Université de Tlemcen
Département de mathématiques

le 23/01/2018

Epreuve finale de Algèbre 3

durée 2 heures

Exercice n° 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1°/ Déterminer $D = \{a \in \mathbb{R} / A$ n'est pas diagonalisable$\}$

2°/ Pour $a \in D$ trigonaliser A en précisant la matrice de passage

3°/ Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; résoudre $\dfrac{dX}{dt} = BX$

Exercice n° 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1°/ Montrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice A' diagonale et une matrice P inversible telles que $A' = P^{-1}AP$

2°/ En déduire le polynôme minimal $m_A(x)$ de A

3°/ A est elle inversible ? si oui déterminer A^{-1} en utilisant 2°/

4°/ Calculer $-A^6 + 10A^5 - 32A^4 + 32A^3 + A$.

Exercice n° 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie montrer que si 0 est une valeur propre de f^n ($f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$) alors 0 est une valeur propre de f

Exercice n° 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E tel que $f^3 = I_d$. montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - I_d) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + I_d)$

Exercice n° 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E

1°/ Montrer que si f est diagonalisable, il existe une base de E formée par les vecteurs propres de f.

2°/ Montrer que si λ est une valeur propre de f alors $\det(f - \lambda I_d) = 0$

Barème : Ex1 : 7pts ; Ex2 : 7pts ; Ex3 : 2pts ; Ex4 : 1,5 pts ; Ex5 : 2,5pts .

Bon Courage

Corrigé de l'épreuve finale du module Algèbre 3 du 23/01/2018

Exercice n° 1

1/ $P_A(X) = X(X-1)(X-a)$ (0.25)

1er cas si $a \neq 0$ et $a \neq 1$ A aura 3 valeurs propres distinctes et donc elle est diagonalisable (0.25)

2ème cas si $a = 0$ $P_A(X) = X^2(X-1)$

A est diagonalisable $\Leftrightarrow m_A(X) = X(X-1) \Leftrightarrow m_A(A) = 0 \Leftrightarrow A(A-I) = 0$

$$A(A-I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & & \\ 1 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \neq (0)$$ (0.5)

$\Rightarrow m_A(X)$ n'a pas des racines distincts $\Rightarrow$ A n'est pas diagonalisable

3ème cas si $a = 1$ même raisonnement. A n'est pas diagonalisable (0.5)

Conclusion $D = \{0, 1\}$ (0.5) (Remarque on peut raisonner avec les dimensions)

2°/ Si $a = 0$ $P_A(X) = X^2(X-1) \Rightarrow P_A(X)$ est scindé $\Rightarrow$ il existe $\{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ tq

$$M(f)_{v_i} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

avec $A = M(f)_{c_i}$ où (c_i) est la base can. de $\mathbb{R}^3$ et f endo de $\mathbb{R}$

détermination de v_1

① $f(v_1) = 0 \Rightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ le système est compatible on pose $z = \alpha$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2\alpha \\ x = \alpha \end{cases} \Rightarrow x = \alpha$ et $y = 0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ solution de ① $\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on prend $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (0.5), on remarque

que le sous espace des solutions de l'équation ① est de dimension 1 (*)

détermination de v_2

$f(v_2) = b v_1$, (*) nous interdit de prendre $b = 0$, prenons alors $b = 1$

ce qui nous donne l'équation $f(v_2) = v_1$ ②

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

le système est alors compatible, on pose $z = \alpha \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2\alpha + 1 \\ x = \alpha \end{cases}$

prenons $\alpha = 0$ nous aurons $x = 0$ $y = 1$ $z = 0$ et donc on peut prendre $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 0.5

détermination de v_3

$f(v_3) = c v_1 + d v_2 + v_3$ pour le moment on peut prendre $c = d = 0$, ce qui nous donne l'équation $f(v_3) - v_3 = 0$ (3)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$ le système est compatible

on pose $z = 2\alpha \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4\alpha \\ x - y = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow x = 3\alpha$ et $y = \alpha$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ solution de (3) $\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ on peut prendre $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 0.5

Conclusion $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A' = P^{-1} A P$ 0.5

Si $a = 1$ $P_A(x) = x(x-1)^2$ en utilisant le même raisonnement on trouve $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A' = P^{-1} A P$ 0.5 0.5 0.5 0.5

2°) Nous remarquons que $B = A$ avec $a = 0$ nous allons utiliser alors les résultats précédents

B est trigonalisable $B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Résolvons le système différentiel $\dfrac{dX'}{dt} = A'X'$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{dx'}{dt} \\ \frac{dy'}{dt} \\ \frac{dz'}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx'}{dt} = y' \\ \frac{dy'}{dt} = 0 \Rightarrow y' = c_2 \\ \frac{dz'}{dt} = z' \Rightarrow z' = c_3 e^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dx'}{dt} = c_2 \Rightarrow x' = c_2 t + c_1$$ 0.5

