

USTO MB- Faculté des Mathématiques et Informatique
Département d'Informatique
Rattrapage-Matière: Algèbre I - 11/06/2024 - Durée : 1h30mn

Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1:

1/ Donner la négation des propositions suivantes:

$$a - \forall x \in \mathbb{R}, (2x > x).$$

$$b - \forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow 2x > x.$$

2/ Soit $x, y \in \mathbb{R}^+$, montrer par contraposée que:

$$x \neq y \Rightarrow \frac{x}{1+y} \neq \frac{y}{1+x}$$

3/ Soit $x, y \in \mathbb{R}$, montrer par l'absurde que:

$$xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

Exercice 2:

Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Soient A et B deux parties de E . On considère l'application f définie par :

$$f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$$

1/ Calculer $f(E)$, $f(A \cup B)$.

2/ Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow A \cup B = E$.

3/ Supposons qu'il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X) = (A, \emptyset)$. Calculer $A \cap B$.

Exercice 3:

On définit sur \mathbb{R} la relation binaire \mathcal{R} par: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, où l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par : $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

1/ Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

2/ Déterminer les classes d'équivalences de 0.

Exercice 4:

Soit U le sous ensemble de \mathbb{C} défini par: $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.

Montrer que U est un sous groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .

**Corrigé Rattrapage -Algèbre 1
2023-2024**

Exercice 1: (06 points)

1/ Donner la négation des propositions suivantes:

a—La négation de $\forall x \in \mathbb{R}, (2x > x)$ est $\exists x \in \mathbb{R}, (2x \leq x)$ (01)

b—La négation de $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow 2x > x$ est $\exists x \in \mathbb{R}, (x > 0) \wedge (2x \leq x)$. (01)

2/ Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$, montrer par contraposée que:

$$x \neq y \Rightarrow \frac{x}{1+y} \neq \frac{y}{1+x}$$

La contraposée de $x \neq y \Rightarrow \frac{x}{1+y} \neq \frac{y}{1+x}$ est $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x} \Rightarrow x = y$.

Donc, pour $x, y \in \mathbb{R}^+$ on a:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x} &\Rightarrow x(1+x) = y(1+y) && (02) \\ \Rightarrow x + x^2 - y - y^2 &= 0 \\ \Rightarrow (x^2 - y^2) + (x - y) &= 0 \\ \Rightarrow (x - y)(x + y + 1) &= 0 \\ \Rightarrow x - y = 0 \text{ car } x, y \in \mathbb{R}^+ & \\ \Rightarrow x = y. & \end{aligned}$$

Alors, d'après le raisonnement par contraposée on déduit que

$$x \neq y \Rightarrow \frac{x}{1+y} \neq \frac{y}{1+x}$$

3/ Soient $x, y \in \mathbb{R}$, montrer par l'absurde que:

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, supposons que $xy > \frac{x^2 + y^2}{2}$

$$\begin{aligned} xy > \frac{x^2 + y^2}{2} &\Rightarrow 0 > x^2 + y^2 - 2xy && (02) \\ \Rightarrow 0 > (x - y)^2 & \end{aligned}$$

qui est impossible. Donc d'après le raisonnement par l'absurde on déduit que

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Exercice 2: (06 points)

Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Soient A et B deux parties de E . On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\rightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X &\mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{aligned}$$

1/ Calculer $f(E)$, $f(A \cup B)$.

$$f(E) = (E \cap A, E \cap B) = (A, B) \quad (01,5)$$

$$f(A \cup B) = ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B) = (A, B) \quad (01,5)$$

2/ Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow A \cup B = E$.

(\Rightarrow) Supposons que f est injective

D'après (1), on a:

$$f(E) = (A, B) = f(A \cup B), \quad (01)$$

et comme f est injective, alors $A \cup B = E$.

