant aux conditions de Gauss. Construire à l'aide des trois rayons remarquables l'image A'B' de AB à travers L, dans chacun des cas suivants :

Cas 1 : Objet AB situé avant le foyer objet F
Cas 2 : Objet AB situé entre le foyer objet F et le centre optique
Cas 3 : Objet AB situé entre le centre optique et le foyer image F'
Cas 4 : Objet AB situé après le foyer image F'

Exercice (04 points)

A/ Soit une onde telle que $S(x,t) = S_m\cos(4\pi t + \beta\pi x - 3)$.
a) L'onde se propage-t-elle dans le sens des x croissants ou décroissants ?
b) Déterminer sa période temporelle T, sa période spatiale λ et sa vitesse c.

B/ a) Les ondes radar ont une longueur d'onde comprise entre λ_1=3,0 cm et λ_2=1,0 m. Déterminer les fréquences de ces ondes électromagnétiques se propageant à la vitesse de la lumière.
b) On considère une onde radar harmonique progressive se propageant selon l'axe Oz dans le sens des z croissants et polarisée rectilignement selon la direction Oy. Donner l'expression mathématique de la grandeur physique de ce signal qu'est le champ électrique.
c) Déterminer la position des points qui vibrent en phase avec l'origine.
d) Même question pour ceux qui vibrent en opposition de phase avec l'origine.

Problème (12 points)

Le plus simple des microscopes visuels est constitué de deux lentilles convergentes considérées comme minces. La première, l'objectif, devra donner de l'objet une image agrandie. La seconde, l'oculaire, rendra cette image observable à l'œil.

Dans tout ce problème, on notera L les lentilles minces, O la position de leur centre optique, F celle du foyer objet et F' celle du foyer image. On notera AB les objets, A étant leur position sur l'axe optique et $\overline{AB}$ leur taille algébrique. Ces objets seront considérés comme plans et perpendiculaires à l'axe optique.

A/ L'objectif :

Il sera réalisé avec une lentille convergente L_1 placée en O_1, de distance focale f_1'. On prendra f_1' = 1,0 cm, $\overline{O_1A}$ = – 1,5 cm, $\overline{A'B'}$ = a = 0,50 cm.

a) Construire A_1B_1, l'image de AB à travers L_1.

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

b) Calculer l'abscisse $\overline{O_1A_1}$ de A_1 et le grandissement γ_1 de L_1 en fonction de f_1' et $p_1 = \overline{O_1A}$.

Donner les valeurs numériques de $\overline{O_1A_1}$ et γ_1.

c) Où doit-on placer un objet AB pour que son image A_1B_1 à travers L_1 soit réelle et agrandie ?

B/ L'oculaire :

a) Pour observer une image réelle directement à l'œil nu, où doit elle se situer ?

b) Où faut-il placer l'oculaire L_2 pour qu'un œil emmétrope puisse observer l'image $A'B'$ de A_1B_1 à travers L_2 sans accommodation ?

c) On place l'oculaire L_2 à cet endroit. On prendra $f_2' = 4{,}0$ cm. Peut-on dessiner l'image $A'B'$ de A_1B_1 ?

d) Représenter l'angle α' sous lequel on voit A'B' et exprimer cet angle en fonction de γ_1, a et f_2'.

C/ Doublet de lentilles minces :

On appelle doublet de lentilles minces une association de deux lentilles minces L_1 et L_2. On caractérise ce doublet par f_1' et f_2', les distances focales, et par l'écartement $\Delta = \overline{F_1'F_2}$.

a) Dans le cas général, donner les positions des foyers F et F' du doublet. Pour cela, on calculera $\overline{O_1F}$ en fonction de f_1' et Δ, puis $\overline{O_2F'}$ en fonction de f_2' et Δ.

b) Calculer $\overline{O_1F}$ et $\overline{O_2F'}$ dans le cas du microscope précédent. Vérifier graphiquement ces positions.

D/ Grossissement :

On rappelle que le grossissement commercial d'un instrument d'optique est $G_c = \frac{\alpha'}{\alpha_{ref}}$, où α_{ref} est l'angle sous lequel un observateur verrait AB à une distance conventionnelle d_{PP} correspondant au Punctum Proximum d'un œil normal (d_{PP} = 250 mm) et α' l'angle sous lequel on voit l'image de AB dans l'instrument d'optique.

a) En s'aidant d'un dessin, calculer le grossissement commercial de l'oculaire G_{c2} du microscope précédent en fonction de f_2' et d_{PP}. Donner sa valeur numérique.

b) Exprimer le grossissement G_c du microscope en fonction de G_{c2} et γ_1. Calculer sa valeur numérique.

E/ Puissance :

On rappelle que la puissance commerciale P d'un instrument d'optique est définie par $P = \frac{\alpha'}{AB}$.

Calculer celle du microscope précédent en fonction de γ_1 et f_2'. Calculer numériquement P (on précisera son unité).

F/ Résolution :

On rappelle que le pouvoir séparateur de l'œil est d'une minute d'arc.

Calculer la taille du plus petit objet visible avec le microscope précédent. En fait, quel phénomène physique intervient avant, empêchant d'atteindre cette résolution ?

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny
(Rép. Côte d'Ivoire)

Année 2023-2024

LICENCE 1 MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE (MI1)

PREMIERE SESSION 2023 – 2024

UE OPTIQUE GEOMETRIQUE

Durée : 2 heures

Questions de cours *(06 points)*

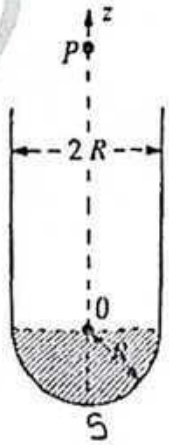
1) Enoncer le principe de Fermat dans un milieu transparent quelconque.
2) A partir du principe de Fermat, établir les deux (2) lois de Snell-Descartes pour la réfraction.
3) Quand dit-on qu'un système optique est rigoureusement stigmatique pour le couple de points (A , A') ?
4) Quelle est la nature (réelle ou virtuelle) de l'image dans les cas suivants ? Justifier votre réponse.
   a) Un nageur qu'on regarde au fond d'une piscine.
   b) Une femme qui se maquille face à un miroir plan.
   c) L'image d'un immeuble prise par un appareil photographique.
5) On considère un dioptre sphérique D_S de centre C et de sommet S, séparant les milieux d'indices n et n '.
   a) Donner, sans démonstration, la relation de conjugaison (de position) de D_S avec des mesures algébriques ayant pour origine le sommet S. On se placera dans les conditions de Gauss ;
   b) A partir de cette formule, déterminer les positions des foyers principaux F et F ' de D_S par rapport à S ;
   c) En assimilant le miroir sphérique à un cas particulier de dioptre sphérique, montrer que les deux foyers principaux du miroir sphérique sont confondus.

Exercice 1 **(06 points)**

On considère un tube en verre, cylindrique, d'axe vertical Oz, d'épaisseur négligeable et de diamètre 2R = 8 cm. Le tube est terminé à sa partie inférieure par une surface hémisphérique de centre O, de sommet S et de rayon R. Une source lumineuse ponctuelle P est placée sur l'axe Sz du tube, à la cote $\overline{OP}$ = 27 cm au-dessus de O. On ne s'intéresse qu'aux rayons lumineux voisins de l'axe Sz. L'eau d'indice n = 4/3 remplit la partie hémisphérique du tube, son niveau horizontal contenant O (voir figure).

1/ Déterminer la position $\overline{OP'}$ de l'image P' de P à travers ce système. Construire la marche d'un rayon lumineux issu de P.

2/ Déterminer la position $\overline{OF'}$ du foyer image F' de ce système.



VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

VALIDEUR LMD-2025

Exercice 2 (08 points)

Un oculaire de distance focale f ' = 40 mm est formé de deux lentilles minces L_1 et L_2 convergentes taillées dans le même verre, de centres optiques O_1 et O_2, constituant un doublet de symbole (4,3,2).

La lumière se propage dans le sens O_1O_2.

