Université de Tlemcen
Département de mathématiques

le 04/12/2018

Partiel du module "Algèbre 3"

durée : 2 heures

Exercice n° 1 (04)

Soient $v_1, \dots, v_r$ r vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{K}^n$, $A = \| v_1, \dots, v_r \|$, δ un mineur d'ordre r non nul extrait de A et $W \in \mathbb{K}^n$. Montrer que si les bordants de δ dans la matrice $B = \| v_1, \dots, v_r, W \|$ sont nuls alors $W \in [v_1, \dots, v_r]$

Exercice n° 2 (6,5)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Déterminer une matrice P inversible et une matrice A' diagonale telles que $A' = P^{-1} A P$ et calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n° 3 (3)

Expliquer sans calculs pourquoi $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable

Exercice n° 4 (4,5)

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$

1/ Montrer que $P_A(X) = -(X+1)(X-1)^2$

2/ Pour quelles valeurs de m, A est-elle diagonalisable ?

Exercice n° 5 (02)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Ex 1 : 4 pts ; Ex 2 : 6,5 pts ; Ex 3 : 3 pts ; Ex 4 : 4,5 pts ; Ex 2 : 2 pts.

Bon Courage

Corrigé du partiel du module "Algèbre 3"
du 04/12/2018

Exercice n° 1 : voir cours (04 pt)

Exercice n° 2

$$A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\2&4&2\\-1&0&3\end{pmatrix} \to P_A(\lambda)=-(\lambda-2)(\lambda-4)^2 \to \begin{matrix}\lambda_1=2\ (1)\\ \lambda_2=4\ (2)\end{matrix}$$ (1 pt)

$$E_4=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 / (A-4I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \to \begin{pmatrix}-1&0&-1\\2&0&2\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Big\}$$

Tous les mineurs d'ordre 2 sont nuls on prend $\delta=-1\neq 0$, le système est compatible car le second membre est nul, on pose $y=a$ et $z=b$

$$\Rightarrow x=-b.\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_4 \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=a\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_2}+b\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_3} \Rightarrow \{v_2,v_3\}$$ est une famille génératrice (1,5 pt)

de E_4, elle est libre car $\begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix}=1\neq 0$ (TB) par conséquent $\{v_2,v_3\}$ est une base de E_4

$\Rightarrow \dim E_4 = 2 = mult(4) \Rightarrow A$ est diagonalisable.

$$E_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 / (A-2I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \to \begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&2\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\ \delta=\begin{vmatrix}1&0\\2&2\end{vmatrix}=2\neq 0,$$ le système

est compatible car le second membre est nul on pose $z=a \Rightarrow \begin{cases}x=a\\2x+2y=-2a\end{cases}$

$$\Rightarrow x=a \text{ et } y=-2a.\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=a\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}_{v_1}$$ (1 pt)

Conclusion $\boxed{P=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix};\ A'=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}}$ et on a $A'=P^{-1}AP$ par conséquent. (1 pt)

$$A^n=PA'^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&4^n&0\\0&0&4^n\end{pmatrix}P^{-1}.$$ (1 pt)

Déterminons P^{-1} $\det P=2$; ${}^tP=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $cof({}^tP)=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&2\\1&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&2\\-1&0&1\end{pmatrix}}$

$$\Rightarrow \boxed{A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2^n+4^n&0&2^n-4^n\\2(4^n-2^n)&2\cdot4^n&2(4^n-2^n)\\2^n-4^n&0&2^n+4^n\end{pmatrix}}$$ (1 pt)

Exercice n° 3. On remarque que $P_A(x)=(x-1)^4$, ainsi A a une unique valeur propre 1, si elle était diagonalisable il existe P inversible $I=P^{-1}AP \Rightarrow \cancel{A=PIP^{-1}}=I$ impossible car $A\neq I$, par conséquent A n'est pas diagonalisable (3 pt).

Exercice n° 4

1/ $P_A(X) = \begin{vmatrix} 1+m-X & 1+m & 1 \\ -m & -m-X & -1 \\ m & m-1 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+m-X & 1+m & 1 \\ -m & -m-X & -1 \\ 0 & -X-1 & -X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+m-X & m & 1 \\ -m & 1-m-X & -1 \\ 0 & 0 & -X-1 \end{vmatrix}$

$= (-X-1)\left[(1-X)^2 - m^2 + m^2\right] = \boxed{-(X+1)(X-1)^2}$ 01 pt

Ainsi les valeurs propres de A sont -1 de multiplicité 1 et 1 de multiplicité 2.

2°/ A est diagonalisable si $\dim E_1 = 2$.

$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} m & 1+m & 1 \\ -m & -m-1 & -1 \\ m & m-1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 01 pt

Pour que $\dim E_1 = 2$ il faut avant tout un mineur d'ordre 1 non nul. et tous les mineurs d'ordre 2 nuls, on remarque que quelques uns sont nuls quelque soit m mais d'autres non, $\begin{vmatrix} m & 1+m \\ m & m-1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} m & 1 \\ m & -1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -m-1 & -1 \\ m-1 & -1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -m & -1 \\ m & -1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -m & -m-1 \\ m & m-1 \end{vmatrix}$ 1,5 pt

Tous ces mineurs sont nuls si $\underline{m=0}$, par conséquent A est diagonalisable si $m=0$. 01 pt

Exercice n° 5

$P_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & c \\ c & d-X \end{vmatrix} = (a-X)(d-X) - c^2 = X^2 - (a+d)X + ad - c^2$, déterminons ses racines, calculons le discriminant $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-c^2) = a^2+d^2-2ad+4c^2 = (a-d)^2 + 4c^2 \geq 0$.

On a $\Delta = 0 \Leftrightarrow a-d = 0$ et $c = 0$ mais si $c=0$ A est déjà diagonale, sinon $\Delta > 0$ et le polynôme caractéristique admet 2 racines réelles distinctes, ce qui prouve que la matrice est toujours diagonalisable dans $\mathbb{R}$. 02 pt