

# UFHB/ UFR-MI /2026/ L1 Maths-Info

## Fiche de TD - Éléments de Logique mathématique

### Exercice 0.1 \*

En notant  $P$  et  $Q$  les affirmations suivantes :

$P$  : Jean est fort en Maths.

$Q$  : Jean est fort en Chimie.

Représenter les affirmations suivantes sous forme symbolique, à l'aide des lettres  $P$  et  $Q$  et des **connecteurs** usuels.

- 1) Jean est fort en Maths mais faible en Chimie.
- 2) Jean est fort en Math ou il est à la fois fort en chimie et faible en Maths.
- 3) Jean n'est fort ni en Math ni en Chimie.
- 4) Jean est fort en Maths s'il est fort en Chimie.

### Exercice 0.2 \*

1)  $P$ ,  $Q$  et  $R$  étant des propositions données, construire les tables de vérité des formes propositionnelles suivantes (où  $\bar{P}$  est la négation de  $P$ ) :

(i)  $\bar{P} \Rightarrow (P \vee Q)$

(ii)  $P \Rightarrow (Q \vee R)$

(iii)  $\overline{\bar{P} \vee \bar{Q}}$

(iv)  $(P \wedge Q) \Rightarrow \bar{Q}$

(v)  $P \vee \overline{Q \wedge R}$ .

2) Une *tautologie* est une proposition intrinsèquement vraie. Par exemple, soit  $P$  est une proposition. La connection  $P \vee \bar{P}$  est une tautologie. Soient  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  des propositions. On

considère les deux propositions suivantes

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R) \quad (1)$$

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow [(P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R)] \quad (2)$$

- (a) Sans utiliser de table de vérité, montrer que la proposition (1) est une tautologie.  
 (b) Vérifier si la proposition (2) est une tautologie.

**Exercice 0.3 \***

En notant  $P$ ,  $Q$  et  $R$  les 3 affirmations suivantes :

$P$  : *Pierre fait des Maths*

$Q$  : *Pierre fait de la chimie*

$R$  : *Pierre fait de l'Anglais*

représenter les affirmations qui suivent sous forme symbolique, à l'aide des lettres  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  et des connecteurs usuels.

- 1) Pierre fait des Maths et de l'Anglais mais pas de Chimie.
- 2) Pierre fait des Maths et de la Chimie mais pas à la fois de la chimie et de l'Anglais.
- 3) Il est faux que Pierre fasse de l'Anglais sans faire de Maths.
- 4) Il est faux que Pierre ne fasse pas des Maths et fasse quand même de la Chimie.
- 5) Il est faux que Pierre fasse de l'Anglais sans faire de Maths.
- 6) Pierre ne fait ni Anglais ni Chimie mais il fait des Maths.

**Exercice 0.4 \***

Soient  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  des propositions.

- (a) Montrer par tables de vérité les équivalences suivantes :

$$1) (P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$$

$$2) (P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$

- (b) Sans utiliser de tables de vérités, montrer que les propositions suivantes sont des tautologies.

- 
- 1)  $(P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
  - 2)  $(P \Leftrightarrow Q \text{ et } Q \Leftrightarrow R) \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$
  - 3)  $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
  - 4)  $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$
  - 5)  $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R))$
  - 6)  $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$ .

**Exercice 1**

1) étant donnés deux entiers  $a$  et  $b$ , on considère les deux propositions :

$Q$  :  $a$  et  $b$  sont tous les deux pairs

$\bar{Q}$  :  $a$  et  $b$  sont de parités différentes. Que signifient les implications suivantes et lesquelles sont vraies pour les valeurs de  $a$  et  $b$ ?

$$P \Rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow P, \quad \bar{P} \Rightarrow \bar{Q}, \quad \bar{Q} \Rightarrow \bar{P}, \quad P \Rightarrow \bar{Q}, \quad \bar{Q} \Rightarrow P, \quad \bar{P} \Rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow \bar{P}$$

**Exercice 2**

Ecrire les implications ou équivalences correctes :

- a)  $[\forall x \in E, p(x) \text{ et } q(x)] \dots \dots \dots [\forall x \in E, p(x)] \text{ et } [\forall x \in E, q(x)]$   
 b)  $[\exists x \in E, p(x) \text{ et } q(x)] \dots \dots \dots [\exists x \in E, p(x)] \text{ et } [\exists x \in E, q(x)]$   
 c)  $[\forall x \in E, p(x) \text{ ou } q(x)] \dots \dots \dots [\forall x \in E, p(x)] \text{ ou } [\forall x \in E, q(x)]$   
 d)  $[\exists x \in E, p(x) \text{ ou } q(x)] \dots \dots \dots [\exists x \in E, p(x)] \text{ ou } [\exists x \in E, q(x)]$ .

