

Contrôle continu : Algèbre 1

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (08 points)

Notons E l'ensemble des étudiants de La Rocade, et S l'ensemble des jours de la semaine. Pour l'étudiant $x \in E$, on note $h_j(x)$ son heure de réveil le jour $j \in S$. Ecrivez avec des quantificateurs les propositions suivantes et donner ensuite leurs négations :

1. Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h.
2. Il y a au moins un jour dans lequel tout les étudiants se réveillent avant 8h.
3. Il y a au moins un jour dans lequel un étudiant ne se réveille pas avant 8h.
4. Il y a au moins un étudiant qui se réveille pas au moins un jour de la semaine avant 8h.
5. Tout les jours de la semaine chaque étudiant se réveille avant 8h.

Exercice 2 : (06 points)

1. Donnez la définition de deux ensembles disjoints.
2. Soient E un ensemble, A et B deux parties de E . On suppose que

$$A \cap B \neq \emptyset \text{ et } A \cup B \neq E.$$

On pose : $A_1 = A \cap B$ et $A_2 = C_E(A \cup B)$.

1. Montrer que A_1 et A_2 sont disjoints.
2. Montrer que si $A \subset B$ alors $C_E(B) \subset C_E(A)$.

Exercice 3 : (06 points)

1. Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x^2 - x - 1 - y = 0$.
2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

3. Soit $g : \left[\frac{1}{2}; +\infty[\rightarrow \left[-\frac{5}{4}; +\infty[$ définie par $g(x) = f(x)$. Montrer que g est bijective.

Corrigé du Contrôle continu : Algèbre 1

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (08 points)

Notons E l'ensemble des étudiants de La Rocade, et S l'ensemble des jours de la semaine. Pour l'étudiant $x \in E$, on note $h_j(x)$ son heure de réveil le jour $j \in S$. Ecrivez avec des quantificateurs les propositions suivantes et donner ensuite leurs négations :

1. Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h.
2. Il y a au moins un jour dans lequel tout les étudiants se réveillent avant 8h.
3. Il y a au moins un jour dans lequel un étudiant ne se réveille pas avant 8h.
4. Il y a au moins un étudiant qui se réveille pas au moins un jour de la semaine avant 8h.
5. Tout les jours de la semaine chaque étudiant se réveille avant 8h.

Solution :

1.

$$\forall x \in E \text{ [0,25pt]}, \exists j \in S \text{ [0,25pt]} : h_j(x) < 8. \text{ [0,25pt]}$$

Sa négation est : $\exists x \in E \text{ [0,25pt]}, \forall j \in S \text{ [0,25pt]} : h_j(x) \geq 8. \text{ [0,25pt]}$

2.

$$\exists j \in S \text{ [0,25pt]}, \forall x \in E \text{ [0,25pt]} : h_j(x) < 8. \text{ [0,25pt]}$$

Sa négation est : $\forall j \in S \text{ [0,25pt]}, \exists x \in E \text{ [0,25pt]} : h_j(x) \geq 8. \text{ [0,25pt]}$

3.

$$\exists j \in S \text{ [0,25pt]}, \exists ! x_0 \in E \text{ [0,5pt]} : h_j(x_0) \geq 8. \text{ [0,25pt]}$$

Sa négation est :

$$\forall j \in S \text{ [0,25pt]}, (\nexists x \in E) \vee (\forall x \neq x_0 \in E) \text{ [0,5pt]} : h_j(x) < 8. \text{ [0,25pt]}$$

4.

$$\exists x \in E \text{ [0,25pt]}, \exists j \in S \text{ [0,25pt]} : h_j(x) \geq 8. \text{ [0,25pt]}$$

Sa négation est : $\forall x \in E \text{ [0,25pt]}, \forall j \in S \text{ [0,25pt]} : h_j(x) < 8. \text{ [0,25pt]}$

5.

$$\forall j \in S \text{ [0,25pt]}, \forall x \in E \text{ [0,25pt]} : h_j(x) < 8. \text{ [0,25pt]}$$

Sa négation est : $\exists j \in S \text{ [0,25pt]}, \exists x \in E \text{ [0,25pt]} : h_j(x) \geq 8. \text{ [0,25pt]}$

Exercice 2 : (06 points)

1. Donnez la définition de deux ensembles disjoints.
2. Soient E un ensemble, A et B deux parties de E . On suppose que

$$A \cap B \neq \emptyset \text{ et } A \cup B \neq E.$$

On pose : $A_1 = A \cap B$ et $A_2 = C_E(A \cup B)$.

