

**Examen de rattrapage d'Algèbre 1 - Durée 01h30**

**Exercice 1. (04 pts)**

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier vos réponses.

1. Soient  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  deux propositions logiques, alors on a l'équivalence suivante :

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \iff (\overline{\mathcal{Q}} \Rightarrow \overline{\mathcal{P}}).$$

2. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application, et  $A$  une partie de  $E$  alors

$$\mathbb{C}_F f(A) \subset f(\mathbb{C}_E A)$$

3. Sur  $\mathbb{R}$ , on définit la relation :  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$ , alors  $\mathcal{R}$  est anti-symétrique.
4. Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur un ensemble  $E$ , si  $x\mathcal{R}y$  alors  $\bar{x} = \bar{y}$ .

**Exercice 2. (05 pts)**

Soit  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$  une application définie par  $f(n) = \frac{1}{n^2}$ .

1. Calculer  $Im(f)$  et  $f^{-1}(B)$  tel que  $B = \{\frac{1}{2}, 9\}$ .
2.  $f$  est-elle injective, surjective?

**Exercice 3. (05 pts)**

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\mathcal{R}$  la relation binaire définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = \lambda(x^2 - y^2)$$

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
2. On pose  $\lambda = 4$ , calculer la classe d'équivalence de 2.

**Exercice 4. (06 pts)**

Soit  $G = \mathbb{R} - \{-2\}$  et  $*$  une loi définie sur  $G$  par :

$$x * y = xy + 2(x + y) + 2$$

1. Montrer que  $(G, *)$  est un groupe commutatif.

**Corrigé et barème**

**Corrigé 1. 0,25 pour chacune des réponses +0,75 pour la justification**

1. **Vraie** la preuve de cette équivalence peut être donnée de deux manières différentes. Soit en utilisant l'équivalence  $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \iff (\mathcal{Q} \vee \overline{\mathcal{P}})$ , on obtient :

$$\begin{aligned}(\overline{\mathcal{Q}} \Rightarrow \overline{\mathcal{P}}) &\iff (\overline{\mathcal{P}} \vee \overline{\overline{\mathcal{Q}}}) \\ &\iff (\overline{\mathcal{P}} \vee \mathcal{Q}) \\ &\iff (\mathcal{Q} \vee \overline{\mathcal{P}}) \\ &\iff (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})\end{aligned}$$

Soit en utilisant les valeurs de vérité des implications  $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$  et  $(\overline{\mathcal{Q}} \Rightarrow \overline{\mathcal{P}})$ .

2. **Fausse** Il suffit de prendre un contre exemple.  
3. **Fausse**  $\mathcal{R}$  n'est pas anti-symétrique, cela veut dire

$$\exists x, y \in \mathbb{R} \text{ tels que } x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \text{ mais } x \neq y$$

On a  $0\mathcal{R}2\pi$  car  $\cos^2 2\pi + \sin^2 0 = 1$ , et aussi  $2\pi\mathcal{R}0$  car  $\cos^2 0 + \sin^2 2\pi = 1$  mais  $0 \neq 2\pi$ .

4. **Vraie** La double inclusion  $(\overline{x} \subset \overline{y} \text{ et } \overline{y} \subset \overline{x})$  doit être montrée.

**Corrigé 2.** Soit  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$  une application définie par  $f(n) = \frac{1}{n^2}$ .

- 1.

$$\begin{aligned}Im(f) &= \{f(n)/n \in \mathbb{N}^*\} \dots \mathbf{0,5} \\ &= \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots\} \dots \mathbf{0,75}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f^{-1}(B) &= \{n \in \mathbb{N}^*/f(n) \in B\} \dots \mathbf{0,5} \\ &= \{n \in \mathbb{N}^*/f(n) \in \{\frac{1}{2}, 9\}\} = \{\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{3}\} \cap \mathbb{N}^* = \emptyset \dots \mathbf{0,75}\end{aligned}$$

2.  $f$  est injective  $\iff (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2) \dots \mathbf{0,75}$

Soient  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ , tels que  $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow \frac{1}{n_1^2} = \frac{1}{n_2^2} \Rightarrow n_1 = n_2 \dots \mathbf{0,5}$ .

