

Université de Batna 2 2eme année SAD
 Faculté des Mathématiques et Informatique Année 2021-2022
 Département de mathématiques

Examen final (ALG3)

Exercice 1. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ définie par:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de M . (2pts)
2. Trouver le $\det(M)$. (1pts)
3. Dédire que M est inversible? (1pts)
4. Montrer que M est diagonalisable? (3pts)
5. Ecrire la matrice de passage P associée a une base pour les espaces propres des valeurs propres de M . (2pts)
6. Écrire la matrice diagonale D en fonction de M et P . Dédire que $M = PDP^{-1}$ (*). (2pts)
7. Calculer M^{-1} en utilisant (*). (3pts)

Exercice 2 (intérogation 2). Soit $m \in R$ et $A \in M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Pour quelle valeurs de m A_m est-inversible? (1pts)
2. Calculer la matrice inverse de la matrice A_1 (2pts)
3. La matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est -elle diagonalisable? (3pts)

Bonne chance

Solution 1 1. Calculer $P_M(\lambda)$ le polynôme caractéristique de M .

$$\begin{aligned}
 P_M(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 & 2 \\ 2 & -1 - \lambda & 2 \\ 2 & -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 \dots \dots \dots (2\text{pnt}) \\
 &= -(\lambda - 3)(\lambda - 1)^2
 \end{aligned}$$

2.

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \dots \dots \dots (1\text{pnt})$$

3. Est ce que M est inversible ? $\det(A) = 3 \neq 0$ donc la matrice A est inversible $\dots \dots \dots (2\text{pnt})$

4. En déduire les valeurs propres de M sont donc

$$\{1, 3\} \dots \dots \dots (1\text{pnt})$$

5. Trouver une base pour les espaces propres associés aux valeurs propres de f . Il existe deux sous espaces propres

(a)

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \{u \in \mathbb{R}^3 : Au = u\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = y - z \right\} \\
 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Donc $B_{E_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $\dim(E_1) = 2 \dots \dots \dots (1\text{pnt})$

(b)

$$\begin{aligned} E_3 &= \{u \in \mathbb{R}^3 : Au = 3u\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y = z, x = y \text{ et } x - 2y + z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = y = z, \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $B_{E_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $\dim(E_3) = 1 \dots \dots \dots (1\text{pnt})$

6. Est ce que M est diagonalisable ? Oui, M est diagonalisable car les dimensions des sous espaces propres et les multiplicités des valeurs propres associées coïncident. ($\dim(E_1) = \alpha_1 = 2$, $\dim(E_3) = \alpha_2 = 1$) $\dots \dots \dots (1\text{pnt})$

7. Écrire M sous la forme $M = PDP^{-1}$.

Comme M est diagonalisable, d'après le théorème vu en cours, il existe une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale de sorte que $M = PDP^{-1}$.

Pour P c'est la matrice composée des vecteurs propres comme colonnes, donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (2\text{pnt}) \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \text{Com}(P^t) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et dans le même ordre que les vecteurs propres, on range les valeurs propres dans la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1\text{pnt}) \text{ Ce qui donne}$$

$$M = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1\text{pnt})$$

8 Calculer M^{-1} par la formule de l'inverse -

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Com}(A^t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1\text{pnt})$$

Solution 2 (exercice 2) 1) $\det(A_m) = 2(m+1)$, A est inversible ssi $\det(A_m) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$(1pnt)

2) pour $m = 1$ \mathbf{A}_1 est inversible et $\det \mathbf{A}_1 = 4$

$$\text{La matrice des cofacteurs } \text{Com}(\mathbf{A}_1) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A}_1)} \text{Com}(\mathbf{A}_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2\text{pnt})$$

$$\mathbf{3) } \det(B - \lambda I) = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda) = \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1, & \alpha_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2, & \alpha_2 = 1 \end{cases} \dots\dots\dots(1\text{pnt}),$$

$$v = (x, y, z) \in E_1 \Leftrightarrow (B - I)v^T = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -0 & -1 \\ 0 & 0 & -0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= (z, 0, y + z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x \neq 0 \\ y = z = 0 \end{cases} \text{ tq } v = x(1, 0, 0) \Leftrightarrow E_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \right] \dots\dots\dots(1\text{pnt})$$

$$\Leftrightarrow \dim E_1 = 1 \neq \alpha_1 \Rightarrow B \text{ n'est pas diagonalisable} \dots\dots\dots(1\text{pnt})$$