



Faculté des sciences *** 1ère Année MI-L1 INFO- L1 ING 2022-2023.
Module : Algèbre 1 / Examen de rattrapage. (1H30mn)

Exercice 01 : (4 points) On définit dans $\mathbb{R}^*$ la relation $\mathfrak{R}$ par :

$$x\mathfrak{R}y \iff x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}.$$

- (1) Déterminer la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}^*$.
- (2) Déterminer l'ensemble quotient.

Exercice 02 : (8 points) Soit $\mathfrak{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x\mathfrak{R}y \iff \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x = ky.$$

- (1) Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}$.
- (2) Cet ordre est-il total ? Justifier.
- (3) Déterminer, s'il existent $\sup \{5, 10, 21\}$, $\inf \{5, 10, 21\}$.

Remarque : Ecrire à chaque fois les définitions.

Exercice 03 : (8 points) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{3x}{5x^2+2}$.

- (1) Etudier l'application f et tracer son tableau des variations.
- (2) Dire si f est injective et si elle est surjective? (N'oubliez pas d'écrire les définitions et la justification de votre réponse).

Bon courage.

Faculté des sciences *** 1ère Année MI-L1 INFO- L1 ING 2022-2023.

Module : Algèbre 1 / Examen de rattrapage. (1H30mn)

Correction

Exercice 01 : (4 points) On définit dans $\mathbb{R}^*$ la relation $\mathfrak{R}$ par :

$$x\mathfrak{R}y \iff x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}.$$

(2) Déterminons la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}^*$.

$$cl(a) = \{x \in \mathbb{R}^* / x\mathfrak{R}a\}. \text{ (0.5 point)}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 x\mathfrak{R}a &\iff x^2 - \frac{1}{x^2} = a^2 - \frac{1}{a^2}, \\
 \Rightarrow x^2 - a^2 &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{x^2 a^2}, \\
 \Rightarrow (x^2 - a^2) \left(1 + \frac{1}{x^2 a^2}\right) &= 0, \text{ (0.5 point)} \\
 \Rightarrow x^2 - a^2 &= 0, \text{ car } 1 + \frac{1}{x^2 a^2} \neq 0, \text{ (0.5 point)} \\
 \Rightarrow x = \pm a &\Rightarrow cl(a) = \{a, -a\}. \text{ (1 point)}
 \end{aligned}$$

(3) Déterminons l'ensemble quotient.

$$\text{ (0.5 point) } \rightarrow \mathfrak{R}/\mathbb{R}^* = \{cl(\alpha), \alpha > 0\} = \{cl(\alpha), \alpha < 0\}. \leftarrow \text{ (1 point)}$$

Exercice 02 : (08 points) Soit $\mathfrak{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x\mathfrak{R}y \iff \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x = ky.$$

(1) Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}$.

point + 0.25 point) $\mathfrak{R}$ est-elle réflexive ?

$$\mathfrak{R} \text{ est réflexive } \iff \forall x \in \mathbb{N}, x\mathfrak{R}x.$$

$$\begin{aligned}
 \forall x &\in \mathbb{N}, \exists k = 1 \in \mathbb{N}, x = 1 \times x \\
 \Rightarrow x\mathfrak{R}x &\Rightarrow \mathfrak{R} \text{ est réflexive.}
 \end{aligned}$$

nt + 0.75 point) $\mathfrak{R}$ est-elle antisymétrique ?

$\mathfrak{R}$ est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{N}, x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}x \Rightarrow x = y$.

Soient $x, y \in \mathbb{N}$,

$$x\mathfrak{R}y \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x = k_1 y,$$

et

$$y\mathfrak{R}x \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } y = k_2 x,$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} x &= k_1 k_2 x \Rightarrow k_1 k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1, \\ \Rightarrow x &= y \Rightarrow \mathfrak{R} \text{ est antisymétrique.} \end{aligned}$$

nt + 0.75 point) $\mathfrak{R}$ est-elle transitive ?

$\mathfrak{R}$ est transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{N}, x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}z \Rightarrow x\mathfrak{R}z$.

Soient $x, y, z \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x\mathfrak{R}y \text{ et } y\mathfrak{R}z &\Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}, x = k_1 y \text{ et } y = k_2 z, \\ \Rightarrow x &= k_1 k_2 z \Rightarrow \exists k_3 = k_1 k_2 \in \mathbb{N}, x = k_3 z, \\ \Rightarrow \mathfrak{R} &\text{ est transitive.} \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre, car elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

(2) Cet ordre est-il total ? Justifier et donner la définition de l'ordre total.

