

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Abou Bekr-Belkaid Tlemcen

Tlemcen 18 Janvier 2023

Examen Final Algèbre 3

Durée : 1 heure 30 minutes

Exercice 1 :

Soit E un \mathbb{R} espace vectoriel de dimension finie n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 + f = 0$.

- 1- Montrer que l'espace image $Im(f)$ est stable par f .
- 2- Soit $x \in Im(f)$. Calculer $f^2(x)$.
- 3- En supposant que f est inversible, déduire que $f^{-1}(x) = -f(x)$.
- 4- Montrer que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires.
- 5- Soit $n \geq 2$ et soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Supposant que $g^n = 0$ et que $g^{n-1} \neq 0$. Montrer que $\{x, g(x), g^2(x), \dots, g^{n-1}(x)\}$ est une base de E et écrire la matrice de g dans cette base.

Exercice 2 :

Soit la matrice d'ordre 3 à coefficients réels,

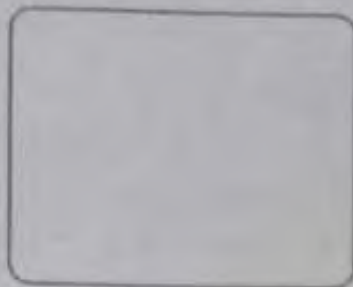
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -7 & -9 & 6 \\ -10 & -10 & 8 \end{pmatrix}$$

- 1- Calculer le polynôme caractéristique de A .
- 2- Montrer que $\mathbb{R}^3 = Ker(A - 3I_3) \oplus Ker(A + 2I_3)^2$.
- 3- Montrer que A est trigonalisable mais pas diagonalisable.
- 4- Montrer que A est semblable à une matrice B de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & s & h \\ 0 & t & k \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- 5- Calculer A^n pour tous $n \in \mathbb{N}$.

Année Universitaire _____ السنة الدراسية _____ Nom _____ اللقب _____
 Examen _____ الإختبار _____ Prénom _____ الاسم _____
 Date _____ التاريخ _____ Né (e) le _____ تاريخ الأزدية _____
 Signature de l'Étudiant _____ إسماء الطالب _____ N° Carte d'Étudiant _____ رقم بطاقة الطالب _____



Observations
 ملاحظات

Note
 النقطه
 /20

Corrigé : E. F Algebra 3 2022-2023

Exo 1 : E un \mathbb{R} -E.V. ; $\dim E = n < +\infty$.

(10 pt) $f \in \mathcal{L}(E)$ (endomorphisme de E) / $f^2 + f = 0$.

1pt a) $\text{Im}(f)$ est stable par f

Soit $x \in \text{Im}(f)$. $\exists y \in E$ / $x = f(y)$.

$x \in \text{Im}(f) \subseteq E \Rightarrow x \in E \Rightarrow f(x) \in \text{Im}(f)$.

1pt b) $x \in \text{Im}(f)$. Calculer $f^2(x)$

Soit $x \in \text{Im}(f) \Rightarrow \exists a \in E$ / $x = f(a)$

or $f^2 + f = 0 \Rightarrow f^2(a) + f(a) = 0$ $a \in E$.

$\Rightarrow f^2(f(a)) = -f(a)$

$\Rightarrow f^2(x) = -x$

3) Mg $f^{-1}(x) = -f(x)$

1 pr

On suppose f inversible (c.à.d. f^{-1} existe)

On a $f^2(x) = -x \Leftrightarrow (f \circ f)(x) = -x = -\text{id}(x)$

$$\Leftrightarrow f \circ f = -\text{id}$$

$$\Leftrightarrow (-f) \circ f = \text{id} \quad \text{et} \quad f \circ (-f) = \text{id}$$

D'où $f^{-1}(x) = -f(x), x \in E$

4) Mg $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$

On a $f^3 + f = 0 \Leftrightarrow f \circ (f^2 + \text{id}) = 0$

Soit $P(x) = x(x^2 + 1) = P_1(x) \cdot P_2(x)$ où

$P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2 + 1$

$P(x)$ est annulateur de f ($P(f) = 0$)

$P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont premiers entre eux (aucun racine commune). Selon le lemme des noyaux;

on a $E = \text{Ker } L_1(f) \oplus \text{Ker } L_2(f)$

sait $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{id})$

Montrons alors que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f^2 + \text{id})$.

Montrons la double inclusion:

1^{pr} • Mg $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f^2 + \text{id})$

Soit $x \in \text{Im}(f) \Rightarrow \exists a \in E \mid x = f(a)$

$$\text{or } f^3 + f = 0 \Rightarrow f^3(a) + f(a) = 0$$

$$\Rightarrow (f^2 + \text{id})(f(a)) = 0$$

$$\Rightarrow (f^2 + \text{id})(x) = 0$$

$$\Rightarrow x \in \text{Ker}(f^2 + \text{id}).$$

1^{pr} • Mg $\text{Ker}(f^2 + \text{id}) \subset \text{Im}(f)$

sait $x \in \text{Ker}(f^2 + \text{id}) \Rightarrow (f^2 + \text{id})(x) = 0$

$$\Rightarrow f^2(x) + x = 0$$

$$\Rightarrow x = -f^2(x)$$

$$\Rightarrow x = -f \circ f(x) \Rightarrow \dots \Rightarrow x = f(-f(x))$$

car f lin $\Rightarrow x \in \text{Im}(f)$.

