FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE — USTO MB
Département de Mathématiques — 2019/2020

Examen final d'Algèbre III
Durée : 1h30

Exercice 1. (4 pts)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, tel que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.
Indication : (Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$).

Exercice 2. (4 pts)
Soit f un endomorphisme sur E où $\dim E = n$ et $rg(f) = 2$. On suppose qu'il existe $u, v \in E - \{0\}$ tel que $f(u) = u$ et $f(v) = -v$. Montrer que f est diagonalisable (Discuter sur n et rappelez-vous $\dim E = rg(f) + \dim \ker(f)$) et donner la matrice diagonale semblable à la matrice de f.

Exercice 3. (12 pts)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -\alpha^2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Première partie :

1. Calculer le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(\lambda)$.
2. Déterminer selon les valeurs du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.
3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.
4. Déterminer selon les valeurs de α le polynôme minimal de A_α.

Seconde partie :
On suppose que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A.

1. Déterminer les sous-espaces propres de A.
2. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est
$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$
et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$
3. Écrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
4. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tB$ et exprimer $\exp tA$ à l'aide de P et $\exp tB$.
5. Donner les solutions des systèmes différentiels $Y'(t) = BY(t)$ et $X'(t) = AX(t)$.

بِالتّوفيق

Corrigé d'examen d'Algèbre III

Exercice 1. (4 pts)
Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

$$P(P(X)) - P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k((P(X))^k - X^k) = (P(X) - X)Q(X). \quad \textbf{(2 pts)}$$

Or

$$P(P(X)) - X = P(P(X)) - P(X) + P(X) - X, \quad \textbf{(1 pt)}$$

le polynôme $P(P(X)) - X$ est donc divisible par $P(X) - X$ car somme de deux polynômes divisibles par $P(X) - X$. **(1 pt)**

Exercice 2. (4 pts)
Montrons que f est diagonalisable : Tout d'abord, on a

$$\begin{cases} f(u) = u \\ f(v) = -v \end{cases} \tag{1}$$

Si $n = 2$, d'après (1), $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ sont deux valeurs propres distinctes de f. Donc f est diagonalisable. **(1 pt)**
Dans ce cas

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

Si $n > 2$, $\dim E = rg(f) + \dim \ker(f)$, alors $\dim \ker(f) = n - 2$. c'est-à-dire $\ker(f)$ admet une base de $(n-2)$ vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_3 = 0$. Comme u et v sont deux vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ respectivement, f est donc diagonalisable. **(2 pts)**
La matrice diagonale est donc

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

Exercice 3. (12 pts)
Première partie :

1.

$$\begin{aligned} P_{A_\alpha}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -\alpha^2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)[(3-\lambda)^2 - \alpha^2] \\ &= (4-\lambda)(3-\lambda+\alpha)(3-\lambda-\alpha) \quad \textbf{(0.5 pt)} \end{aligned}$$

2. • si $\alpha = 0$, la matrice A_α admet les valeurs propres $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 3$ avec multiplicité respective 1 et 2. **(0.5 pt)**

- si $\alpha = \pm 1$ la matrice A_α admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 4$ valeur propre double et $\lambda_2 = 2$ valeur propre simple. **(0.5 pt)**
- si $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$, la matrice A_α admet les valeurs propres simples $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3 + \alpha$ et $\lambda_3 = 3 - \alpha$. **(0.5 pt)**

3.
- Il est clair que dans le cas $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$, la matrice est diagonalisable. **(0.5 pt)**
- si $\alpha = \pm 1$, $E_4 = \ker(A_\alpha - 4I) = \mathrm{Vect}\Big((0, 1, 0), (1, 0, -1)\Big)$. Donc A_α est diagonalisable.**(1 pt)**
- si $\alpha = 0$, $E_3 = \ker(A_\alpha - 3I) = \mathrm{Vect}(0, -2, 1)$, alors la matrice A_α n'est pas diagonalisable. **(1pt)**

4. Notons π_A le polynôme minimal de A_α
   - Si $\alpha = 0$, $\pi_A(X) = (4 - X)(3 - X)^2$. **(0.5 pt)**
   - Si $\alpha = \pm 1$, $\pi_A(X) = (4 - X)(2 - X)$. **(0.5 pt)**
   - Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$, $\pi_A(X) = (4 - X)(3 - X + \alpha)(3 - X - \alpha)$. **(0.5 pt)**

Seconde partie :

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_A(\lambda) = (4 - \lambda)(3 - \lambda)^2.$$

1. La matrice A admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 4$ valeur propre simple et $\lambda_2 = 3$ valeur propre double dont les sous-espaces propres associés sont respectivement $E_4 = \ker(A - 4I) = \mathrm{Vect}(0, 1, 0)$ et $E_3 = \ker(A - 3I) = \mathrm{Vect}(0, -2, 1)$. **(1 pt)**

2. cherchons un vecteur v_3 tel que $Av_3 = v_2 + 3v_3$. Ainsi, le vecteur $v_3 = (-1, 0, 0)$ convient. **(1 pt)** On obtient alors la matrice P suivante qui est inversible et vérifie $A = PBP^{-1}$,
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1 pt)}$$

3. On a
$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N, \quad \textbf{(0.5 pt)}$$
avec
$$DN = ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^2 = 0. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$
C'est donc la décomposition de Dunford.

4.
$$\begin{aligned} \exp(tB) &= \exp(tD)\exp(tN) \\ &= \exp(tD)\Big(I + \frac{tN}{1!}\Big) \\ &= \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0.75 pt)} \end{aligned}$$
Donc
$$\exp(tA) = \exp(P(tB)P^{-1}) = P\exp(tB)P^{-1}. \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

5. Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, alors la solution de $Y'(t) = BY(t)$ est donnée par

$$Y(t) = \exp(tB)v = e^{3t} \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 + c_3 t \\ c_3 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

La solution de $X'(t) = AX(t)$ est donc

$$X(t) = PY(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} -c_3 \\ c_1 e^t - 2(c_2 + c_3 t) \\ c_2 + c_3 t \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$