Université de Ghardaia
Faculté des sciences et de la technologies
Département des M.I.

Année universitaire: **2024/2025**
date : **09/01/2025**
durée : 1h 30 min.

Examen final d'Algèbre 1

Exercice 01:($03pts$)

Soient $A,\ B$ et C trois parties de l'ensemble E.

1. Montrer que $A \setminus B = C_A(A \cap B)$
2. Déduire que si $A \setminus B = A \setminus C$ alors $A \cap B = A \cap C$.

Exercice 02:($07pts$)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'pplication définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.
1. Soient les ensembles: $A = \left\{-1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ 1\right\}$ et $B = \{-2\}$.

(a) Déterminer $f(A)$.
(b) En déduire que f n'est pas injective; Justifier.
(c) Déterminer $f^{-1}(B)$.
2) On désigne par $\Re$, la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\ x,\ y \in \mathbb{R} \quad : \ x \Re y \Leftrightarrow \ f(x) = f(y)$$

(a) Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
(b) Déterminer la classe d'équivalence de $1,\ 0$ et -1.

Exercice 03:($06\ pts$)

soit $G = \mathbb{R}$. on définit sur G la loi de composition interne notée $*$ par:

$$\forall\ x, y \in G,\ x * y = x + y + \tfrac{1}{3}$$

1. Montrer que $*$ est une loi commutative.
2. Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

Exercice 04:($04pts$) *Question de cours*

Soient $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ deux groupes, et l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+^*$; définie par : $f(n) = 2^n$
1. Montrer que f est un morphisme de groupe.
2. Pourquoi $(\mathbb{R}, \times)$ n'est-il pas un groupe?
3. Pourquoi l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\right\}$ n'est pas un domaine intègre ?

Bonne chance.

La correction

Exo1 : (04 pts)

1/ $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin A \cap B\}$
$= C_A(A \cap B)$. 1,5

2/ $A \setminus B = A \setminus C \Rightarrow C_A(A \cap B) = C_A(A \cap C)$
$\Rightarrow C_A[C_A(A \cap B)] = C_A[C_A(A \cap C)]$. 1,5
$\Rightarrow \boxed{A \cap B = A \cap C}$

Ex 02 : (7 pts)

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.
$A = \{-1 ; \frac{1}{2} ; 2 ; 1\}$ et $B = \{-2\}$.

a) $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{0 ; -\frac{15}{8} ; 12\}$ 1

b) f n'est pas injective car $f(1) = f(-1)$ mais $1 \neq -1$.

c) $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \;;\; f(x) = B\}$. 0,5

$f(x) = -2 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = -2 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x = 0$.

$\Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases}$ 0,75 $\Rightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} \\ \text{ou} \\ x = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$

donc $f^{-1}(-2) = \{0 ; -1 + \sqrt{2} ; -1 - \sqrt{2}\}$. 0,25

2) a) Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. 0,5

1) Réflexivité : $x \mathcal{R} x$.
$x = x \Rightarrow f(x) = f(x) \Rightarrow x \mathcal{R} x$. donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

2) Symétrique : $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$.
$x \mathcal{R} y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow y \mathcal{R} x$
donc $\mathcal{R}$ est symétrique. 0,5

3) Transitivité $\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \Rightarrow x \mathcal{R} z$ 0,5

$x \mathcal{R} y \Rightarrow f(x) = f(y)$ --- ①
$y \mathcal{R} z \Rightarrow f(y) = f(z)$ --- ② ①+② $\Rightarrow f(x) + \cancel{f(y)} = \cancel{f(y)} + f(z)$

$\Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$.

d'après ① . ② . ③ $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. 0,25

b) La classe d'equivalence de 1; 0 et -1

$cl(1) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \mathcal{R} 1\}$. 0,25

$x \mathcal{R} 1 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \Leftrightarrow f(x) = 0$

on a : $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

d'aprés la question 1 $f(1) = f(-1) = 0$ donc f accepte la division par $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - x - 2 & x^2 - 1 \\ \hline - \quad x^3 \quad\quad - x \quad\quad & x + 2 \\ \hline 2x^2 \quad - 2 & \\ 2x^2 \quad - 2 & \\ \hline 0 \quad\quad 0 & \end{array}$$

1

alors : $f(x) = (x-1)(x+1)(x+2) = 0$.

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = -2$.

$cl(1) = \{1; -1; -2\}$.

$cl(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \mathcal{R} 0\}$ 0,5

$x \mathcal{R} 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(x) = -2$.

d'aprés la question 1

$cl(0) = \{0; -1+\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}\}$. 0,25

$cl(-1) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \mathcal{R} -1\}$.

$x \mathcal{R} -1 \Leftrightarrow f(x) = f(-1) = f(1)$ 0,5

donc $cl(-1) = \{1; -1; -2\}$. 0,25

Exo 3 (06 pts)

1) Montrons que $*$ est une loi commutative.

$$x * y = x + y + \frac{1}{3} = y + x + \frac{1}{3} = y * x.$$

1

donc $*$ est une loi commutative.

2) Montrons que $(G ; *)$ est un groupe.

2

a) L'associativité. $\forall x ; y ; z \in G ; (x * y) * z = x * (y * z)$?

- $(x * y) * z = (x + y + \frac{1}{3}) * z = x + y + \frac{1}{3} + z + \frac{1}{3} = x + y + z + \frac{2}{3} \cdots (1)$
- $x * (y * z) = x * (y + z + \frac{1}{3}) = x + y + z + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = x + y + z + \frac{2}{3} \cdots (2)$

$(1) = (2)$ donc $(G ; *)$ est associative.

b) L'élément neutre "e"

$x * e = x \iff x + e + \frac{1}{3} = x \Rightarrow e = -\frac{1}{3} \in \mathbb{R}.$

donc $\exists e = -\frac{1}{3} \in \mathbb{R}.$

1

c) Symétrie : x^{-1} ?

$x * x^{-1} = e \iff x + x^{-1} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \iff x^{-1} = -x - \frac{2}{3}.$

$\forall x \in \mathbb{R} : -x - \frac{2}{3} \in \mathbb{R}.$ donc $x^{-1} \in \mathbb{R}.$

2

$\exists x^{-1} = -x - \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$

d'après a; b; c $(G ; *)$ est un groupe commutative.

Ex 04 (04 pts)

1) Montrons que f est un morphisme de groupe.

1,5

$f(n+m) = 2^{n+m} = 2^n \times 2^m = f(n) \times f(m) \quad \forall n ; m \in \mathbb{Z}$

2) $(\mathbb{R}, \times)$ n'est pas un groupe car 0 n'admet pas d'élément symetrique.

1

3) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ n'est pas un domaine intègre car $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{6} = \bar{0}$ mais $\bar{2} \neq \bar{0}$ et $\bar{3} \neq \bar{0}$

1,5