versité Félix Houphouët-Boigny
R-MI-L1 2024-2025
2 heures 30 min

Devoir d'Espaces vectoriels

...ments et calculatrices programmables interdits. Les résultats sans justifications ne seront pas considérés.

...ercice 1. (07 points)

...s le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\beta = (e_1, e_2, e_3)$, on considère les par... $F = \{(x, y - x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ et $E = \{x(1, 3, -2) + y(5, 0, 1) - z(1, -12, 9) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

1. Expliciter les vecteurs e_1, e_2 et e_3.
2. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
3. Pour chacun des sous-espaces vectoriels E et F, déterminer une base et la dimension après avoir rappelé la définition de ces deux notions.
4. E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

...ercice 2. (13 points)

...ent $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie ...r $f(x, y, z) = (x - 3y - z, -x + y + z, 2x + 2y + 3z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. (a) Déterminer la matrice A de f dans la base β, c'est-à-dire $A = \mathrm{Mat}_{\beta\beta}(f)$.
   (b) Déterminer le déterminant de f, c'est-à-dire $\det(f) = \det(A)$. Que peut-on dire de f ?
   (c) Déterminer le noyau de f noté $\ker f$.
   (d) Donner la définition du rang de l'application linéaire f noté $\mathrm{rg}(f)$.
   (e) Que dit le théorème du rang ? En déduire $\mathrm{rg}(f)$.
   (f) Donner deux bases de $\mathrm{Im} f$.
2. Soient $v_1 = e_1 - e_2 + 2e_3$, $v_2 = -3e_1 + e_2 + 2e_3$, $v_3 = -e_1 + e_2 + 3e_3$.
   (a) Montrer de $\beta' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner la matrice de passage P de β à β'.
   (c) Donner la matrice de passage Q de β' à β.
   (d) Exprimer le vecteur $u = e_1 + e_2 + 2e_3$ dans la base β'.
   (e) Donner la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\beta'\beta'}(f)$ de f dans la base β' au moyen de la matrice P, puis sous forme de matrice.
   (f) Donner la matrice $C = \mathrm{Mat}_{\beta'\beta}(f)$ de f relativement à la base β' et la base β (c'est-à-dire que l'espace de départ $\mathbb{R}^3$ est muni de la base β' et l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^3$ est muni de la base β) au moyen des matrices A et P, puis à l'aide des matrices B et P.

Proposition de correction du devoir de Espaces vectoriels : 2024-2025

Exercice 1 (07 points)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère les parties $F = \{(x, y-x, y) ; x, y \in \mathbb{R}\}$ et $E = \{x(1,3,-2) + y(5,0,1) - z(1,-12,9) ; x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

1. Expliciter les vecteurs e_1, e_2 et e_3.

On a $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

2. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

On a
$$\begin{aligned} F &= \{(x, y-x, y) ; x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,-x,0) + (0,y,y) ; x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,-1,0) + y(0,1,1) ; x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,-1,0), (0,1,1) \rangle = \mathrm{vect}((1,-1,0),(0,1,1)) \subset \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Donc F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Aussi,
$$\begin{aligned} E &= \{x(1,3,-2) + y(5,0,1) - z(1,-12,9) ; x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,3,-2) + y(5,0,1) + z(-1,12,-9) ; x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,3,-2), (5,0,1), (-1,12,-9) \rangle \\ &= \mathrm{vect}((1,3,-2),(5,0,1),(-1,12,-9)) \subset \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Donc E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Remarque : On peut aussi écrire :

$$E = \{x(1,3,-2) + y(5,0,1) - z(1,-12,9) ; x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (1,3,-2), (5,0,1), (1,-12,9) \rangle$$

$$= \text{vect}((1,3,-2),(5,0,1),(1,-12,9)).$$

En effet, dans l'expression $x(1,3,-2)+y(5,0,1)-z(1,-12,9)$, avec $x, y, z \in \mathbb{R}$, on peut remplacer $-z$ par t. Ainsi, comme $z \in \mathbb{R}$, on a $t=-z \in \mathbb{R}$, et donc

$$x(1,3,-2)+y(5,0,1)-z(1,-12,9) = x(1,3,-2)+y(5,0,1)+t(1,-12,9),$$

avec $x, y, t \in \mathbb{R}$; ce qui signifie que tout élément de E est une combinaison linéaire des vecteurs $(1,3,-2)$, $(5,0,1)$ et $(1,-12,9)$, autrement dit $E = \langle (1,3,-2),(5,0,1),(1,-12,9) \rangle$

$$= \text{vect}((1,3,-2),(5,0,1),(1,-12,9)).$$

.. Pour chacun des sous-espaces vectoriels E et F, déterminer une base et la dimension après avoir rappelé la définition de ces deux notions.

