

Examen Final

EXERCICE 01 (04pts):

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par disjonction des cas que $n(n^2 + 2)$ est un multiple de 3.
- 2) Montrer par l'absurde que $(\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p \in \mathbb{N}^* : n = p^2) \Rightarrow (\forall q \in \mathbb{N}^* : 2n \neq q^2)$.

EXERCICE 02 (06pts):

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $-x^2 + x = 0$.
2. Pour chaque $a \in \mathbb{R}$, résoudre dans \mathbb{R} l'équation $-x^2 + x - a = 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x(1 - x)$.
 f est-elle injective? Est-elle surjective?
4. Montrer que l'application $g : \left[\frac{1}{2}, +\infty[\rightarrow \right]-\infty, \frac{1}{4}]$ définie par $g(x) = f(x)$ est bijective.

EXERCICE 03 (04pts):

Soit \mathcal{R} la relation définie sur \mathbb{Z} par :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (a - b \text{ est divisible par } 2 \text{ ou par } 3).$$

- Étudier la réflexivité, la symétrie, l'antisymétrie et la transitivité de \mathcal{R} . Conclure.

EXERCICE 04 (06pts):

Soit $*$ la loi de composition définie dans \mathbb{R} par : $\forall x, y \in \mathbb{R} : x * y = x + y + \frac{1}{10}$.

1. Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.
2. Montrer que l'application g définie par : $g(x) = 5x + \frac{1}{2}$ est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, *)$ dans le groupe $(\mathbb{R}, +)$.
3. Soit $H = \left\{ \frac{2n-1}{10}, n \in \mathbb{Z} \right\}$, Montrer que $(H, *)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, *)$

Bon courage

Corrigé de l'Examen final

EXERCICE 01 (4pts) :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

1^{er} cas : Si $n = 3k$, avec $k \in \mathbb{N}$ alors $n(n^2 + 2) = 3k((3k)^2 + 2)$ qui est un multiple de 3.

2^{ème} cas : Si $n = 3k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$ alors $n(n^2 + 2) = (3k + 1)((3k + 1)^2 + 2) = (3k + 1)(9k^2 + 6k + 1 + 2)$
 $= 3(3k + 1)(3k^2 + 2k + 1)$ qui est un multiple de 3.

3^{ème} cas : Si $n = 3k + 2$, avec $k \in \mathbb{N}$ alors $n(n^2 + 2) = (3k + 2)((3k + 2)^2 + 2) = (3k + 2)(9k^2 + 12k + 4 + 2)$
 $= 3(3k + 2)(3k^2 + 4k + 2)$ qui est un multiple de 3

Par suite, dans tous les cas $n(n^2 + 2)$ est un multiple de 3.....(2pts)

2) Supposons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p \in \mathbb{N}^* : n = p^2)$ et $(\exists q \in \mathbb{N}^* : 2n = q^2)$(0.5pt)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n = p^2$ et $2n = q^2$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, ainsi $2p^2 = q^2$, d'où $\sqrt{2} = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde car $\sqrt{2}$ est irrationnel.(1.5pt)

Exercice 02(6pts) :

1) $-x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 1)$, donc l'ensemble des solutions $S = \{0,1\}$(01pt)

2) $-x^2 + x - a = 0$ est une équation de second degré, calculons son discriminant : $\Delta = 1 - 4a$

Si $a > \frac{1}{4}$, alors $\Delta < 0$, donc il n'y a pas de solutions dans \mathbb{R}(0.5pt)

Si $a \leq \frac{1}{4}$, alors $\Delta \geq 0$, donc on a les solutions : $x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}$ et $x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}$ (1pt)

3) D'après 1), on a : $f(1) = f(0)$ mais $1 \neq 0$ donc f n'est pas injective.(0.5pt)

D'après 2), on a : $y = 1$ n'a pas d'antécédent, alors f n'est pas surjective.(0.5pt)

4.1) Soient $x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[:$

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Rightarrow x_1(1 - x_1) = x_2(1 - x_2) \Rightarrow x_1 - x_2 = x_1^2 - x_2^2 \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2 = 0) \text{ ou } (x_1 + x_2 - 1 = 0) \Rightarrow (x_1 = x_2) \text{ ou } (x_1 = 1 - x_2) \\ &\Rightarrow (x_1 = x_2) \text{ ou } \left(x_1 = x_2 = \frac{1}{2}\right), \text{ car } 1 - x_2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \dots\dots\dots(01pt) \end{aligned}$$

Alors g est injective.

4.2) Soit $y \in \left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$, d'après 2), l'équation $g(x) = y$ admet au moins une solution x dans \mathbb{R} .

