

**Epreuve de Rattrapage : Algèbre 1**

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

**Exercice 1 : (05 points)**

Montrer par récurrence ce qui suit :

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = (2(1) - 1) + (2(2) - 1) + \dots + (2(n) - 1) = n^2.$$

**Exercice 2 : (07 points)**

Soit  $\mathcal{R}$ , la relation définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}.$$

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de  $a \in \mathbb{R}^*$ .

**Exercice 3 : (08 points)**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ .

1. Calculer  $f(\frac{1}{2})$ ,  $f(2)$ ,  $f(0)$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = -2$ .
3. Déterminer l'image directe de  $\mathbb{R}$ .
4. L'application  $f$  est-elle injective? surjective? Justifier.
5. Montrer que l'application  $g : [-1; +1] \rightarrow [-1; +1]$  définie par  $g(x) = f(x)$  est une bijection et donner sa réciproque.

Epreuve de Rattrapage : Algèbre 1

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (05 points)

Montrer par récurrence ce qui suit :

$(P_n) : \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 = B_n$

$A_n$

• pour  $n=1$ ,  $(P_1)$  est vraie car :  
 $\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 2(1) - 1 = 1 = 1^2$  01pt

Supposons que  $(P_n)$  est vraie, Mg  $(P_{n+1})$  est vraie 01pt

$$A_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)$$
$$= \sum_{k=1}^n (2k-1) + (2(n+1) - 1)$$

H.R 01pt

$$= n^2 + 2n + 1$$
$$= (n+1)^2$$
$$= B_{n+1} \quad \text{01pt}$$

## Exercice 2 : (07 points)

Soit  $\mathcal{R}$ , la relation définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}.$$

1,5 pt

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de  $a \in \mathbb{R}^*$ .

1.  $\mathcal{R}$  relation d'équivalence ( $\Rightarrow$ )

pour  $x \in \mathbb{R}^*$

$$x\mathcal{R}x \Rightarrow x - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow 0 = 0$$

$\mathcal{R}$  réflexive

0,5 pt

pour  $x, y \in \mathbb{R}^*$

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \Rightarrow y - \frac{1}{y} = x - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y\mathcal{R}x$$

$\mathcal{R}$  symétrique

0,5 pt

pour  $x, y, z \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ y - \frac{1}{y} = z - \frac{1}{z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{x} = z - \frac{1}{z}$$

$\Rightarrow \mathcal{R}$  transitive.

0,5 pt

cl:  $\mathcal{R}$  relation d'équivalence.

0,5 pt

$$2. \quad \dot{a} = \left\{ x \in \mathbb{R}^* \mid x \in \mathbb{Q}a \right\} \quad 0,1 \text{ pt}$$

$$x \in \mathbb{Q}a \Rightarrow x - \frac{1}{x} = a - \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow x - a = \frac{1}{x} - \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow x - a = \frac{a - x}{xa}$$

$$\Rightarrow x - a - \frac{a - x}{xa} = 0$$

$$\Rightarrow (x - a) \left[ 1 + \frac{1}{xa} \right] = 0 \quad 0,5 \text{ pt}$$

$$\Rightarrow (x - a) \left( \frac{xa + 1}{xa} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x - a = 0 \quad \vee \quad xa + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = a \quad \vee \quad x = -\frac{1}{a} \quad 0,5 \text{ pt}$$

$$\underline{\mathcal{Q}}: \quad \dot{a} = \left\{ a, -\frac{1}{a} \right\} \quad 0,2 \text{ pt}$$

### Exercice 3 : (08 points)

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ .

1. Calculer  $f(\frac{1}{2})$ ,  $f(2)$ ,  $f(0)$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = -2$ .
3. Déterminer l'image directe de  $\mathbb{R}$ .
4. L'application  $f$  est-elle injective? surjective? Justifier.
5. Montrer que l'application  $g : [-1; +1] \rightarrow [-1; +1]$  définie par  $g(x) = f(x)$  est une bijection et donner sa réciproque.

1 -  $f(0) = 0$  ,  $f(2) = \frac{4}{5}$  ,  $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{5}$

2 -  $f(x) = -2 \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} = -2$

$$\Rightarrow 2x = -2 - 2x$$

$$\Rightarrow 2(1+x+x^2) = 0$$

$$\Rightarrow 1+x+x^2 = 0$$

$\Delta < 0 \Rightarrow$  pas de solutions de  $\mathbb{R}$

$\Rightarrow S = \emptyset$  0,5 pt

$$3 - f(\mathbb{R}) = ? \quad (1+x)^2 = 1+x^2+2x \geq 0$$

$$\Rightarrow 1+x^2 \geq -2x$$

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{-2x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} = f(x)$$

la même chose pour  $(1-x)^2 = 1+x^2-2x \geq 0$

On trouve :  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$

cl :  $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$  0.2 pt

4. D'après 1/  $f$  n'est pas injective

0.5 pt car  $f(1/2) = f(2)$  mais  $1/2 \neq 2$ .

et d'après 2/  $\nexists x \in \mathbb{R} / f(x) = -2$

donc  $f$  n'est pas surjective. 0.5 pt

5.  $g: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1] / g(x) = f(x)$

Montrons que  $g$  est injective :

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1}{1+x_1} = \frac{2x_2}{1+x_2}$$

$$\Rightarrow 2x_1(1+x_2) = 2x_2(1+x_1)$$

$$\Rightarrow x_1 + x_1x_2 = x_2 + x_2x_1$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = x_2x_1 - x_1x_2$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = x_1x_2(x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 - (x_1 - x_2)(x_1x_2) = 0$$

**Multipl**  $\Rightarrow (x_1 - x_2)[1 - x_1x_2] = 0$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2) = 0 \vee \underbrace{x_1x_2 = 1}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad \downarrow$$
$$x_1 = x_2 = 1$$

ou

$$x_1 = x_2 = -1$$

donc  $g$  est injective.

Montrons que  $g$  est surjective:

On résout l'équation  $y = \frac{2x}{1+x^2}$

$$\Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0$$

$$\Delta_y = 4 - 4y^2 = 4(1-y^2) \geq 0$$

car  $y \in [-1, 1]$ .

donc l'équation  $y = g(x)$  admet 2

solutions

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y}$$

( $y \neq 0$ )

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} \notin [-1, 1]$$

OK pt

Si  $y=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow g$  est surjective

Q:  $g$  est bijective.