Université de BBA
Faculté MI
Département RO

Niveau : $1^{ière}$ année MI
Module : Algèbre 1
Janvier 2023

Examen / Durée : 1 heure 30

Exercice 01 :(3 pts)

1) Soient P et Q deux assertions. Ecrire sous forme normale conjonctive et sous forme normale disjonctive l'assertion suivante :

$$(\overline{P \wedge Q}) \wedge (P \vee Q)$$

2) Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Pour toute parties A, B de E ; montrer que :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

Exercice02 :(4.5 pts)

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$ une application définie par :

$$f(x) = |x + 4|$$

1) Montrer que f est surjective.
2) Calculer $f(-9), f(1)$. Que pouvez-vous déduire ?
3) Déterminer l'ensemble $E \subset \mathbb{R}$ tel que l'application $f: E \longrightarrow [0, +\infty[$ est bijective. Puis déterminer l'application réciproque f^{-1}.

Exercice 03 :(8 pts)

1) Soit α un paramètre réel non nul. On définit sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{\alpha}\right\}$ la loi de composition interne $*$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{\alpha}\right\} : x * y = x + y - \alpha x y$$

- Montrer que $\left(\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{\alpha}\right\}, *\right)$ est un groupe commutatif.
- Soit $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{\alpha}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ une application définie par : $f(x) = -\alpha x + 1$

  Montrer que l'application f est un morphisme de $\left(\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{\alpha}\right\}, *\right)$ dans $(\mathbb{R} - \{0\}, .)$.

2) Soit $n\mathbb{Z} = \{na, a \in \mathbb{Z}\}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer que $(n\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
- Soient H et K deux sous-groupes de $(G,*)$. Est-ce –que $H \cup K$ un sous-groupe de $(G,*)$.

Exercice 04 :(4.5 pts)

On définit sur $\mathbb{N}^*$ la relation $\mathfrak{R}$ par :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{N}^* : x \,\mathfrak{R}\, y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* : y = x^n$$

Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$. L'ordre est-il total ? (Justifier)

N.B : Documents non autorisés.

Bon courage

Correction d'examen (Algèbre 1) 2022 - 2023

Exercice (1) : (3pts)

1) $\overline{(P \wedge Q)} \wedge (P \vee Q) = (\overline{P} \vee \overline{Q}) \wedge (P \vee Q)$ 0,25 0,5

$= (\overline{P} \wedge P) \vee (\overline{P} \wedge Q) \vee (\overline{Q} \wedge P) \vee (\overline{Q} \wedge Q)$

$= (\overline{P} \wedge Q) \vee (\overline{Q} \wedge P)$ 0,5

(car $(\overline{P} \wedge P)$ et $(\overline{Q} \wedge Q)$ est toujours faux).

2) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ / $f : E \longrightarrow F$ 0,5

0,25

Soit $y \in F$ alors $y \in f(A \cup B) \Longleftrightarrow \exists x \in A \cup B,\ y = f(x)$

$\Longleftrightarrow \exists x \left[(x \in A \vee x \in B) \wedge (y = f(x))\right]$.

$\Longleftrightarrow \exists x \left[(x \in A \wedge y = f(x)) \vee (x \in B \wedge y = f(x))\right]$

$\Longleftrightarrow \left[\exists x (x \in A \wedge y = f(x))\right] \vee \left[\exists x (x \in B \wedge y = f(x))\right]$.

