الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen Algérie

جامعة أبي بكر بلقايد
تلمسان الجزائر

Faculté des sciences – Département de mathématiques.

Module : Algèbre 1 / Contrôle continu.

1ère Année * MI * 2022-2023. (Durée : 1H30 mn).

N.B. L'USAGE DES APPAREILLES ÉLECTRONIQUES EST STRICTEMENT INTERDIT.

EXERCICE 01 : **(14 POINTS)**

(1) **(3 POINTS)** Dresser la table de vérité de la proposition suivante :
$(A): \ [(\bar{R} \Rightarrow \bar{P}) \Rightarrow Q] \vee [(\bar{Q} \Leftrightarrow P) \wedge R].$

(2) **(4 POINTS)** a) La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.

$$(A): \forall x \in \mathbb{R} - \{4\} \ \ , \exists n \in \mathbb{N}, \frac{n}{x-4} + 3 > 0.$$

b) Soit la proposition :

$$(B): \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in I \subset \mathbb{R}, \sqrt{x^2 - yx} > y.$$

Donner le plus grand intervalle I où la proposition (B) est vraie.

(3) **(3 POINTS)** Montrer par l'absurde que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ ; \ \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \notin \mathbb{N}.$$

(4) **(4 POINTS)** Montrer que :

$$\left[A \cap C_E^B = \emptyset \text{ et } B \cap C_E^C = \emptyset\right] \Rightarrow \left[A \cap C_E^C = \emptyset\right].$$

EXERCICE 02 : **(06 POINTS)** Soit f définie par :

$$f : E \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x - 2}} .$$

(1) **(0.75 point)** Trouver E pour que f soit une application (N'oubliez pas d'écrire la définition d'une application).

(2) (2 points) Calculer la dérivée et tracer le tableau des variations de la fonction f.

(3) (1.5 point) f est-elle injective ? Surjective ? Justifier.
(N'oubliez pas d'écrire les deux définitions d'une application injective et une application surjective).

(4) (0.75 point) Soit g une application définie par :

$$g : H \to K$$

$$x \mapsto g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x - 2}} .$$

Donner un cas (des intervalles $H\ et\ K$) à partir du tableau des variations où g est bijective (Justifier votre réponse).

(5) **(1 point)** Trouver dans ce cas l'application inverse.

BON COURAGE

Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen
Module: Algèbre 1 Contrôle continu " Le corrigé".
1ère Année MI 2022-2023.

Question 01 : (3 points) Soient P, Q et R trois propositions.
Dresser la table de vérité de la proposition suivante :

$$(A) : \left[\left(\overline{R} \Rightarrow \overline{P}\right) \Rightarrow Q\right] \vee \left[\left(\overline{Q} \Leftrightarrow P\right) \wedge R\right].$$

On note par :

$$(B) : \left[\left(\overline{R} \Rightarrow \overline{P}\right) \Rightarrow Q\right] \text{ et } (C) : \left[\left(\overline{Q} \Leftrightarrow P\right) \wedge R\right].$$

P	Q	R	$\overline{P}$	$\overline{R}$	$\overline{Q}$	$\overline{R} \Rightarrow \overline{P}$	$\overline{Q} \Leftrightarrow P$	(B)	(C)	(A)
1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0

Les 5 dernièrs colonnes chacune $\rightarrow$ **(0.5 point)** + (**0.5 point** pour les autres ensembles)

Question 02 : (4 points) La proposition est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.

$$(A) : \forall x \in \mathbb{R} - \{4\}, \exists n \in \mathbb{N}, \frac{n}{x-4} + 3 > 0.$$

La proposition est vraie **(0.25 point)** car il suffit de prendre $n = 0$ (**0.75 point**).

$$(B) : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in I \subset \mathbb{R}, \sqrt{x^2 - yx} > y.$$

Donner le plus grand intervalle I où la proposition (B) est vraie.**(3 points)**
La racine est définie si :

$$\begin{array}{rcl} x^2 - yx & \geq & 0. \\ x^2 - yx & = & 0 \Longleftrightarrow x(x-y) = 0 \\ \text{Si } y & > & 0 : \overrightarrow{-\infty \quad + \quad 0 \quad - \quad y \quad + \quad +\infty} \\ & & \text{ou} \\ \text{Si } y & < & 0 : \overrightarrow{-\infty \quad + \quad y \quad - \quad 0 \quad + \quad +\infty} \end{array}$$

Alors dans les deux cas (B) n'est pas définie pour quelques $x \in \mathbb{R}$ sachant que x est quelconque dans $\mathbb{R}$.

Par suite le seul cas où (B) est définie $\forall x \in \mathbb{R}$ est pour $y = 0$.

donc (B) est définie $\forall x \in \mathbb{R}$ si :

$$I = \{0\}.$$

Mais dans ce cas la proposition est fausse pour $x = 0$.

