Université Félix Houphouët-Boigny
UFR-MI L1

2024-2025
2 heure 15 min

Devoir de Calcul matriciel

Documents et machines interdits.

Exercice 1. Répondre par vrai ou faux dans l'ordre des questions, en justifiant.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$

1. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\det(A^p) = p \times \det(A)$;
2. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda A) = \lambda \times \det(A)$;
3. Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif.
$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}),\ \det(AB) - \det(BA) = 0_{(\mathbb{K},+)},$$
où $0_{(\mathbb{K},+)}$ l'élément neutre du groupe abélien $(\mathbb{K}, +)$.
4. Si on permute 2 lignes d'une matrice inversible, elle reste inversible.
5. Si A est inversible, alors $A({}^tA)$ est inversible.
6. Soit A une matrice carrée quelconque. Alors $A + ({}^tA)$ est symétrique et $A - ({}^tA)$ est antisymétrique.
7. Le produit de deux matrices antisymétriques A et B est antisymétrique si et seulement si $AB = -BA$.
8. Soit A une matrice antisymétrique et inversible. Alors son inverse est antisymétrique.

Exercice 2. Soient
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. (a) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, justifier puis déterminer son inverse.
   (b) Calculer $M = A - xI_3$.
   (c) Calculer $P(x) = \det(M)$.
   (d) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
2. (a) Calculer $A^3 - 3A^2 - 16A - 12I_3$.
   (b) En déduire l'existence d'une matrice P telle que $AP = I_3$.
   (c) Donner une écriture de P sous forme de matrice.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S_1) suivant :
$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z &= 1 \\ 3x + 5y + 3z &= 2 \\ x + y - z &= -1. \end{cases}$$
4. On pose $N = A - 6I_3$.
   (a) Donner N sous forme de matrice puis l'échelonner réduire à ligne canonique.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S_2) suivant :
$$(S_2) \Leftrightarrow N \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition de correction du devoir de Calcul matriciel : 2024-2025

Exercice 1

Répondre par vrai ou faux dans l'ordre des questions, en justifiant

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

1. $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall p \in \mathbb{N}, \det(A^p) = p \times \det(A)$.

<u>Réponse</u> : Faux

- <u>Justification</u> : Contre-exemple

Prenons $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $p = 0$.

on a $A \in M_2(\mathbb{R})$, $0 \in \mathbb{N}$

et $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det A^0 = 1$.

Par ailleurs, $0 \times \det(A) = 0 \times 4 = 0$ $\left(\det(A) = 2 \times 2 = 4\right)$

donc $\det(A^0) \neq 0 \times \det(A)$.

on notera que $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall p \in \mathbb{N}, \det(A^p) = (\det(A))^p$.

2. $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \det(\lambda A) = \lambda \times \det(A)$.

<u>Réponse</u> : faux

<u>Justification</u> : Contre-exemple

Prenons $n=2$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$ et $\lambda=-1$.

On a $A\in M_2(\mathbb{R})$, $-1\in\mathbb{R}$.

et $-A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix} \Longrightarrow \det(-A)=\begin{vmatrix}-1&0\\0&-1\end{vmatrix}=(-1)\times(-1)=1$.

Par ailleurs, $(-1)\times\det(A)=(-1)\times 1=-1$.

Donc $\det(-A)\neq(-1)\times\det(A)$.

$$\boxed{\text{On notera que } \forall A\in M_n(\mathbb{R}),\ \forall \lambda\in\mathbb{R},\ \det(\lambda A)=\lambda^n\times\det(A)}$$

3. Soit $(\mathbb{K},+,\times)$ un corps commutatif.

$\forall A, B\in M_n(\mathbb{K})$, $\det(AB)-\det(BA)=0_{(\mathbb{K},+)}$,

où $0_{(\mathbb{K},+)}$ est l'élément neutre du groupe abélien $(\mathbb{K},+)$.

<u>Réponse</u> : Vrai

<u>Justification</u> : Comme $(\mathbb{K},+,\times)$ est un corps commutatif, on a (d'après le cours),

$\det(AB)=\det(A)\det(B) = \det(B)\det(A)=\det(BA)$.

Mais $\det(AB)=\det(BA)\in\mathbb{K}$

$\Longrightarrow \det(AB)-\det(BA)=\det(BA)-\det(BA)=0_{(\mathbb{K},+)}$.

Si on permute 2 lignes d'une matrice inversible, elle (la matrice obtenue) reste inversible.

<u>Réponse</u> : Vrai

<u>Justification</u> : Soit A une matrice carrée inversible.

