

Examen final d'Algèbre 1 - Durée 01h30

Exercice 1. (4 pts)

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier vos réponses.

- Soient \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux propositions logiques, alors on a

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \iff (\mathcal{Q} \vee \overline{\mathcal{P}})$$

- Soit E une partie de \mathbb{R} telle que $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$.
- Soient E et F deux ensembles et $f : E \mapsto F$ une application, alors $f(E) = F$.
- L'anneau quotient $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps.

Exercice 2. (5 pts)

Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ une application définie par $f(x) = \frac{x}{2}$.

- Déterminer $f(\mathbb{Z})$ et $f^{-1}(B)$ tel que $B = \{\frac{5}{3}\}$.
- f est-elle injective, surjective?

Exercice 3. (5 pts)

On définit sur \mathbb{R}^* la relation : $\left\{ \forall x, y \in \mathbb{R}^* : x \mathcal{R} y \iff x - y = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right\}$

- Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
- Déterminer la classe d'équivalence de 2.

Exercice 4. (6 pts)

Soit $G = \mathbb{R} - \{1\}$ et $*$ une loi définie sur G par :

$$x * y = x + y - xy$$

- Montrer que $(\mathbb{R} - \{1\}, *)$ est un groupe commutatif.
- Soit l'application $f : (\mathbb{R} - \{1\}, *) \mapsto (\mathbb{R}^*, \cdot)$ définie par $f(x) = 1 - x$.
Montrer que f est un homomorphisme de groupes.

Exercice 1. 0,25 pour chaque réponse +0,75 pour chaque justification

1. **Vraie.** Il suffit de vérifier que la table de vérité de $(Q \vee \overline{P})$ est identique à celle de $(P \Rightarrow Q)$

P	\overline{P}	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \vee \overline{P}$
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V

2. **Fausse.** $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\} = \{1, -1\}$ ce qui donne $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{-1\}, \{1, -1\}\}$.
3. **Fausse.** Il suffit de donner un exemple d'application qui n'est pas surjective.
4. **Fausse.** Il suffit d'établir la table de multiplication et de remarquer qu'il existe au moins un élément de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ qui ne possède pas d'inverse multiplicatif.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ une application définie par $f(x) = \frac{x}{2}$.

- 1.

$$f(\mathbb{Z}) = \{f(x)/x \in \mathbb{Z}\} \dots \mathbf{0,5}$$

$$= \{\frac{x}{2}/x \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{4}{2}, \dots\} \dots \mathbf{0,75}$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{Z}/f(x) \in B\} \dots \mathbf{0,5}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z}/f(x) = \frac{5}{3}\} = \{x \in \mathbb{Z}/x = \frac{10}{3}\} = \emptyset \dots \mathbf{0,75}$$

2. f est injective $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2) \dots \mathbf{0,75}$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, tels que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} \Rightarrow x_1 = x_2 \dots \mathbf{0,5}$.

D'après la question 1, on peut remarquer que f n'est pas surjective i.e

$$\exists y \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{Z}, f(x) \neq y \dots \mathbf{0,75}$$

pour $y = \frac{5}{3} \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{Z}, f(x) \neq \frac{5}{3} \dots \mathbf{0,5}$

Exercice 3. On définit sur \mathbb{R}^* la relation : $\left\{ \forall x, y \in \mathbb{R}^* : x \mathcal{R} y \iff x - y = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right\}$

1. \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

- Réflexive.**0,75**
- Symétrique.**1pt**
- Transitive.**1pt**

2. Déterminons la classe d'équivalence de 2.

$$\bar{2} = \{x \in \mathbb{R}^* / x\mathcal{R}2\} \dots 1\text{pt}$$

$$x \in \bar{2} \Leftrightarrow x\mathcal{R}2 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \dots 0,5\text{pt}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow (x = 2 \vee x = -1/2) \dots 0,5$$

Ce qui donne $\bar{2} = \{2, -\frac{1}{2}\} \dots 0,25$

Exercice 4. Soit $G = \mathbb{R} - \{1\}$ et $*$ une loi définie sur G par :

$$x * y = x + y - xy$$

1. $(\mathbb{R} - \{1\}, *)$ est un groupe commutatif. En effet,

- $x*y = x+y-xy \in \mathbb{R} - \{1\}$ car l'addition et la multiplication sont stables dans \mathbb{R} , en particulier dans $\mathbb{R} - \{1\}$. En effet, soient $x, y \in \mathbb{R} - \{1\}$ et supposons que $x * y = 1$ alors $x + y - xy = 1 \Rightarrow x(1 - y) + y = 1 \Rightarrow (1 - y)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \vee y = 1$ ce qui est une contradiction. Ainsi $*$ est une loi de composition interne.0,75

- $*$ est commutative0,5

- L'associativité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$(x * y) * z = (x + y - xy) * z = x + y + z - xy - xz - yz + xyz \dots 0,5$$

$$x * (y * z) = x * (y + z - yz) = x + y + z - yz - xy - xz - xyz \dots 0,5$$

donc on a bien $(x * y) * z = x * (y * z)$

- L'élément neutre : $\exists e? \in \mathbb{R} - \{1\}, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : x * e = x \dots 0,5$

$$x * e = x \Rightarrow x + e - xe = x \Rightarrow e(1 - x) = 0$$

donc $e = 0 \vee x = 1$, mais $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ donc $e = 0 \in \mathbb{R} - \{1\}$0,5

- L'existence du symétrique : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, \exists x' \in \mathbb{R} - \{1\} : x * x' = 0 \dots 0,5$

$$x * x' = x + x' - xx' = 0 \Rightarrow x' = \frac{x}{x-1}$$

En effet, $x' = \frac{x}{x-1} \in \mathbb{R} - \{1\}$, car si $x' = \frac{x}{x-1} = 1$ alors on obtient $-1 = 0$ ce qui est impossible.0,5

2. Soit l'application $f : (\mathbb{R} - \{1\}, *) \mapsto (\mathbb{R}^*, \cdot)$ définie par $f(x) = 1 - x$. Étant données les deux groupes $(\mathbb{R} - \{1\}, *)$ et (\mathbb{R}^*, \cdot) , alors

f est un morphisme de groupes $\iff \forall x, y \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x*y) = f(x) \cdot f(y) \dots 0,75$

$$f(x * y) = 1 - (x * y) = 1 - x - y + xy \dots 0,5$$

$$f(x) \cdot f(y) = (1 - x)(1 - y) = 1 - x - y + xy \dots 0,5$$

donc f est bien un morphisme de groupes.