

Département de mathématiquesEpreuve finale du module "Algèbre 3"durée: 2 heures.Exercice n° 1)

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie n , f un endomorphisme de E ; montrer que si λ est une valeur propre de f alors λ est une racine du polynôme $P(x) = \det(f - x \text{Id})$.

Exercice n° 2)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1/ A est elle diagonalisable?

2/ Trigonaliser A en précisant la matrice et résoudre $\frac{dX}{dt} = A.X$.

Exercice n° 3)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1/ Déterminer le polynôme minimal de A

2/ A est elle inversible? si oui déduire de 1/ A^{-1}

3/ Calculer $A^6 - 4A^5 + 3A^4 + 6A^3 - 10A^2 + 6A$.

Exercice n° 4)

Montrer que 2 matrices semblables ont le même polynôme caractéristique; la réciproque est elle vraie?

Exercice n° 5)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par:

$$f: \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \longmapsto f(P) = P - (X+1)P'$$

Montrer que f est diagonalisable.

Exercice n° 6)

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, f un endomorphisme de E tel que $2gf = 1$.

1/ Soit $x \notin \text{Ker } f$, montrer que $E = [x] \oplus \text{Ker } f$.

2/ Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

3/ Est ce que λ est une valeur propre de f ?

Ex1: 3pt; Ex2: 6pt; Ex3: 4pt; Ex4: 2pt; Ex5: 3pt; Ex6: 3pt. Total = 21pt

Bon Courage.

[Signature]

Exercice n° ① : voir cours.

Exercice n° ②

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = M(f)_{e_i}$$

où $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ endo
et $\{e_i\}$ base can. de $\mathbb{R}^3$.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 4 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)[- \lambda(4-\lambda) + 4]$$

$$= (2-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda + 4]$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = -(\lambda-2)^3$$

A est diagonalisable $\Leftrightarrow m_A(\lambda) = \lambda - 2 \Leftrightarrow m_A(A) = 0$

$$m_A(A) = A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \neq (0) \Rightarrow A \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

2°/ $P_A(\lambda) = -(\lambda-2)^3 \Rightarrow P_A(\lambda)$ est scindé dans $\mathbb{R} \Rightarrow$ il existe
 $\{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ telle que $M(f)_{v_i} = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Détermination de v_1

$$\textcircled{1} f(v_1) = 2v_1 \Rightarrow (A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta = -2 \neq 0$ le système est compatible. on pose $y = 2\alpha$ et $z = \beta$.

$$\Rightarrow -2x = 2\alpha \Rightarrow x = -\alpha$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ solution de } \textcircled{1} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 2\alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

w_1 w_2

$$\text{on prend } v_1 = w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Détermination de v_2

$$f(v_2) = av_1 + 2v_2 \Rightarrow f(v_2) - 2v_2 = av_1, \text{ on peut prendre } a=0 \text{ et } v_2 = w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Détermination de v_3

$$f(v_3) = bv_1 + cv_2 + 2v_3 \Rightarrow f(v_3) - 2v_3 = bv_1 + cv_2$$

on prend $b=c=1$.

$$\Rightarrow (A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v_1 + v_2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = -2 \neq 0 \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ le système est compatible.

on pose $y = 2x$ et $z = \beta \Rightarrow -2x = 2x - 1$

on choisit $x = \beta = 0$ nous aurons $v_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Conclusion

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1/2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } A' = P^{-1}AP$$

$$\frac{dX'}{dt} = A'X' \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{dx'}{dt} \\ \frac{dy'}{dt} \\ \frac{dz'}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx'}{dt} = 2x' + z' \\ \frac{dy'}{dt} = 2y' + z' \\ \frac{dz'}{dt} = 2z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = C_1 e^{2t} + C_3 t e^{2t} \\ y' = C_2 e^{2t} + C_3 t e^{2t} \text{ après calcul} \\ z' = C_3 e^{2t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1/2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (C_1 + C_3 t) e^{2t} \\ (C_2 + C_3 t) e^{2t} \\ C_3 e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = -\left(C_1 + C_3 t\right) - \frac{1}{2} C_3 e^{2t} = -\left(C_1 + \frac{C_3}{2} + C_3 t\right) e^{2t}$$

$$y = 2(C_1 + C_3 t) e^{2t}$$

$$z = (C_2 + C_3 t) e^{2t}$$

(2)

exercice n° ③

$$1/ P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2) \Rightarrow \begin{cases} m_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2) \\ \text{ou} \\ m_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2) \end{cases}$$

$$m_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2) \stackrel{?}{\iff} m_A(A) = 0 \stackrel{?}{\iff} (A-I)(A-2I) = 0$$

$$(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion $m_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$

2/ $P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2) = \det(A-\lambda I)$

$\Rightarrow \det A = P_A(0) = 2 \neq 0 \Rightarrow A$ inversible

$\Rightarrow A^{-1}$ existe

$m_A(A) = 0 \Rightarrow (A-I)(A-2I) = 0 \Rightarrow A^2 - 3A + 2I = 0$

$\Rightarrow A(A-3I) = -2I \Rightarrow A \cdot \frac{3I-A}{2} = I$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(3I-A) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3/ Considérons le polynôme $P(x) = x^6 - 4x^5 + 3x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 6x$

et faisons la division euclidienne de $P(x)$ par $-P_A(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