Conclusion :

$$I \text{ n'existe pas pour que } (B) \text{ soit vraie.}$$

Question 03 : (3 points) Montrer par l'absurde que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \notin \mathbb{N}.$$

1ère méthode : Par l'absurde on suppose que :

$$\begin{aligned}
\exists \alpha \quad &\in \quad \mathbb{N}, \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \alpha \ \textbf{(0.25 point)} \\
&\Rightarrow \quad \frac{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)} = \alpha \ \textbf{(0.5 point)} \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \alpha \in \mathbb{N} \ \textbf{(0.25 point)} \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 1 \ \textbf{(0.5 point)} \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{n+1} = 1 + \sqrt{n} \ \textbf{(0.5 point)} \\
&\Rightarrow \quad n + 1 = 1 + n + 2\sqrt{n} \ \textbf{(0.5 point)} \\
&\Rightarrow \quad n = 0 \text{ contradiction. } \textbf{(0.5 point)}
\end{aligned}$$

2 ème méthode : Par l'absurde on suppose que :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \quad &= \quad \alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n+1} = \alpha - \sqrt{n} \ \textbf{(0.5 point)} \\
&\Rightarrow \quad n + 1 = \left(\alpha - \sqrt{n}\right)^2 \Rightarrow n + 1 = \alpha^2 - 2\alpha\sqrt{n} + n \\
&\Rightarrow \quad 1 = \alpha^2 - 2\alpha\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha} \textbf{(0.5 point)} \\
&\Rightarrow \quad n = \left(\frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1}{4\alpha^2} \textbf{(0.5 point)} \\
&\Rightarrow \quad 4n\alpha^2 = \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 \\
&\Rightarrow \quad \alpha^4 - (2 + 4n)\,\alpha^2 + 1 = 0\,(\alpha, n \in \mathbb{N})\,, \textbf{(0.5 point)}
\end{aligned}$$

Si on pose $X = \alpha^2$, on a :

$$X^2 - (2 + 4n)\,X + 1 = 0$$

$$\triangle = (2 + 4n)^2 - 4 = 16n^2 + 16n > 0 \textbf{(0.5 point)}$$

donc :

$$X_1 = \frac{(2 + 4n) - \sqrt{\triangle}}{2} = \frac{(2 + 4n) - 4\sqrt{n^2 + n}}{2} = (1 + 2n) - 2\sqrt{n^2 + n} \notin \mathbb{N}.\textbf{(0.25 point)}$$

et

$$X_1 = \frac{(2+4n)+\sqrt{\triangle}}{2} = \frac{(2+4n)+4\sqrt{n^2+n}}{2} = (1+2n)+2\sqrt{n^2+n} \notin \mathbb{N}.\textbf{(0.25 point)}$$

car si :

$$\begin{aligned} X_1, X_2 &\in \mathbb{N} \Rightarrow (X-X_1)(X-X_2) = X^2-(2+4n)X+1 \\ &\Rightarrow X_1 \times X_2 = 1 \Rightarrow X_1 = X_2 = 1 \\ &\Rightarrow (1+2n)-2\sqrt{n^2+1} = 1 \\ &\Rightarrow 2(n-\sqrt{n^2+1}) = 0 \text{ et } 2(n+\sqrt{n^2+1}) = 0 \\ &\Rightarrow (n-\sqrt{n^2+1}) = 0 \text{ et } (n+\sqrt{n^2+1}) = 0 \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

Question 04 : (4 points) Montrons que:

$$A \cap C_E^B = \emptyset \text{ et } B \cap C_E^C = \emptyset \Rightarrow A \cap C_E^C = \emptyset.$$

1ère méthode : Par l'absurde on suppose que :

$$\begin{aligned} A \cap C_E^C &\neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A \cap C_E^C \ \textbf{(0.25+0.5 point)} \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in A \\ \text{et} \\ x \in C_E^C \end{array} \right. \ \textbf{(0.25 point) (Le reste chaque ligne sur 0.75 point)} \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} x \in B \Rightarrow x \in B \cap C_E^C \text{ (utilisant le fait que } x \in C_E^C) \\ \text{ou} \\ x \in C_E^B \Rightarrow x \in A \cap C_E^B \end{array} \right. \\ \qquad\qquad\qquad\text{et} \\ x \in C_E^C \text{et } \left\{ \begin{array}{l} x \in B \Rightarrow x \in B \cap C_E^C \\ \text{ou} \\ x \in C_E^B \Rightarrow x \in A \cap C_E^B \text{ (utilisant le fait que } x \in A) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

(contradiction avec les hypothèses).

2 ème méthode : (4 points)

$$\left\{ \begin{array}{c} A \cap C_E^B = \emptyset \Rightarrow C_E^B \subset C_E^A \\ \text{et} \\ B \cap C_E^C = \emptyset \Rightarrow C_E^C \subset C_E^B \end{array} \right. \Rightarrow C_E^C \subset C_E^A \Rightarrow A \cap C_E^C = \emptyset.$$

Exercice 02 : (6 points) Soit la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f &: E \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+x-2}}. \end{aligned}$$

(1) Trouver E pour que f soit une application.

f est une application si et seulement si :

$$\forall x \in E, \exists ! y \in \mathbb{R} \text{ tel que : } f(x) = y. \textbf{ (0.25 point)}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 > 0 \right\}. \\ x^2 + x - 2 &= 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 1. \\ & \quad -\infty \quad + \quad -2 \quad - \quad 1 \quad + \quad +\infty \\ D_f &=]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[. \end{aligned}$$

Pour que f soit une application il suffit que :

$$E = D_f =]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[.\textbf{(0.5 point)}$$

(2) Calculer la dérivée et tracer le tableau des variations de la fonction f.

Les limites : **(1 point)**

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x-2}} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{x}{x} - \frac{2}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x \sqrt{1 + \frac{x}{x} - \frac{2}{x^2}}} = -1. \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x-2}} &= 1. \\ \lim_{x \overset{<}{\to} -2} \frac{x}{\sqrt{x^2+x-2}} &= \frac{-2}{0^+} = -\infty. \\ \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x}{\sqrt{x^2+x-2}} &= \frac{1}{0^+} = +\infty. \end{aligned}$$

La dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x^2+x-2} - \frac{(2x+1)x}{2\sqrt{x^2+x-2}}}{(x^2+x-2)} = \\ &= \frac{2x^2 + 2x - 4 - 2x^2 - x}{2(x^2+x-2)\sqrt{x^2+x-2}} \\ &= \frac{x-4}{2(x^2+x-2)\sqrt{x^2+x-2}}.\textbf{(0.5 point)} \\ & \quad -\infty \quad - \quad -2 \text{———} 1 \quad - \quad 4 \quad + \quad +\infty \textbf{ (0.5 point)} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-2	******	1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		******		$-$		$+$	
	-1			******	$+\infty$				1
$f(x)$				******					
			$-\infty$	******			$\frac{4}{3\sqrt{2}}$		

(1.5 point)

(2) f est-elle injective? surjective ? Justifier.

a) Pour l'injectivité :

f est injective si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).\textbf{(0.25 point)}$$

Il existent deux éléments différents :

$$x_1 \in]1,4[\text{ et } x_2 \in]4,+\infty[\text{ avec } x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2).\textbf{(0.5 point)}$$

Donc f n'est pas injective.

b) Pour la surjectivité :

f est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[\text{ tel que : } f(x) = y.\textbf{(0.25 point)}$$

Alors d'après le tableau des variations :

$$\begin{aligned} f(]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[) &= f(]-\infty,-2[) \cup f(]1,+\infty[) \\ &=]-\infty,-1[\cup \left]\frac{4}{3\sqrt{2}}, +\infty\right[, \end{aligned}$$

donc elle n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$ car :

$$\exists y = 0, \forall x \in]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[\text{ tel que : } f(x) \neq 0.\textbf{(0.5 point)}$$

(3) (0.5+0.5 point) Trouver un cas (les plus grands intervalles) d'après le tableau des variations où elle est injective et surjective.

$$\begin{aligned} g \quad &: \quad]-\infty,-2[\to]-\infty,-1[\\ x \quad &\mapsto \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+x-2}}. \end{aligned}$$

car la fonction est continue et strictement décroissante donc elle est injective et surjective car $g(]-\infty,-2[) =]-\infty,-1[$, donc bijective.

(4) (1point) Trouver g^{-1} dans l'un des deux cas.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{\sqrt{x^2+x-2}} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2+x-2} \\ &\Rightarrow \left(x^2+x-2\right) y^2 = x^2 \Rightarrow \left(y^2-1\right) x^2 + y^2 x - 2y^2 = 0 \\ &\Rightarrow \triangle = y^4 - 4\left(y^2-1\right)\left(-2y^2\right) = 9y^4 - 8y^2 > 0 \text{ si } y \in]-\infty,-1[\\ &\Rightarrow x_1 = \frac{-y^2 - \sqrt{\triangle}}{2(y^2-1)} < -2 \text{ ou } x_2 = \frac{-y^2+\sqrt{\triangle}}{2(y^2-1)} \text{ ne convient pas.} \end{aligned}$$

Alors dans ce cas :

$$\begin{array}{rcl} g^{-1} & : &]-\infty,-1[\rightarrow]-\infty,-2[\\ y & \mapsto & g^{-1}(y) = \dfrac{-y^2 + y\sqrt{9y^2-8}}{2(y^2-1)}. \end{array}$$