Corrigé type "Examen final d'Algèbre 3"

Exercice 1 *Questions de cours*

1. *Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A est le polynôme P_A défini par :*
$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$$
2. *Deux matrices A et B sont semblables si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$.*
3. *Un polynôme P est dit annulateur de la matrice A si et seulement si $P(A) = 0$.*

Exercice 2 *(**INTERROGATION**)*
Soit
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,z,-y) \end{array}$$
une application linéaire.

1. *Montrons que la matrice associée a f dans la base canonique est la matrice A définie par*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Supposons que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$.
Remarquons que :
$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,0,0) = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3.$
$f(e_2) = f(0,1,0) = (0,0,-1) = 0e_1 + 0e_2 - 1e_3.$
$f(e_3) = f(0,0,1) = (0,1,0) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3.$
Donc $Mat_B(f) = A$
2. *Calculons A^2, A^3.*
On a $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. *Calculons $A^3 - A^2 + A - I$.*
$A^3 - A^2 + A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
et déduire que A est inversible.
On a $A^3 - A^2 + A - I = 0$ donc $A^3 - A^2 + A = I$
Alors $A(A^2 - A + I) = I$ et $(A^2 - A + I)A = I$
Donc A est inversible son inverse est $A^2 - A + I$
4. *Calculons A^{-1} par deux méthodes :*
Méthode 1 : $A^{-1} = A^2 - A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Méthode 2 : $A^{-1} = \dfrac{1}{detA}(ComA)^T.$

On a $detA = 1$ *et* $ComA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *donc* $(ComA)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Calculons* $det(A - \lambda I)$.

$$det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 3-\lambda & -\lambda & 1 & 1 \\ 3-\lambda & 1 & -\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1+\lambda & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(3-\lambda)(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$

$$= -(3-\lambda)(1+\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1+\lambda & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(3-\lambda)(1+\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1+\lambda)^3$$

Donc $P_A(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda+1)^3$.

2. *Montrons que A est diagonalisable : Les valeurs propres de A sont* -1 *valeur multiple d'ordre* 3 *et* 3 *valeur simple Étudions les espaces propres associés aux valeurs propres*

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; A(x,y,z,t)^T = -(x,y,z,t)^T\}. \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x+y+z+t = 0\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x = -y-z-t\} \\ &= Vect\{(-1,1,0,0); (-1,0,1,0); (-1,0,0,1)\} \end{aligned}$$

Une base de E_{-1} est $\{(-1,1,0,0);(-1,0,1,0);(-1,0,0,1)\}$. *Donc* $dimE_{-1} = 3$.

$$\begin{aligned} E_3 &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; A(x,y,z,t)^T = 3(x,y,z,t)^T\}. \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; 3x+y+z+t=0, x+3y+z+t=0, x+y+3z+t=0, x+y+z+3t=0\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x=y=z=t\} \\ &= Vect\{(1,1,1,1)\} \end{aligned}$$

Une base de E_3 est $\{(1,1,1,1)\}$.
Donc l'ensemble des vecteurs propres $\{(-1,1,0,0);(-1,0,1,0);(-1,0,0,1);(1,1,1,1)\}$ *de A forme une base de $\mathbb{R}^4$, et donc la matrice A est diagonalisable.*

3. *La matrice diagonal D et la matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$ sont :*

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} et\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. *Trouvons une matrice carré $B \in M_4(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.*
Remarquons d'abord que la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

est telle que $(M)^2 = D$.
En écrivant $A = PDP^{-1} = PM^2P^{-1} = (PMP^{-1})(PMP^{-1})$, *et en posant* $B = PMP^{-1}$, *on obtient* $A = B^2$.