

Partiel d'Algèbre 3

Exercice n°1

Soient x, a_0, \dots, a_n des éléments de \mathbb{R} et D_n le déterminant d'ordre $(n+1)$ suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & -a_0 \\ -1 & x & 0 & & & 0 \\ 0 & -1 & x & & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & & -1x \end{vmatrix}$$

1/ Montrer que $D_n = a_n x^n + D_{n-1}$.

2/ Calculer D_n .

Exercice n°2

Soit $a \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$). et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$

A est elle diagonalisable, si oui déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice n°3

Soient v_1, \dots, v_r r vecteurs de \mathbb{R}^n linéairement indépendants ($r \leq n$) $A = \|v_1, \dots, v_r\|$ et \exists un mineur d'ordre r non nul extrait de A. Montrer que :

$w \in [v_1, \dots, v_r] \iff$ tous les bordants de ξ dans la matrice $B = \|v_1, \dots, v_r, w\|$ sont nuls.

Exercice n°4

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Pour quelles valeurs de a, b, c, d le système

$$\begin{cases} x+y & = a \\ y+z & = b \\ z+t & = c \\ x & +t = d \end{cases}$$

est compatible.

Partiel d'Algèbre 3

durée: 2 heures.

Exercice n°1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Calculer $\det A$

Exercice n°2

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^t A = -A$

1/ Montrer que $\det A = 0$

2/ Le résultat est-il vrai si A est d'ordre pair. X

Exercice n°3

Résoudre selon le paramètre réel m le système

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$$

Exercice n°4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ on peut extraire de A un mineur δ d'ordre λ non nul et tous les blocs de δ dans A sont nuls.

Exercice n°5

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- ① $E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f$
- ② $E = \text{Im} f + \text{Ker} f$
- ③ $\text{Im} f^2 = \text{Im} f$
- ④ $\text{Ker} f^2 = \text{Ker} f$

Indication: montrer que ① \Rightarrow ② \Rightarrow ③ \Rightarrow ④ \Rightarrow ①

Ex1: 3pts; Ex2: 3pts; Ex3: 5pts; Ex4: 4pts; Ex5: 5pts.

Don Conzage

Partiel d'Algèbre 3

durée: 2 heures.

Exercice n° 1

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E , F un sous espace vectoriel de E , montrer que:

$$F \subset f(F) \implies f(F) = F$$

Exercice n° 2

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E tel que $zgf^2 = zgf$.

Montrer que $\text{Im} f = \text{Im} f^2$, $\text{Ker} f = \text{Ker} f^2$ et $E = \text{Ker} f \oplus \text{Im} f$.

Exercice n° 3

Calculer le déterminant d'ordre n suivant:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & \dots & \dots & x \\ \vdots & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \quad x \in \mathbb{R}$$

NB: sur la diagonale il y'a $1+x^2$, sur les parallèles à la diagonale il y'a x et ailleurs 0


Exercice n° 4

Soit $A \in \text{M}_n(K)$, montrer que si $\text{rg} A = r$, alors on peut extraire de A un mineur δ d'ordre r non nul et tous les cofacteurs de δ dans A sont nuls.

Exercice n° 5

Résoudre selon le paramètre a , le système suivant.

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ ax + y + az = 0 \\ a^2x + ay + z = 0 \end{cases}$$

Don Comage 

Partiel d'Algèbre 3.

Exercice n° 1

durée : 2 heures.

Soient v_1, \dots, v_2 \in vecteurs de K^n et la matrice $A = \|v_1, \dots, v_2\|$.
Montrer que si on peut extraire de A un mineur d'ordre 2 non nul, alors la famille $\{v_1, \dots, v_2\}$ est libre.

Exercice n° 2

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, f un endomorphisme de E .
1/ Montrer que la famille $\{Id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1}\}$ est liée ($f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_k$).
2/ Montrer que si $\text{Im} f = \text{Ker} f$ alors n est pair.

Exercice n° 3

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^t A = -A$

1/ Montrer que $\det A = 0$

Exercice n° 4

Soient $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ et $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ des déterminants d'ordre n .


1/ Montrer que $D_n = (n-1)\Delta_n$; 2/ Montrer que $\Delta_n = -\Delta_{n-1}$

3/ En déduire le calcul de D_n en fonction de n .

