Université A/Mira de Béjaia.
FSE, Dpt d'Informatique
2ème année RN.

Janvier 2023
1h:30min

Examen de remplacement d'Algèbre 03

Exercice 01: 07pts

Résoudre avec la méthode de Cramer, ensuite avec la méthode du pivot de Gauss, le système suivant :

$$(S): \begin{cases} x+y-z=1 \\ x+z=-2 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$$

Exercice 02: 07pts

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = x+y \\ y' = -x+2y+z \\ z' = x+z \end{cases}$$

Exercice 03: 06pts

Résoudre le système de suites suivant :

$$\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n + V_n + 1 \\ V_{n+1} = U_n + 2V_n + 2 \end{cases} \quad \text{tq } U_0 = 1, \ V_0 = 0.$$

Bon Courage

Janv 2023

Solution de l'examen de remplacement

Exercice 1 :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

* Méthode de Cramer :

$(S) \Leftrightarrow AX = b$

$\det A = -1-(-1)-1 = -1 \neq 0$ 0,5

$\Rightarrow$ la sol existe et unique.

$$x = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$x = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad \boxed{x=-6}$$ 1

$$y = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-5+1-7) = 11$$

$\boxed{y=11}$ 1

$$z = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -(2-7+1)$$

$\boxed{z=4}$ 1

$(x,y,z) = (-6, 11, 4)$ est sol de (S)

* Méthode du Pivot de Gauss.

$$(S) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$ matrice augmentée 0,5

1ère étape : $a_{11} = 1 \neq 0$

$l_2 \leftarrow l_2 - l_1$, $l_3 \leftarrow l_3 - 2l_1$

$$(S) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

2ème étape : $a'_{22} = -1 \neq 0$

$l'_3 \leftarrow l'_3 - l'_2$

$$(S) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$\boxed{z=4}$ 1

$-y+2z = -3 \Rightarrow \boxed{y=11}$ 1

$x+y-z = 1 \Rightarrow \boxed{x=-6}$ 1

Exercice 2 :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow X' = AX$$

$$\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) - (-(1-\lambda)-1)$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 2-\lambda$$

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)((1-\lambda)^2+1)$$ 1

$P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ ou $(1-\lambda)^2+1 = 0$

d'où $\lambda = 2 \vee \lambda = 1+i \vee \lambda = 1-i$

$\lambda_1 = 2$ v.p simple, $\alpha_1 = 1$ 0,5

$\lambda_2 = 1+i$ vp " , $\alpha_2 = 1$ 0,5

$\lambda_3 = 1-i$ vp " , $\alpha_3 = 1$ 0,5

$* E_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \Rightarrow y = x \\ -x + z = 0 \Rightarrow z = x \\ x - z = 0 \end{cases}$

$E_{\lambda_1} = \mathrm{vect}\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ 0,5 , $\dim E_{\lambda_1} = 1 = \alpha_1$

$* E_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -ix + y = 0 \\ -x + (1-i)y + z = 0 \\ x - iz = 0 \end{cases}$

$y = ix \;,\; z = -ix$ 0,5

$E_{\lambda_2} = \mathrm{vect}\left\{ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix} \right\}$, $\dim E_{\lambda_2} = 1 = \alpha_2$

$* E_{\lambda_3} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_3 I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} ix + y = 0 \\ -x + (1+i)y + z = 0 \\ x + iz = 0 \end{cases}$

$y = -ix \;,\; z = ix$ 0,5

$E_{\lambda_3} = \mathrm{vect}\left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix} \right\}$, $\dim E_{\lambda_3} = 1 = \alpha_3$

A est diagonalisable $\Rightarrow \exists$ P inversible et D diagonale tq $A = PDP^{-1}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ 1 & -i & i \end{pmatrix}$ 0,25 , $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$ 0,25

$X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X$

On pose $Y = P^{-1}X$ 0,25 $\Rightarrow X' = PDY$

$\Rightarrow Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}PDP^{-1}X$

d'où $Y' = DY$ 0,25

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2y_1 \\ (1+i)y_2 \\ (1-i)y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \alpha e^{2x} \\ y_2 = \beta e^{(1+i)x} \\ y_3 = \gamma e^{(1-i)x} \end{cases}$$ 0,75

où α, β, γ trois cstes réelles.

On a posé $Y = P^{-1}X \Rightarrow X = PY$ 0,5

D'où $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ 1 & -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{2x} \\ \beta e^{(1+i)x} \\ \gamma e^{(1-i)x} \end{pmatrix}$

$x = \alpha e^{2x} + \beta e^{(1+i)x} + \gamma e^{(1-i)x}$

$y = \alpha e^{2x} + \beta i e^{(1+i)x} - \gamma i e^{(1-i)x}$

$z = \alpha e^{2x} - \beta i e^{(1+i)x} + \gamma i e^{(1-i)x}$

Exercice n° 03 :

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$X_{n+1} = AX_n + b \Rightarrow X_n = AX_{n-1} + b$

On trouve $X_n = A^n X_0 + (A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + I)b$

On remarque que :

$A = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$ 1

$= 3/2\, U + 1/2\, V$

$UV = VU = 0$.

On peut donc utiliser la formule de Binôme matricielle.

On trouve $A^n = \frac{3^n}{2} U + \frac{1^n}{2} V$

$A^n = \frac{3^n}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}$ 1 $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I = H$

$$H = \begin{pmatrix} \underbrace{\frac{3^{n-1}+1}{2} + \frac{3^{n-2}+1}{2} + \dots + 2 + 1} & \frac{3^{n-1}-1}{2} + \frac{3^{n-2}-1}{2} + \dots + 1 + 0 \\ \frac{3^{n-1}-1}{2} + \frac{3^{n-2}-1}{2} + \dots + 1 + 0 & \frac{3^{n-1}+1}{2} + \frac{3^{n-2}+1}{2} + \dots + 2 + 1 \end{pmatrix}$$

$= \frac{1}{2}\left[(3^{n-1}+1) + (3^{n-2}+1) + \dots + (3^{n-(n-1)}+1) + (3^{n-n}+ \dots\right.$

$= \frac{1}{2}\left(3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 3^{n-n} + n\right) = \frac{1}{2}\left[3\left(1 - \frac{1}{\dots}\right) + \dots\right.$

$$H=\begin{pmatrix} \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{n}{2} & \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{2} \\ \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{2} & \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{n}{2} \end{pmatrix}$$ 0,5

$$H\times b=\begin{pmatrix} \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-n \\ \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 9/4\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{2} \\ 9/4\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+n/2 \end{pmatrix}$$ 0,5

$$A^nX_0=A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3^n+1}{2}\\ \frac{3^n-1}{2}\end{pmatrix}$$ 0,5

$$X_n=\begin{pmatrix}U_n\\ v_n\end{pmatrix}=A^nX_0+Hb$$

D'où $U_n=\frac{3^n+1}{2}+9/4\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-n/2$ 0,25

et $v_n=\frac{3^n-1}{2}+9/4\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+n/2$ 0,25