1/ Déterminer les distances focales f_1' et f_2' de L_1 et L_2, ainsi que leur écartement $d = O_1O_2$.

2/ Déterminer les positions des foyers F et F' de cet oculaire. S'agit-il d'un oculaire convergent ou divergent ?

3/ En déduire les positions des points principaux H et H'.

4/ Etablir la relation entre f_1', f_2' et d pour qu'un doublet plongé dans l'air soit achromatique, c'est-à-dire que sa distance focale f ' soit indépendante de la longueur d'onde de la radiation qui l'éclaire. L'oculaire étudié est-il achromatique ?

Scanned with CamScanner

Université Félix Houphouët-Boigny
(Rép. Côte d'Ivoire)

Année 2023-2024
UFR MI

LICENCE 1 MATHEMATIQUE-INFORMATIQUE / CLASSE ETOILE 1ERE ANNEE

SECONDE SESSION 2023 – 2024

UE OPTIQUE GEOMETRIQUE

Durée : 2 heures

Questions de cours ***(03 points)***

On considère un dioptre sphérique D_S de centre C et de sommet S, séparant les milieux d'indices n et n '.

a) Donner, sans démonstration, la relation de conjugaison (de position) de D_S avec des mesures algébriques ayant pour origine le sommet S. On se placera dans les conditions de Gauss ;

b) A partir de cette formule, déterminer les positions des foyers principaux F et F ' de D_S par rapport à S ;

c) En assimilant le miroir sphérique à un cas particulier de dioptre sphérique, montrer que les deux foyers principaux du miroir sphérique sont confondus.

Exercice 1 **(03 points)**

Une lentille mince biconvexe donne d'un objet réel situé à 70 cm avant son centre O une image renversée réduite d'un facteur 2.

Déterminer la position de l'image par rapport à O et la distance focale image de la lentille :

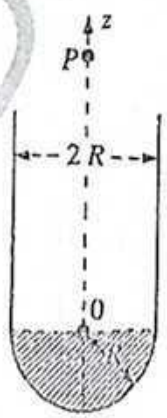
a) En utilisant les formules de Descartes ;
b) A partir d'une construction géométrique.

Exercice 2 **(06 points)**

On considère un tube en verre, cylindrique, d'axe vertical Oz, d'épaisseur négligeable et de diamètre 2R = 8 cm. Le tube est terminé à sa partie inférieure par une surface hémisphérique de centre O, de sommet S et de rayon R. Une source lumineuse ponctuelle P est placée sur l'axe Sz du tube, à la cote $\overline{OP}$ = 27 cm au-dessus de O. On ne s'intéresse qu'aux rayons lumineux voisins de l'axe Sz. L'eau d'indice n = 4/3 remplit la partie hémisphérique du tube, son niveau horizontal contenant O (voir figure).

1/ Déterminer la position $\overline{OP'}$ de l'image P' de P à travers ce système. Construire la marche d'un rayon lumineux issu de P.

2/ Déterminer la position $\overline{OF'}$ du foyer image F' de ce système.



VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

Exercice 3 (08 points)

Un oculaire de distance focale f ' = 40 mm est formé de deux lentilles minces L_1 et L_2 convergentes taillées dans le même verre, de centres optiques O_1 et O_2, constituant un doublet de symbole (4,3,2). La lumière se propage dans le sens O_1O_2.

1/ Déterminer les distances focales f_1' et f_2' de L_1 et L_2, ainsi que leur écartement $d = O_1O_2$.

2/ Déterminer les positions des foyers F et F' de cet oculaire. S'agit-il d'un oculaire convergent ou divergent ?

3/ En déduire les positions des points principaux H et H'.

4/ Etablir la relation entre f_1', f_2' et d pour qu'un doublet plongé dans l'air soit achromatique, c'est-à-dire que sa distance focale f ' soit indépendante de la longueur d'onde de la radiation qui l'éclaire. L'oculaire étudié est-il achromatique ?

VALIDEUR LMD-2025

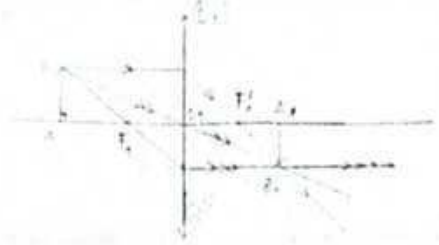
Scanned with CamScanner

CORRECTION DE L'EXAMEN D'OPTIQUE : PREMIERE SESSION 2020-2

PROBLEME

A/ L'objectif

a) Construisons A_1B_1 l'image de AB à travers L_1.



b) Calculons $\overline{O_1A_1}$ de A_1 et le grandissement γ_1 de L_1 en fonction de f' et $p_1 = \overline{O_1A}$.
D'après la relation de conjugaison, on a :

$$AB \xrightarrow{(L_1)} A_1B_1$$

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{\overline{O_1A} + f_1'}{f_1'.\overline{O_1A}}$$

D'où $\frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{\overline{O_1A}+f_1'}{f_1'.\overline{O_1A}}$ or $p_1 = \overline{O_1A}$.

$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{p_1+f_1'}{f_1'.p_1}$; alors $\overline{O_1A_1} = \frac{f_1'.p_1}{p_1+f_1'}$

On a : $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}$ or $p_1 = \overline{O_1A}$ et $\overline{O_1A_1} = \frac{f_1'.p_1}{p_1+f_1'}$.

$$\gamma_1 = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{f_1'.p_1}{p_1+f_1'}.\frac{1}{p_1} = \frac{f_1'}{p_1+f_1'}$$

Alors $\gamma_1 = \frac{f_1'}{p_1+f_1'}$

Applications numériques.

- $\overline{O_1A_1} = \frac{f_1'.p_1}{p_1+f_1'}$ A.N : $\overline{O_1A_1} = \frac{1,0\times(-1,5)}{1,0+(-1,5)} = 3\ cm$
- $\gamma_1 = \frac{f_1'}{p_1+f_1'}$ A.N : $\gamma_1 = \frac{1,0}{1-1,5} = -2$

c) Pour avoir une image réelle, il faut que $\overline{O_1A_1} > 0$.

Etudions donc les cas possibles :

- Si $p_1 > 0$: alors l'objet est virtuel, ce qui est toujours vrai.
- Si $p_1 < 0$: alors l'objet est réel, pour cela, il faut $p_1 + f_1' < 0$ soit $\overline{O_1A_1} < f_1'$ ① : Dans ce cas A_1 doit être avant F_1.

Pour avoir une image agrandie, il faut que $|\gamma_1| > 1$.

Etudions donc les cas possibles :

- Si $p_1 > 0$: C'est le cas impossible
- Si $p_1 < 0$: il faut $\frac{f_1'}{p_1+f_1'} > 0$ ou $\frac{f_1'}{p_1+f_1'} < -1$:

On remarque que $\frac{f_1'}{p_1+f_1'} > 0$ est impossible car $p_1 + f_1' < 0$

$\Rightarrow f_1' > -p_1 - f_1'$ ②

① et ② $\Rightarrow -2f_1' < \overline{O_1A_1} < -f_1'$

Alors pour que l'image A_1B_1 soit réelle et agrandie, il faut qu'on ait : $-2f_1' < \overline{O_1A_1} < -f_1'$.

