Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2024 - 2025
L1 Math+MI (Endettés)
Module: Algèbre 1

Epreuve finale

NB : **L'exercice** 1 **est obligatoire. Deux exercices parmi les exercices** $2,\ 3$ **et** 4 **sont laissés au choix de l'étudiant.**

Exercice 1 $(\mathbf{5\ pts})$

Soient P, Q et R des propositions. Montrer que :

$$\left[\left(\overline{Q} \vee R\right) \Rightarrow P\right] \Leftrightarrow \left[(Q \wedge \overline{R}) \vee P\right]$$

en utilisant :

(1) La table de vérité.

(2) La définition d'une implication, sa négation, les lois de De Morgane et les propriétés des connecteurs logiques.

Exercice 2 $(\mathbf{7,5\ pts})$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1).$$

(1) Calculer $S_1,\ S_2$ et S_3 .

(2) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

(3) En déduire la somme $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

$\left(\textbf{Indication} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right).$

Exercice 3 $(\mathbf{7,5\ pts})$

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to]1,2]$ une application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

(1) Déterminer $f^{-1}\left(\{\sqrt{2}\}\right)$ et $f([1,2])$.

(2) Montrer que f est surjective.

(3) f est-elle injective?

(3) f est-elle bijective? Si oui, déterminer son application inverse.

Exercice 4 $(\mathbf{7,5\ pts})$

On définit dans $\mathbb{R}^*$ la relation $\Re$ par :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^*,\ x\Re y \Leftrightarrow x.y > 0.$$

(1) Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

(2) Déterminer $cl(a)$ où $a \in \mathbb{R}^*$. En déduire l'ensemble quotient $\mathbb{R}^*/\Re$.

Bonne chance

Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2024 - 2025
L1 Math+MI (Endettés)
Module: Algèbre 1

Epreuve finale (corrigé-type)

NB : L'exercice 1 est obligatoire. Deux exercices parmi les exercices 2, 3 et 4 sont laissés au choix de l'étudiant.

Exercice 1 $(\mathbf{5\ pts})$

Soient P, Q et R des propositions. Montrer que :$\left[\left(\overline{Q} \vee R\right) \Rightarrow P\right] \Leftrightarrow \left[(Q \wedge \overline{R}) \vee P\right]$
en utilisant :

(1) La table de vérité.

P	Q	R	$\overline{Q}$	$\overline{R}$	$\overline{Q} \vee R$	$(Q \wedge \overline{R})$	$\left(\overline{Q} \vee R\right) \Rightarrow P$	$(Q \wedge \overline{R}) \vee P$
1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0

(3)

On remarque que les propositions $\left(\overline{Q} \vee R\right) \Rightarrow P$ et $(Q \wedge \overline{R}) \vee P$ ont la même table de vérité, alors elles sont équivalentes, c'est-à-dire $\left[\left(\overline{Q} \vee R\right) \Rightarrow P\right] \Leftrightarrow \left[(Q \wedge \overline{R}) \vee P\right]$.

(2) La définition d'une implication, sa négation, les lois de De Morgane et les propriétés des connecteurs logiques.

$\left[\left(\overline{Q} \vee R\right) \Rightarrow P\right] \Leftrightarrow \left[\overline{\left(\overline{Q} \vee R\right)} \vee P\right]$ $\left(\right.$ définition d'une implication : $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \overline{A} \vee B\left.\right)$

$\Leftrightarrow \left[\left(\overline{(\overline{Q})} \wedge \overline{R}\right) \vee P\right]$ $\left(\right.$lois de De Morgan : $\overline{(A \wedge \vee B)} \Leftrightarrow (\overline{A} \wedge \overline{B})\left.\right)$ (2)

$\left[\left(\overline{Q} \vee R\right) \Rightarrow P\right] \Leftrightarrow \left[(Q \wedge \overline{R}) \vee P\right]$ $\left(\overline{(\overline{B})} \Leftrightarrow B\right)$

Exercice 2 $(\mathbf{7{,}5\ pts})$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1).$$

(1) Calculer S_1, S_2 et S_3.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1.2 = 2$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{2} k(k+1) = 1.2 + 2.3 = 8$$

(1,5)

$$S_3 = \sum_{k=1}^{3} k(k+1) = 1.2 + 2.3 + 3.4 = 20$$

(2) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

1 *ère étape* : $(Initialisation)$ pour $n = 1$, on a

$S_1 = \sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1.2 = 2 = \frac{1.(1+1).(1+2)}{3} = 2$ (0,5)

Donc, la propriété est vraie pour $n = 1$

2 *ème étape*: $(Hérédité)$ Supposons que $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (0,5)

et montrons que $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

On a $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \underbrace{1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1)}_{S_n} + (n+1)(n+2)$

donc $S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$ (Hypothèse de récurrence) (2,5)

$= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

d'où $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

C'est à dire que la propriété est vraie pour $n+1$

3 *ème* étape: $(Conclusion)$ Par le principe de récurrence on déduit que (0,5)

$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(3) En déduire la somme $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

$\left(\textbf{Indication} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right).$

On a

$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^2 + k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$

d'où $\sum_{k=1}^{n} k^2 = S_n - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}$ (2)

$= \frac{2n(n+1)(n+2) - 3n(n+1)}{6}$

$= \frac{n(n+1)[2(n+2) - 3]}{6}$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 3 $(\mathbf{7,5\ pts})$

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to]1,2]$ une application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

(1) Déterminer $f^{-1}\left(\{\sqrt{2}\}\right)$ et $f([1,2])$.