5) $g \in \mathcal{L}(E)$; $g^n = 0$ et $g^{n-1} \neq 0$, $n = \dim E$
Mg $\{x, g(x), g^2(x), \dots, g^{n-1}(x)\}$ est une base de E .

$x \in E^*$, on note $u(x) = x = g^0(x) \neq 0$

2 pts Mg $\{x, g(x), g^2(x), \dots, g^{n-1}(x)\}$ est libre.

Soit $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n-1$

$$\sum_0^{n-1} \alpha_i g^i(x) = 0$$

• On compose par $g^{n-1} =$

$$g^{n-1} \left(\sum_0^{n-1} \alpha_i g^i(x) \right) = g^{n-1}(0) = 0 \quad (\text{car } g^{n-1} \in \mathcal{L}(E))$$

$$\Rightarrow \sum_0^{n-1} \alpha_i g^{i+n-1}(x) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_0 g^n(x) = 0 \quad (g^n, g^{n+1}, \dots, g^{2(n-1)} \text{ sont nuls})$$

Or $g^n \neq 0$ donc $\alpha_0 = 0$.

• On compose par $g^{n-2} =$

$$g^{n-2} \left(\sum_0^{n-1} \alpha_i g^i(x) \right) = g^{n-2}(0) = 0 \quad (g^{n-2} \in \mathcal{L}(E))$$

$$\Rightarrow \sum_0^{n-1} \alpha_i g^{i+n-2}(x) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_0 g^{n-2}(x) + \alpha_1 g^{n-1}(x) = 0$$

Or $\alpha_0 = 0$ et $g^{n-1}(x) \neq 0$ donc $\alpha_1 = 0$

• On fait la même chose en composant par

g^{n-3}, g^{n-4}, \dots etc et on trouve $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$

Donc la famille $\{x, g(x), g^2(x), \dots, g^{n-1}(x)\}$ libre

Son cardinal $= n = \dim E$, donc c'est une base de E .

Année Universitaire _____ السنة الدراسية _____ Nom _____ لقب _____
 Examen _____ الامتحان _____ Prénom _____ الاسم _____
 Date _____ التاريخ _____ Né(e) le _____ تاريخ الميلاد _____
 Signature de l'Étudiant _____ اسماء الطالب _____ N° Carte d'Étudiant _____ رقم بطاقة الطالب _____

	Descriptions ملاحظات	Note النقطه /20
--	-------------------------	---------------------------

Apr La matrice M de f dans cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ g(x) \\ g^2(x) \\ \vdots \\ g^{n-1}(x) \end{matrix}$$

Apr M est la matrice compagnon du polynôme $P(x) = x^n$.

Rq Le poly caract. de M est $P_n(x) = (-1)^n P(x)$
 0 est la seule v.p de M . En effet $g^n = 0$ et donc g est nilpotente et sa seule v.p est $\lambda = 0$.

Exo 2
(10 pts)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -7 & -9 & 6 \\ -10 & -10 & 8 \end{pmatrix}$$

① $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$
0,5 pt $= -(\lambda - 3)(\lambda + 2)^2$

② On applique le lemme des rayons
avec $P(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 2)^2$ (poly. annulateur
de f)
les poly $(\lambda - 3)$ et $(\lambda + 2)^2$ sont premiers
entre eux (aucun racine commune)
1 pt

donc $\text{Ker } P(f) = \text{Ker}(f - 3\text{id}) \oplus \text{Ker}(f + 2\text{id})^2$

et $\text{Ker } P(f) = \mathbb{R}^3$ (puisque P est
annulateur de A selon Cayley-Hamilton)

③ $P_A(x)$ est scindé donc A est trigona-
-lisable.

A n'est pas diagonalisable. En effet

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -7 & -7 & 6 \\ -10 & -10 & 10 \end{pmatrix}$$

est de $\text{rg } 2$,

et donc d'après le Th du rang

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker}(A + 2I_3) + \text{rg}(A + 2I_3)$$

$$\Rightarrow \dim \text{Ker}(A + 2I_3) = 3 - 2 = 1$$

$$\underbrace{\text{Ker}(A + 2I_3)}_{E_{-2}(A)} \neq m(-2) = 2$$

④ A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 3 & s & h \\ 0 & t & k \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

A et B ont m^{ême} v.p. B est triangulaire

supérieure donc $t = -2$.