$\Longleftrightarrow (y \in f(A) \vee y \in f(B))$ 0,25 0,5

$\Longleftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$ 0,25

donc $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice (2) : (4,5pts)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$$
$$x \longmapsto f(x) = |x + 4|$$

1) On montre que f est surjective :

f est surjective $\Longleftrightarrow \forall y \in [0, +\infty[, \exists x \in \mathbb{R} :$ 0,5

$y = f(x)$

On a : $|x+4| = \begin{cases} x+4 & \text{si } x \geq -4 \\ -x-4 & \text{si } x < -4 \end{cases}$ 0,5

① si $x \in [-4, +\infty[$: $f(x) = x+4$

donc : $y = x+4 \Rightarrow x = y-4$ 0,5

f est surjective

② si $x \in]-\infty, -4[$: $f(x) = -x-4$

$y = -x-4 \Rightarrow x = -y-4$ 0,5

f est surjective

donc d'après ① et ② : l'application f est surjective

2) $f(-9) = 5$ 0,25 $(-9 \in]-\infty, -4[)$

$f(1) = 5$ $(1 \in [-4, +\infty[)$ 0,25

donc $f(-9) = f(1) = 5$ $(-9 \neq 1)$ 0,5

ce qui implique : f n'est pas injective.

3) l'ensemble $E = [-4, +\infty[$ 0,5

$f : [-4, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$

$x \longmapsto f(x) = x+4$

l'application f est injective 0,25

donc f est surjective et injective alors f est bijective

L'application réciproque : $f^{-1} : [0, +\infty[\longrightarrow [-4, +\infty[$

0,75 $y \longmapsto f^{-1}(y) = y-4$

Exercice (3) : (8 pts)

1) $\forall x, y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{\alpha} \right\} : x * y = x + y - \alpha x y$.

• On montre : $\left(\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{\alpha} \right\}, * \right)$ est un groupe commutatif 0,25

① $*$ est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{\alpha} \right\} : x * y = y * x$.

$\forall x, y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{\alpha} \right\} : x * y = x + y - \alpha x y$.

$$= y + x - \alpha y x$$

$$= y * x \quad 0,25$$

donc $*$ est commutative

② $*$ est associative : 0,25

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{\alpha} \right\} : (x * y) * z = x * (y * z)$.

$$(x * y) * z = (x + y - \alpha x y) * z$$

$$= x + y + z - \alpha x y - \alpha x z - \alpha y z + \alpha^2 x y z$$

$$x * (y * z) = x * (y + z - \alpha y z) \quad 0,5$$

$$= x + y + z - \alpha y z - \alpha x y - \alpha x z + \alpha^2 x y z$$

donc $(x * y) * z = x * (y * z)$ 0,25

alors $*$ est associative.

③ l'élément neutre : $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{\alpha} \right\}, \exists e \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{\alpha} \right\}$:

$$x * e = x \quad 0,25$$

$$x * e = x + e - \alpha x e = x$$

$$\Rightarrow e(1 - \alpha x) = 0 \quad 0,5$$

$$\Rightarrow e = 0 \lor x = \frac{1}{\alpha} \quad \left(x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{\alpha} \right\} \right)$$

donc l'élément neutre est $e = 0 \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{\alpha} \right\}$

④ l'élément inverse : $\forall x \in \mathbb{R}-\{\frac{1}{\alpha}\}, \exists x' \in \mathbb{R}-\{\frac{1}{\alpha}\}$:

$$x * x' = e = 0 \quad 0{,}25$$

$$x * x' = x + x' - \alpha x x' = 0$$

$$\Rightarrow x' = \frac{x}{\alpha x - 1} \in \mathbb{R}-\{\frac{1}{\alpha}\} \quad 0{,}5$$

donc l'élément inverse est $x' = \frac{x}{\alpha x - 1}$.

d'après ①, ②, ③ et ④ : $(\mathbb{R}-\{\frac{1}{\alpha}\}, *)$ est un groupe commutatif

- L'application $f : \mathbb{R}-\{\frac{1}{\alpha}\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{0\}$

$$x \longmapsto f(x) = -\alpha x + 1 .$$

est un morphisme de $(\mathbb{R}-\{\frac{1}{\alpha}\}, *)$ dans $(\mathbb{R}-\{0\}, \cdot)$ si :

$$f(x * y) = f(x) f(y) \quad 0{,}25$$

on a $\forall x, y \in \mathbb{R}-\{\frac{1}{\alpha}\}$:

$$f(x * y) = f(x + y - \alpha x y)$$

$$= -\alpha x - \alpha y + \alpha^2 x y + 1$$

$$f(x) f(y) = (-\alpha x + 1)(-\alpha y + 1) \quad 1$$

$$= -\alpha x - \alpha y + \alpha^2 x y + 1 .$$

alors $f(x * y) = f(x) f(y)$.

ce qui montre que f est un morphisme de $(\mathbb{R}-\{\frac{1}{\alpha}\}, *)$ dans $(\mathbb{R}-\{0\}, \cdot)$.