Scanned with CamScanner

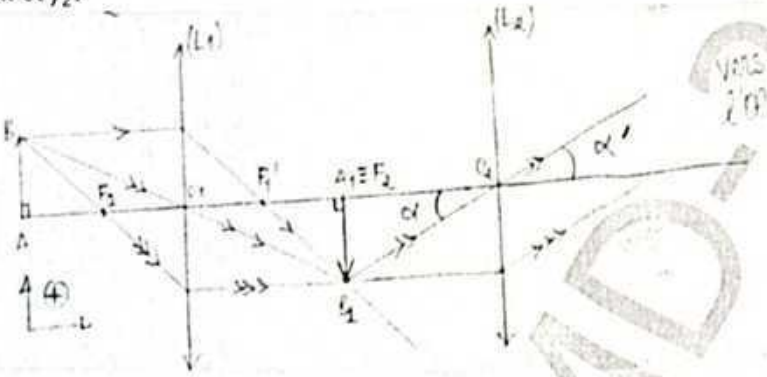
B/ L'oculaire

a) Oui, il est possible de voir une image réelle à l'œil nu mais cela est rendu difficile par l'éclairage ambiant.

b) L'œil voit sans accommodation, si les rayons qui lui arrivent semblent venir de l'infini. Il faut donc que A_1B_1, se trouve dans le plan focal objet de la lentille (L_2).

c) On ne peut pas la dessiner, car l'image est à l'infini.

d) Représentation de l'angle α' sous lequel on voit $A'B'$ et exprimons cet angle en fonction de γ_1, α et f_2'.



- Exprimons de α'.

On a : $tan\alpha' = tan\alpha = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_2F_2}}$ or $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{A_1B_1} = \gamma_1\overline{AB}$

$tan\alpha' = \frac{\gamma_1\overline{AB}}{\overline{O_2F_2}}$ or $\overline{O_2F_2} = -f_2'$

$\Rightarrow tan\alpha' = \frac{\gamma_1\overline{AB}}{-f_2'}$ or $\overline{AB} = a \Rightarrow tan\alpha' = \frac{\gamma_1 a}{-f_2'}$

Pour α'et α petit, on aura $tan\alpha' \approx \alpha' = \frac{\gamma_1 a}{-f_2'}$

Alors : $\alpha' = \frac{\gamma_1 a}{-f_2'}\gamma_1 < 0$, alors $\alpha' > 0$

C/ Doublet de lentilles minces :

a) F' est l'image à travers le doublet d'un point à l'infini sur l'axe, A_∞.

On a donc :

$$A_\infty \xrightarrow{(L1)} F_1' \xrightarrow{(L_2)} F'$$

F' est alors l'image F_1' à travers (L_2). D'après la relation de conjugaison, on a :

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F_1'}} = \frac{1}{f_2'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2F'}} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{\overline{O_2F_1'}}$$

Or $\overline{O_2F_1'} = \overline{O_2F_2} + \overline{F_2F_1'} = \overline{O_2F_2} - \overline{F_1'F_2} = f_2 - \Delta = -f_2' - \Delta$

D'où $\frac{1}{\overline{O_2F'}} = \frac{1}{f_2'} - \frac{1}{f_2'+\Delta} = \frac{f_2'+\Delta-f_2'}{f_2'(\Delta+f_2')} = \frac{\Delta}{f_2'(\Delta+f_2')}$

$\Rightarrow \overline{O_2F'} = \frac{f_2'(\Delta+f_2')}{\Delta}$

De la même façon, F a pour image un point à l'infini sur l'axe, A'_∞ :

$$F \xrightarrow{(L1)} F_2 \xrightarrow{(L_2)} A'_\infty$$

F_2 est l'image de F à travers (L_1). D'après la relation de conjugaison, on a :

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

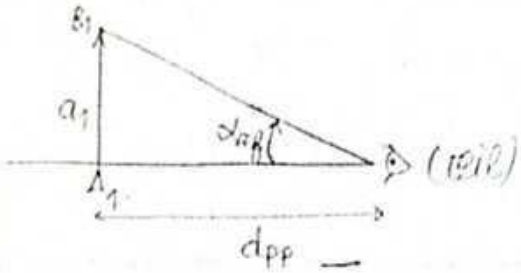
$$\frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{f_1'}$$

Or $\overline{O_1F_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1F_2} = f'_1 + \Delta$

D'où $\frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{f_1'} = \frac{f_1'-\Delta-f_1'}{f_1'(\Delta+f_1')} = \frac{-\Delta}{f_1'(\Delta+f_1')}$

$\Rightarrow \overline{O_1F} = -\frac{f_1'(\Delta+f_1')}{\Delta}$

On constate sur la figure que, pour $\alpha_{réf}$ *petit*, $tan\alpha_{réf} \approx \alpha_{réf} \approx \frac{a_1}{dpp}$.



Or $\alpha' = -\gamma_1 \frac{a}{f_2'}$. Par ailleurs, $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{a_1}{a} < 0$.

D'où $\alpha' = -\frac{a_1}{a}.\frac{a}{f_2'} = \frac{a_1}{f_2'} > 0 \Rightarrow \alpha' = \frac{a_1}{f_2'}$

Le grandissement commercial est donc : $G_{C_2} = \frac{\alpha'}{\alpha_{réf}}$

$\Rightarrow G_{C_2} = \frac{+a1}{f_2'} \times \frac{1}{\frac{a_1}{dpp}} = \frac{a1}{f_2'} \times \frac{dpp}{a_1} = \frac{dpp}{f_2'}$

$\Rightarrow G_{C_2} = \frac{dpp}{f_2'}$ A.N $G_{C_2} = \frac{25}{4} = 6.25$

Alors $G_{C_2} = 6.25$

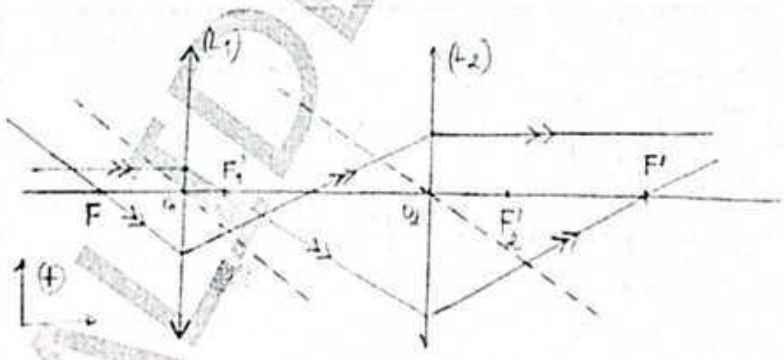
b) $\overline{O_2F'} = \frac{f_2'(\Delta+f_2')}{\Delta}$ A.N : $\overline{O_2F'} = \frac{4(4+2)}{2} = 12\,cm$

$\overline{O_2F'} = 12cm$

$\overline{O_1F} = -\frac{f_1'(\Delta+f_1')}{\Delta}$ A.N : $\overline{O_1F} = -\frac{1(2+1)}{2} = -1{,}5cm$

$\overline{O_1F} = -1{,}5cm$

Vérifions graphiquement ces positions



Pour trouver F, on procède avec un rayon venant de la droite et en exploitant le principe de retour inverse de la lumière.

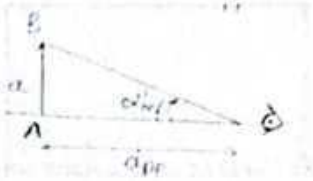
VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

D/ Grossissement

a) Calculons G_{C_2} en fonction de f_2' et dpp.
b) Exprimons G_C en fonction de γ_1 et G_{C_2}.

$\alpha'_{réf} \approx \frac{a}{dpp}$ et $\alpha' = -\gamma_1 \frac{a}{f_2'}$



On en déduit $G_C = \frac{\alpha'}{\alpha_{réf}} = \frac{-\gamma_1 dpp}{f_2'}$

Or $G_{C_2} = \frac{dpp}{f_2'} \Rightarrow G_C = -\gamma_1 G_{C_2}$

A.N $G_C = -(-2) \times 6{,}25 = 12{,}5$

$G_C = 12{,}5$

E/ Puissance

Calculons celle du microscope précédent en fonction de f_2' et γ_1.

La puissance commerciale est donnée par :

$P = \frac{\alpha'}{\overline{AB}} = \frac{\alpha'}{a}$ or $\alpha' = -\gamma_1 \frac{a}{f_2'}$.