1. Montrer que A_1 et A_2 sont disjoints.
2. Montrer que si $A \subset B$ alors $C_E(B) \subset C_E(A)$.

Solution :

1. On dit que deux ensembles A et B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$. 1pt
2. Montrons que A_1 et A_2 sont disjoints. Il suffit de vérifier que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= (A \cap B) \cap C_E(A \cup B) \\ &= (A \cap B) \cap (C_E(A) \cap C_E(B)). \quad \text{0.5pt} \\ &= A \cap B \cap C_E(A) \cap C_E(B) \\ &= A \cap (B \cap C_E(B)) \cap C_E(A). \quad \text{0.5pt} \end{aligned}$$

Puisque $B \cap C_E(B) = \emptyset$ 0.5pt et $A \cap C_E(A) = \emptyset$ 0.5pt, on obtient

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset. \quad \text{0.5pt}$$

3. Montrons que si $A \subset B$ alors $C_E(B) \subset C_E(A)$.
Soit $x \in C_E(B)$ 0.5pt. Ceci implique que $x \notin B$. 0.5pt Par conséquent $x \notin A$ car $A \subset B$ 0.5pt. Donc $x \in C_E(A)$ 0.5pt.
Conclusion : $C_E(B) \subset C_E(A)$. 0.5pt

Exercice 3 : (06 points)

1. Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x^2 - x - 1 - y = 0$.
2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

3. Soit $g : \left[\frac{1}{2}; +\infty[\rightarrow \left[-\frac{5}{4}; +\infty[$ définie par $g(x) = f(x)$. Montrer que g est bijective.

Solution :

1. $x^2 - x - 1 - y = 0$: une équation du second ordre. Calculons son discriminant : $\Delta = 1 - 4(-1 - y) = 5 + 4y$. 0.5pt

- Si $y < -\frac{5}{4}$, $\Delta < 0$ donc y'a pas de solutions dans $\mathbb{R} \Rightarrow S = \emptyset$. 0.5pt
- Si $y = -\frac{5}{4}$, $\Delta = 0$ donc racine double $x = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \{\frac{1}{2}\}$. 0.5pt
- Si $y > -\frac{5}{4}$, $\Delta > 0$ donc deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5 + 4y}}{2} \vee x_2 = \frac{1 - \sqrt{5 + 4y}}{2}.$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5 + 4y}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5 + 4y}}{2} \right\}. \quad \text{0.5pt}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - x - 1$.

Concernant la surjectivité, et d'après la question 1, on peut voir que pour $y < -\frac{5}{4}$ 0.5pt l'équation $y = f(x)$ n'admet pas de solutions i.e pour un tel y il n'y a pas d'antécédents donc f n'est pas surjective. 0.5pt

Pour l'injectivité, et si on cherche les racines de l'équation $f(x) = 0$ (en prend $y = 0$ dans la question 1) on trouve $z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, i.e $f(z_1) = f(z_2)$ mais $z_1 \neq z_2$ donc f n'est pas injective. 0.5pt

3. Soit $g : [\frac{1}{2}; +\infty[\rightarrow [-\frac{5}{4}; +\infty[$ définie par $g(x) = f(x)$.

D'après la question 1, l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution si $y \geq -\frac{5}{4}$. 0.5pt

Pour que g soit bijective, il faut une et une seule solution 0.5pt de l'équation $y = g(x)$ puisque $g(x) = f(x)$.

Les solutions sont

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5 + 4y}}{2}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{5 + 4y}}{2}.$$

On peut vérifier que $x_2 - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5 + 4y}}{2} \geq 0 \Rightarrow x_2 \geq \frac{1}{2}$, 0.5pt et que

$x_1 - \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{5 + 4y}}{2} \leq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{1}{2}$ 0.5pt. Ce dernier est exclu 0.5pt car

il n'est pas dans $[\frac{1}{2}; +\infty[$. Donc g est bijective.