Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire 2018-2019**
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques **Date : 27/01/2020**

1ère Année LMD MI Durée : 01H30.

Epreuve finale : Algèbre 1

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (05 points)

Soit $a > 0$. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1+a)^n \geqslant 1 + na.$$

Exercice 2 : (07 points)

Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^4 - y^4 = x^2 - y^2.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 0, en déduire celle de 1.
3. Déterminer la classe d'équivalence de x pour tout réel x.

Exercice 3 : (08 points)

On munit $\mathbb{R}^2$ de la loi :

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, *)$ est un groupe.
2. Montrer que :

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : x^2 + y^2 = 1\},$$

est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

3. Montrer que f définie par :

$$f(x, y) = x + iy,$$

est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, *)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2018-2019

Date : 27/01/2020

1ère Année LMD MI — Durée : 01H30.

Corrigé de l'épreuve finale : Algèbre 1

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (05 points)

Soit $a > 0$. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1+a)^n \geqslant 1 + na.$$

Solution :

Soit $a > 0$, et notons (P_n) la propriété : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

Pour $n = 0$ on a : $1 = (1+a)^0 \geqslant 1 + 0 \times a = 1$ c'est une proposition qui est vraie. 01pt

Supposons que la propriété (P_n) est vraie pour le rang (n) et montrons qu'elle reste vraie pour le rang $(n+1)$ 01pt

. En utilisant l'hypothèse de récurrence on a :

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geqslant (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2. \quad \boxed{01pt}$$

Or, $na^2 \geqslant 0$ 0.5pt donc $1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a$. 0.5pt

Ce qui entraine que

$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a. \quad \boxed{0.5pt}$$

Conclusion : (P_n) est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. 0.5pt

Exercice 2 : (07 points)

Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^4 - y^4 = x^2 - y^2.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 0, en déduire celle de 1.
3. Déterminer la classe d'équivalence de x pour tout réel x.

Solution :

1. Pour montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence il faut qu'elle soit : réflexive, symétrique et transitive. La réflexivité est obtenue en remplçant y par x. En effet :
$x^4 - x^4 = x^2 - x^2$, ceci veut dire que $\forall x \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}x$, donc la relation $\mathcal{R}$ est réflexive. $\boxed{0.5\text{pt}}$

Prenons $x, y \in \mathbb{R}$ et montrons que $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

$$x^4 - y^4 = x^2 - y^2$$

$$\Rightarrow (-1) \times (x^4 - y^4) = (-1) \times (x^2 - y^2)$$

$$\Rightarrow y^4 - x^4 = y^2 - x^2,$$

ce qui implique que $y\mathcal{R}x$. Donc la relation est symétrique. $\boxed{0.5\text{pt}}$

Maintenant, on prend $x, y, z \in \mathbb{R}$. Montrons que si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$. On aura deux équations $x^4 - y^4 = x^2 - y^2$ et $y^4 - z^4 = y^2 - z^2$. En faisant l'addition on obtient que $x^4 - z^4 = x^2 - z^2$. Ce qui veut dire que $x\mathcal{R}z$. $\boxed{0.5\text{pt}}$
Donc $\mathcal{R}$ est transitive.
Conclusion : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. $\boxed{0.5\text{pt}}$

2.

$$cl(0) = \{y \in \mathbb{R} / 0\mathcal{R}y\}. \boxed{0.5\text{pt}}$$

Or

$$0\mathcal{R}y \Leftrightarrow 0 - y^4 = 0 - y^2.$$

$$\Leftrightarrow y^4 - y^2 = y^2(y^2 - 1) = 0 \boxed{0.5\text{pt}} \Leftrightarrow y = 0 \vee y = -1 \vee y = 1.$$

Donc on conclut que $cl(0) = \{0, -1, 1\}$. $\boxed{0.5\text{pt}}$
On remarque que $1 \in cl(0)$ donc $cl(0) = cl(1)$. $\boxed{0.5\text{pt}}$

3.

$$cl(x) = \{y \in \mathbb{R} / x\mathcal{R}y\}. \boxed{0.5\text{pt}}$$

Soit $y \in cl(x)$ alors on a :

$$x^4 - y^4 = x^2 - y^2 \Leftrightarrow (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - (x + y)(x - y) = 0. \boxed{0.5\text{pt}}$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y)[x^2 + y^2 - 1] = 0 \boxed{0.5\text{pt}} \Leftrightarrow y = x \vee y = -x \vee x^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow y = x \vee y = -x \vee y^2 = 1 - x^2. \boxed{0.5\text{pt}}$$