**Exercice 3 \***

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Ecrire les négations des propositions suivantes :

- 1)  $1 \leq x < y$   
 2)  $xy = 0$   
 3)  $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$   
 4)  $\forall x \in E, \forall x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$   
 5)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in ]a, b[, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$   
 6)  $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{N}^*, \exists q \in \mathbb{Z}, a = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b$ .

**Exercice 4 \***

**VRAI** ou **FAUX** ?

- 1)  $P, Q$  étant des propositions, La négation de  $(P \Rightarrow Q)$  est  $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$   
 2) soit  $f : E \longrightarrow F$  une application.

$$(\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y) \Leftrightarrow (\forall x, y \in E, x = y \text{ ou } f(x) = f(y))$$

- 3) Si  $f : E \longrightarrow F$  et  $g : F \longrightarrow E$  sont des applications bijectives, on a

$$(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

- 4) Soient  $f : E \longrightarrow F$  une application et  $A \subseteq E$ .

$$\forall x \in E, f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A$$

**Exercice 5 \***

$P, Q, R, S$  étant 4 propositions, on désigne par  $A$  la proposition :  $(P \vee Q) \wedge (R \vee S)$  et par  $B$  la proposition :  $(P \wedge Q) \vee (R \wedge S)$

1) Déterminer une autre proposition équivalente à  $A$  et une autre proposition équivalente à  $B$ .

2)  $x$  et  $y$  étant des nombres réels, en utilisant les résultats de la question précédente, résoudre le système  $(S)$  suivant :

$$\begin{cases} (x - 1)(y - 2) = 0 \\ (x - 2)(y - 3) = 0 \end{cases}$$

3)  $x$  et  $y$  étant des nombres réels, en utilisant les résultats de la question précédente, résoudre l'équation  $(E)$  suivante :

$$|(x - 3)(y - 2)| + |(x - 1)(y - 4)| = 0$$

**Exercice 6 \***

Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions. On note  $P \uparrow Q$  la proposition  $\neg(P \wedge Q)$ .

$\uparrow$  s'appelle la barre de Sheffer.

1) Exprimer  $\neg P$ ,  $P \wedge Q$ ,  $P \vee Q$  à l'aide de  $P, Q$  et du seul connecteur  $\uparrow$ .

2) Exprimer de même  $P \Rightarrow Q$  et  $P \Leftrightarrow Q$ .

**Exercice 7**

Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes et donner les valeurs de vérité.

1) Le carré de tout réel est positif.

2) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

3) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

4) Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.

5) Il existe un entier multiple de tous les autres.

6) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

7) Etant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.

**Exercice 8 \***

1) Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

a)  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$

b)  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}, \quad n^2 \leq 2^n$$

**Exercice 9**

Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

1)  $n^3 - n$  est divisible par 6,

2)  $n^5 - n$  est divisible par 30,

3) Soit 4 divise  $n^2$ , soit 4 divise  $n^2 - 1$ .

**Ensembles, Applications****Exercice 10 \***

Soient  $A, B$  et  $C$  des parties quelconques d'un ensemble  $E$ . On note  $\bar{A}$  le complémentaire de  $A$  dans  $E$ . Simplifier les ensembles suivants :

1)  $X = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ ,

2)  $Y = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B)$ ,

3)  $Z = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} \cap (\bar{A} \cap \bar{B})$ ,

4)  $U = [A \cap (B \cup C)] \cap [(B \cap C) \cup \bar{C}]$ ,

5)  $V = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap C) \cup \overline{[(\bar{A} \cup B) \cap (A \cup C)]}$ .

**Exercice 11**

Soient  $A, B, C$  des ensembles; Montrer que :

$$1) A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C,$$

$$2) A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C \Rightarrow B \subset C.$$

**Exercice 12 \***

Soient  $A, B, C$  des parties d'un ensemble  $E$ .

