

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences - UABB Tlemcen

20-06-23

Examen de Rattrapage Algèbre 3

Durée : 1H30

Exercice 1 : Soit A une matrice carrée réelle d'ordre 3 associée à un endomorphisme f définie par : Pour (x, y, z) dans \mathbb{R}^3 :

$$f(x, y, z) = (x, -x + 2y + z, 2z).$$

- 1- Déterminer le polynôme minimal de f . Que déduisez-vous quant à la diagonalisation de f ?
- 2- Montrer, sans calcul, qu'il existe deux vecteurs non nuls u et v vérifiant $f(u) = 2u$ et $f(v) = u + 2v$.
- 3- Soit un vecteur w tel que $f(w) = w$. Montrer que (w, u, v) est une base de \mathbb{R}^3 puis écrire la matrice de f dans cette base qu'on notera par B .
- 4- Vérifier que A et B sont semblables puis calculer A^{2023} .

(10 points)

Exercice 2 : Soit A la matrice carrée réelle donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & x - 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ avec } x \text{ un réel.}$$

Pour quelles valeurs du réel x , A est-elle diagonalisable ? (5 points)

Exercice 3 : Soit f un endomorphisme, d'un \mathbb{R} -ev E de dimension finie, défini par $f^2 + f + id_E = 0_E$. Soit u un vecteur de E et F un sous espace vectoriel de E engendré par la famille $\{u, f(u)\}$.

- 1- Montrer que $\{u, f(u)\}$, u non nul, est une base de F .
- 2- Montrer que F est stable par f . (5 points)

Corrigé Algèbre 3

(Rattrapage)

20-6-23

Exo 1

10 pts:

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ endomorphisme

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x, -x + 2y + z, 2z)$$

1) Polynôme caractéristique:

$$P_f(\lambda) = \det(f - \lambda \text{Id})$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (\lambda - 2)^2 (1 - \lambda)$$

P_A est un polynôme annulateur de A

Calculons: $(2I - A)(I - A)$:

A matrice associée à f relativement à la base

canonique de \mathbb{R}^3

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \text{Remarque:} \\ f(e_2) = 2e_2 \\ f(e_3) = e_2 + 2e_3 \end{matrix}$$

$$(A - 2I)(A - I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_{M_3}(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow (\lambda - 2)(1 - \lambda)$ n'est pas annulateur de A

$\Rightarrow (\lambda - 2)^2 (1 - \lambda)$ est le polynôme minimal de A .

$\Rightarrow f$ n'est pas diagonalisable car les racines du polynôme minimal ne sont pas simples.

2) Comme 2 est v.p de A (ou de f) alors

$$\exists u \neq 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \mid f(u) = 2u$$

Comme A est non diagonalisable, alors $E_2(A)$,

sous-espace propre de A associé à 2 est engendré par u .

$$(\dim E_2(A) = 1) \neq (m(2) = 2) \text{ donc } \exists v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \mid f(v) = uv + 2v$$

On remarque que: (selon la matrice A)

$$f(e_2) = 2e_2, \quad e_2 = (0, 1, 0)$$

$$f(e_3) = e_2 + 2e_3, \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

0,5) Donc $\exists u = e_2 \mid f(u) = 2u$

0,5) et $\exists v = e_3 \mid f(v) = u + 2v$

3) Soit $w \in \mathbb{R}^3 \mid f(w) = w$

$$w = (x, y, z)$$

$$f(w) = w \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ -x + 2y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

0,5) Donc prenons $w = (1, 1, 0)$.

$$\begin{vmatrix} w & u & v \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Leftrightarrow (w, u, v) \text{ libre.}$$

Or $\text{card}(w, u, v) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

0,5) $\Rightarrow (w, u, v)$ base de \mathbb{R}^3 .

Soit B la matrice de f dans (w, u, v):

0,5) On a: $B = \begin{pmatrix} A_w & A_u & A_v \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} w \\ u \\ v \end{matrix}$

4) A et B semblables

Soit P matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (w, u, v)

on a: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\det P = 1 \neq 0$
 $\Rightarrow P^{-1}$ existe.

Vérfions qu'on a: $B = P^{-1} A P$ ou $P B = A P$.

$$PB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$0,5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0,5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On a bien $PB = AP$ soit $B = P^{-1}AP$.

0,5 donc A et B semblable.