D'après la question 1, on peut remarquer que  $f$  n'est pas surjective i.e

$$\exists y \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) \neq y \dots \mathbf{0,75}$$

pour  $y = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) \neq \frac{1}{2} \dots \mathbf{0,5}$

**Corrigé 3.** 1.  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

- Réflexive. ....**0,5**
- Symétrique. ....**1pt**
- Transitive. ....**1pt**

2. Soit  $\lambda = 4$ , déterminons la classe d'équivalence de 2.

$$\bar{2} = \{x \in \mathbb{R} / x\mathcal{R}2\} \dots \mathbf{0,75pt}$$

$$x \in \bar{2} \Leftrightarrow x\mathcal{R}2 \Leftrightarrow x^3 - 2^3 = 4(x^2 - 2^2) \dots \mathbf{0,5pt}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 2x - 4) = 0 \dots \mathbf{0,75}$$

Les solutions de l'équation ci-dessus sont  $1 + \sqrt{5}$ ,  $1 - \sqrt{5}$  et 2. Ainsi  $\bar{2} = \{2, 1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}\} \dots \mathbf{0,5}$

**Corrigé 4.** Soit  $G = \mathbb{R} - \{-2\}$  et  $*$  une loi définie sur  $G$  par :

$$x * y = xy + 2(x + y) + 2$$

Montrons que  $(G, *)$  est un groupe commutatif.

1.  $*$  est une loi de composition interne : en effet,  $x * y \in \mathbb{R}$  car l'addition et la multiplication sont stables dans  $\mathbb{R}$  ....**0,5pt**.

Soient maintenant  $x, y$  deux réels différents de  $-2$  et supposons par l'absurde que  $x * y = -2$  alors

$$\begin{aligned} xy + 2(x + y) + 2 = -2 &\Rightarrow xy + 2x + 2y + 4 = 0 \\ &\Rightarrow x(y + 2) + 2(y + 2) = 0 \\ &\Rightarrow (x + 2)(y + 2) = 0 \\ &\Rightarrow x = -2 \vee y = -2 \end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction, ainsi  $x * y \in \mathbb{R} - \{-2\}$  ....**1pt**.

2. La commutativité : soient  $x, y \in G^2$

$$x * y = xy + 2(x + y) + 2 = yx + 2(y + x) + 2 = y * x$$

d'où  $*$  est commutative ....**0,5pt**

3. L'associativité : Soient  $x, y, z \in G$  :  $(x * y) * z \stackrel{?}{=} x * (y * z)$

$$\begin{aligned} (x*y)*z &= (xy+2(x+y)+2)*z = xyz+2z(x+y)+2z+2(xy+2(x+y)+2+z)+2 \\ &= xyz + 2xz + 2yz + 2xy + 4x + 4y + 4z + 6 \quad \dots \mathbf{0,5pt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x*(y*z) &= x*(yz+2(y+z)+2) = xyz+2xy+2xz+2x+2(yz+2(y+z)+2+x)+2 \\ &= xyz + 2xy + 2xz + 2yz + 4y + 4z + 6 + 4x \quad \dots \mathbf{0,5pt} \end{aligned}$$

4. L'existence de l'élément neutre :  $\exists e? \in \mathbb{R} - \{-2\}, \forall x \in \mathbb{R} - \{-2\} : x * e = x$  ....**0,5**

$$\text{on a } x * e = x \Rightarrow xe + 2(x + e) + 2 = x \Rightarrow xe + x + 2e + 2 = 0$$

$$\Rightarrow e(x + 2) = -(x + 2) \quad \dots \mathbf{0,75pt} \text{ ce qui implique } e = -1 \in \mathbb{R} - \{-2\}$$

....**0,25**

5. L'existence du symétrique :  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}, \exists x' \in \mathbb{R} - \{-2\} : x * x' = 0$ ...**0,5**

On a  $x * x' = e = -1 \Rightarrow xx' + 2(x + x') + 2 = -1 \Rightarrow x'(x + 2) = -3 - 2x$

$$\Rightarrow x' = \frac{-3 - 2x}{x + 2} \in \mathbb{R} - \{-2\} \dots$$
**0,5**

On montre que  $x' \in \mathbb{R} - \{-2\}$  c'est à dire  $x' \neq -2$ . On suppose que

$$x' = \frac{-3 - 2x}{x + 2} = -2 \Rightarrow -3 - 2x = -2x - 4 \Rightarrow -3 = -4$$

c'est absurde, d'où  $x' \in \mathbb{R} - \{-2\}$  ...**0,5**