- Définition d'une base d'un espace vectoriel → Voir le cours.
- Définition de la dimension d'un espace vectoriel → Voir le cours.

n sait, d'après la question 2, que

$$F = \langle (1,-1,0),(0,1,1) \rangle = \text{vect}((1,-1,0),(0,1,1)).$$

oit $\mathcal{B}_1 = ((1,-1,0),(0,1,1))$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice ociée à la famille $\mathcal{B}_1$ (les lignes étant formées des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}_1$).

On a $F = \langle \mathcal{B}_1 \rangle = \mathrm{vect}(\mathcal{B}_1)$, et donc

la famille $\mathcal{B}_1$ est une famille génératrice de F.

La famille $\mathcal{B}_1$ est-elle libre? on a $rg(\mathcal{B}_1) = rg(A) = 2$, car la matrice A est déjà échelonnée suivant les lignes.

Comme $rg(\mathcal{B}_1) = rg(A) = 2 = Card(\mathcal{B}_1)$, la famille $\mathcal{B}_1$ est donc libre.

La famille $\mathcal{B}_1$ étant donc libre et génératrice de F, la famille $\mathcal{B}_1 = ((1,-1,0),(0,1,1))$ est une base de F.

De plus, $\dim_{\mathbb{R}}(F) = rg(\mathcal{B}_1) = rg(A) = 2$.

On a aussi, d'après la question 2,

$$E = \langle (1,3,-2),(5,0,1),(-1,12,-9) \rangle$$
$$= \mathrm{vect}((1,3,-2),(5,0,1),(-1,12,-9))$$

(on peut aussi travailler avec $E = \langle (1,3,-2),(5,0,1),(1,-12,9) \rangle$
$= \mathrm{vect}((1,3,-2),(5,0,1),(1,-12,9))$
comme cela a été fait remarquer à la question 2.)

Soient $\mathcal{B}_2 = ((1,3,-2),(5,0,1),(-1,12,9))$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 12 & -9 \end{pmatrix}$ la matrice associée à la famille $\mathcal{B}_2$ (les lignes étant formées des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}_2$)

On a $E = \langle \mathcal{B}_2 \rangle = \mathrm{vect}(\mathcal{B}_2)$, et donc la famille $\mathcal{B}_2$ est une famille génératrice de E.

La famille $\mathcal{B}_2$ est-elle libre? on a $rg(\mathcal{B}_2) = rg(B)$ et

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 12 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -15 & 11 \\ 0 & 15 & -11 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -15 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

Donc $rg(\mathcal{B}_2) = rg(B) = 2 \neq Card(\mathcal{B}_2)$.

La famille $\mathcal{B}_2$ n'est donc pas libre. Par conséquent, $\mathcal{B}_2$ n'est pas une base de E. Nous allons donc extraire une famille libre $\mathcal{B}_3$ de la famille $\mathcal{B}_2$, qui sera aussi génératrice de E.

D'après l'échelonnage de la matrice B, les vecteurs $(1,3,-2)$ et $(5,0,1)$ sont linéairement indépendants. Donc $\mathcal{B}_3 = ((1,3,-2),(5,0,1))$ est une famille libre. Par ailleurs, $\mathcal{B}_3 \subset E$ et

$\dim_{\mathbb{R}}(E) = rg(\mathcal{B}_2) = rg(B) = 2 = rg(\mathcal{B}_3)$.

Donc la famille $\mathcal{B}_3 = ((1,3,-2),(5,0,1))$ est une famille génératrice de E. La famille $\mathcal{B}_3 = ((1,3,-2),(5,0,1))$ étant libre et génératrice de E, la famille $\mathcal{B}_3 = ((1,3,-2,(5,0,1))$ est une base de E.

<u>Remarque</u> : Voici quelques autres bases de E.

$\mathcal{B}_4 = ((1,3,-2),(-1,12,-9))$, $\mathcal{B}_5 = ((5,0,1),(-1,12,-9))$

$\mathcal{B}_6 = ((1,3,-2),(0,-15,11))$ sont des bases de E.

En effet, $\mathcal{B}_4 \subset E$, $\mathcal{B}_5 \subset E$ et $\mathcal{B}_6 \subset E$

Car $E = \langle \mathcal{B}_2 \rangle$ et $\mathcal{B}_4 \subset \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_5 \subset \mathcal{B}_2$ et les vecteurs de la famille $\mathcal{B}_6$ sont une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{B}_2$, d'après l'échelonnage de la matrice B.

De plus,

$$\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2 = rg(\mathcal{B}_4) = rg(\mathcal{B}_5) = rg(\mathcal{B}_6) = Card(\mathcal{B}_4) = Card(\mathcal{B}_5) = Card(\mathcal{B}_6)$$

Donc les familles $\mathcal{B}_4$, $\mathcal{B}_5$ et $\mathcal{B}_6$ sont des familles génératrices de E et libres. Par conséquent, $\mathcal{B}_4$, $\mathcal{B}_5$ et $\mathcal{B}_6$ sont des bases de E.

<u>Remarque</u>

Le même raisonnement vaut si l'on décide de travailler avec $E = \langle (1,3,-2), (5,0,1), (1,-12,9) \rangle$, et donc avec

$\mathcal{B}_2 = ((1,3,-2), (5,0,1), (1,-12,9))$ et la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & -12 & 9 \end{pmatrix}$$

4. E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

On a $\dim_{\mathbb{R}}(E) + \dim_{\mathbb{R}}(F) = 2 + 2 = 4$, d'après la question 3.

Or $4 \neq 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. Donc E et F ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

En effet, si E et F étaient supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, on aurait

$$\dim_{\mathbb{R}}(E) + \dim_{\mathbb{R}}(F) = \dim_{\mathbb{R}}(E+F) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3.$$

Exercice 2 (13 points)

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par
$f(x,y,z) = (x-3y-z, -x+y+z, 2x+2y+3z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

1.(a) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$.

on a. $f(e_1) = f(1,0,0)$

$= (1-3\times0-0, -1+0+0, 2\times1+2\times0+3\times0)$

$= (1,-1,2) = e_1 - e_2 + 2e_3$

. $f(e_2) = f(0,1,0)$

$= (0-3\times1-0, -0+1+0, 2\times0+2\times1+3\times0)$

$= (-3,1,2) = -3e_1 + e_2 + 2e_3$

. $f(e_3) = f(0,0,1)$

$= (0-3\times0-1, -0+0+1, 2\times0+2\times0+3\times1)$

$= (-1,1,3) = -e_1 + e_2 + 3e_3.$

me $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

(b) Déterminer le déterminant de f, c'est-à-dire $\det(f) = \det(A)$.
Que peut-on dire de f ?

On a $\det(f) = \det(A) = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & & \uparrow \\ C_1 & & C_3 \end{matrix} \end{array}$

$= \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & & \\ C_1+C_3 & & \end{matrix} \end{array}$ (Ce choix n'est pas unique)

$= 5(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ (on a développé suivant la première colonne)

$= 5(-3 \times 1 - 1 \times (-1))$

$= 5(-3+1) = 5 \times (-2) = -10.$

On a $\det(f) = \det(A) = -10 \neq 0$, et donc f est un endomorphisme bijectif, c'est-à-dire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(c) Déterminer le noyau de f noté $\ker f$.

Comme f est bijective d'après la question 1. (b), f est donc injective. Par conséquent, $\ker(f) = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\} = \{(0,0,0)\}$.

Autre approche

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$(x, y, z) \in \ker f \Leftrightarrow f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (car A est inversible puisque $\det(A) \neq 0$.)

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (0,0,0).$$

Donc $\ker f = \{u \in \mathbb{R}^3 ; f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; f(x, y, z) = (0,0,0)\}$

$= \{0_{\mathbb{R}^3}\} = \{(0,0,0)\}.$

(d) Donner la définition du rang de l'application linéaire f noté $rg(f)$.

Par définition, $rg(f) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(f))$,

où $\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}^3) = \{f(x, y, z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$

$= \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle \subset \mathbb{R}^3.$

(e) Que dit le théorème du rang? En déduire $rg(f)$.

Le théorème du rang dit que :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = \dim_{\mathbb{R}}(Im(f)) + \dim_{\mathbb{R}}(\ker(f))$$
$$= rg(f) + \dim_{\mathbb{R}}(\ker(f)). \quad (*)$$

Comme $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$, on a $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(f)) = 0$,

et donc $rg(f) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) - \dim_{\mathbb{R}}(\ker(f))$, d'après (*)

$$= \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) - 0$$
$$= \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3.$$

(f) Donner deux bases de $Im(f)$.