Exercice n° 5

Résoudre, suivant les valeurs du paramètre complexe a , le système :

$$\begin{cases} x - ay + a^2z = a \\ ax - a^2y + az = 1 \\ ax + y - a^3z = 1 \end{cases}$$

Bon Courage 

Département de mathématiques

Partiel d'Algèbre 3

durée: 2 heures

Exercice n° ① : (5 pts)

Soit $x \in \mathbb{R}$, $D_n(x)$ et $d_n(x)$ des déterminants d'ordre n définis par

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & & 1+x \end{vmatrix} ; d_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & & 1+x \end{vmatrix}$$

1°/ Montre que $D_n(x) = x^{n-1}$

2°/ Montre que $d_n(x) = D_n(x) + x d_{n-1}(x)$

3°/ Détermine $d_1(x)$, $d_2(x)$ puis $d_n(x)$ en fonction de x .

Exercice n° ② : (6 pts)

Résoudre suivant les valeurs du paramètre réel m , le système :

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x + y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$$

Exercice n° ③ : (4 pts)

Soient v_1, \dots, v_r r vecteurs de \mathbb{R}^n ($r \leq n$) linéairement indépendants.

$A = \|v_1, \dots, v_r\|$: δ un mineur d'ordre r non nul de A .

Montre que $w \in [v_1, \dots, v_r]$ ssi tous les bordants de δ dans la matrice $B = \|v_1, \dots, v_r, w\|$ sont nuls.

Exercice n° ④ : (2 pts)


Soit $A \in \mathcal{M}(n(\mathbb{R}))$ telle que $A^2 = -I$ où I est la matrice identité.

Montre que n est pair.

Exercice n° ⑤ : (3 pts).

Soit E un K space vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E ; montre que :

$$\text{Ker} f = \text{Im} f \iff f^2 = 0 \text{ et } n = 2 \text{rg} f \quad (f^2 = f \circ f)$$

Bon Courage 

Partiel d'Algèbre 3

Exercice n° 1 (6,5 pts)

durée : 2 heures

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$

1°/ Calculer les déterminants suivants

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

2°/ Calculer le déterminant d'ordre n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ b & & & & a \end{vmatrix}$$



Exercice n° 2 (6 pts)

1°/ Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Pour quelles valeurs de a, b, c, d ; le système $\begin{cases} x+y = a \\ y+z = b \\ z+t = c \\ x+t = d \end{cases}$ est-il compatible.

2°/ Discuter et résoudre suivant les valeurs de m , le

$$\text{système} \begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = 1+m \end{cases}$$

Exercice n° 3 (2,5 pts)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_m[x]$ défini par :

$$f: \mathbb{R}_m[x] \longrightarrow \mathbb{R}_m[x] \\ P(x) \longmapsto f(P(x)) = P(x) + P'(x)$$

(calculer $\det f$)

Exercice n° 4 (2 pts)

Soit E un \mathbb{R} espace vectoriel de dimension finie n , F et G 2 sous espaces vectoriels de E ; montrer que si $\dim F + \dim G > n$ alors $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice n° 5 (3 pts)

Soit la matrice $A = \|(c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj})\| \in \mathcal{M}_n(K)$, telle $\det A = 0$, montrer que $\{c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj}\}$ est liée

Bon Courage

Panriel "BIS" d'Algèbre 3

Durée: 2 heures; pas de calculatrice, pas de portable.

Exercice n°(1)

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. Montrer que la famille {Id_E, f, ..., f^{n-1}} est liée.

Exercice n°(2)

Soit A = (a b c d; -b a -d c; -c d a -b; -d -c b a) avec a, b, c, d in IR

Calculer tA.A, en déduire det A

Exercice n°(3)

Soit A = (a 2 -1 b; 3 0 1 -4; 5 4 -1 2); Montrer que rg A >= 2, pour quelles valeurs de a et b a-t-on rg A = 2?

Exercice n°(4)

Soit D_n = (0 1 ... 1; -1 0 1 ... 1; ...; -1 -1 ... -1 0); Montrer que D_n = D_{n-2}, D_1 = 0, D_2 = 1, D_n = (1+(-1)^n)/2

Exercice n°(5)

Soit la matrice A = ||c_1, c_2, ..., c_n|| in M_n(K) telle que det A = 0, montrer que {c_1, ..., c_n} est liée.

Exercice n°(6)

Résoudre suivant le paramètre réel m le système

(x + y + (1-m)z = m+2; (1+m)x - y + 2z = 0; 2x - my + 3z = m+2)

Barème: Ex1: 2pts; Ex2: 3pts, Ex3: 3pts; Ex4: 4/5pts, Ex5: 3pts, Ex6: 4/5pts = 20pts

Exercice n°(7): Soit E = C([0,1], R) l'espace des fonctions continue sur [0,1] et phi l'application définie par phi: E -> E, f -> phi(f) = F où F(x) = integral from 0 to x of f(t) dt

- 1) Montrer que phi est linéaire, injective et non surjective. Ex7: 2pts
2) Que peut-on dire de dim E.

Bon courage, Désolé et toutes nos excuses pour ce contre temps. [Signature]