2) • on montre que $(n\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$

$(n\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe :

$$\begin{cases} n\mathbb{Z} \neq \phi \\ \forall x, y \in n\mathbb{Z} : x + y' \in n\mathbb{Z} \end{cases} \quad 0{,}75$$

① on a $e=0$ l'élément neutre dans $\mathbb{Z}$:

$e=0=n\times 0 \,/\, 0\in\mathbb{Z}$ donc $e\in n\mathbb{Z}$.

alors $n\mathbb{Z}\neq\phi$. 0,5

② on a : $x'=-x$ l'élément inverse de x.

$\forall x,y\in n\mathbb{Z}$: $x=na \,/\, a\in\mathbb{Z}$ $\quad / \, n\in\mathbb{Z}$.

$y=na' \,/\, a'\in\mathbb{Z}$

alors $x+y'=x-y=na-na'$ 1

$=n(a-a')$

$=na'' \,/\, a''=(a-a')\in\mathbb{Z}$.

donc $(x+y')\in n\mathbb{Z}$.

d'après ① et ② : $(n\mathbb{Z},+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$ 0,25

- $H\cup K$ n'est pas forcément un sous-groupe de $(G,*)$

contre exemple : soient $(\mathbb{Z},+)$ un groupe et $(n\mathbb{Z},+)$ les sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$. 1

on pose $H=2\mathbb{Z}$ et $K=5\mathbb{Z}$ donc $H\cup K=\{2a, 5a \,/\, a\in\mathbb{Z}\}$

donc $2,5\in H\cup K$ mais $2+5=7\notin H\cup K$ 0,25

alors $H\cup K=2\mathbb{Z}\cup5\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$.

Exercice (4) : (4,5 pts)

$\forall x,y\in\mathbb{N}^*$: $xRy \iff \exists n\in\mathbb{N}^*$: $y=x^n$.

on montre que R est une relation d'ordre :

1 R est réflexive : $\forall x\in\mathbb{N}^*$: xRx. 0,25

on a : $\forall x\in\mathbb{N}^*$, $\exists n=1$ tel que : $x=x^1 \Rightarrow xRx$

donc R est réflexive 0,5

② R est antisymétrique : $\forall x, y \in \mathbb{N}^* : x R y$ et $y R x$ alors $x = y$. 0,25

0,25

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^* : \exists n, n' \in \mathbb{N}^* : \left.\begin{array}{l} y = x^n \\ x = y^{n'} \end{array}\right\} \Rightarrow y = (y^{n'})^n = y^{nn'}$$

0,25 0,25

$nn' \in \mathbb{N}$

0,25

donc $nn' = 1 \Rightarrow n = n' = 1$.

alors $x = y$ et R est antisymétrique 0,25

③ R est transitive : $\forall x, y, z \in \mathbb{N}^*$:

$x R y$ et $y R z \Rightarrow x R z$ 0,25

$$\left.\begin{array}{l} x R y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* : y = x^n \\ y R z \Leftrightarrow \exists n' \in \mathbb{N}^* : z = y^{n'} \end{array}\right\} \Rightarrow z = x^{nn'} = x^{n''} \;/\; n'' = nn' \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow x R z$. 1

donc R est transitive

d'après ①, ② et ③ : R est une relation d'ordre.

R est une relation d'ordre partiel :

car il y a des couples (x, y) qui ne sont pas en relation

par exemple : $(4,5), (5,4)$. 1

$4 \not R 5$ et $5 \not R 4$.