On a $Im(f)$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

et $\dim_{\mathbb{R}}(Im(f)) = rg(f) = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$.

Donc $Im(f) = \mathbb{R}^3$.

On peut aussi utiliser le fait que f étant bijective, est surjective, et donc $Im(f) = f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$.

D'où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une b

de $Im(f)$.

On sait aussi que $Im(f) = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle$ et

matrice associée à la famille $\mathcal{B}_0 = (f(e_1), f(e_2), f(e_3)$

est A, avec $\det(A) = \det(f) = -10 \neq 0$.

Donc $\mathcal{B}_0 = (f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = ((1,-1,2), (-3,1,2), (-1,1,3$

une autre base de $Im(f) = \mathbb{R}^3$.

2. Soient $v_1 = e_1 - e_2 + 2e_3$, $v_2 = -3e_1 + e_2 + 2e_3$,
$v_3 = -e_1 + e_2 + 3e_3$

(a) Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice associée à la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$. On a

$$\det \mathcal{B}' = \det(N) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0,$$

Car on remarque que $N = A$ et $\det(A) = -10$.

Donc $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

<u>Remarque</u> : • Pour l'étudiant qui n'a pas fait cette observation, il peut déterminer $\det \mathcal{B}' = \det(N)$ comme suit :

$$\det \mathcal{B}' = \det(N) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 + L_1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$= -2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \left(\text{on a développé suivant la deuxième ligne.}\right)$$

$$= -2(1 \times 3 - 2 \times (-1)) = -2(3+2) = -2 \times 5 = -10.$$

• On peut aussi chercher le rang de $\mathcal{B}'$.

On a $rg(\mathcal{B}') = rg(N) = 3$ car

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 . \end{matrix}$$

(b) Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

, la première colonne de P est formée des coordonnées de v_1 dans $\mathcal{B}$, la deuxième colonne de P est formée des coordonnées de v_2 dans $\mathcal{B}$ et la troisième colonne de P est formée des coordonnées de v_3 dans $\mathcal{B}$ (on rappelle que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$)

(c) Donner la matrice de passage Q de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

on a $Q = P^{-1}$.

et $P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)} \cdot {}^{t}\mathrm{Com}(P)$.

Déterminons la comatrice de P (la matrice des cofacteurs).

on a $\mathrm{com}(P) = (C_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ avec

- $C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\times 3 - 2\times 1 = 3 - 2 = 1$;
- $C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-1\times 3 - 2\times 1) = -(-3-2) = -(-5) = 5$;
- $C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -1\times 2 - 2\times 1 = -2-2 = -4$;
- $C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-3\times 3 - 2\times(-1)) = -(-9+2) = -(-7) = 7$
- $C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\times 3 - 2\times(-1) = 3+2 = 5$;
- $C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(1\times 2 - 2\times(-3)) = -(2+6) = -8$;
- $C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\times 1 - 1\times(-1) = -3+1 = -2$;
- $C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1\times 1 - (-1)\times(-1)) = -(1-1) = 0$;
- $C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 1 - (-1)\times(-3) = 1-3 = -2$.

D'où $\mathrm{Com}(P) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 7 & 5 & -8 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

et donc ${}^t\mathrm{Com}(P) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 5 & 5 & 0 \\ -4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $Q = P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)}\, {}^t\mathrm{Com}(P)$

$= \dfrac{1}{-10} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 5 & 5 & 0 \\ -4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ (car $P = N$ et $\det(N) = -10$)

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{-2}{-10} \\ -\frac{5}{10} & -\frac{5}{10} & -\frac{0}{10} \\ \frac{-4}{-10} & \frac{-8}{-10} & \frac{-2}{-10} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

(d) Exprimer le vecteur $u = e_1 + e_2 + 2e_3$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = x v_1 + y v_2 + z v_3$.

(x, y et z sont les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$).

