

Examen final d'Algèbre 1 - Durée 01h30

Questions de cours : (04 pts)

Soit $f : (G, *) \longrightarrow (G', \diamond)$ un homomorphisme de groupes et H un sous groupe de G .

1. Rappeler la définition d'un sous-groupe H de G .
2. Montrer que le noyau de f ($\ker f$) est un sous groupe de G .

Exercice 1. (08 pts)

Soit f l'application définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

1. Soient les ensembles $A = \{-\frac{1}{2}, -2\}$ et $B = \{\frac{1}{2}, 2\}$.
 - a) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$.
 - b) L'équation $f(x) = 2$ admet-elle des solutions dans \mathbb{R} ? .
 - c) f est-elle injective ? surjective ?
2. On désigne par \mathcal{R} , la relation binaire définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

- i Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur \mathbb{R} .
- ii Déterminer les classes d'équivalence de 2 et -2 .

Exercice 2. (08 pts)

On considère sur \mathbb{R} la loi $*$ définie par :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a * b = a + b + \frac{1}{6}$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif.
2. Soit l'application définie de $(\mathbb{R}, *)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ par $h(x) = 3x + \frac{1}{2}$. Montrer que h est un isomorphisme de groupes.

BON COURAGE.

Corrigé 1. 1. **Definition d'un sous groupe :** Soit $(G, *)$ un groupe et H une partie de G , on dit que H est un **sous-groupe** de $(G, *)$ si les axiomes suivants sont vérifiés :

- $e \in H$
- $\forall (x, y) \in H^2 : x * y \in H$**2pts**
- $\forall x \in H : x^{-1} \in H$.

2. Montrons que $\ker f$ est un sous groupe de G :

- $e_G \in \ker f$ car $f(e_G) = e_{G'}$ alors $\ker f \neq \emptyset$**0,5pt**
- Soient $x, y \in \ker f$, alors $f(x) = e_{G'}$ et $f(y) = e_{G'}$ et par le morphisme f , on obtient

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y) = e_{G'} \cdot e_{G'} = e_{G'} \Rightarrow x * y \in \ker f \dots \mathbf{0,75pt}$$

- Soit $x \in \ker f$, montrons alors que $x^{-1} \in \ker f$

$$f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} = e_{G'}^{-1} = e_{G'} \Rightarrow x^{-1} \in \ker f \dots \mathbf{0,75pt}$$

Corrigé 2. Soit f l'application définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

1. Soient les ensembles $A = \{-\frac{1}{2}, -2\}$ et $B = \{\frac{1}{2}, 2\}$.

a)

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x) \in \mathbb{R}, x \in A\} \\ &= \{f(-2), f(-\frac{1}{2})\} = \{-\frac{2}{5}\} \dots \mathbf{1pt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(B) &= \{f(x) \in \mathbb{R}, x \in B\} \\ &= \{f(2), f(\frac{1}{2})\} = \{\frac{2}{5}\} \dots \mathbf{1pt} \end{aligned}$$

b) Résolvons l'équation $f(x) = 2$. On a

$$\frac{x}{1+x^2} = 2 \Rightarrow 2x^2 - x + 2 = 0$$

$\Delta = -15 < 0$ donc l'équation n'admet pas de solutions réelles, ce qui veut dire que 2 n'admet pas d'antécédant par l'application f**0,5pt**.

c) f n'est pas injective car $\exists x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x_1) = f(x_2) = \frac{2}{5} \wedge x_1 \neq x_2 \dots \mathbf{1pt}$$

f n'est pas surjective car $\exists y = 2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 2$**1pt**.

