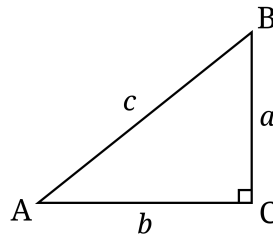


Epreuve finale : Algèbre 1

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (10 points)

1. Écrire la proposition suivante avec des quantificateurs puis donnez sa négation :
"Pour tout nombre réel x , il existe au moins un entier naturel N supérieur strictement à x ".
2. L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse? Justifiez :
"Si le palmier nous donne des melons alors $5 - 3 = 3$ ".
3. Montrer par l'absurde que dans un triangle rectangle avec des côtés de longueurs a, b et c , on a : $a + b > c$.



Montrer la relation précédente par un raisonnement directe.

4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.
 - i. f est-elle injective? surjective? Justifiez vos réponses.
 - ii. Déterminer l'image directe par f de l'intervalle $[0, 2]$.
 - iii. Déterminer l'image réciproque par f de l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 2 : (06 points)

On considère la relation \mathcal{R} sur \mathbb{N}^* définie par :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^* : n\mathcal{R}m \iff \exists k \in \mathbb{N} : n = m^k.$$

1. Vérifier que \mathcal{R} est une relation d'ordre. Est-ce que l'ordre est total?
2. Déterminer l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, la borne supérieure et la borne inférieure de la partie $A = \{2, 4, 8\}$.

La partie A possède-t-elle un plus grand élément? un plus petit élément?

Exercice 3 : (04 points)

Soit E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :

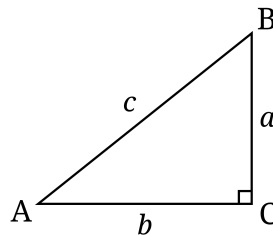
1. $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.
2. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

Corrigé de l'épreuve finale : Algèbre 1

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (10 points)

1. Écrire la proposition suivante avec des quantificateurs puis donnez sa négation :
"Pour tout nombre réel x , il existe au moins un entier naturel N supérieur strictement à x ".
2. L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifiez :
"Si le palmier nous donne des melons alors $5 - 3 = 3$ ".
3. Montrer par l'absurde que dans un triangle rectangle avec des côtés de longueurs a, b et c , on a : $a + b > c$.



Montrer la relation précédente par un raisonnement directe.

4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.
 - i. f est-elle injective ? surjective ? Justifiez vos réponses.
 - ii. Déterminer l'image directe par f de l'intervalle $[0, 2]$.
 - iii. Déterminer l'image réciproque par f de l'intervalle $[0, 1]$.

Solution Exercice 1 :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : N > x$. **0.25pt**. Sa négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N} : N \leq x$. **0.25pt**.
2. Notons par p : "le palmier nous donne des melons", et par q : " $5 - 3 = 3$ ". Alors l'assertion : "Si le palmier nous donne des melons alors $5 - 3 = 3$ " est vraie car l'implication $p \Rightarrow q$ est fausse dans le seul cas où p est vraie et q est fausse. **0.5pt**

3. Montrons par l'absurde que dans un triangle rectangle avec des côtés de longueurs a, b et c , on a : $a + b > c$.

Supposons que $a + b \leq c$ **0.5pt** $\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2 \leq c^2 = a^2 + b^2$ **0.5pt** (d'après le théorème de Pythagore). Ceci implique que $2ab \leq 0$ **0.5pt** contradiction car a, b sont des longueurs positives **0.5pt**. Donc on a bien $a + b > c$.

Raisonnement directe :

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, et d'après le théorème de Pythagore on a :

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab > c^2$$

car $a, b > 0$, ce qui entraîne que $a + b > c$. **0.5pt**

4. i. f n'est pas injective car l'équation $2x^2 - 4x + 1 = 0$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 telle que $0 < x_1 < x_2 < 2$. Donc $f(x_1) = f(x_2) = 0$ mais $x_1 \neq x_2$. **1pt**

Pour l'injectivité, on remarque que pour $y < -1$ l'équation $y = f(x)$ n'admet pas de solutions x c'est à dire pour un tel y il n'existe pas d'antécédant x . **1pt**

ii. L'image directe de $f([0, 2]) = \{f(x)/x \in [0, 2]\}$ **0.5pt**. On remarque que l'application f est décroissante sur $[0, 1]$ et croissante sur $[1, 2]$, donc

$$f([0, 2]) = f([0, 1] \cup [1, 2]) = f([0, 1]) \cup f([1, 2]) = [f(0), f(1)] \cup [f(1), f(2)].$$

Donc, $f([1, 2]) = [-1, 1] \cup [-1, 1] = [-1, 1]$. **1pt**

iii. L'image réciproque de $[0, 1]$:

$$f^{-1}([0, 1]) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in [0, 1]\}. **0.5pt**$$

Tout revient à trouver $x \in \mathbb{R}$ telle que $0 \leq f(x) \leq 1$. Commençons par $f(x) \geq 0$. Il suffit de résoudre l'inégalité $2x^2 - 4x + 1 \geq 0$. On peut montrer facilement que le $x \in] - \infty, x_1[\cup] x_2, +\infty[$. **1pt**

Pour le cas $f(x) \leq 1$, on a $2x^2 - 4x + 1 \leq 1 \Rightarrow 2x(x - 2) \leq 0$. Ce qui entraîne que $x \in [0, 2]$. **1pt**

L'image réciproque de $[0, 1]$ est l'intersection de $] - \infty, x_1[\cup] x_2, +\infty[$ et $[0, 2]$.