Calcul de A^{2023} (on calcule A^n , $n=2023$)

$$\text{On a: } B = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PBP^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A^n = P B^n P^{-1}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Or } 0,5 B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

$$0,5 N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow N$: nilpotente.

$$DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow DN = ND$$

$$B^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k N^k D^{n-k}$$

$$\begin{aligned} &= C_n^0 I_3 D^n + C_n^1 ND^{n-1} + 0 + \dots + 0 \\ &= D^n + n ND^{n-1} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = P B^n P^{-1} \quad \text{avec} \quad P^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{0,5}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-2^n & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \quad (n=2023)$$

Exo 2 5pts

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & x-2 & 2 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R}$$

$$P_A(x) = \det(A - \lambda I_3)$$

$$0,5 = -\lambda(x-\lambda)(2-\lambda)$$

$$(0,5) Sp(A) = \{0, x, 2\}$$

• Si $x=0$ alors $P_A(\lambda) = \lambda^2(2-\lambda)$;

$\lambda=0$ est v.p double $\Rightarrow m(0)=2$

$$0,5 E_0(A) = \{u \in \mathbb{R}^3 / Au = 0\}; u = (x, y, z):$$

$$0,5 Au = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0$$

Donc $u = (x, y, z) = x(1, 0, 0)$

$$0,5 \Rightarrow E_0(A) = \text{Vect}(1, 0, 0)$$

$$\dim E_0(A) = 1 \neq m(0)$$

\Rightarrow pour $x=0$, A non diagonalisable

• Si $x=2$ alors $P_A(\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^2$

$\lambda=2$ est v.p double $\Rightarrow m(2)=2$

$$0,5 E_2(A) = \{u \in \mathbb{R}^3 / Au = 2u\}; u = (x, y, z)$$

$$0,5 Au = 2u \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2y = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x$$

$$u = (x, y, z) = (x, 2x, z)$$

$$= x(1, 2, 0) + z(0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow E_2(A) = \text{Vect}((1, 2, 0), (0, 0, 1))$$

$$\Rightarrow \dim E_2(A) = 2 = m(2)$$

$\Rightarrow A$ diagonalisable pour $x = 2$.

En conclusion:

0,5 \odot Si $x \neq 0$ et $x \neq 2$ on a 3 v.p distinctes
 $\Rightarrow A$ est diagonalisable.

0,5 \odot Si $x = 2$, $\dim E_2(A) = m(2)$
 $\Rightarrow A$ diagonalisable

0,5 \odot Si $x = 0$, $\dim E_0(A) \neq m(0)$
 $\Rightarrow A$ non diagonalisable.

Exo3 5pts f endo de E , \mathbb{R} -ev. ($\dim E < +\infty$)
 $f^2 + f + \text{id}_E = 0_E$

$$u \in E \text{ et } F = \text{Vect}(u, f(u))$$

1) $\{u, f(u)\}_{u \neq 0}$ base de F .

0,5 \odot Soit λ v.p. de $f \Rightarrow \exists u \neq 0 / f(u) = \lambda u$
 $\Rightarrow \lambda^2 u + \lambda u + u = 0$

$$\Rightarrow (\lambda^2 + \lambda + 1)u = 0$$

0,5 $\left(\begin{array}{l} \text{or } u \neq 0 \text{ donc } \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \\ \text{pas de pol. dans } \mathbb{R}. \\ \text{Donc } \lambda \text{ n'existe pas} \end{array} \right.$

0,5 Si on suppose que $\dim F = 2 \Rightarrow \{u, f(u)\}$ libre
 $\Rightarrow \{u, f(u)\}$ base de F .

2) F stable par f.

Soit $v \in F$. Montrons que $f(v) \in F$.

$$0,5 \quad (v \in F \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \mid v = \alpha u + \beta f(u))$$

$$\Downarrow$$
$$0,5 \quad (f(v) = f(\alpha u + \beta f(u)))$$

(0,5) comme f est linéaire,

$$\text{on a: } f(v) = \alpha f(u) + \beta f^2(u)$$

$$0,5 \quad \left(\begin{aligned} &= \alpha f(u) + \beta [f(u) - u] \\ &= (\alpha - \beta) f(u) - \beta u \end{aligned} \right)$$

0,5 $(\Rightarrow) f(v)$ s'écrit en fonct. des éléments u et $f(u)$ de la base de F

0,5 $(\Rightarrow) f(v) \in F \Rightarrow F$ stable par f .

FIN