I) Ecrire en utilisant  $\forall, \exists$  les assertions suivantes.

$$(a) A = \emptyset$$

$$(b) A \cap B \neq \emptyset$$

$$(c) A \cup B = \emptyset$$

II) Dire si les propositions suivantes sont vraies. (Justifier vos réponses!)

$$1) A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B;$$

$$2) A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{A} \cup B = E;$$

$$3) A \subseteq B \cap A \Rightarrow B \subseteq A$$

$$4) A \cup B \subseteq A \Rightarrow A \subseteq B.$$

$$5) A \subseteq B \cap C \Rightarrow A \subseteq B \text{ et } A \subseteq C$$

$$6) A \subseteq B \cup C \Rightarrow A \subseteq B \text{ ou } A \subseteq C.$$

$$7) A \subseteq B \cap C \Rightarrow A \subseteq B \text{ ou } A \subseteq C.$$

$$8) A \subseteq B \cup C \Rightarrow A \subseteq B \text{ et } A \subseteq C.$$

$$9) B \cap C \subseteq A \Rightarrow B \subseteq A \text{ et } C \subseteq A.$$

**Exercice 13 \***

On appelle *différence symétrique* de deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  de  $E$  le sous ensemble noté  $A\Delta B$  suivant :

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- 1) Montrer que  $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- 2) Déterminer  $A\Delta\emptyset$ ,  $A\Delta E$ ,  $A\Delta A$ ,  $A\Delta\bar{A}$  où  $A$  est une partie de  $E$  et  $\bar{A}$  sont complémentaires dans  $E$ .
- 3) Montrer que  $A\Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$ .
- 4) Soient  $A, B, C$  des parties de  $E$ . Montrer que

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

**Exercice 14**

a) Indiquer si la famille d'ensemble  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  partitionne  $E$  dans chaque cas suivant :

- 1)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = \{n, n+2\}$  et  $E = \mathbb{N}$ ,
- 2)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = \{2n, 2n+1\}$  et  $E = \mathbb{N}$ ,
- 3)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = [2n, 2n+1[$  et  $E = \mathbb{R}_+^*$ ,
- 4)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$  et  $E = ]0, 1[$ .

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $B_n = ]\frac{1}{n}, n+1]$ . Caractériser de manière explicite les ensembles suivants :

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n, \quad D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$$

**Exercice 15 \***

Soit  $P$  l'ensemble de tous les pays du monde et  $V$  l'ensemble de toutes les villes du monde. On note  $G$  l'ensemble de tous les gens qui ont vécu jusqu'à aujourd'hui. Soit  $I$  l'ensemble de tous les Ivoiriens.

Soit  $c : P \longrightarrow V$  l'application qui associe à  $p \in P$  la ville capitale de  $p$ .

Soit  $m : G \longrightarrow G$  l'application qui associe à  $g \in G$  la mère de  $g$ .

Soit  $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par  $h(x, y) = 2x + 5y + 1$ .

- 1) Déterminer si ces applications sont injectives, surjectives, bijectives.
- 2) Quelle est l'image directe  $c(P)$  de  $P$  par  $c$ ?

- 3) Quelle est l'image directe de  $G$  par  $m$  ?
- 4) Quelle est l'image directe de  $I$  par  $m$  ?
- 5) Quelle est l'image directe de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par  $h$  ?

### Exercice 16

1) On considère l'application  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = (x, xy - y^3)$ . L'application  $f$  est-elle injective ? Est-elle surjective ?

2) Soit  $h$  l'application de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  définie par

$$h(x, y) = (2x + y - 1, -3x + 2y + 2)$$

démontrer que  $h$  est une bijection et déterminer sa bijection réciproque  $h^{-1}$ .

### Exercice 17 \*

soit  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ .

Déterminer les ensembles suivants :

$$f([-2, 1]), f([0, 3]), f^{-1}([-1, 1]), f^{-1}\left(\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]\right).$$

### Exercice 18 \*

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $A_n = \left[\frac{-1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$ .

On considère l'application  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ .

- a) Vérifier si la famille de parties  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  partitionne l'ensemble  $E = ]0, 1[$ .
- b) L'application  $f$  est-elle injective ? Est-elle surjective ? Justifier les réponses !
- c) Déterminer  $f(A_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- d) On pose  $I = \left[\frac{1}{4}, 1\right]$ . Déterminer  $f^{-1}(I)$ .
- e) Montrer que  $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ . La famille  $(f(A_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est-elle une partition de  $[-1, 1]$  ?