(\Leftarrow) Supposons que $A \cup B = E$, Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E)$

$$\begin{aligned} f(A_1) = f(A_2) &\Rightarrow (A_1 \cap A, A_1 \cap B) = (A_2 \cap A, A_2 \cap B) \\ &\Rightarrow \begin{cases} A_1 \cap A = A_2 \cap A \\ A_1 \cap B = A_2 \cap B \end{cases} \\ &\Rightarrow (A_1 \cap A) \cup (A_1 \cap B) = (A_2 \cap A) \cup (A_2 \cap B) \\ &\Rightarrow A_1 \cap (A \cup B) = A_2 \cap (A \cup B) \\ &\Rightarrow A_1 \cap E = A_2 \cap E \\ &\Rightarrow A_1 = A_2 \end{aligned} \quad (01)$$

d'où f est injective.

3/ Supposons qu'il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X) = (A, \emptyset)$. Calculer $A \cap B$.

$$f(X) = (A, \emptyset) \Leftrightarrow (X \cap A, X \cap B) = (A, \emptyset)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X \cap A = A \\ X \cap B = \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset X \\ X = C_E(B) \end{cases} \quad (01)$$

alors,

$$A \cap B = \emptyset$$

Exercice 3: (04 points)

On définit sur \mathbb{R} la relation binaire \mathcal{R} par: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, où l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par : $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

1/ Montrer que R est une relation d'équivalence:

(i) **Réflexive:** $\forall x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}x$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$f(x) = f(x) \Rightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^3 - x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x\mathcal{R}x \quad (01)$$

Alors, \mathcal{R} est réflexive.

(ii) **Symétrique:** $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = y^3 - y^2 - 4y + 4 \\ &\Rightarrow y^3 - y^2 - 4y + 4 = x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ &\Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow y\mathcal{R}x \end{aligned} \quad (01)$$

Alors, \mathcal{R} est symétrique.

(iii) **Transitive:** $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned}
 (x\mathfrak{R}y \text{ et } y\mathfrak{R}z) &\Rightarrow \begin{cases} f(x) = f(y) \\ f(y) = f(z) \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 - 4x + 4 = y^3 - y^2 - 4y + 4 \\ y^3 - y^2 - 4y + 4 = z^3 - z^2 - 4z + 4 \end{cases} \\
 &\Rightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = z^3 - z^2 - 4z + 4 \\
 &\Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x\mathfrak{R}z
 \end{aligned} \tag{01}$$

Alors, \mathfrak{R} est transitive.

De (i), (ii) et (iii) on déduit que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence.

2/ Déterminer les classes d'équivalences de 0.

On a:

$$\begin{aligned}
 Cl(0) &= \{y \in \mathbb{R} / 0\mathfrak{R}y\} \\
 &= \{y \in \mathbb{R} / y^3 - y^2 - 4y = 0\} \\
 &= \{y \in \mathbb{R} / y(y^2 - y - 4) = 0\} \\
 &= \left\{ y \in \mathbb{R} / y = 0 \text{ ou } y = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \right\} \\
 &= \left\{ \frac{1 - \sqrt{17}}{2}, 0, \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right\}
 \end{aligned} \tag{0.5}$$

Exercice 4: (04 points)

Soit U le sous ensemble de \mathbb{C} défini par: $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.

Montrer que U est un sous groupe de (\mathbb{C}^*, \times) :

(i) $|0_{\mathbb{C}}| = |1| = 1$, donc $0_{\mathbb{C}} \in U$ **(01)**

(ii) Soient $x, y \in U$, donc $|x| = |y| = 1$.

$$x \times y^{-1} \in U? \tag{01}$$

On a:

$$y \times y^{-1} = 1 \Rightarrow |y \times y^{-1}| = 1 \Rightarrow |y| |y^{-1}| = 1 \Rightarrow |y^{-1}| = 1, \tag{02}$$

donc,

$$|x \times y^{-1}| = |x| |y^{-1}| = 1 \Rightarrow x \times y^{-1} \in U.$$

De (i) et (ii) on déduit que U est un sous groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .