Université de Tlemcen
Département de mathématiques.

le 29/11/2016.

Partiel du module "Algèbre 3"

durée = 2 heures

Exercice n° 1

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, soit f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
Determiner $x \in E$ tel que $B = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ forme une base de E ($f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$).

Exercice n° 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1°/ Montrer que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$

2°/ Supposons que A est inversible,

a/ Determiner A^{-1}.

b/ Determiner d'une autre manière A^{-1} (en utilisant 1°/)

Exercice n° 3

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E verifiant $f^2 = -Id_E$ ($f^2 = f \circ f$)
Montrer que $\dim E$ est paire.

Exercice n° 4

Soient $v_1, \dots, v_r$ r vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et la matrice $A = \|v_1, \dots, v_r\|$, montrer que si $\{v_1, \dots, v_r\}$ est libre, on peut extraire de A un mineur d'ordre r non nul.

Exercice n° 5

Soit $x \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \\ & x & \ddots & x \\ 0 & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n)}$

1°/ Determiner D_1

2°/ Pour $n \geq 2$, montrer que $D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}$

3°/ Montrer par récurrence que

a/ si $x^2 \neq 1$ $D_n = \dfrac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2}$

b/ si $x^2 = 1$ $D_n = n+1$

Ex 1 : 3,5 pts ; Ex 2 : 3,5 pts, Ex 3 : 3 pts ; Ex 4 : 4 pts ; Ex 5 : 6 pts

Bon Courage

Corrigé du partiel du module "Algèbre 3" du 29/11/2016.

Exercice n° 1 (3,5 pts)

Comme $f^{n-1} \neq 0$ on peut considérer $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$, ce qui veut dire $x \notin \ker f^{n-1}$.

Montrons que la famille $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ est libre, pour cela considérons $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que.

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0 \quad (1)$$

En composant par f^{n-1} nous obtenons.

$\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0$, il s'en suit que $\lambda_0 = 0$ car $f^{n-1}(x) \neq 0$. 0,5

en composant par $f^{n-2}, \dots, f$ la relation (1), on obtient successivement $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_{n-1} = 0$, ce qui montre que la famille $\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ est libre (1,5)

Par conséquent: $\left.\begin{array}{l}\text{Card}\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\} = n \\ \dim E = n\end{array}\right\} \Rightarrow \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ est une base de E (0,5).

Conclusion: il suffit de prendre $x \notin \ker f^{n-1}$ pour que la famille $\mathcal{B} = \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ soit une base de E. (1)

Exercice n° 2 (3,5 pts) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1-) un simple calcul montre que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$. (1) 0,5

2-) A inversible $\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow ad-bc \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} {}^t(\text{cof } A)$.

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. (1,5)

3°/ (1) $\Rightarrow A(A - (a+d)I) = -(ad-bc)I \Rightarrow A\left[\frac{A-(a+d)I}{-(ad-bc)}\right] = I$

$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{A-(a+d)I}{ad-bc} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. (1,5)

Exercice n° 3 (3pts)

$f^2 = -I_{dE} \Rightarrow \det(f^2) = \det(-I_{dE}) \Rightarrow (\det f)^2 = \det(M(-I_{dE}))$ (1)

$\Rightarrow (\det f)^2 = \det(-I)$ (0,5) $\Rightarrow (\det f)^2 = (-1)^n \Rightarrow (-1)^n = (\det f)^2 \geq 0$ (0,5) (0,5)

$\Rightarrow n$ est pair $\Rightarrow \dim E$ est pair (0,5)

Exercice n° 4 : voir cours (4)

Exercice n° 5 (6pts)

1/ $D_1 = 1 + x^2$ (0,25)

2/ $n \geq 2$.

En calculant D_n par rapport à la 1ère colonne on obtient :

$$D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x \underbrace{\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & & \\ & x & \ddots & \ddots & x \\ & & \ddots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{\Delta}$$, en développant Δ par rapport à la 1ère ligne, on obtient. (0,5)

$D_n = (1+x^2) D_{n-1} - x^2 D_{n-2}$ (1,75)

3°/ $x^2 \neq 1$. $D_1 = (1+x^2) = \frac{(1+x^2)(1-x^2)}{1-x^2} = \frac{1-x^4}{1-x^2}$ donc la prop 0,25

est vraie au rang 1 ; supposons que la prop est vraie à l'ordre

k ie $D_k = \frac{1-x^{2k+2}}{1-x^2}$ et $D_{k-1} = \frac{1-x^{2(k-1)+2}}{1-x^2}$ et montrons que la prop est vraie à l'ordre $(k+1)$

ie $D_{k+1} = \frac{1-x^{2(k+1)+2}}{1-x^2}$.

$D_{k+1} = (1+x^2)D_k - x^2 D_{k-1} = (1+x^2) \cdot \frac{(1-x^{2k+2})}{1-x^2} - x^2 \frac{1-x^{2(k-1)+2}}{1-x^2}$.

$= \frac{1-x^{2k+2}+x^2-x^{2k+4}-x^2+x^{2k+2}}{1-x^2} = \frac{1-x^{2(k+1)+2}}{1-x^2}$, ce qui montre

que la prop est vraie au rg $(k+1)$ par conséquent $\forall n$ $D_n = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$. 1,5

* $x^2 = 1$.

(0,25) $D_1 = 2 = 1+1$ donc la prop est vraie au rang 1, supposons que la prop est vraie jusqu'à l'ordre k ie $D_{k-1} = k-1+1$ et $D_k = k+1$
et montrons que la prop est vraie à l'ordre $(k+1)$.

$D_{k+1} = (1+x^2)D_k - x^2 D_{k-1} = (1+x^2)(k+1) - x^2(k-1+1)$.

$= (k+1) + x^2(k+1) - kx^2 = k+1+x^2 = k+1+1$ donc la prop est vraie à l'ordre $k+1$ par conséquent $\forall n$ $D_n = n+1$. c.q.f.d (1,5)