**Exercice 19**

Soient  $E$  un ensemble et  $A, B$  deux parties de  $E$ . Soit  $f$  l'application de  $\mathcal{P}(E)$  vers  $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$  définie par  $f(X) = (X \cup A, X \cup B)$ ,  $\forall X \in \mathcal{P}(E)$ .

Montrer que

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

**Exercice 20**

1) Déterminer toutes les applications  $f$  de  $\mathbb{N}$  vers  $\mathbb{N}$  telles que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad f(m+n) = f(m) + f(n)$$

2) Déterminer toutes les applications  $g$  de  $\mathbb{N}$  vers  $\mathbb{N}$  telles que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad g(m+n) = g(m)g(n)$$

3) Déterminer toutes les applications injectives  $h$  de  $\mathbb{N}$  vers  $\mathbb{N}$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad h(n) \leq n$$

4) Soit  $E$  un ensemble **fini**.

a) Montrer que toute application injective de  $E$  dans  $E$  est une bijection.

b) Montrer que toute application surjective de  $E$  sur  $E$  est une bijection.

**Exercices 22**

Soit  $f : E \rightarrow E$  une application

Montrer que

$$\text{a) } f \text{ injective} \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A)).$$

$$\text{b) } f \text{ surjective} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B.$$

$$\text{c) } f \text{ injective} \Leftrightarrow \forall A, A' \in \mathcal{P}(E), f(A \cap A') = f(A) \cap f(A').$$

**Relations d'équivalence - Relations d'ordre****Exercice 23**

On considère l'ensemble  $E = \{*, \circ, \triangle, \diamond\}$  et les relations binaires suivantes :

$$\mathcal{R} = \{(*, *), (\triangle, \triangle), (\circ, \circ)\}, \quad \mathcal{S} = \{(*, *), (\triangle, \triangle), (\diamond, \diamond), (\diamond, \circ), (\triangle, \diamond), (*, \diamond)\}$$

Etudier les relations binaires  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  (réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité).

**Exercice 24 \***

On considère les deux relations  $\mathcal{R}$ ,  $\Delta$  suivantes :

a)  $E = \mathbb{R}$ ,  
 $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1.$

b)  $E = \mathbb{N}$ ,  
 $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x \Delta y \Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}^*, \quad y = px^q.$

1) Pour chacune de ces relations, étudier la réflexivité, la symétrie, l'antisymétrie et la transitivité.

2) La relation  $\Delta$  est-elle une relation d'ordre totale ? Justifier la réponse.

**Exercice 25 : \* Relation de congruence modulo  $n$  sur  $\mathbb{Z}$ .**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Sur  $\mathbb{Z}$ , on considère la relation  $\mathcal{R}$  définie comme suit : pour tous  $a$  et  $b$  éléments de  $\mathbb{Z}$ , on a

$$a \mathcal{R} b \quad \text{si} \quad b - a \in n\mathbb{Z}$$

(i)- Montrer que la relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

(ii)- Montrer que la relation  $\mathcal{R}$  a exactement  $n$  classes d'équivalences si  $n \neq 0$ .

(iii)- Montrer que la relation  $\mathcal{R}$  est compatible à la fois avec  $+$  et  $\times$ .

(iv)- Décrire les classes d'équivalence dans les cas suivants :  $n = 0$ ,  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$ ,  $n = 4$ ,  $n = 7$ .

**Exercice 26 \***

Sur  $\mathbb{Z}$  on considère la relation  $\mathcal{R}$  définie comme suit : Pour tous  $a$  et  $b$  éléments de  $\mathbb{Z}$ , on a

$$a \mathcal{R} b \quad \text{si} \quad b^2 - a^2 \in 6\mathbb{Z}$$

(i)- Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

(ii)- Déterminer les classes d'équivalence.

**Exercice 27 \***

On munit l'ensemble  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  de la relation binaire notée  $\Delta$ , définie par : pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  et  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,

$$(x, y) \Delta (a, b) \Leftrightarrow x < a \quad \text{ou} \quad (x = a \quad \text{et} \quad y \leq b).$$

Démontrer que la relation  $\Delta$  est une relation d'ordre total sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