$f^{-1}\left(\{\sqrt{2}\}\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \in \{\sqrt{2}\}\right\}$ (0,5)

$f(x) \in \{\sqrt{2}\} \Rightarrow f(x) = \sqrt{2}$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{2} - 1$

$\Rightarrow \sqrt{x} + 1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - 1 = \frac{1-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} == \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x = 2$$

(1)

D'où $f^{-1}\left(\{\sqrt{2}\}\right) = \{2\}$.

(0,5)

$f([1,2]) = \{f(x) : x \in [1,2]\}$

$$x \in [1,2] \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2 \leq \sqrt{x}+1 \leq \sqrt{2}+1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}+1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1} \leq 1+\frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq 1+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1} \leq f(x) \leq \frac{2+1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\sqrt{2}+2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$$

(1)

D'où $f([1,2]) = \left[\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right]$

(2) Montrons que f est surjective.

f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in \,]1,2], \exists x \in \mathbb{R}^+ : y = f(x)$ (0,5)

Soit $y \in \,]1,2]$. Cherchons $x \in \mathbb{R}^+ : y = f(x)$.

$$y = f(x) \Rightarrow y = 1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1} = y-1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+1 = \frac{1}{y-1}, \text{ car } y > 1.$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{y-1} - 1 = \frac{1-y+1}{y-1} = \frac{2-y}{y-1}$$

(1,5)

$$\Rightarrow x = \left(\frac{2-y}{y-1}\right)^2 \geq 0$$

$\forall y \in \,]1,2], \exists x = \left(\frac{2-y}{y-1}\right)^2 \in \mathbb{R}^+ : y = f(x) \Leftrightarrow f$ est surjective.

(3) f est-elle injective?

f est injective $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\right)$. (0,5)

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{x_1}+1} = 1+\frac{1}{\sqrt{x_2}+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1}+1} = \frac{1}{\sqrt{x_2}+1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1}+1 = \sqrt{x_2}+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$$

(1)

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

C'est à dire f est injective.

(3) f est-elle bijective? Si oui, déterminer son application inverse.

Comme f est injective et surjective, alors f est bijective. (0,5)

Et par conséquent f admet une application réciproque f^{-1}.
On a

$$\forall y \in]1,2], \forall x \in \mathbb{R}^+, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$\forall y \in]1,2], \forall x \in \mathbb{R}^+, y = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow x = \left(\frac{2-y}{y-1}\right)^2.$$

Donc f^{-1} est définie par :

$$f^{-1} :]1,2] \to \mathbb{R}^+$$

$$y \mapsto f^{-1}(y) = \left(\frac{2-y}{y-1}\right)^2$$ (0,5)

Exercice 4 $(\mathbf{7,5\ pts})$

On définit dans $\mathbb{R}^*$ la relation $\Re$ par :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^*,\ x\Re y \Leftrightarrow x.y > 0.$$

(1) Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence. (0,5)

$\Re$ est une relation d'équivalence $\Leftrightarrow$ $\Re$ est réflexive, symétrique et transitive.

(i) $\Re$ est réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*, x\Re x$ (1)

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $x^2 = x.x > 0$, c'est à dire $x\Re x$ donc $\Re$ est réflexive.

(ii) $\Re$ est symétrique $\Leftrightarrow \forall x,y \in \mathbb{R}^*,\ (x\Re y \Rightarrow y\Re x)$

Soient $x,y \in \mathbb{R}^*$.

$x\Re y \Rightarrow x.y > 0 \Rightarrow y.x > 0 \Rightarrow y\Re x$ (1)

Et par suite $\Re$ est symétrique.

(iii) $\Re$ est transitive $\Leftrightarrow \forall x,y,z \in \mathbb{R}^*,\ \left(x\Re y \text{ et } y\Re z \Rightarrow x\Re z\right)$

Soient $x,y,z \in \mathbb{R}^*$.

$x\Re y$ et $y\Re z \Rightarrow x.y > 0$ et $y.z > 0$

$\Rightarrow x.y.y.z > 0$

$\Rightarrow x.y^2.z > 0$

$\Rightarrow x.z > 0$ car $y^2 > 0$ (1,5)

$\Rightarrow x\Re z$

Ainsi $\Re$ est transitive.

Conclusion : Comme $\Re$ est réflexive, symétrique et transitive, $\Re$ est une relation d'équivalence. (0,5)

(2) Déterminons $cl(a)$ où $a \in \mathbb{R}^*$. En déduire l'ensemble quotient $\mathbb{R}^*/\Re$.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

$cl(a) = \{x \in \mathbb{R}^* : x\Re a\}$ (0,5)

$x\Re a \Rightarrow x.a > 0$

Deux cas se présentent :

Si $a > 0$ alors $x > 0$, par suite $cl(a) = \mathbb{R}^{+*}$ (1,5)

Si $a < 0$ alors $x < 0$, par suite $cl(a) = \mathbb{R}^{-*}$

On déduit alors l'ensemble quotient $\mathbb{R}^*/\Re = \{\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}^{-*}\}$. (1)