Université de Ghardaia | Année universitaire: **2024/2025**
Faculté des sciences et de la technologies | date : **17/12/2024**
Département des M.I. | **durée : 1h 15 min.**

Interrogation: Algèbre 1

Exercise 01:$(04pts)$

1. Soient les propositions suivantes :

$(P_1)\quad P \wedge \overline{Q} \Leftrightarrow \overline{(P \Longrightarrow Q)}$
$(P_2)\quad \forall x \in \mathbb{R} : \ \forall y \in \mathbb{R} \ : \ x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$
$(P_3)\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}^* : \ x \neq 0 \wedge y \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \ 2x \neq \frac{x}{y}$
$(P_4)\quad \forall x \in \left]1;2\right]; \ \forall y \in [-1,0] : x^2 \leq y^2.$

1) Montrer que (P_1) est vraie à l'aide de la table de vérité.
2) La proposition (P_2) est-elle vraie ?
3) Donner la contraposée de (P_3) et montrer qu'elle est vraie.
4) Démontre par un contre-exemple que (P_4) est fausse, puis écris sa négation "$\left(\overline{P_4}\right)$".

Exercise 02:$(04pts)$

Soient Les applications suivantes : $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ avec $f(n) = n + 2;$
$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ avec $g(n) = n + 2.$

1. Déterminer $f(\{0;1;2\}),\ f^{-1}(\{0\}),\ g^{-1}(\{1\})$
2. L'application f est-elle bijective ? justifier.
3. L'application g est-elle bijective ? justifier.

Exercise 03:$(04pts)$

On. désigne par $\Re$, la relation binaire définie sur $\mathbb{R}^*$. par :

$$\forall\ x,\ y \in \mathbb{R}^* \quad : \ x\Re y \Leftrightarrow \ x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}.$$

1. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 1.
3. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation d'ordre $\Re'$ par :

$$\forall\ x,\ y \in \mathbb{R} \quad : \ x\Re' y \Leftrightarrow \ x - 1 \leq y - 1.$$

- L'ordre $\Re'$ est-il total ou patiel ? justifier

Bonne char

2021/2022
17-12-2021

Correction de l'interrogation algèbre 1
Semestre 1.

Ex 01 : (04 pts)

1) Montrons que (P_1) est vraie.

p	q	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p \Rightarrow q}$	$\Leftrightarrow$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1

donc (P_1) est vraie.

2) (P_2) $\forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$?

$x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 \geq 0$ elle est toujours vraie, car le carré de tout nombre réel est toujours positif ou nul.

3) (P_3) $\forall x \in \mathbb{R} ; \forall y \in \mathbb{R}^* : x \neq 0 \wedge y \neq \frac{1}{2} \Rightarrow 2x \neq \frac{x}{y}$

La contraposée : $2x = \frac{x}{y} \Rightarrow x = 0 \vee y = \frac{1}{2}$.

. montrons que (P_3) est vraie.

$\boxed{2x = \frac{x}{y}} \Rightarrow 2xy = x \Rightarrow 2xy - x = 0 \Rightarrow x(2y-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \vee 2y - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 \vee y = \frac{1}{2}}$

donc (P_3) est vraie.

4) $\forall x \in]1; 2] ; \forall y \in [-1; 0] : x^2 \leq y^2$.

Contre-exemple.

On prend ~~soit~~ $\begin{cases} x = 2 \text{ et } y = 0 \\ x \in]1; 2] \text{ et } y \in [-1; 0] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2^2 = 4 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ 4 > 0 \Rightarrow x^2 > y^2$

donc (P_4) est fausse.

. La négation $(\overline{P_4}) : \exists x \in]1; 2] ; \exists y \in [-1; 0] : x^2 > y^2$

Ex 02 : (04 pts)

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ avec $f(n) = n + 2$;

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ avec $g(n) = n + 2$.

1) calculons : $f(\{0; 1; 2\})$; $f^{-1}(\{0\})$; $g^{-1}(\{1\})$.

a) $f(0) = 0 + 2 = 2$

$f(1) = 1 + 2 = 3$

$f(2) = 2 + 2 = 4$

$f(\{0; 1; 2\}) = \{2; 3; 4\}$.

b). $f^{-1}(\{0\}) \Rightarrow f(n) = 0 \Rightarrow n+2=0 \Rightarrow n=-2$ mais $-2 \notin \mathbb{N}$.

donc $f^{-1}(\{0\}) = \{\emptyset\}$

c). $g^{-1}(\{1\}) \Rightarrow g(n) = 1 \Rightarrow n+2 = 1 \Rightarrow n = -1 \in \mathbb{Z}$.

donc $g^{-1}(\{1\}) = \{-1\}$.

2) f est-elle bijective ? f est bijective $\Rightarrow \begin{cases} f \text{ est injective} \\ \text{et} \\ f \text{ est surjective.} \end{cases}$

d'aprés la question "1" $f^{-1}(\{0\}) \Rightarrow n=-2$ mais $-2 \notin \mathbb{N}$.

donc f n'est pas surjective

d'où f n'est pas bijective.

3) g est-elle bijective ? $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$; $g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$?

1) L'injectivité :

$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n_1 + 2 = n_2 + 2 \Rightarrow n_1 = n_2$

donc g est injective.

2) La Surjectivité : $\forall m \in \mathbb{Z}$; $\exists n \in \mathbb{Z}$: $g(n) = m$.

$g(n) = m \Rightarrow n+2 = m \Rightarrow n = m-2 \Rightarrow n \in \mathbb{Z}$ car $m \in \mathbb{Z}$ donc $m-2 \in \mathbb{Z}$

alors $g(n)$ est surjective.

d'où $g(n)$ est bijective.

Ex 03 : (04 pts)

$\forall x, y \in \mathbb{R}^*$: $x \mathcal{R} y \iff x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}$

1) Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^*$.

1) Réflexivité : $x \mathcal{R} x$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

$x \mathcal{R} x \iff x - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x} \iff 0 = 0$

donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

2) Symétrie : $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$.

$x \mathcal{R} y \iff x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \iff y - \frac{1}{y} = x - \frac{1}{x} \iff y \mathcal{R} x$.

donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

3) Transitivité : $\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \Rightarrow x \mathcal{R} z$.

$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ y - \frac{1}{y} = z - \frac{1}{z} \end{cases} \Rightarrow x - \frac{1}{x} = z - \frac{1}{z} \Rightarrow x \mathcal{R} z.$$

donc $\mathcal{R}$ est transitive

d'où $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) La classe d'équivalence de 1 est donnée par :

$cl(1) = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x \mathcal{R} 1\}$

$x \mathcal{R} 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{1} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

donc $cl(1) = \{1 ; -1\}$.

3) L'ordre $\mathcal{R}'$ est-il total ou partiel ? justifier.

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \mathcal{R}' y \Leftrightarrow x - 1 \leq y - 1$

$x - 1 \leq y - 1 \Leftrightarrow x \leq y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

alors $\forall x, y \in \mathbb{R}$

si $x \leq y \Leftrightarrow x \mathcal{R}' y$

si $y \leq x \Leftrightarrow y \mathcal{R}' x$.

si $x = y \Leftrightarrow x \mathcal{R}' y$

L'ordre $\mathcal{R}'$ est-il total car. Dans un ordre total, tous les éléments de l'ensemble sont comprables. Cela signifie que pour chaque élément, nous pouvons toujours dire qu'il est comparable.