On a :

$$\begin{matrix} Aw_1 & Aw_2 & Aw_3 \\ \begin{pmatrix} 3 & s & h \\ 0 & -2 & k \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} w_1 & \begin{pmatrix} 3 & s & h \\ 0 & -2 & k \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} w_2 & \begin{pmatrix} 3 & s & h \\ 0 & -2 & k \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} w_3 \end{matrix} \begin{cases} Aw_1 = 3w_1 \\ Aw_2 = 5w_1 - 2w_2 \\ Aw_3 = kw_1 + kw_2 - 2w_3 \end{cases}$$

Comme $\dim E_0(A) = 1$ je peux prendre $E_{-2}(A) = \text{Vect}(w_2)$

-7- Donc $s = 0$.

On aura dans ce cas

$$\begin{cases} Aw_1 = 3w_1 & (1) \\ Aw_2 = -2w_2 & (2) \\ Aw_3 = hw_1 + kw_2 - 2w_3 & (3) \end{cases}$$

• On résout (1) $Aw_1 = 3w_1$, $w_1 = (x, y, z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z = 3x \\ -7x - 2y + 6z = 3y \\ -10x - 10y + 8z = 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y - z = 0 \\ -7x - 12y + 6z = 0 \\ -10x - 10y + 5z = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{"+"} \\ -10x - 10y + 5z = 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y - z = 0 \\ -10x - 10y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y - z = 0 \\ -2x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

"+" $-5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Donc $z = 2y$

1pt

Donc $w_1 = (0, 1, 2)$

• On résout (2) $Aw_2 = -2w_2$, $w_2 = (x, y, z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z = -2x \\ -7x - 2y + 6z = -2y \\ -10x - 10y + 8z = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ -7x - 4y + 6z = 0 \\ -10x - 10y + 10z = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow z = x + y$
 $\Leftrightarrow y = -x$

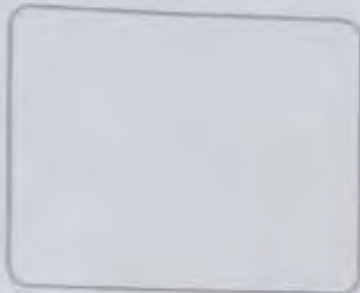
1pt

Donc $w_2 = (1, -1, 0)$

Donc $z = 0$

w_1 et w_2 sont indépendants.

Arabic University: _____ السنة الدراسية: _____ Nom: _____ لقب: _____
 Exam: _____ الإمتحان: _____ Prénom: _____ الاسم: _____
 Date: _____ التاريخ: _____ Né (e) le: _____ تاريخ الأثرية: _____
 Signature de l'Étudiant: _____ اسم الطالب: _____ N° Carte d'Étudiant: _____ رقم بطاقة الطالب: _____



Observations: _____
 ملاحظات: _____

Note: _____
 الدرجة: _____
 /20

On cherche w_3 : (w_3 n'est pas vect. propre, donc h et k ne sont pas tous les deux nuls)

On résout (3) : $Aw_3 = h w_1 + k w_2 - 2 w_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z = h - 2x \\ -7x - 9y + 6z = h - k - 2y \\ -10x - 10y + 6z = 2h - 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - z = h \\ -7x - 7y + 6z = h - k \\ -10x - 10y + 10z = 2h \end{cases} \begin{matrix} + \\ \times 2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - z = h \Leftrightarrow z = 2x + 2y - h \\ -5x - 5y + 5z = h \end{cases}$$

DC: $-5x - 5y + 10x + 10y - 5h = h$
 $\Leftrightarrow 5x + 5y = h + 5h$

Je choisis w_3 pour que (w_1, w_2, w_3) soit une base de \mathbb{R}^3 .

Donc je prends $x = 1$ et $y = 0$

$$\text{D'où } z = t + 5k$$

$$\text{et } z = 2 - t$$

Si je prend $t = 1$ et k vaut donc zéro

$$\text{Donc } z = 2 - 1 = 1$$

Après D'où $w_3 = (1, 0, 1)$

et on a bien la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det P = -1 + 2 = 1 \neq 0$$

$w_1 \quad w_2 \quad w_3$

Après D'où $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

⚠️ Précise, on peut trouver d'autres B !

5) Calcul de A^n , pour tous $n \in \mathbb{N}$.

On a $B = P^{-1} A P$

$\Leftrightarrow P B P^{-1} = A$

$\Leftrightarrow A^n = P B^n P^{-1}$

Or la décomposition de DUNFORD pour B

nous donne : $B = D + N$ avec $ND = DN$,

et avec $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ diagonale (donc diagonalisable)

et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente

car $N^2 = O_{M_3(\mathbb{R})}$

$B^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = D^n + n D^{n-1} N$

\Downarrow
 $B^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & n(-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$

$A^n = P B^n P^{-1}$

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} (n-1)(-2)^n & -n(-2)^n & -n(-2)^{n-1} \\ -3^n + (n+1)(-2)^n & -3^n + (2+n)(-2)^n & 3^n(2+n)(-2)^{n-1} \\ -2 \cdot 3^n - (-2)^{n+1} & -2 \cdot 3^n - (-2)^{n+1} & 2 \cdot 3^n - (-2)^n \end{pmatrix}$

On vérifie $A^0 = I_3$

$A^1 = A$