D'où $P = \frac{-\gamma_1 \frac{a}{f_2'}}{a} = -\frac{\gamma_1}{f_2'}$

$P = -\frac{\gamma_1}{f_2'}$

A.N : $P = \frac{2}{4\times10^{-2}} = 50m^{-1}$

$P = 50m^{-1}$

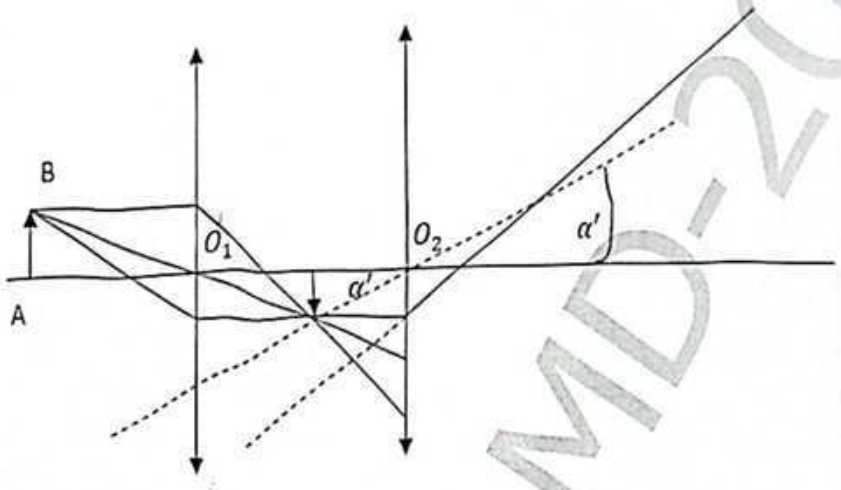
VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Correction optique session 2 2020-2021

Exercice 1

1)



Le microscope permet de grossir l'image d'un objet de petites dimensions et de séparer les détails de cette image afin qu'il soit observable à l'œil humain.

2) Calculons la position $\overline{O_2A'}$

- La relation de conjugaison de la lentille (L_1) est :

$$\frac{1}{\overline{O_1A}} - \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{\overline{O_1F_1}} = -\frac{1}{f_1'} \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{\overline{O_1A}}$$

Avec A_1 l'image A par rapport à (L_1).

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{\overline{-AO_1}}$$

A.N

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{2.10^{-3}} + \frac{1}{-2{,}04.10^{-3}}$$

$$\overline{O_1A_1} = 0{,}102m$$

- La relation de conjugaison de la lentille (L_2) est :

$\frac{1}{\overline{O_2A_1}} - \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{\overline{O_2F_2}} = -\frac{1}{f_2'}$ Avec A' l'image A par rapport à (L_2).

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{\overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{-\overline{O_1O_2} + \overline{O_1A_1}}$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

A.N

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{2.10^{-2}} + \frac{1}{-0,12 + 0,102}$$

$$\overline{O_2A'} = -0,18m$$

- Calculons la taille $\overline{A'B'}$ de l'image.

Notons γ_1 et γ_2 les grandissements respectifs des lentilles (L_1) et (L_2).

On a : $\gamma_1 = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{A_1B_1} = \overline{AB}\left(\frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}\right)$

$$\Rightarrow \overline{A_1B_1} = \frac{0,102}{-2,04.10^{-3}} = -50\mu m$$

$$\Rightarrow \overline{A_1B_1} = -50\mu m$$

$$\gamma_2 = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{A_1B_1}\left(\frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}}\right)$$

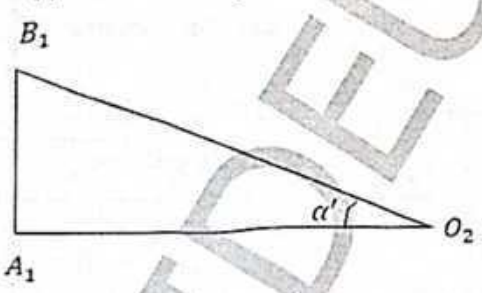
$$\Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{A_1B_1}\left(\frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1}}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{A_1B_1}\left(\frac{\overline{O_2A'}}{-\overline{O_1O_2} + \overline{O_1A_1}}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{A'B'} = -50\left(\frac{-0,18}{-0,12+0,102}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{A'B'} = -500\mu m$$

3) L'observateur met son œil au foyer image de l'oculaire. Déterminons le diamètre apparent de l'image c'est-à-dire θ' sous lequel elle est observée.

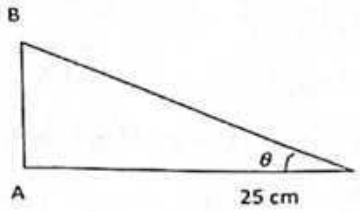


$$tan\theta' = \frac{A_1B_1}{O_2A_1} = \frac{|\overline{A_1B_1}|}{|\overline{O_2A_1}|} = \frac{|\overline{A_1B_1}|}{|\overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1}|}$$

$$= \frac{50.10^{-6}}{0,12 - 0,102} = 2,78.10^{-3}$$

$$\theta' = 2,8.10^{-3} rad$$

4) Déterminons le diamètre apparent θ de l'objet observé à l'œil nu, à la distance de $25cm$.



$$tan\theta = \frac{AB}{0,25} = 4.10^{-6}$$

$$\theta = 4.10^{-6}$$

Calcul du grossissement $G = \frac{\theta'}{\theta}$ du microscope.

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{2,8.10^{-3}}{4.10^{-6}} = 700$$

$$G = 700$$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

CORRECTION OPTIQUE SESSION 1 ANNEE 2021-2022

EXERCICE 1

1 – a) $A \xrightarrow{D_p} A_1 \xrightarrow{D_S} A'$

- *De A à A_1*

$$\frac{\overline{OA}}{n_0} = \frac{\overline{OA_1}}{n} \quad => \overline{OA_1} = \frac{n}{n_0}\overline{OA}$$

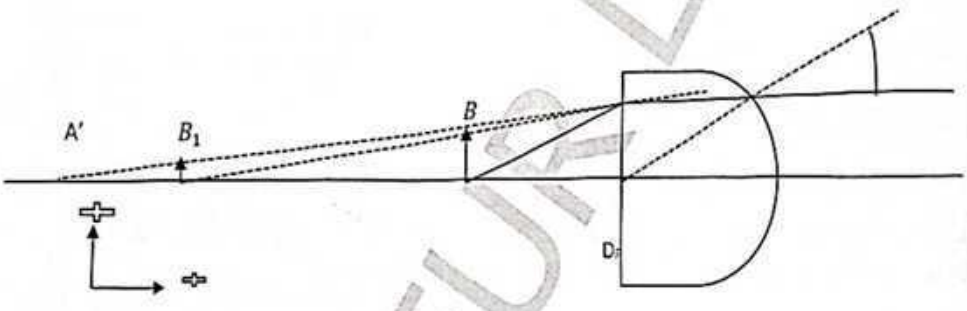
- *De A_1 à A'* $\frac{n}{\overline{OA'}} - \frac{n_0}{\overline{OA_1}} = \frac{n-n_0}{\overline{OS}}$ *avec* $\overline{OS} = R$ on obtient $\frac{n^2}{\overline{OA'}} - \frac{n_0^2}{\overline{OA}} = \frac{n(n-n_0)}{R}$ (1)

b - La formule de grandissement linéaire

$\gamma = \gamma(D_p) \cdot \gamma(D_S)$

$\gamma(D_p) = 1$ *(Dioptre plan)* $\quad \gamma(D_S) = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA_1}}$ $\quad => \quad \gamma(D_S) = \frac{n_0}{n}\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ $\quad donc\ \gamma = \frac{n_0}{n}\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ [2]

C – Déterminons la position et la grandeur de l'image A'B' d'un petit objet AB=10mm disposé parallèlement à la face d'entrée de la lentille, au point A diamétralement opposé à S



$AB \xrightarrow{D_p} A_1B_1 \xrightarrow{D_S} A'B'$

$\gamma(D_p) = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = 1 \quad => \quad \overline{A_1B_1} = \overline{AB}$ et [1] $\quad => \quad \overline{OA'} = -16{,}09\ cm$

La taille de l'image [2] $\Rightarrow \gamma = 2{,}08 \quad et \quad \overline{A'B'} = 2{,}09\ cm$

2 – Déterminons littéralement, puis numériquement

a – Les positions du foyer F' et F

$A_\infty \longrightarrow F' \qquad \overline{OA'} = \overline{OF'}$ [1] $\Rightarrow \frac{n^2}{\overline{OF'}} = \frac{n(n-n_0)}{R} \qquad \overline{OF'} = \frac{n}{n-n_0}R$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

F $\longrightarrow A'_{\infty}$ $\overline{OA} = \overline{OF}$ [1] $\Rightarrow -\frac{n_0^2}{\overline{OF}} = \frac{n(n-n_0)}{R}$ $\overline{OF} = -\frac{{n_0}^2}{n(n-n_0)}R$

AN : $\overline{OF'} = 27\ cm$, $\overline{OF} = -16cm$

b - H et H'

De l'équation 1 et 2 H $\longrightarrow$ H' / $\gamma = +1$ l'équation 2 => $\gamma = \frac{n_0}{n}\frac{\overline{OH'}}{\overline{OH}} = +1$

Donc $\overline{OH'} = \frac{n}{n_0}\overline{OH}$ [3] et l'équation 1 => $\frac{n^2}{\overline{OH'}} - \frac{{n_0}^2}{\overline{OH}} = \frac{n(n-n_0)}{R}$ [1']

(Multiplions l'équation 3 par n² et en prenant l'inverse) on obtient $\frac{n^2}{\overline{OH'}} = \frac{n\,n_0}{\overline{OH}}$ *alors* l'équation 1'

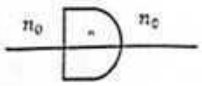
devient $\frac{n\,n_0}{\overline{OH}} - \frac{n_0^2}{\overline{OH}} = \frac{n(n-n_0)}{R}$ => $\overline{OH} = \frac{n_0}{n}R$ on déduit que $\overline{OH'} = R$

AN : $\overline{OH} = 4{,}76\ cm$ $\overline{OH'} = 6\ cm$

C – Les distances f et f'

$f = \overline{HF} = \overline{HO} + \overline{OF} = -\overline{OH} + \overline{OF}$ $\Rightarrow f = -\frac{n_0}{n}R - \frac{n_0^2}{n(n-n_0)}R$ $\Rightarrow f = -\frac{n_0}{n-n_0}R$

$f' = \overline{H'F'} = \overline{H'O} + \overline{OF'} = -\overline{OH'} + \overline{OF'}$ $\Rightarrow f' = -R + \frac{n_0}{n-n_0} \Rightarrow f' = \frac{n_0}{n-n_0}R$



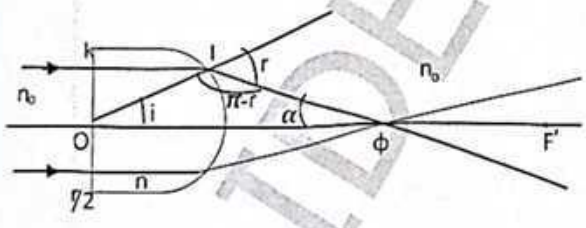
$\frac{f}{f'} = -\frac{n_0}{n_0} = -1 \Rightarrow f = -f'$ *alors* $V = \frac{n_0}{f'} = \frac{n-n_0}{R}$

AN : $f = -21\ cm$, $f' = -21\ cm$ *et* $V = 6{,}33\ \delta$

3 – La lentille baigne maintenant dans l'air $n_0 = 1$

$f = -\frac{1}{n-1}R$, $f' = \frac{1}{n-1}R$ *et* $V = \frac{n-1}{R}$ AN: $f = -8{,}45\ cm$, $f' = 8{,}45\ cm$ *et* $V = 11{,}83\ \delta$

4 – Calculs l'aberration sphérique $\overline{\phi'F'}$



α Dans le triangle $OI\phi'$ $i + (\pi - r) + \alpha$ *avec* $\alpha = r - i$

$\frac{O\phi'}{\sin(\pi-r)} = \frac{OI}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(r-i)} \Rightarrow O\phi' = R\left(\frac{sinr}{sinr.cosi - cosr.sini}\right)$

$O\phi' = R\left(\frac{1}{cosi - \frac{sini}{sinr}cosr}\right)$. Dans le triangle OKI , $sini = \frac{R/2}{R} = \frac{1}{2}$

$i = 30^0\ R = 6\ cm,\ nsini = sinr$

$cosr = \sqrt{1 - sin^2 r} = \sqrt{1 - n^2 sin^2 i}$

$cosr = 0{,}52; cosi = 0{,}87;$

$\frac{sini}{sinr} = \frac{1}{n} = 0{,}58$

AN : $O\phi' = 10{,}56\ cm$

$\overline{\phi'F'} = \overline{\phi'O} + \overline{OF'} = -\overline{O\phi'} + \overline{OF'}$

$\overline{OF'} = \frac{n}{n-n_0}R = \frac{1{,}71 \cdot 6}{1{,}71-1} = 14{,}45$ cm

AN : $\overline{\phi'F'} = -10{,}56 + 14{,}45 = 3{,}89\ cm$

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

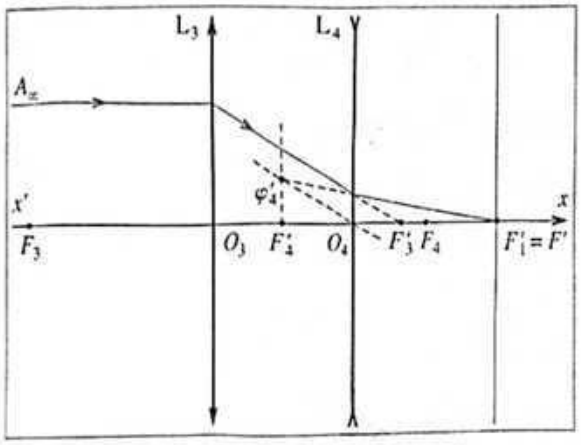
EXERCICE 2

1) Les lentilles L_1 et L_2 sont équivalentes à une lentille unique L_4 de centre $O_4 = O_1 = O_2$ et de distance focale f'_4.

$\frac{1}{f_4} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ d'où $f'_4 = -37{,}5$ mm.

L_4 est donc divergente, de foyers F_4 et F'_4.

On souhaite photographier des objets éloignés. Le foyer image F' de l'ensemble est sur la pellicule Π et coïncide avec F'_1.



$A_\infty \xrightarrow{L_3} F'_3 \xrightarrow{L_4} F' = F'_1$.

$\frac{1}{\overline{O_4F_1}} - \frac{1}{\overline{O_4F_3}} = \frac{1}{f_4}$, d'où $\overline{O_4F'_3} = 25$ mm.

La distance entre L_3 et L_4 vaut : $\overline{O_3O_4} = \overline{O_3F'_3} + \overline{F'_3O_4} = 75$ mm.

2) $\overline{O_3F'} = \overline{O_3O_4} + \overline{O_4F'} = 150$ mm.

3) La lentille L_3 donne de la tour $\overline{AB}$ une image $\overline{A_1B_1}$ pratiquement située dans son plan focal image : $\overline{A'_1B'_1} = -\frac{\overline{AB}}{d} f'_3 = -2$ mm.

Sur la pellicule, l'image $A'B'$ est égale à $\overline{A'B'} = \frac{\overline{O_4F'}}{\overline{O_4F'_3}} \cdot \overline{A'_1B'_1} = -6$ mm.

4) Pour obtenir une image de même dimension, une lentille convergente devrait avoir une distance focal $f' = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \cdot d = 300$ mm.

L'appareil serait donc deux fois plus encombrant.