Donc

$$f^{-1}([0, 1]) = [0, x_1] \cup [x_2, 2]. **0.5pt**$$

Exercice 2 : (06 points)

On considère la relation \mathcal{R} sur \mathbb{N}^* définie par :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^* : n \mathcal{R} m \iff \exists k \in \mathbb{N} : n = m^k.$$

1. Vérifier que \mathcal{R} est une relation d'ordre. Est-ce que l'ordre est total ?

2. Déterminer l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, la borne supérieure et la borne inférieure de la partie $A = \{2, 4, 8\}$.

La partie A possède-t-elle un plus grand élément ? un plus petit élément ?

Solution Exercice 2 :

1. Montrons que \mathcal{R} est une relation d'ordre partiel sur \mathbb{N}^* :

— \mathcal{R} est réflexive car : $\forall n \in \mathbb{N} : n\mathcal{R}n \Leftrightarrow \exists k = 1 \in \mathbb{N}^* : n = n^1$. 0.5pt

— \mathcal{R} est anti-symétrique. En effet :

$$\begin{cases} n\mathcal{R}m \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N} : n = m^{k_1} \\ m\mathcal{R}n \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N} : m = n^{k_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^{k_2} = m^{k_1 k_2} \\ n = m^{k_1} \\ m = n^{k_2} \end{cases} \quad \text{0.5pt}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = m^{k_1 k_2} \\ n = m^{k_1} \\ m = n^{k_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m(1 - m^{k_1 k_2 - 1}) = 0 \\ n = m^{k_1} \\ m = n^{k_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 k_2 = 1 \text{ car } m \neq 0. \\ n = m^{k_1} \\ m = n^{k_2} \end{cases} \quad \text{0.5pt}$$

Ce qui donne que $k_1 = k_2 = 1$ et $n = m$. 0.5pt

— \mathcal{R} est transitive car :

$$\begin{cases} m\mathcal{R}n \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N} : m = n^{k_1} \\ n\mathcal{R}p \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N} : n = p^{k_2} \end{cases} \Rightarrow m = p^{k_1 k_2}. \quad \text{0.5pt}$$

$$\Rightarrow \exists k = k_1 k_2 \in \mathbb{N} : m = p^k \Rightarrow m\mathcal{R}p. \quad \text{0.5pt}$$

Conclusion : \mathcal{R} est une relation d'ordre partiel car par exemple 2 n'est pas en relation avec 3 et inversement. 0.5pt

2. M est un majorant de $A \Leftrightarrow \forall n \in A : n\mathcal{R}M$ 0.25pt $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = M^k$.

$$\begin{cases} 2 = M^{k_1}, k_1 \in \mathbb{N} \\ 4 = M^{k_2}, k_2 \in \mathbb{N} \\ 8 = M^{k_3}, k_3 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Le seul M qui convient est $M = 2$. L'ensemble des majorants $\mathcal{M} = \{2\}$ 0.25pt $\Rightarrow \text{Sup}A = 2$. 0.5pt

m est un minorant de $A \Leftrightarrow \forall n \in A : m\mathcal{R}n$ 0.25pt $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : m = n^k$.

$$\begin{cases} m = 2^{k_1}, k_1 \in \mathbb{N} \\ m = 4^{k_2}, k_2 \in \mathbb{N} \\ m = 8^{k_3}, k_3 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

L'ensemble des minorants $\mathcal{N} = \{64^k/k \in \mathbb{N}\}$ 0.25pt

$\Rightarrow \inf A$ n'existe pas. 0.5pt

A possède un plus grand élément $\max A = 2$ et ne possède pas de plus petit élément. 0.5pt

Exercice 3 : (04 points)

Soit E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :

1. $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.
2. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

Solution Exercice 3 :

1.

$$\begin{aligned}(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) &= (A \cap \overline{C}) \cap \overline{(B \cap \overline{C})} \\ &= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) \\ &= (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C} \cap C) \\ &= A \cap \overline{C} \cap \overline{B} \\ &= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\ &= A \cap \overline{(B \cup C)} \\ &= A \setminus (B \cup C). \quad \text{2pt}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \cup (A \setminus C) &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \\ &= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\ &= A \cap \overline{(B \cap C)} \\ &= A \setminus (B \cap C). \quad \text{2pt}\end{aligned}$$