2. On désigne par \mathcal{R} , la relation binaire définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

i \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur \mathbb{R} . Facilement, on montre que \mathcal{R} est réflexive....**0,5pt**, symétrique....**0,5pt** et transitive....**0,5pt**.

ii

$$\begin{aligned}\bar{2} &= \{x \in \mathbb{R}/x\mathcal{R}2\} \dots \mathbf{0,5pt} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) = f(2)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/\frac{x}{1+x^2} = \frac{2}{5}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/2x^2 - 5x + 2 = 0\} = \{2, \frac{1}{2}\} \dots \mathbf{0,5pt}\end{aligned}$$

De même, on calcule $\overline{-2} = \{-2, -\frac{1}{2}\} \dots \mathbf{1pt}$

Corrigé 3. 1. $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif. En effet,

- $a * b = a + b + \frac{1}{6} \in \mathbb{R}$ car l'addition est stable dans \mathbb{R} . Ainsi $*$ est une loi de composition interne....**0,5**
- $*$ est commutative**0,5**
- L'associativité : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$
 $(a * b) * c = (a + b + \frac{1}{6}) * c = a + b + \frac{1}{6} + c + \frac{1}{6} = a + b + c + \frac{1}{3} \dots \mathbf{0,5pt}$
 $a * (b * c) = a * (b + c + \frac{1}{6}) = a + b + c + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = a + b + c + \frac{1}{3} \dots \mathbf{0,5pt}$
donc on a bien $(a * b) * c = a * (b * c)$
- L'élément neutre : $\exists e? \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : a * e = a \dots \mathbf{0,5pt}$

$$a * e = a \Rightarrow a + e + \frac{1}{6} = a \Rightarrow e = -\frac{1}{6}$$

donc $e = -\frac{1}{6} \in \mathbb{R}$ est l'élément neutre.**0,5pt**

- L'existence du symétrique : $\forall a \in \mathbb{R}, \exists a' \in \mathbb{R} : a * a' = e \dots \mathbf{0,5pt}$

$$a * a' = a + a' + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \Rightarrow a' = -a - \frac{1}{3} \in \mathbb{R} \dots \mathbf{0,5pt}$$

2. Soit l'application $h : (\mathbb{R}, *) \mapsto (\mathbb{R}, +)$ définie par $h(x) = 3x + \frac{1}{2}$. Etant données les deux groupes $(\mathbb{R}, *)$ et $(\mathbb{R}, +)$, alors

h est un morphisme de groupes $\iff \forall x, y \in \mathbb{R} : f(x*y) = f(x)+f(y) \dots \mathbf{1pt}$

$$f(x * y) = 3(x * y) + \frac{1}{2} = 3(x + y + \frac{1}{6}) + \frac{1}{2} = 3x + 3y + 1 \dots \mathbf{0,5pt}$$

$$f(x) + f(y) = (3x + \frac{1}{2}) + (3y + \frac{1}{2}) = 3x + 3y + 1 \dots \mathbf{0,5pt}$$

donc h est bien un morphisme de groupes.

Montrons maintenant que h est bijective. L'injectivité peut être démontrée de deux manières différentes (L'étudiant pourra choisir ce que lui convient !)

- En utilisant la définition. Soient $x, x' \in \mathbb{R}$, et supposons que $h(x) = h(x')$
alors $3x + \frac{1}{2} = 3x' + \frac{1}{2}$ ce qui implique que $x = x'$.

- En utilisant le noyau de h . Notons $e' = 0$ l'élément neutre du groupe $(\mathbb{R}, +)$ alors

$$\ker h = \{x \in \mathbb{R}, h(x) = e'\}$$

Calculons alors le noyau de h

$$\ker h = \{x \in \mathbb{R}, h(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}, 3x + \frac{1}{2} = 0\} = \{-\frac{1}{6}\} = \{e\}$$

De même pour la surjectivité, il existe deux manières pour la démontrer.

- En utilisant la définition. Soit $y \in \mathbb{R}$, il existe $x? \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$, il suffit alors de choisir $x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{6} \in \mathbb{R}$.
- En calculant l'image de $h : \text{Im}h = \text{Im}(\mathbb{R}) = \{h(x)/x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.
En effet, on a $-\infty < x < +\infty \Rightarrow -\infty < 3x + \frac{1}{2} < +\infty$

1pt pour l'injectivité et **1pt** pour la surjectivité.