Université de Tlemcen. le 01/03/2021

L2 Mathématiques.

Module: Algèbre 3

Epreuve finale.

Exercice n°1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

montrer que A est inversible ssi $\det A \neq 0$

Exercice n°2

1°/ Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2°/ Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice n°3

Soit D_n le determinant d'ordre n suivant

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ a & a+b & b \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix} ; \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a \neq b$$

1°/ Montrer que $D_n = a D_{n-1} + b^n$

2°/ Montrer par récurrence que $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$.

Exercice n°4

Soit E un $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = f$

Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice n°1 : 4 pts ; Exercice n°2 : 8 pts ; Exercice n°3 : 5 pts ; Exercice n°4 : 3 pts

Bon Courage

Université de Tlemcen.
L2 Mathématiques
Module : Algèbre 3

le 02/03/2021

Corrigé de l'épreuve finale.

Exercice n° 1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$\Longrightarrow$

A inversible $\Longrightarrow \exists A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / A \cdot A^{-1} = I$

$\Longrightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det I \overset{Th.}{\Longrightarrow} \det A \cdot \det A^{-1} = 1$

$\Longrightarrow \det A \neq 0$

$\Longleftarrow$

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \Longrightarrow A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & \cdots & c_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} = \| c_1, \dots, c_n \|$$

$\det A \neq 0 \Longrightarrow \{c_1, \dots, c_n\}$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

$\Longrightarrow$ on peut parler de matrice de passage.

$$P_{e_i \to c_i} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} c_1 & \cdots & c_n \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} = A$$

$\Longrightarrow A$ est une matrice de passage.

$\overset{Ch.0}{\Longrightarrow} A$ est inversible.

Exercice n° 2

1°/ Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

Par rapport à 2ème colone $(4-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = (4-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 1\right]$$

$$= (4-\lambda)(3-\lambda-1)(3-\lambda+1)$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda-4)^2$$

$\Rightarrow P_A(\lambda)$ est scindé dans $\mathbb{R}$.

Déterminons E_2 et E_4

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / (A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Soit à résoudre $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq$; le système est compatible.

car le second membre est nul.

on pose $z = \alpha$. $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ 2x + 2y = -2\alpha \end{cases} \Rightarrow x = \alpha \text{ et } y = -2\alpha.$$

d: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}$

$\Rightarrow v_1$ est le vecteur propre associé à la valeur propre 2.

On remarque que $\dim E_2 = 1$ car $\{v_1\}$ est une famille génératrice de E, comme $v_1 \neq 0$ $\{v_1\}$ est libre,

On sait que $\dim E_2 = 1 = mul(2)$ sans faire les calculs précédents car la multiplicité de 2 est égal à 1 mais on a déterminer v_1 en vue de trouver la matrice de passage.

$$E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / (A - 4I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

Soit à résoudre.

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tous les mineurs d'ordre 2 sont nuls

$\delta = -1 \neq 0$ le système est compatible car le second membre est nul.

On pose $y = \alpha$ et $z \in \beta$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x = \beta \end{cases} \Rightarrow x = -\beta$$

d':

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \beta \underset{v_3}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow \{v_2, v_3\}$ est une famille génératrice de E, elle est clairement libre d'après le théorème B du chapitre des déterminants.

$$\begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ 0 & -1 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{array} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow \{v_2, v_3\}$ est une base de E_4

$\Rightarrow \dim E_4 = 2 = \text{mult}(4)$.

$\Rightarrow$ A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad P = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \text{ et } A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et on a $A' = P^{-1} A P$.

2°/ Après calculs on trouve det $P = 2$

et

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & -4^n \\ -2.2^n & 4^n & 0 \\ 2^n & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n+4^n & 0 & 2^n-4^n \\ 2(4^n-2^n) & 2.4^n & 2(4^n-2^n) \\ 2^n-4^n & 0 & 2^n+4^n \end{pmatrix}$$

Exercice n°3

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & b & \cdots & b \\ a & a+b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

En utilisant la linéarité par rapport à la 1ère ligne on aura.

$$D_n = \underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & \cdots & & b \\ \vdots & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & & a & a+b \end{vmatrix}}_{\text{Par rapport à la 1ère ligne.}} + \underbrace{\begin{vmatrix} b & b & \cdots & & b \\ a & a+b & \cdots & & b \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b \\ a & a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}}_{\Delta}$$

$$\Rightarrow D_n = a D_{n-1} + \Delta$$

Calculons Δ

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \quad & C_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2-C_1 & C_3-C_2 & \cdots & C_n-C_{n-1} \end{array} \\ \underbrace{\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & -a & & \\ \vdots & 0 & b & \ddots & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \\ a & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}}_{\text{Par rapport à la } 1^{\text{ère}} \text{ ligne.}} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \Delta = b \underbrace{\begin{vmatrix} b & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & b \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Determinant triangulaire d'ordre } (n-1) \\ \text{avec les } b \text{ sur la diagonale.}}}$$

$$\Longrightarrow \Delta = b^n$$

Conclusion.

$$D_n = a D_{n-1} + b^n \quad (1)$$

2°/ Montrons par récurrence que.

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

* $D_1 = a+b = \frac{(a+b)(a-b)}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{a-b}$

$\Rightarrow$ la propriété est vraie au rang 1

* Supposons que la propriété est vraie au rang k ie $D_k = \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b}$ (2)

* Et montrons que la propriété est vraie au rang $(k+1)$ ie $D_{k+1} = \frac{a^{k+2} - b^{k+2}}{a-b}$.

$$D_{k+1} \overset{(1)}{=} a D_k + b^{k+1}$$

$$\overset{(2)}{=} a \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b} + b^{k+1}$$

$$= \frac{a^{k+2} - a b^{k+1} + b^{k+1}(a-b)}{a-b}$$

$$\Rightarrow D_{k+1} = \frac{a^{k+2} - b^{k+2}}{a-b}$$

Conclusion $D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} \; \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice n° 4

Pour montrer que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$ et comme on sait d'après le théorème du rang que $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$ il suffit de montrer que

$$\ker f \cap \operatorname{Im} f \overset{\subset}{\underset{\supset}{=}} \{0\}$$

$\supset$ est vraie car $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont des sous espaces vectoriels.

$\subset$

$$x \in \ker f \cap \operatorname{Im} f \Rightarrow \begin{cases} x \in \ker f \\ \text{et} \\ x \in \operatorname{Im} f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ \text{et} \\ \exists a \in E / x = f(a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ \text{et} \\ f(x) = (f \circ f)(a) \end{cases} \xrightarrow{f \circ f = f} \begin{cases} f(x) = 0 \\ \text{et} \\ f(a) = f(a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(a) = 0 \xrightarrow{x = f(a)} x = 0 \Rightarrow x \in \{0\}$$

$$\Rightarrow \ker f \cap \operatorname{Im} f \subset \{0\} \Rightarrow \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$$

Conclusion

$$\left.\begin{array}{l} \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \\ \dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f \end{array}\right. \Rightarrow E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$$