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 t + c_1 \\ c_2 \\ c_3 e^t \end{pmatrix}$$ 0.5

$$\Rightarrow x = c_2 t + 3c_3 e^t + c_1 \; ; \; y = c_3 e^t + c_2 , \; z = c_2 t + 2c_3 e^t + c_1$$

Exercice n° 2

$P_A(X) = -(X-2)(X-4)^2 \Rightarrow X_1 = 2 \; (1)$ et $X_2 = 4 \; (2)$ 0.5

$$E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ $\delta = -1 \neq 0$ le système est compatible

On pose $y = \alpha$ et $z = \beta \Rightarrow x = -\beta$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3}$$ 0.5 + 0.5

$\Rightarrow \{v_2, v_3\}$ est une famille génératrice de E_4, comme elle est libre (Th B) elle est donc une base de E_4 et par conséquent $\dim E_4 = 2 = mul(4)$

$\Rightarrow A$ est diagonalisable

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \Delta$

le système est compatible, on pose $z = \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ 2x + 2y = -2\alpha \end{cases}$

$$\Rightarrow y = -2\alpha \quad ; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}$$ 0.5

Conclusion 0.5

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & & 4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A' = P^{-1} A P$$

2°/ A est diagonalisable $\Rightarrow m_A(x)$ a des racines distinctes 0.5

$\overset{1°/}{\Longrightarrow} m_A(x) = (x-2)(x-4)$ 0.5

3°/ $P_A(x) = \det(A - xI) = -(x-2)(x-4)^2$

$\Rightarrow \det A = P_A(0) = 32 \neq 0 \Rightarrow$ A est inversible 0.5

$m_A(x)$ est un polynôme annulateur de A $\Rightarrow m_A(A) = 0$

$m_A(x) = (x-2)(x-4) = x^2 - 6x + 8 \Rightarrow A^2 - 6A + 8I = 0$

$\Rightarrow A(A-6I) = -8I \Rightarrow A\,\dfrac{(A-6I)}{-8} = I \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{8}(A-6I)$ 0.5

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$ 0.5

4°/ $P_A(x) = -(x-2)(x-4)^2 = -(x^3 - 10x^2 + 32x - 32)$

faisons la division euclidienne suivante

$$\begin{array}{r|l} -x^6 + 10x^5 - 32x^4 + 32x^3 + x & x^3 - 10x^2 + 32x - 32 \\ \cline{2-2} x^6 - 10x^5 + 32x^4 - 32x^3 \quad & -x^3 \\ \hline x & \end{array}$$ 1

$\Rightarrow (-x^6 + 10x^5 - 32x^4 + 32x^3 + x) = -P_A(x)\cdot(-x^3) + x$ 0.5

$\Rightarrow -A^6 + 10A^5 - 32A^4 + 32A^3 + A = -P_A(A)(-A^3) + A = 0 + A = A.$ 0.5

<u>Exercice n°3</u>

0 est une valeur propre de $f^n \Rightarrow \exists x \in E\ (x \neq 0) / f^n(x) = 0.x \Rightarrow \exists x \in E\ (x\neq 0)/ f^n(x) =$

1 $\Rightarrow \operatorname{Ker} f^n \neq \{0\} \overset{①}{\Longrightarrow} \operatorname{Ker} f \neq \{0\} \Rightarrow \exists x \in E\ (x \neq 0) / f(x) = 0 = 0.x \Rightarrow$ 0 val propre de f

Montrons l'implication ① ou bien $\operatorname{Ker} f = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Ker} f^n = \{0\}$

1 $x \in \operatorname{Ker} f^n \Rightarrow f^n(x) = 0 \Rightarrow f(f^{n-1}(x)) = 0 \Rightarrow f^{n-1}(x) \in \operatorname{Ker} f \overset{\operatorname{Ker} f = \{0\}}{\Longrightarrow} f^{n-1}(x) = 0$

$\Rightarrow f(f^{n-2}(x)) = 0 \Rightarrow f^{n-2}(x) = 0 \Longrightarrow \quad \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f^n = \{0\}$ c q f d

<u>Exercice n°4</u> $f^3 = I_d \Rightarrow f^3 - I_d = 0 \Rightarrow Q(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ est un polynôme annulateur 0.5 de f qui se présente ~~comme~~ 0.5 produit de 2 polynômes premiers entre eux, en utilisant le lemme 0.5 fondamental nous aurons

$$E = \operatorname{Ker}(f - I_d) \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + f + I_d)$$

<u>Exercice n°5</u> : voir cours 1,5 + 01