On a $x_1 - \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4y}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1 - 4y}}{2} \geq 0$ d'où $x_1 \geq \frac{1}{2}$ (0.5pt)

et $x_2 - \frac{1}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{1 - 4y}}{2} \leq 0$ d'où $x_2 \leq \frac{1}{2}$(0.5pt)

Alors il suffit de prendre $x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4y}}{2} \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, pour avoir $y = g(x)$.

Alors g est surjective.(0.5pt)

Par suite g est bijective.

EXERCICE 03 (04pts):

1) Soit $a \in \mathbb{Z}$ on a : $a - a = 0$ est divisible par 2 ou par 3, c-à-d : $a\mathcal{R}a$

Alors \mathcal{R} est réflexive.(0.5pt)

2) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} a\mathcal{R}b &\Rightarrow a - b \text{ est divisible par 2 ou par 3} \\ &\Rightarrow -(a - b) \text{ est divisible par 2 ou par 3} \\ &\Rightarrow b - a \text{ est divisible par 2 ou par 3} \\ &\Rightarrow b\mathcal{R}a \end{aligned}$$

Alors \mathcal{R} est symétrique.(1pt)

3) On a par exemple ($6 - 3$ est divisible par 2 ou par 3) et ($3 - 6$ est divisible par 2 ou par 3) et ($3 \neq 6$)

C.à.d : $\exists a, b \in \mathbb{Z}$, $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$ et $a \neq b$.

Alors \mathcal{R} n'est pas antisymétrique.(1pt)

4) On a par exemple ($6 - 3$ est divisible par 2 ou par 3) et ($3 - 1$ est divisible par 2 ou par 3) et

($6 - 1$ n'est pas divisible ni par 2, ni par 3).

C.à.d : $\exists a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$ et $\overline{a\mathcal{R}c}$.

Alors \mathcal{R} n'est pas transitive.(1pt)

On conclut que \mathcal{R} n'est pas une relation d'ordre et n'est pas une relation d'équivalence.(0.5pt)

EXERCICE 04 (06pts):

1.1) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $x + y + \frac{1}{10} \in \mathbb{R}$ c-à-d $x * y \in \mathbb{R}$.

Alors $*$ est une loi interne dans \mathbb{R}(0.5pt)

1.2) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$x * y = x + y + \frac{1}{10} = y + x + \frac{1}{10} = y * x$$

Alors $*$ est une loi commutative.(0.5pt)

1.3) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= \left(x + y + \frac{1}{10}\right) * z = x + y + \frac{1}{10} + z + \frac{1}{10} = \left(x + \left(y + z + \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{10}\right) \\ &= \left(x + (y * z) + \frac{1}{10}\right) = x * (y * z) \end{aligned}$$

Alors $*$ est associative.(0.5pt)

1.4) Cherchons $e \in \mathbb{R}$, tel que $\forall x \in \mathbb{R} : x * e = e * x = x$.

$$\text{On a : } x * e = x \Leftrightarrow x + e + \frac{1}{10} = x \Leftrightarrow e = -\frac{1}{10}$$

Puisque $-\frac{1}{10} \in \mathbb{R}$ et $*$ est commutative, alors $e = -\frac{1}{10}$ est l'élément neutre de la loi $*$(1pt)

1.5) Soit $x \in \mathbb{R}$, cherchons $x' \in \mathbb{R}$, tel que $x * x' = x' * x = -\frac{1}{10}$

$$\text{On a : } x * x' = -\frac{1}{10} \Leftrightarrow x + x' + \frac{1}{10} = -\frac{1}{10} \Leftrightarrow x' = -x - \frac{1}{5}$$

Puisque $-x - \frac{1}{5} \in \mathbb{R}$ et $*$ est commutative, alors $x' = -x - \frac{1}{5}$ est le symétrique de x par rapport à la loi $*$(1pt)

Par suite $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.

2) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(x * y) = g\left(x + y + \frac{1}{10}\right) = 5\left(x + y + \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{2} = 5x + 5y + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \left(5x + \frac{1}{2}\right) + \left(5y + \frac{1}{2}\right) = g(x) + g(y).$$

Alors g est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, *)$ dans le groupe $(\mathbb{R}, +)$(1pt)

3) On a: $e = -\frac{1}{10} = \frac{2(0)-1}{10} \in H$(0.5pt)

Soient $x, y \in H$, alors $\exists n, m \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{2n-1}{10}$, $y = \frac{2m-1}{10}$, on a :

$$\begin{aligned} x * y^{-1} &= x * \left(-y - \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{2n-1}{10}\right) * \left(-\frac{2m-1}{10} - \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{2n-1}{10}\right) * \left(\frac{-2m-1}{10}\right) = \frac{2n-1}{10} + \frac{-2m-1}{10} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{2(n-m)-1}{10} \in H, \text{ car } n - m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Par suite $(H, *)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}, *)$(1 pt)