Notons $\tilde{A}$ la matrice obtenue en permutant 2 lignes de la matrice A.

On a, d'après le cours, $\det(\tilde{A}) = -\det(A) \neq 0$, car

A inversible $\iff \det(A) \neq 0$.

Donc $\tilde{A}$ est inversible.

5. Si A est inversible, alors $A({}^tA)$ est inversible.

<u>Réponse</u> : Vrai

<u>Justification</u> : Soit A une matrice inversible.

On a ${}^tA$ inversible, avec pour inverse $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

(voir TD, Exercice 0 ou le cours, propriétés de la matrice inverse)

Donc $A({}^tA)$ est inversible, avec pour inverse

$$(A({}^tA))^{-1} = ({}^tA)^{-1} A^{-1} = ({}^t(A^{-1})) A^{-1}.$$

En effet, le produit de deux matrices inversibles A et B, est inversible avec, $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ (Voir le cours, propriétés de la matrice inverse)

6. Soit A une matrice carrée quelconque. Alors $A+({}^tA)$ est symétrique et $A-({}^tA)$ est antisymétrique.

Réponse : Vrai

Justification :

Pour rappel, une matrice carrée B est dite
- symétrique si ${}^tB=B$
- antisymétrique si ${}^tB=-B$.

a) On a ${}^t(A+({}^tA))={}^tA+{}^t({}^tA)={}^tA+A=A+({}^tA)$.

Donc $A+{}^tA$ est symétrique.

b) On a ${}^t(A-({}^tA))={}^tA-{}^t({}^tA)={}^tA-A$

$$=-A+{}^tA$$

$$=-(A-({}^tA)).$$

Donc $A-{}^t(A)$ est antisymétrique.

7. Le produit de deux matrices antisymétriques A et B est antisymétrique si et seulement si $AB=-BA$.

Réponse : Vrai.

Justification : Soient A et B deux matrices antisymétriques, c'est-à-dire que ${}^tA=-A$ et ${}^tB=-B$.

Montrons que AB antisymétrique $\Longleftrightarrow AB=-BA$.

$\Rightarrow$). Supposons que AB soit antisymétrique.

On a $\begin{cases} {}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA) = (-B)(-A) = BA \\ {}^t(AB) = -AB. \end{cases}$

D'où $-AB = BA$, c'est-à-dire que $AB = -BA$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $AB = -BA$.

On a ${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA) = (-B)(-A) = BA = -AB$.

Donc AB est antisymétrique.

---

8. Soit A une matrice antisymétrique et inversible. Alors son inverse est antisymétrique.

<u>Réponse</u>: Vrai

<u>Justification</u>:

On a ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = (-A)^{-1} = -(A^{-1})$.

Donc A^{-1}, l'inverse de A, est antisymétrique.

<u>Exercice 2</u>

Soient $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1. (a) La matrice A est-elle inversible? Si oui, justifier puis déterminer son inverse.

La matrice A est inversible. En effet,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ \\ L_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \, L_3 + L_1 \text{ (ce choix n'est pas unique)}$$

$$= 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \text{ (on a développé suivant la 3ème ligne)}$$

$$= -2(-1\times 3 - 3\times 1) = -2(-3-3) = -2\times(-6) = 12 \neq 0.$$

Donc A est inversible.

L'inverse de A noté A^{-1} est donné par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\mathrm{Com}(A) = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Com}({}^tA),$$

avec $\mathrm{Com}(A) = (C_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ (la matrice des cofacteurs C_{ij})

où $C_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$, Δ_{ij} étant le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice A.

On a
- $\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5\times(-1) - 1\times 3 = -5-3 = -8$, et donc $C_{11} = (-1)^{1+1}\Delta_{11} = -8$;

- $\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\times(-1) - 1\times 3 = -3-3 = -6$, et donc $C_{12} = (-1)^{1+2}\Delta_{12} = -(-6) = 6$;

- $\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\times 1 - 1\times 5 = 3-5 = -2$, et donc

$C_{13} = (-1)^{1+3}\,\Delta_{13} = -2$;

- $\Delta_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\times(-1) - 1\times 1 = -1-1 = -2$, et donc

$C_{21} = (-1)^{2+1}\,\Delta_{21} = -(-2) = 2$;

- $\Delta_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1\times(-1) - 1\times 1 = 1-1 = 0$, et donc

$C_{22} = (-1)^{2+2}\,\Delta_{22} = 1\times 0 = 0$;

- $\Delta_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\times 1 - 1\times 1 = -1-1 = -2$, et donc

$C_{23} = (-1)^{2+3}\,\Delta_{23} = -(-2) = 2$;

- $\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1\times 3 - 5\times 1 = 3-5 = -2$, et donc

$C_{31} = (-1)^{3+1}\,\Delta_{31} = -2$;

- $\Delta_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -1\times 3 - 3\times 1 = -3-3 = -6$, et donc

$C_{32} = (-1)^{3+2}\,\Delta_{32} = -(-6) = 6$;

- $\Delta_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1\times 5 - 3\times 1 = -5-3 = -8$, et donc

$C_{33} = (-1)^{3+3}\,\Delta_{33} = -8$.

Donc $\mathrm{Com}(A) = \begin{bmatrix} -8 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & -8 \end{bmatrix}$.

Scanné avec CamScanner

D'où $\,{}^t\text{Com}(A) = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & -8 \end{bmatrix}$

Ainsi, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,{}^t\text{Com}(A) = \dfrac{1}{12}\begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & -8 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-8}{12} & \frac{2}{12} & \frac{-2}{12} \\ \frac{6}{12} & \frac{0}{12} & \frac{6}{12} \\ \frac{-2}{12} & \frac{2}{12} & \frac{-8}{12} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(Il faut toujours mettre les coefficients a_{ij} sous forme irréductible.)

(On peut vérifier, après avoir déterminé A^{-1}, qu'on a bien $AA^{-1} = I_3$. Cela permet de détecter d'éventuelles erreurs dans les calculs. Cette vérification se fait au brouillon.

Ici, on a bien $AA^{-1} = I_3$, après vérification.)

(b) Calculer $M = A - xI_3$.

Scanné avec CamScanner

on a $M = A - x I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1-x & 1+0 & 1+0 \\ 3+0 & 5-x & 3+0 \\ 1+0 & 1+0 & -1-x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ 3 & 5-x & 3 \\ 1 & 1 & -1-x \end{bmatrix}$$

(a) Calculer $P(x) = \det(M)$.

on a $P(x) = \det(M) = \begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ 3 & 5-x & 3 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ \\ L_3 \end{matrix}$

$$= \begin{vmatrix} -2-x & 0 & 2+x \\ 3 & 5-x & 3 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_3 \end{matrix}$$

(ce choix n'est pas unique)

$$= (2+x) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5-x & 3 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} C_1 & & C_3 \end{matrix}$$

$$= (2+x) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5-x & 3 \\ -x & 1 & -1-x \end{vmatrix}$$
$$C_1 + C_3$$

Scanné avec CamScanner

$$= (2+x) \times 1 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 5-x \\ -x & 1 \end{vmatrix}$$ (On a développé suivant la 1ère ligne)

$$= (2+x)\left[6 \times 1 - (-x) \times (5-x)\right]$$

$$= (2+x)\left(6 + x(5-x)\right) = (2+x)(6+5x-x^2)$$

$$= (2+x)(-x^2+5x+6)$$

Pour factoriser $-x^2+5x+6$, on utilise la méthode du discriminant. On obtient, après calculs, $x_1 = 6$ et $x_2 = -1$ les racines.

Donc $-x^2+5x+6 = \underbrace{-1}_{} \times (x-6)(x-(-1)) = -(x-6)(x+1)$

$\to -1$ est le coefficient dans $-x^2$.

Finalement,

$$P(x) = \det(M) = (x+2)\left(-(x-6)(x+1)\right) = -(x+2)(x-6)(x+1).$$

<u>Remarque</u>: On peut calculer $P(x)$ de différentes façons. Le résultat reste le même. Par exemple,

$$P(x) = \det(M) = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ 3 & 5-x & 3 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ \\ L_3 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ 3 & 5-x & 3 \\ 2+x & 0 & -2-x \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - L_1 \end{array}$$

$$= (2+x) \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ 3 & 5-x & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} C_1 & \quad\quad & C_3 \end{array} \end{array}$$

Scanné avec CamScanner

(6)

$$= (2+x)\begin{vmatrix} -1-x & 1 & -x \\ 3 & 5-x & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} & & C_3+C_1 \end{array}$$

$= (2+x) \times 1 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -x \\ 5-x & 6 \end{vmatrix}$ (on a développé suivant la 3e ligne)

$= (x+2)\left(1\times 6 - (5-x)(-x)\right)$

$= (x+2)\left(6 + x(5-x)\right)$

$= (x+2)\left(6+5x-x^2\right)$

$= (x+2)\left(-x^2+5x+6\right)$

$= (x+2)\left(-(x-6)(x+1)\right)$ (pour rappel : $-x^2+5x+6 = -(x-6)(x+1)$)

$= -(x+2)(x-6)(x+1)$.

---

ou encore

$$P(x) = \det(M) = \begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ 3 & 5-x & 3 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} C_1 & & C_3 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} -2-x & 1 & 1 \\ 0 & 5-x & 3 \\ 2+x & 1 & -1-x \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} C_1-C_3 \end{array}$$

$$= (2+x)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5-x & 3 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ \\ L_3 \end{matrix}$$

$$= (x+2)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5-x & 3 \\ 0 & 2 & -x \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ L_3+L_1 \end{matrix}$$

$$= (x+2)\times(-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5-x & 3 \\ 2 & -x \end{vmatrix}$$ (On a développé suivant la 1ère colonne)

$$= -(x+2)\left((5-x)(-x)-2\times 3\right)$$

$$= -(x+2)(-5x+x^2-6)$$

$$= (x+2)(-x^2+5x+6)$$

$$= -(x+2)(x-6)(x+1).$$ (pour rappel : $-x^2+5x+6 = -(x-6)(x+1)$)

(Il y a encore d'autres possibilités de calcul de $D(x)$.)

(d) Résoudre l'équation $D(x)=0$:

On a :

$$D(x)=0 \iff -(x+2)(x-6)(x+1)=0$$

$$\iff (x+2)(x-6)(x+1)=0$$

$$\iff x+2=0 \text{ ou } x-6=0 \text{ ou } x+1=0$$

$$\iff x=-2 \text{ ou } x=6 \text{ ou } x=-1$$

$$\iff x\in\{-2,-1,6\}.$$

Donc l'ensemble $S_{\mathbb{R}}$ de solutions de l'équation $D(x)=0$ est :

$$S_{\mathbb{R}} = \{-2,-1,6\}.$$

2. (a) Calculer $A^3 - 3A^2 - 16A - 12I_3$.

On a :

- $-12I_3 = -12\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$;

- $-16A = -16\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -16\times(-1) & -16\times1 & -16\times1 \\ -16\times3 & -16\times5 & -16\times3 \\ -16\times1 & -16\times1 & -16\times(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & -16 & -16 \\ -48 & -80 & -48 \\ -16 & -16 & 16 \end{bmatrix} ;$$

- $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 15 & 31 & 15 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix},$$ (on a fait Li-col)

et donc $-3A^2 = -3\begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 15 & 31 & 15 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -3\times5 & -3\times5 & -3\times1 \\ -3\times15 & -3\times31 & -3\times15 \\ -3\times1 & -3\times5 & -3\times5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & -15 & -3 \\ -45 & -93 & -45 \\ -3 & -15 & -15 \end{bmatrix} ;$$

• $A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 15 & 31 & 15 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 11 & 31 & 19 \\ 93 & 185 & 93 \\ 19 & 31 & 11 \end{bmatrix}$ (on peut aussi écrire $A^3 = A^2 A$ et calculer. On a le même résultat.)

Donc

$A^3 - 3A^2 - 16A - 12I_3 = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$, avec

• $a_{11} = 11 - 15 + 16 - 12 = 0$;

• $a_{12} = 31 - 15 - 16 + 0 = 0$;

• $a_{13} = 19 - 3 - 16 + 0 = 0$;

• $a_{21} = 93 - 45 - 48 + 0 = 0$;

• $a_{22} = 185 - 93 - 80 - 12 = 0$;

• $a_{23} = 93 - 45 - 48 + 0 = 0$;

• $a_{31} = 19 - 3 - 16 + 0 = 0$;

• $a_{32} = 31 - 15 - 16 + 0 = 0$

• $a_{33} = 11 - 15 + 16 - 12 = 0$.

Ainsi, $A^3 - 3A^2 - 16A - 12I_3 = 0_{M_3(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) En déduire l'existence d'une matrice B telle que $AB = I_3$.

On a,

$A(A^2 - 3A - 16I_3) - 12I_3 = A^3 - 3A^2 - 16A - 12I_3 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$, d'après la question 2.(a)

D'où

$$A\left(A^2-3A-16I_3\right)=12I_3\text{, c'est-à-dire que}$$

$$A\left(\frac{1}{12}\left(A^2-3A-16I_3\right)\right)=I_3.$$

Donc $P=\frac{1}{12}\left(A^2-3A-16I_3\right)$

$$=\frac{1}{12}A^2-\frac{3}{12}A-\frac{16}{12}I_3$$

$$=\frac{1}{12}A^2-\frac{1}{4}A-\frac{4}{3}I_3.$$

(c) Donner une écriture de P sous forme de matrice.

On a

• $\frac{1}{12}A^2=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}5&5&1\\15&31&15\\1&5&5\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\frac{5}{12}&\frac{5}{12}&\frac{1}{12}\\\frac{15}{12}&\frac{31}{12}&\frac{15}{12}\\\frac{1}{12}&\frac{5}{12}&\frac{5}{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{12}&\frac{5}{12}&\frac{1}{12}\\\frac{5}{4}&\frac{31}{12}&\frac{5}{4}\\\frac{1}{12}&\frac{5}{12}&\frac{5}{12}\end{bmatrix};$$

• $-\frac{1}{4}A=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1&1&1\\3&5&3\\1&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}\times(-1)&-\frac{1}{4}\times1&-\frac{1}{4}\times1\\-\frac{1}{4}\times3&-\frac{1}{4}\times5&-\frac{1}{4}\times3\\-\frac{1}{4}\times1&-\frac{1}{4}\times1&-\frac{1}{4}\times(-1)\end{bmatrix}$

•

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix};$$

$$\bullet\ -\frac{4}{3} I_3 = -\frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

Donc

$$P = \frac{1}{12} A^2 - \frac{1}{4} A - \frac{4}{3} I_3 = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} + \frac{1}{4} - \frac{4}{3} & \frac{5}{12} - \frac{1}{4} + 0 & \frac{1}{12} - \frac{1}{4} + 0 \\ \frac{5}{4} - \frac{3}{4} + 0 & \frac{31}{12} - \frac{5}{4} - \frac{4}{3} & \frac{5}{4} - \frac{3}{4} + 0 \\ \frac{1}{12} - \frac{1}{4} + 0 & \frac{5}{12} - \frac{1}{4} + 0 & \frac{5}{12} + \frac{1}{4} - \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5+3-16}{12} & \frac{5-3}{12} & \frac{1-3}{12} \\ \frac{5-3}{4} & \frac{31-15-16}{12} & \frac{5-3}{4} \\ \frac{1-3}{12} & \frac{5-3}{12} & \frac{5+3-16}{12} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{8}{12} & \frac{2}{12} & \frac{-2}{12} \\ \frac{2}{4} & \frac{0}{12} & \frac{2}{4} \\ -\frac{2}{12} & \frac{2}{12} & \frac{-8}{12} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Scanné avec CamScanner

On a bien $P = A^{-1}$ (Voir question 1.(a)).

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$,

(a) le système (S_1) suivant :

$$(S_1) \iff \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 3x + 5y + 3z = 2 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

On a $(S_1) \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\iff A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$ (car A est inversible, d'après la question 1.(a).)

$$\iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\times 1 + \frac{1}{6}\times 2 - \frac{1}{6}\times(-1) \\ \frac{1}{2}\times 1 + 0\times 2 + \frac{1}{2}\times(-1) \\ -\frac{1}{6}\times 1 + \frac{1}{6}\times 2 - \frac{2}{3}\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{6} \\ y = 0 \\ z = \frac{5}{6} \end{cases}.$$

Scanné avec CamScanner

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(-\frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6} \right) \right\}$.

4. On pose $N = A - 6 I_3$.

(a) Donner N sous forme de matrice puis l'échelonner réduire à ligne canonique.

On a, d'après la question 1.(b),

$$N = A - 6 I_3 = \begin{bmatrix} -1-6 & 1 & 1 \\ 3 & 5-6 & 3 \\ 1 & 1 & -1-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Echelonnons réduire à ligne canonique la matrice N.

$$\text{on a} \quad N = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 3 & -1 & 3 \\ -7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \\ \\ L_1 \end{array} \quad \left(\text{on a permuté les lignes } L_1 \text{ et } L_3\right)$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & -4 & 24 \\ 0 & 8 & -48 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - 3L_1 \\ L_3 + 7L_1 \end{array}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 + \frac{1}{4} L_2 \\ -\frac{1}{4} L_2 \\ L_3 + 2L_2 \end{array}.$$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système (S_α) suivant :

$$(S_\alpha) \iff N \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous allons utiliser la méthode de la matrice augmentée.

Soit D la matrice augmentée du système (S_α).
On a

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

d'après la question 4.(a).

D'où $(S_\alpha) \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} x - z \\ y - 6z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = 6z \end{cases}$$

$$\iff (x, y, z) = (z, 6z, z), \text{ avec } z \in \mathbb{R}.$$

Scanné avec CamScanner

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \{(z, 6z, z) \; ; \; z \in \mathbb{R}\}$

$= \{z(1, 6, 1) \; ; \; z \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (1, 6, 1) \rangle = vect((1, 6, 1))$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $(1, 6, 1)$.

<u>Fin</u>