VALIDEUR LMD 2025

Scanned with CamScanner

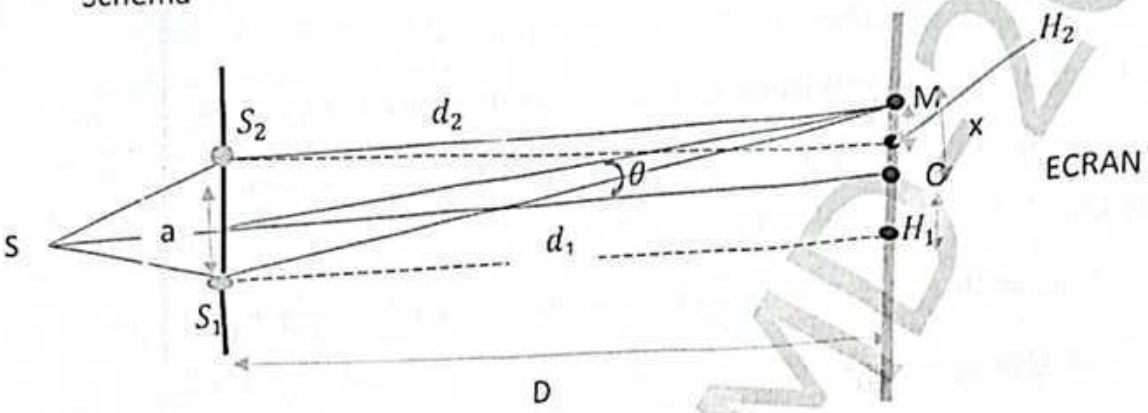
Scanned with CamScanner

Correction de l'examen d'optique géométrique session 1

Session 1 Année académique **2022-2023**

Exercice 1

Schéma

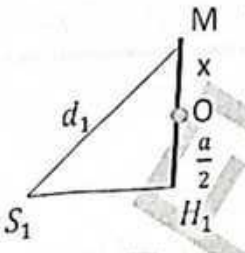


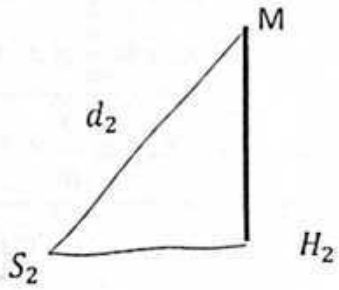
1) Exprimons δ=f(D,x,a)

$\delta(M) = n_{Air}(SM_1\text{-}SM_2) = d_1 - d_2$, car $n_{Air} = 1$

Cherchons d_1 et d_2

Considérons les deux triangles rectangles ci-dessous :





D'après la propriété de Pythagore on obtient :

$$d_1^2 = D^2 + (MH_1)^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

$$d_2^2 = D^2 + (MH_2)^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

Comme $D \gg a$ et $D \gg x \Rightarrow \frac{a}{D} \ll 1$ et $\frac{x}{D} \ll 1$

$$d_1 = \left(D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2} \text{ et } d_2 = \left(D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}$$

En développant on a :

VALIDEUR LMD 2025

$$d_1 = \left(D^2(1 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{xa}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2})\right)^{1/2} \text{ et } \quad d_2 = \left(D^2(1 + \frac{x^2}{D^2} - \frac{xa}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2})\right)^{1/2}$$

$$d_1 = D\left(1 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{xa}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2}\right)^{1/2} \text{ et } d_2 = D\left(1 + \frac{x^2}{D^2} - \frac{xa}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2}\right)^{1/2}$$

Posons que $x_1 = \frac{x^2}{D^2} + \frac{xa}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2}$ et $x_2 = \frac{x^2}{D^2} - \frac{xa}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2}$

$$d_1 = D(1 + x_1)^{1/2} \quad \text{et} \quad d_2 = D(1 + x_2)^{1/2}$$

En faisant développement limité au voisinage de 0 d'ordre 1, on obtient :

Rappelons la formule : $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$

$$DL_1 f(x)(O) = 1 + \alpha x + O(x)$$

D'où $d_1 = D(1 + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{xa}{2D^2} + \frac{a^2}{8D^2})$ et $d_2 = D(1 + \frac{x^2}{2D^2} - \frac{xa}{2D^2} + \frac{a^2}{8D^2})$

$$\delta(M) = d_1 - d_2 = \frac{xa}{D}$$

$$\boxed{\delta(M) = \frac{xa}{D}}$$

2) Déterminons X_{FB} et X_{FS}

➢ Pour X_{FS}

$$\delta(M) = \frac{aX_{FS}}{D} = \lambda(n + \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow X_{FS} = \frac{D}{a} \times \lambda(n + \frac{1}{2})$$

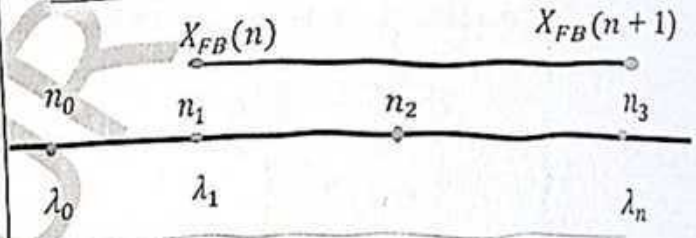
$$\boxed{X_{FS} = \frac{D}{a} \times \lambda(n + \frac{1}{2})}$$

➢ Pour X_{FB}

$$\boxed{X_{FB} = \frac{D}{a} \times \lambda n}$$

❖ Déterminons l'interfrange i

Schéma



λ

$$i = X_{FB}(n+1) - X_{FB}(n)$$

$$i = \frac{D}{a} \times \lambda(n+1) - \frac{D}{a} \times \lambda n$$

$$\boxed{i = \frac{D}{a}\lambda}$$

Exercice 2

Voir la correction de l'examen d'optique 2021-2022

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Correction de l'examen d'optique géométrique session 1

Session 1 : Classe étoile Année académique **2022-2023**

Question de cours

1)

a) Le centre optique étant dans le milieu d'indice de réfraction le plus élevé ce qui signifie que le dioptre sphérique est convergent.

b) Relation de conjugaison

$$\frac{n_2}{\overline{SA'}} - \frac{n_1}{\overline{SA}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}$$

Avec pour origine au centre C

$$\frac{n_2}{\overline{CA'}} - \frac{n_1}{\overline{CA}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{CS}} = V = \frac{n_1}{\overline{SF}} = -\frac{n_2}{\overline{SF'}}$$

2)