On a $x v_1 + y v_2 + z v_3 = e_1 + e_2 + 2e_3$

$\Leftrightarrow \quad x(e_1 - e_2 + 2e_3) + y(-3e_1 + e_2 + 2e_3) + z(-e_1 + e_2 + 3e_3) = e_1 + e_2 + 2$

$\Leftrightarrow \quad (x - 3y - z)e_1 + (-x + y + z)e_2 + (2x + 2y + 3z)e_3 = e_1 + e_2 + 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - z = 1 \\ -x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \times 1 - \frac{7}{10} \times 1 + \frac{1}{5} \times 2 \\ -\frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{2} \times 1 + 0 \times 2 \\ \frac{2}{5} \times 1 + \frac{4}{5} \times 1 + \frac{1}{5} \times 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} - \frac{7}{10} + \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 \\ \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1-7+4}{10} \\ \frac{-1-1}{2} \\ \frac{2+4+2}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{4}{10} \\ -\frac{2}{2} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ -1 \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = -1 \\ z = \frac{8}{5} \end{cases}.$$

Donc $u = -\frac{2}{5} v_1 - v_2 + \frac{8}{5} v_3$.

(e) Donner la matrice $B = Mat_{\beta'\beta'}(f)$ de f dans la base β' au moyen de la matrice P, puis sous forme de matrice.

On a $\quad B = Mat_{\beta'\beta'}(f) = P^{-1} \, Mat_{\beta\beta}(f) \, P \qquad (**)$

$$= P^{-1} A P.$$

De plus, on remarque que $P = A$ (voir question 1.(a)).

Donc $\quad B = P^{-1} P P = (P^{-1} P) P = I_3 P = P = A.$

Ainsi, $\quad B = P = A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Voici un schéma pour retrouver la formule (**).

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, \beta) \arrow[rr, "A = Mat_{\beta\beta}(f)", "f"'] & & (\mathbb{R}^3, \beta) \arrow[d, "Id_{\mathbb{R}^3}"', "Mat_{\beta\beta'}(Id_{\mathbb{R}^3}) = Q = P^{-1}"] \\
(\mathbb{R}^3, \beta') \arrow[u, "P = Mat_{\beta'\beta}(Id_{\mathbb{R}^3})", "Id_{\mathbb{R}^3}"'] \arrow[rr, "f", "B = Mat_{\beta'\beta'}(f)"'] & & (\mathbb{R}^3, \beta')
\end{tikzcd}$$

On a $f = Id_{\mathbb{R}^3} \circ f \circ Id_{\mathbb{R}^3}$.

D'où l'égalité matricielle :

$\mathrm{Mat}_{\beta'\beta'}(f) = \mathrm{Mat}_{\beta\beta'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\, \mathrm{Mat}_{\beta\beta}(f)\, \mathrm{Mat}_{\beta'\beta}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$,

c'est-à-dire

$$B = P^{-1} A P .$$

(f) Donner la matrice $C = \mathrm{Mat}_{\beta'\beta}(f)$ de f relativement à la base β' et la base β (c'est-à-dire que l'espace de départ $\mathbb{R}^3$ est muni de la base β' et l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^3$ est muni de la base β) au moyen des matrices A et P, puis à l'aide des matrices B et P.

Nous allons répondre à cette question à l'aide de deux schémas.

•
$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, \beta) \arrow[rr, "A = \mathrm{Mat}_{\beta\beta}(f)", "f"'] & & (\mathbb{R}^3, \beta) \\
(\mathbb{R}^3, \beta') \arrow[u, "P = \mathrm{Mat}_{\beta'\beta}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})", "\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}"'] \arrow[urr, "f", "C = \mathrm{Mat}_{\beta'\beta}(f)"'] & &
\end{tikzcd}$$

On a $f = f \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, d'où l'égalité matricielle :

$$\mathrm{Mat}_{\beta'\beta}(f) = \mathrm{Mat}_{\beta\beta}(f)\, \mathrm{Mat}_{\beta'\beta}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) ;$$

c'est-à-dire $C = AP$.

Comme $A = P$ (voir question 1.(a)), on obtient

$$C = PP = AA, \text{ c'est-à-dire } C = P^2 = A^2.$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \arrow[r, "B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f)", "f"'] \arrow[dr, "f"', "C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f)"'] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}"', "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = P"] \\
& (\mathbb{R}^3, \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

On a $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \circ f$, d'où l'égalité matricielle :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f) ;$$

c'est-à-dire $\quad C = PB.$ $(***)$

Comme $B = P$ (voir question 2.(e)), on obtient

$$C = PP = BB \;;\ \text{c'est-à-dire}\quad C = P^2 = B^2.$$

<u>Remarque</u>

L'égalité $(***)$ peut aussi être obtenue à partir de la relation

$$C = AP.$$

En effet, on a $B = A = P$, d'après la question 2.(e).

Donc $\quad C = AP = PB.$

Ainsi, $\quad C = P^2 = A^2 = B^2.$