



Correction-Examen semestre -I-

Durée : 1h 30 m

**Exercice 1** ( 8 pts )

- Donner la négation des deux propositions suivantes et indiqué vraie ou fausse.

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0.$

.....  
 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y(y = -x - 1) \in \mathbb{R} : x + y = -1 \leq 0.$  (vraie)

Négation :  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$

2.  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 \geq x$

.....  
 $\exists x(x = 0) \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 \geq x.$  (vraie)

Négation :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 < x$

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $f(x) = x^2 - 4x + 3.$

3. Déterminer  $f(A)$  tel que  $A = [1; 2].$

.....  
 $f'(x) = 2x - 4,$

$f'(x) \leq 0$  pour  $x \in A, f$  est décroissante.

$f(A) = \{f(x), x \in A\}$

soit  $x \in A,$

$1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow f(2) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 0$

$f(A) = [-1; 0]$

4. Déterminer  $f^{-1}(B)$  tel que  $B = [-1; 3]$

.....  
 $f^{-1}(B) = \{x, f(x) \in B\}$

$-1 \leq f(x) \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 - 4x + 3 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 3 \text{ et } -1 \leq x^2 - 4x + 3$

$x^2 - 4x + 3 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 4]$

et

$-1 \leq x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$  vraie pour toute  $x \in \mathbb{R}$

Donc

$$f^{-1}(B) = [0; 4] \cap \mathbb{R} = [0; 4]$$

**Exercice 2** ( 12 pts )

Sur  $\mathbb{Z}$ , on définit la relation suivante :  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y = 4k \quad tq \quad k \in \mathbb{Z}$

1. Démontrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{Z}$ .

.....  
Soient  $x, y, z \in \mathbb{Z}$

- Réflexive :  $x - x = 0 = 4 \times 0 \Leftrightarrow x\mathcal{R}x$

- Symétrique :

$$\begin{aligned}x\mathcal{R}y &\Leftrightarrow x - y = 4k \quad tq \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow y - x = -4k = 4(-K) \quad tq \quad -k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow y\mathcal{R}x\end{aligned}$$

- Transitive :

$$\begin{aligned}x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z &\Leftrightarrow x - y = 4k \text{ et } y - z = 4k' \quad tq \quad k, k' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x - z = 4(k + k') \Leftrightarrow x\mathcal{R}z\end{aligned}$$

$\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

2. Déterminer la classe d'équivalence de 1 et 0.

.....  
$$\begin{aligned}\dot{1} &= \{x \in \mathbb{Z}, tq \quad x\mathcal{R}1\} = \{x \in \mathbb{Z}, tq \quad x - 1 = 4k, \quad k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x, tq \quad x = 4k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}\} = \{4k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{0} &= \{x \in \mathbb{Z}, tq \quad x\mathcal{R}0\} = \{x \in \mathbb{Z}, tq \quad x = 4k, \quad k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{4k, \quad k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

3. Donner la définition d'un corps.

.....  
Définition 1

- On dit qu'un ensemble  $(A, \oplus, \otimes)$  est un corps si

$(A, \oplus)$  est un groupe commutatif,  $(A^*, \otimes)$  est un groupe et  $\otimes$  distributive par rapport à  $\oplus$  .

Si de plus  $\otimes$  est commutative, on dit que  $A$  est un corps commutatif

---

Définition 2

- On dit qu'un anneau unitaire  $(A, \oplus, \otimes)$  est un corps si tout élément non nul de  $A$  est inversible.

Si de plus  $\otimes$  est commutative, on dit que  $A$  est un corps commutatif

L'ensemble  $A = \{0, 1, 2, 3\}$  muni des deux lois de composition interne définies par les tableaux ci-dessous

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\otimes$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

4. L'ensemble  $(A, \oplus, \otimes)$  est-il un corps, justifier votre réponse.

.....  
 L'élément 2 ne possède pas un élément inverse (l'élément symétrique),  
 l'ensemble  $(A, \oplus, \otimes)$  n'est pas un corps

5. Montrer que :  $(x \oplus 1)^2 = x^2 \oplus 2x \oplus 1$  dans l'anneau  $(A, \oplus, \otimes)$ .

.....  
 En utilisant les propriétés de l'anneau commutatif  $A$ .

"0" l'élément neutre pour  $\oplus$  et "1" l'élément neutre pour  $\otimes$ .

$$\begin{aligned} (x \oplus 1)^2 &= (x \oplus 1) \otimes (x \oplus 1) = (x \oplus 1) \otimes x \oplus (x \oplus 1) \otimes 1 \quad (\text{Distributivité}) \\ &= (x \otimes x \oplus 1 \otimes x) \oplus (x \otimes 1 \oplus 1 \otimes 1) \quad (\text{Distributivité} + \text{Associativité}) \\ &= x^2 \oplus x \oplus x \oplus 1 = x^2 \oplus 2x \oplus 1 \quad (\text{Associativité}) \end{aligned}$$

6. Résoudre l'équation suivante :  $x^2 \oplus 2x \oplus 1 = 0$  dans l'anneau  $(A, \oplus, \otimes)$ .

.....  
 En utilisant les propriétés de l'anneau commutatif  $A$  et les deux tableaux, on a

$$\begin{aligned} x^2 \oplus 2x \oplus 1 &= (x \oplus 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow x \oplus 1 &= 0 \quad \text{ou} \quad x \oplus 1 = 2 \\ \Leftrightarrow x \oplus 1 \oplus 3 &= 0 \oplus 3 \quad \text{ou} \quad x \oplus 1 \oplus 3 = 2 \oplus 3 \\ \Leftrightarrow x \oplus 0 &= 3 \quad \text{ou} \quad x \oplus 0 = 1 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \quad \text{ou} \quad x = 1 \end{aligned}$$

7. Soient les polynômes suivants dans  $\mathbb{R}$

$$A(x) = x^2(x+2)^5(x+1)(x+3)^4, \quad B(x) = (x-2)(x+1)^2(x+3)^6$$

- Calculer le pgcd de  $A$  et  $B$

.....  
 $\text{pgcd}(A, B) = (x+1)(x+3)^4$

- Calculer le ppcm de  $A$  et  $B$

.....  
 $\text{ppcm}(A, B) = x^2(x+2)^5(x-2)(x+1)^2(x+3)^6$