$\begin{array}{r} x^6 - 4x^5 + 3x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 6x \\ -x^6 + 4x^5 - 5x^4 + 2x^3 \\ \hline -2x^4 + 8x^3 - 10x^2 + 6x \\ 2x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 4x \\ \hline 2x \end{array}$	$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \\ \hline x^3 - 2x \end{array}$
--	---

$\Rightarrow (x^6 - 4x^5 + 3x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 6x) = -P_A(x)(x^3 - 2x) + 2x$

$\Rightarrow A^6 - 4A^5 + 3A^4 + 6A^3 - 10A^2 + 6A = -P_A(A)(\quad) + 2A$

$\xrightarrow{P_A(A)=0} A^6 - 4A^5 + 3A^4 + 6A^3 - 10A^2 + 6A = 2A$

③

Exercice n° 4

Soient A et B 2 matrices semblables

$\Rightarrow$ il existe une matrice inversible telle que
 $B = P^{-1}AP$

$$\begin{aligned} P_B(X) &= \det(B - XI) = \det(P^{-1}AP - P^{-1}XP) \\ &= \det(P^{-1}(A - XI)P) = \det P^{-1} \det(A - XI) \det P \\ &= \frac{1}{\det P} \det(A - XI) \det P = \det(A - XI) = P_A(X) \end{aligned}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables mais
 n'ont le même polynôme caractéristique.

Exercice n° 5

Considérons la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ $B = \{1, x, x^2\}$
 et déterminons $M_B(f)$

$$M_B(f) = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(1) & f(x) & f(x^2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} f(P) = P - (X+1)P' \\ \downarrow \\ f(1) = 1 \\ f(x) = -1 \\ f(x^2) = -2x - x^2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$\Rightarrow f$ admet 3 valeurs propres distinctes 0, 1 et -1.

$\Rightarrow f$ diagonalisable.

Exercice n° 6 : E $\mathbb{R}$ -v. $\dim E = n$ $f: E \rightarrow E$ endo zgf = $\dim \text{Im} f = 1$
 1°/ $x \notin \text{Ker} f \Rightarrow f(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ (si $x=0 \xrightarrow{f \text{ line}} f(x)=0$ Contradi.)

$x \neq 0 \Rightarrow \dim [x] = 1$; d'autre part on sait que $\dim E = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f$,
 ce qui nous donne $\dim \text{Ker} f = n-1 \Rightarrow \dim [x] + \dim \text{Ker} f = 1 + n-1 = n$

$= \dim E$, pour montrer que $E = [x] \oplus \text{Ker} f$, il reste à montrer que
 $[x] \cap \text{Ker} f = \{0\}$, soit $y \in [x] \cap \text{Ker} f \Rightarrow \begin{cases} y \in [x] \\ \text{et} \\ y \in \text{Ker} f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ax & a f(x) = 0 \\ f(y) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow a = 0$ (car $f(x) \neq 0$; $x \notin \text{Ker} f$) $\Rightarrow ax = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow [x] \cap \text{Ker} f = \{0\}$

cl. $\dim E = \dim [x] + \dim \text{Ker} f$
 $[x] \cap \text{Ker} f = \{0\} \Rightarrow E = [x] \oplus \text{Ker} f$.

2°/ $f(x) \in E \xrightarrow{E = [x] + \text{Ker} f} f(x) = \lambda x + y$ avec $y \in \text{Ker} f$.

$\Rightarrow f^2(x) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda f(x)$ car $f(y) = 0$

$\Rightarrow f^k(x) = \lambda^k f(x)$

Soit $z \in E$ $E = \lambda x + \ker f$ $\Rightarrow z = ax + t$ avec $t \in \ker f$.

$$\Rightarrow f^2(z) = a f^2(x) + f(t)$$

$$\Rightarrow f^2(z) = a \lambda f(x) + f(t)$$

$$\Rightarrow f^2(z) = \lambda f(ax) + f(t)$$

$$\Rightarrow f^2(z) = \lambda f(ax) + \lambda f(t) \quad \text{Car } f(t) = 0$$

$$\Rightarrow f^2(z) = \lambda f(ax + t)$$

$$\Rightarrow f^2(z) = \lambda f(z)$$

$$\text{Cl: } \forall z \in E \quad f^2(z) = \lambda f(z) \Rightarrow f^2 = \lambda f \text{ c.q.f.d.}$$

30/ Soit $y \in \text{Im } f$ - $\exists y \Rightarrow y = f(b)$ avec $b \in E$

$$\Rightarrow f(y) = f^2(b) = \lambda f(b) = \lambda y \Rightarrow f(y) = \lambda y$$

cl $y \neq 0$ et $f(y) = \lambda y \Rightarrow \lambda$ a une valeur propre propre.

(5)