Si $1-x^2<0$ c'est à dire $x\in]-\infty,-1[\cup]+1,+\infty[$ alors

$$cl(x)=\{x,-x\}. \boxed{0.5\text{pt}}$$

Si $1-x^2\geqslant 0$ c'est à dire $x\in[-1,+1]$ alors

$$cl(x)=\{x,-x,-\sqrt{1-x^2},+\sqrt{1-x^2}\}. \boxed{0.5\text{pt}}$$

Exercice 3 : (08 points)

On munit $\mathbb{R}^2$ de la loi :

$$(x_1,y_1)*(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1).$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},*)$ est un groupe.
2. Montrer que :$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}:x^2+y^2=1\}$, est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
3. Montrer que f définie par : $f(x,y)=x+iy$, est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},*)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Solution :

1. Montrons que $(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},*)$ est un groupe :

Montrons d'abord que la loi $*$ est interne c'est à dire que :

$$\forall(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}:(a_1,a_2)*(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Il faut prouver que $\forall(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}:(a_1,a_2)*(b_1,b_2)=(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1)\neq(0,0)$. Supposons le contraire, c'est à dire que $\exists(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1)=(0,0)$$

Ceci veut dire que

$$\begin{cases} a_1b_1-a_2b_2=0\\ a_2b_1+a_1b_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a_1b_1=a_2b_2\\ a_2b_1=-a_1b_2\end{cases}$$

En divisant terme à terme on aura

$$\frac{a_1b_1}{a_2b_1}=\frac{a_2b_2}{-a_1b_2},$$

en simplifiant car $(b_1,b_2)\neq(0,0)$, on obtient

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{-a_1},$$

c'est à dire que $a_1^2+a_2^2=0$ contradiction car $(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Conclusion : $*$ est une loi interne dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. $\boxed{0.5\text{pt}}$

a. Montrons que $*$ est associative i.e $\forall(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$(a_1,a_2)*((b_1,b_2)*(c_1,c_2))=((a_1,a_2)*(b_1,b_2))*(c_1,c_2).\ \boxed{0.5\text{pt}}$$

Calculons $(a_1,a_2)*((b_1,b_2)*(c_1,c_2))$.

$$(a_1,a_2)*((b_1,b_2)*(c_1,c_2))=(a_1,a_2)*(b_1c_1-b_2c_2,b_1c_2+b_2c_1)$$

$$\boxed{0.25\text{pt}}=(a_1(b_1c_1-b_2c_2)-a_2(b_1c_2+b_2c_1),a_2(b_1c_1-b_2c_2)+a_1(b_1c_2+b_2c_1))$$

$$\boxed{0.25\text{pt}}=(a_1b_1c_1-a_1b_2c_2-a_2b_1c_2-a_2b_2c_1,a_2b_1c_1-a_2b_2c_2+a_1b_1c_2+a_1b_2c_1)$$

Calculons $((a_1,a_2)*(b_1,b_2))*(c_1,c_2)$.

$$((a_1,a_2)*(b_1,b_2))*(c_1,c_2)=(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1)*(c_1,c_2)$$

$$\boxed{0.25}=(c_1(a_1b_1-a_2b_2)-c_2(a_1b_2+a_2b_1),c_2(a_1b_1-a_2b_2)+c_1(a_1b_2+a_2b_1))$$

$$\boxed{0.25\text{pt}}=(a_1b_1c_1-a_1b_2c_2-a_2b_1c_2-a_2b_2c_1,a_2b_1c_1-a_2b_2c_2+a_1b_1c_2+a_1b_2c_1)$$

Donc $*$ est associative.

b. Montrons qu'il existe un élément neutre $e=(e_1,e_2)$ dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ tel que

$$\forall(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}:(a_1,a_2)*(e_1,e_2)=(e_1,e_2)*(a_1,a_2)=(a_1,a_2).$$

$$(a_1,a_2)*(e_1,e_2)=(a_1,a_2)\Rightarrow(a_1e_1-a_2e_2,a_1e_2+a_2e_1)=(a_1,a_2)\ \boxed{0.5\text{pt}}$$

$$\begin{cases}a_1e_1-a_2e_2=a_1\\a_2e_1+a_1e_2=a_2\end{cases}$$

On résoud le système on trouve $e_1=1$ et $e_2=0$. Donc l'élément neutre à droite $e=(1,0)$. $\boxed{0.5\text{pt}}$ (l'élément neutre à gauche se déduit de la même manière)

c. Montrons que pour tout $a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, il existe un symétrique $(a_1,a_2)'=(a_1',a_2')$ dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, i.e

$$(a_1,a_2)*(a_1',a_2')=(e_1,e_2)=(a_1',a_2')*(a_1,a_2)=(1,0)\ \boxed{0.5\text{pt}}$$

$$(a_1,a_2)*(a_1',a_2')=(e_1,e_2)\Rightarrow(a_1a_1'-a_2a_2',a_1a_2'+a_2a_1')=(1,0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1a_1'-a_2a_2'=1\\a_2a_1'+a_1a_2'=0\end{cases}$$

On résoud le système on trouve

$$a_1' = \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} \boxed{0.25\text{pt}}, a_2' = \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} \boxed{0.25\text{pt}}$$

On remarque que si $a_1' = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow a_2 \neq 0$ car $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ce qui donne que $a_2' \neq 0$. Inversement, si $a_2' = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \Rightarrow a_1 \neq 0$ car $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ce qui donne que $a_1' \neq 0$. Donc a_1' et a_2' ne peuvent pas être nulles en même temps, c'est à dire que l'élément symétrique à droite $(a_1', a_2') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\boxed{0.5\text{pt}}$ (l'élément symétrique à gauche se déduit de la même manière).
Conclusion : $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, *)$ est un groupe.
2. Montrons que

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : x^2 + y^2 = 1\},$$

est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
a. $H \neq \emptyset$ car $e = (1,0) \in H$. $\boxed{0.5\text{pt}}$
b. Montrons que $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in H : (a_1, a_2) * (b_1', b_2') \in H$ où (b_1', b_2') est le symétrique de (b_1, b_2). Calculons $(a_1, a_2) * (b_1', b_2')$.

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) * (b_1', b_2') &= (a_1, a_2) * (\frac{b_1}{b_1^2 + b_2^2}, \frac{-b_2}{b_1^2 + b_2^2}) \\ &= (\frac{a_1 b_1}{b_1^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2}, \frac{-a_1 b_2}{b_1^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1}{b_1^2 + b_2^2})\end{aligned}$$

Puisque $(b_1, b_2) \in H$ alors $b_1^2 + b_2^2 = 1$, donc on a

$$(a_1, a_2) * (b_1', b_2') = (a_1 b_1 + a_2 b_2, -a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Pour que $(a_1, a_2) * (b_1', b_2') \in H$ il suffit que $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (-a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 = 1$. On a :

$$\begin{aligned}(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (-a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 &= a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2. \\ &= a_1^2 (b_1^2 + b_2^2) + a_2^2 (b_1^2 + b_2^2). \\ &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = 1,\end{aligned}$$

car par hypothèse (a_1, a_2) et $(b_1, b_2) \in H$ c'est à dire que $a_1^2 + a_2^2 = 1$ et $b_1^2 + b_2^2 = 1$ ce qui nous permet de conclure que $(a_1, a_2) * (b_1', b_2') \in H$. $\boxed{01\text{pt}}$
Conclusion : H est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

3. Montrons que f définie par :

$$f(x, y) = x + iy,$$

est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, *)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
f est un morphisme de groupes si et seulement si

$\forall (a_1, a_2) * (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : f((a_1, a_2) * (b_1, b_2)) = f(a_1, a_2) \times f(b_1, b_2).$ $\boxed{0.5\text{pt}}$

On a :

$$\begin{aligned} f((a_1, a_2) * (b_1, b_2)) &= f(a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ &= a_1 b_1 - a_2 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ &= a_1 b_1 + i^2 a_2 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ &= a_1(b_1 + ib_2) + ia_2(b_1 + ib_2) \\ &= (a_1 + ia_2)(b_1 + ib_2) \\ &= f(a_1, a_2) \times f(b_1, b_2) \boxed{01{,}5\text{pt}} \end{aligned}$$