

Université Abderrahmane Mira de Béjaia.

Janvier 2023.

Faculté des sciences exactes.

Département d'informatique (2 ème année RN).

Examen d'algèbre 03

Exercice 1 (09 pts)

Soit le système linéaire (S) à quatre équations et quatre inconnues réelles x, y, z et t :

$$(S) : \begin{cases} x + y - z + 2t = 8 \\ x + z - t = 0 \\ 2x + y + t = 8 \\ x - y - 2z + 3t = 5 \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice augmentée associée à (S).
2. Résoudre le système (S) avec la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 2 (11 pts)

On considère la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 7 & -2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1/ Calculer le polynôme caractéristique P_A de la matrice A .
- 2/ Ecrire le spectre de A .
- 3/ Déterminer les vecteurs propres de A .
- 4/ A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.
- 5/ Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 6/ Soit (S_n) le système de suites suivant :

$$(S_n) : \begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 4v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 7v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = -4u_n + 4v_n + w_n \end{cases}$$

avec $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \\ w_0 = 1 \end{pmatrix}$.

Résoudre le système de suites (S_n) .

Solution abrégée de l'examen d'algèbre III

Exercice n° 01 :

1°/ (S) \Leftrightarrow
$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & -1 & 2 & | & 8 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & | & 8 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & | & 5 \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}$$

2°/ Résoudre (S) par la méthode de P.G

1^{ère} étape: $a_{11} = 1 \neq 0$.

$L_2 \leftarrow L_2 + (-1)L_1$; $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$; $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

On obtient:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & | & 8 \\ 0 & \textcircled{-1} & 2 & -3 & | & -8 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & | & -8 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & | & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \textcircled{0,5 \times 3} \\ \textcircled{0,5} \end{matrix}$$

2^{ème} étape: $a'_{22} = -1 \neq 0$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$; $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$ $\textcircled{0,5 \times 2}$

(S) \Leftrightarrow
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & | & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & | & -8 \\ 0 & 0 & \textcircled{0} & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & | & 13 \end{bmatrix} \quad \textcircled{0,5}$$

(S) admet une infinité de sol ou pas de sol.

$-5z + 7t = 13 \Rightarrow z = 7/5t - 13/5$ $\textcircled{1,5 \times 3}$

$-y + 2z - 3t = -8 \Rightarrow y = -1/5t + 14/5$

$x + y - z + 2t = 8 \Rightarrow x = -2/5t + 13/5$

(S) admet une infinité de sol.

Exercice n° 02

1°/ $P_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-3)^2$ $\textcircled{1}$

$\lambda_1 = 1$, vp simple ie $\alpha_1 = 1$

$\lambda_2 = 3$, vp double ie $\alpha_2 = 2$

2°/ $\text{sp}(A) = \{1, 3\}$

3°/ $E_{\lambda_1} = \text{vect}\{(1, 1, 1)\}$, $\dim E_{\lambda_1} = 1 = \alpha_1$ $\textcircled{1}$

$E_{\lambda_2} = \text{vect}\{(1, 0, -2), (0, 1, 2)\}$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $v_1 \quad v_2 \quad v_3$ $\textcircled{1}$ $\textcircled{1}$

$\dim E_{\lambda_2} = 2 = \alpha_2$

4°/ A est diagonalisable puisque $\dim E_{\lambda_1} = \alpha_1 = 1$ et $\dim E_{\lambda_2} = \alpha_2 = 2$. $\textcircled{1}$

5°/ A diag $\Rightarrow \exists$ une matrice P inversible et une matrice diagonale

D tq $A = PDP^{-1}$ $\textcircled{1}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\textcircled{0,5}$

$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^2 = P \underbrace{D^2}_{I_3} P^{-1} = PD^2P^{-1}$

par récurrence, $A^n = P D^n P^{-1} \forall n \geq 1$ $\textcircled{0,5}$

on trouve $\det P = 1 \neq 0$

$\text{com } P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \frac{\text{com } P}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\textcircled{0,5}$

D'où $A^n = \begin{pmatrix} 2-3^n & -2+2 \cdot 3^n & 1-3^n \\ 2-2 \cdot 3^n & -2+3 \cdot 3^n & 1-3^n \\ 2-2 \cdot 3^n & -2+2 \cdot 3^n & 1 \end{pmatrix} \forall n \geq 1$ $\textcircled{1}$

6°/ $X_{n+1} = AX_n \Leftrightarrow X_n = AX_{n-1}$

$\Rightarrow X_n = A^n X_0$ $\textcircled{0,5}$

On trouve: $u_n = 3 \cdot 3^n$ $\textcircled{0,5}$

$v_n = 3 - 2 \cdot 3^n$ $\textcircled{0,5}$

$w_n = 3 - 2 \cdot 3^n$ $\textcircled{0,5}$