L'ordre est total si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x\mathfrak{R}y \text{ ou } y\mathfrak{R}x. \text{ (0.5 point)}$$

L'ordre est partiel car pour 2 et 3 : **(1.5 point sur la justification de l'ordre partiel)**

$$\forall k \in \mathbb{N}, (2 \neq k \times 3) \text{ et } (3 \neq k \times 2),$$

alors ni $3\mathfrak{R}2$ ni $2\mathfrak{R}3$.

(3) Soit l'ensemble $A = \{6, 10, 21\}$. Déterminer, s'il existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ et $\min A$ pour l'ordre $\mathfrak{R}$.

a) M est un majorant de $A \Leftrightarrow \forall x \in A, x\mathfrak{R}M$. **(0.25 point)**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\mathfrak{R}M \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}, 6 = k_1 M \Leftrightarrow M \in \{1, 2, 3, 6\}, & \text{(0.25 point)} \\ 10\mathfrak{R}M \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}, 10 = k_2 M \Leftrightarrow M \in \{1, 2, 5, 10\}, & \text{(0.25 point)} \\ 21\mathfrak{R}M \Leftrightarrow \exists k_3 \in \mathbb{N}, 21 = k_3 M \Leftrightarrow M \in \{1, 3, 7, 21\}, & \text{(0.25 point)} \end{cases}$$

Alors le seuls majorant de A est : 1. **(0.25 point)**

(Toute la ligne 0.25 point) $\sup A = 1 \notin A \Rightarrow \max A$ n'existe pas.

b) m est un majorant de $A \Leftrightarrow \forall x \in A, m\mathfrak{R}x$. **(0.25 point)**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\mathfrak{R}6 \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}, m = 6k_1 \Leftrightarrow m \in \{0, 6, 12, \dots\}, & \text{(0.25 point)} \\ m\mathfrak{R}10 \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}, m = 10k_2 \Leftrightarrow m \in \{0, 10, 20, \dots\}, & \text{(0.25 point)} \\ m\mathfrak{R}21 \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}, m = 21k_2 \Leftrightarrow m \in \{0, 21, 42, \dots\}, & \text{(0.25 point)} \end{cases}$$

Alors l'ensemble des minorants est :

$$E_{\min} = \{1260k, k \in \mathbb{N}\}. \text{(0.5 point)}$$

Mais :

$$0\mathfrak{R}1260, \forall x \in E_{\min}, x\mathfrak{R}1260. \text{(0.25 point)}$$

(Toute la ligne 0.25 point) $\inf A = 1260 \notin A \Rightarrow \min A$ n'existe pas.

03 : (08 points) Soit f une application définie par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{3x}{5x^2 + 2}. \end{aligned}$$

(1)

$$D_f = \mathbb{R}. \text{(0.25 point)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{5x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{5x} = 0. \text{(0.25 point)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{5x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{5x} = 0. \text{(0.25 point)}$$

$$f'(x) = \frac{3(5x^2 + 2) - 30x^2}{(5x^2 + 2)^2} = 3 \frac{2 - 5x^2}{(5x^2 + 2)^2}. \text{(0.5 point)}$$

Le signe de la dérivée :

$$\begin{array}{ccccccc} -\infty & & - & & -\sqrt{\frac{2}{5}} & & + & & \sqrt{\frac{2}{5}} & & - & & +\infty \end{array} \text{(0.5 point)}$$

—————→

Le tableau des variations : **(1.25 point)**

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4}$			
		$-\frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4}$			0

(2)

a) Pour l'injectivité :

f est injective si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2). \text{(0.5 point)}$$

Il existent deux éléments différents :

$$x_1 \in \left] -\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}} \right[\text{ et } x_2 \in \left] \sqrt{\frac{2}{5}}, +\infty \right[\text{ avec } x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2). \textbf{(0.5 point)}$$

Donc f n'est pas injective.

b) Pour la surjectivité :

f est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que : } f(x) = y. \textbf{(0.5 point)}$$

Alors d'après le tableau des variations :

$$f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4}, \frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4} \right], \textbf{(0.75 point)}$$

donc elle n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$ car :

$$\exists y \notin \left[-\frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4}, \frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4} \right], \forall x \in \mathbb{R} \text{ tel que : } f(x) \neq y. \textbf{(0.75 point)}$$

(1 point+ 1point) D'après le tableau des variations :

$$f\left(\left[-\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right]\right) = \left[-\frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4}, \frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4}\right],$$

donc pour que f soit surjective il suffit de prendre l'ensemble d'arrivé $\left[-\frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4}, \frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}}{4}\right]$, de plus elle est injective car elle est continue et strictement croissante donc bijective.