1er cas

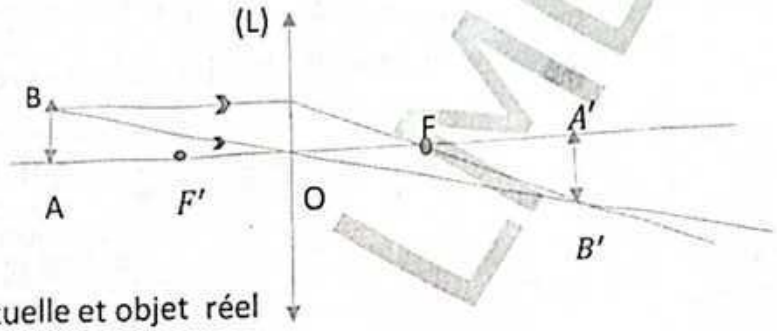


Image virtuelle et objet réel

2eme cas

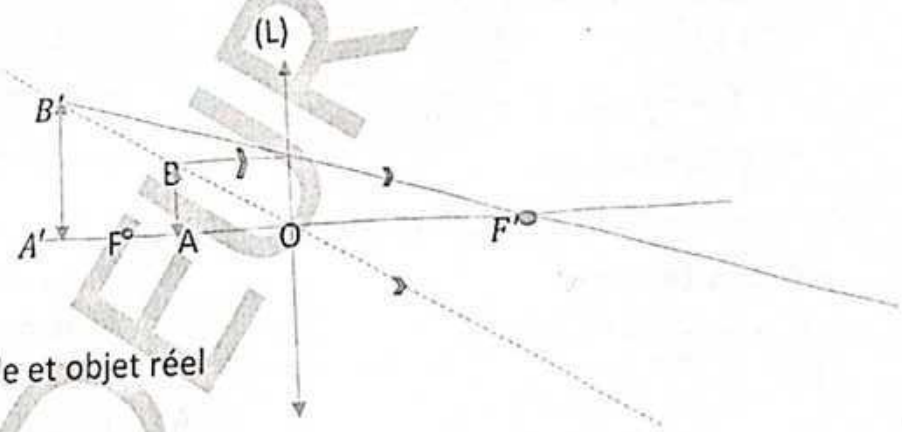


Image réelle et objet réel

3eme cas

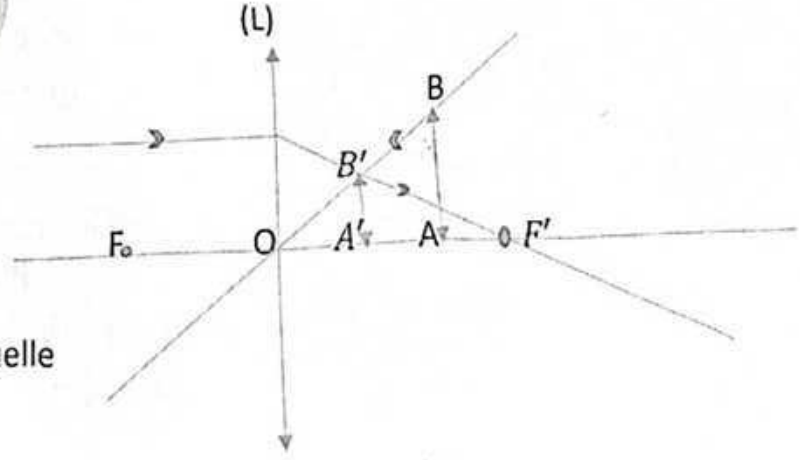


Image virtuelle et objet virtuelle

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

4er cas

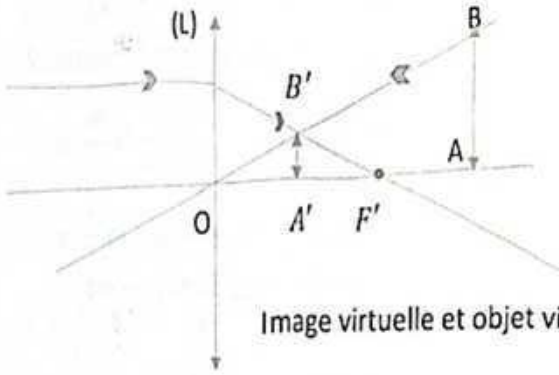


Image virtuelle et objet virtuel

Exercice

A) On a $S(x,t) = S_m \cos(4\pi t + 8\pi x - 3)$

a) Rappel : $S(x,t) = S_m \cos(\omega t + kx + \emptyset)$

- Lorsque le thème $kx < 0$, alors les ondes se propagent dans le sens des x croissant
- Lorsque le thème $kx > 0$, alors les ondes se propagent dans le sens des x croissant

Par conséquent les ondes se propagent dans le sens des x décroissant.

b) Déterminons : T, λ et c

- ✓ Période T

  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ AN : $T = 0.5s$
- ✓ Période spatial

  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ AN : $\lambda = 0.25s^{-1}$
- ✓ La vitesse c
- ✓ $c = \frac{\omega}{k}$ AN : c=0.5m. s^{-1}

B)

a) Déterminons les fréquences f_1 et f_2

$f_1 = \frac{c_0}{\lambda_1}$ AN : $f_1 = 10^{10}$Hz

$f_2 = \frac{c_0}{\lambda_2}$ AN : $f_2 = 3.10^8$Hz

b) Expressions mathématique

$\vec{E}(z,t) = A_m \cos(\omega t - kz + \emptyset)\vec{e}_y$

c) Déterminons la position du point

Posons que : H= $\omega t - kz + \emptyset$

A l'origine H=0 et $\emptyset = 0 \Rightarrow \omega t - kz = 0$

$z = \frac{\omega t}{k}$

d) En opposition

$\emptyset = \pi \Rightarrow z = \frac{\omega t + \pi}{k}$

Problème

Voir document valideur

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

Correction de l'examen d'optique deuxième session 2023-2024

Question de cours :

a) La relation de conjugaison de (D_s) $\frac{n}{\overline{SA}} - \frac{n}{\overline{SA'}} = \frac{n-n'}{\overline{SC}}$ (Formule de Descartes)

b) Déterminons F et F'

- Pour F

  On se place dans les conditions de Gauss

  $\overline{SA'} \to \infty \Rightarrow \frac{n'}{\overline{SA'}} \to 0$ d'où $\boxed{\overline{SA} = \overline{SF} = \frac{n'}{n'-n}\overline{SC}}$

- Pour F'

  $\overline{SA} \to \infty$ et $\overline{SA'} = \overline{SF'}$ d'où $\boxed{\overline{SA'} = \overline{SF'} = \frac{n}{n-n'}\overline{SC}}$

c) Montrons que f_1 et f_2 sont confondus

La relation de conjugaison du dioptre sphérique est donnée par :

$\boxed{\frac{n_2}{f_2} - \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2-n_1}{R}}$ ① avec n_1 et n_2 les indices de réfraction des deux milieux et R le rayon de courbure des dioptres.

Dans le cas d'un miroir sphérique on a n_1=1 (air) et n_2=1 (pour prendre en réflexion, considère que la lumière repart dans le milieu initial avec un changement de signe dû à la réflexion)

① devient $-\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} = -\frac{2}{R} \Rightarrow \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1} = \frac{2}{R}$

$f_2 \to \infty \Rightarrow \frac{1}{f_2} = 0$ d'où $\frac{1}{f_1} = \frac{2}{R}$

$f_1 \to \infty \Rightarrow \frac{1}{f_1} = 0$ d'où $\frac{1}{f_2} = \frac{2}{R}$

Par conséquent $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_1} = \frac{2}{R}$ (condition de Gauss) f_1 et f_2 sont donc confondus.

Exercice 1 :

Déterminons la position de l'image par rapport à O et de la distance focale image de la lentille

a) En utilisant les formules de Descartes ;

Déterminons $\overline{O'A'}$ et f'

Données du problème :

- Image est renversée et réduite d'un facteur 2, ce qui signifie que $y = -\frac{1}{2}$ (le grandissement)
- $\overline{OA} = -70$ car l'objet est situé avant la lentille

Le grandissement est $y = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \overline{OA'} = -\frac{1}{2} \times (-70) = 35\ cm$

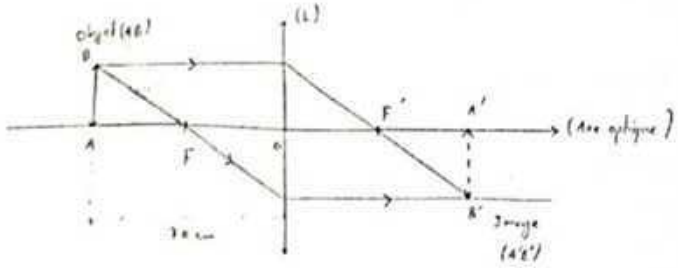
Cherchons f'

VALIDEUR LMD-2025

Scanned with CamScanner

D'après Descartes on a : $\frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{-70} + \frac{1}{35} = 70\ cm$

b) A partir d'une construction géométrique



NB : Exemple de construction, on retrouvera l'image réelle lorsqu'on utilise un papier millimétré.

Exercice 2

1) Calculons $\overline{OP'}$
   - On a le diamètre du tube $2R = 8\ cm \Rightarrow R = 4\ cm$
   - $n_0 = 1{,}33$ l'indice de réfraction de l'eau
   - La position de la source de lumière à l'hémisphère $\overline{OP} = 27\ cm$

   Appliquons la formule de la réfraction

   $-\frac{n_1}{\overline{OP}} + \frac{n_0}{\overline{OP'}} = \frac{n_0 - n_1}{R}$ (cas d'une surface sphérique) n_1 est l'indice de l'air n_1=1

   $$-\frac{1}{27} + \frac{1{,}33}{\overline{OP'}} = \frac{1{,}33-1}{4} \Rightarrow \overline{OP'} = \frac{1{,}33-1}{4} + \frac{1}{27} \approx 11{,}95\ cm$$

   ❖ **Tracer de la marche**

   Indication : $\begin{cases} - \textit{ Dessinez l'hemisphere avec son centre O et son sommet S} \\ - \textit{ Tracez l'axe vertical Oz passant par O} \end{cases}$

   ❖ **Tracer de la surface hémisphérique**

   - Position de P

     Marquez la position P sur l'axe Oz à 27 cm au-dessus de O
   - Rayon incident PA

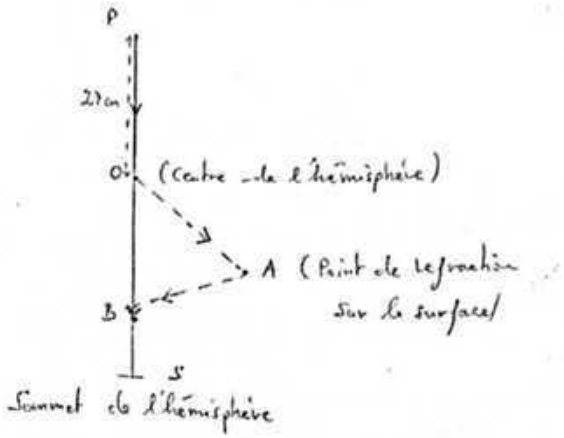
     Dessinez un rayon allant de P vers A sur G surface de l'hémisphère.
   - Normal à la surface en A

     Tracez la normale à la surface en A, passant par O
   - Rayon réfracté AB

     Tracez le rayon réfracté AB dans l'eau AB en direction de l'axe (Oz)

   Schéma

Scanned with CamScanner



2) Calculons $\overline{OF'}$

$-\frac{n_1}{\overline{OF}}+\frac{n_0}{\overline{OF'}}=\frac{n_0-n_1}{R}$ plaçons l'objet P à l'infini $\Rightarrow \overline{OF} \to \infty$

Si $\overline{OF} \to \infty \Rightarrow \frac{1}{\overline{OF}} \to 0$ d'où $\frac{n_0}{\overline{OF'}}=\frac{n_0-n_1}{R} \Rightarrow \overline{OF'}=\frac{n_0 R}{n_0-n_1} \approx 16{,}12\ cm$

Exercice 3

1) Déterminons f_1', f_2' et d

$\frac{1}{f'}=\frac{1}{f_1'}+\frac{1}{f_2'}-\frac{d}{f_1' f_2'}$ (Formule de la distance focale équivalente pour deux lentilles minces)

On a $f' = 40\ mm$

En tenant compte du symbole (4,3,2) on écrit $f_1' = 4n, f_2' = 3n$ et $d = 2n$

$$\frac{1}{40}=\frac{1}{4n}+\frac{1}{3n}-\frac{2n}{12n^2} \Rightarrow 12n = 200 \Rightarrow n = 16{,}67\ mm$$

D'où $f_1' = 66{,}68\ mm, f_2' = 50{,}01\ mm$ et $d = 33{,}33\ mm$

2) Déterminons F et F'

- La position du Foyer par rapport au centre optique O_1 de (L_1)

$$O_1F_1=\frac{f_1' \times d}{f_1 - d}=\frac{66{,}68 \times 40}{66{,}68 - 33{,}33}=80\ mm$$

$$O_1F_1 = 80\ mm$$

- La position du Foyer par rapport au centre optique O_2 de (L_2)

$$O_2F_2=\frac{f_2' \times d}{f_2 - d}=\frac{50{,}01 \times 40}{50{,}01 - 33{,}33}=119{,}89\ mm$$

$$O_2F_2 \approx 120\ mm$$

Scanned with CamScanner

Puisque l'oculaire a une distance focale positive $f' = 40\ mm$, alors l'oculaire est convergent.

3) Déterminons H et H'

- Pour le point principal image H'

$$O_2H' = \frac{f_2'(f_1 - d)}{f'} = \frac{50{,}01(66{,}68 - 33{,}33)}{40}$$

$$O_2H' = 41{,}69\ mm$$

- Pour le point principal objet H

$$O_1H = \frac{f_1(f_2 - d)}{f'} = \frac{66{,}68(50{,}01 - 33{,}33)}{40}$$

$$O_1H = 27{,}80\ mm$$

4) Etablissons la relation

Un doublet est dit achromatique si les aberrations achromatiques de ces deux lentilles se compensent mutuellement. Pour cela la relation entre les distance focales et leur écartement doit être telle que le doublet soit optimisé pour une certaine de longueurs d'onde.

Condition d'achromatique est :

$$f_1' \times f_2' = d \times \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1}$$

n_1 et n_2 sont des indices de réfraction des lentilles pour les longueurs d'onde différent (par exemple rouge et bleu)

Dans notre cas le doublet est taillé donc $n_1 = n_2$.

Vérifions si $f_1' \times f_2' = d$ où $\frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} = 1$

On a $f_1' \times f_2' = 3333{,}5 \neq d$ donc le doublet n'est pas parfaitement achromatique.

Scanned with CamScanner

Développements limités usuels en 0

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O\left(x^{2n+2}\right)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \cdots + (-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{Argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1\times 3\times\cdots(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{Argsh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + O\left(x^9\right)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + O\left(x^9\right)$$

Scanned with CamScanner

Développements limités usuels

$$e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n \qquad a \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \qquad x \in]-1;1[$$

$$\frac{1}{a-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}} x^n \quad (a \in \mathbb{C}^*) \qquad x \in]-|a|;|a|[$$

$$\frac{1}{(a-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{a^{n+2}} x^n \quad (a \in \mathbb{C}^*) \qquad x \in]-|a|;|a|[$$

$$\frac{1}{(a-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+k-1}^{k-1}}{a^{n+k}} x^n \quad (a \in \mathbb{C}^*) \qquad x \in]-|a|;|a|[$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \qquad x \in [-1;1[$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad x \in]-1;1]$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} x^n \qquad x \in]-1;1[$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} x^n \qquad x \in]-1;1[$$

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad x \in [-1;1]$$

$$\operatorname{Argth} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \qquad x \in]-1;1[$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x \in]-1;1[$$

$$\operatorname{Argsh} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x \in]-1;1[$$

Scanned with CamScanner

Relations

$$\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \pi/2$$

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi \quad \text{où} \quad \varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } xy < 1 \\ 1 & \text{si } xy > 1 \text{ et } x, y \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } xy > 1 \text{ et } x, y \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arccot} x = \pi/2$$

$$\operatorname{Arccot} x = \begin{cases} \operatorname{Arctan} 1/x & \text{si } x > 0 \\ \pi + \operatorname{Arctan} 1/x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} 1/x = \operatorname{sign}(x) \times \pi/2$$

Formules importantes pour le Calcul intégral

1 Corollaires du théorème de Pythagore

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+\cot^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

2 Addition des arcs

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \qquad \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

3 Arc double, arc moitié

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \qquad \tan x = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$$

Scanned with CamScanner

Bibliography

[1] ENSEIGNANTS DE UFRMI, proposition de sujets d'examens et/ou proposition de corrections

[2] LE VALIDEUR LMD LICENCE 1 EDITION 2024, *sur les anciens sujets de licence 1 de mathématique et Application*

[3] mathematiques-statistiques-et-probabilites

[4] algebre *SALIOU TOURE*

[5] analyse *edmond fedida*

[6] http://www.les-mathematiques.net

[7] http://www.sesamath.net

[8] Algebre et Geometrie PC-PSI-PT

[9] les grandes classques de mathématique -algebre et geometric

[10] Precis MP complet

[11] precis-mecanique

[12] Klub prepa

[13] H-prepa Analyse pc

[14] H-PREPAS mathematiques-1re-annee-mpsi-tout-en-un

[15] LA PHYSIQUE EN FAC

[16] jean marie monier les-m-thodes-et-exercices-de-math-matiques-mpsi

[17] EXO 7