

## Epreuve finale : Algèbre 1

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

### Exercice 1 : (06 points)

Dans  $\mathbb{N}^*$ , on définit la relation  $\mathcal{R}$  par :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^* : m\mathcal{R}n \iff \exists k \in \mathbb{N}^* : n = km.$$

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre partiel sur  $\mathbb{N}^*$ .
2. Déterminer l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, la borne supérieure et la borne inférieure de la partie  $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . La partie  $A$  possède-t-elle un plus grand élément ? un plus petit élément ?

### Exercice 2 : (08 points)

Soit  $G = ]-1, +1[$  muni de la loi interne  $*$  où  $a * b = \frac{a + b}{1 + ab}$ .

1. Montrer que  $(G, *)$  est un groupe abélien.
2. Soit  $x$ , un réel strictement positif fixé. On forme l'ensemble :

$$H_x = \left\{ \frac{x^n - 1}{x^n + 1} / n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Montrer que  $H_x$  est un sous-groupe de  $(G, *)$ .

### Exercice 3 : (06 points)

Soient  $X, X'$  deux ensembles et  $f : X \rightarrow X'$  une application.

1. Rappeler la définition de  $f^{-1}(B)$  (image réciproque) pour une partie  $B \subset X'$ .
2. Montrer que  $\forall C, D \subset X' : f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ .
3. Montrer que  $\forall B \subset X' : f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$ .
4. En déduire que  $\forall C, D \subset X' : f^{-1}(\overline{C \cup D}) = f^{-1}(\overline{C}) \cap f^{-1}(\overline{D})$ .

**Corrigé de l'épreuve finale : Algèbre 1**

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

**Exercice 1 : (06 points)**

Dans  $\mathbb{N}^*$ , on définit la relation  $\mathcal{R}$  par :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^* : m\mathcal{R}n \iff \exists k \in \mathbb{N}^* : n = km.$$

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre partiel sur  $\mathbb{N}^*$ .
2. Déterminer l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, la borne supérieure et la borne inférieure de la partie  $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

La partie  $A$  possède-t-elle un plus grand élément ? un plus petit élément ?

**Solution Exercice 1 :**

1. Montrons que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre partiel sur  $\mathbb{N}^*$  :

- $\mathcal{R}$  est réflexive car :  $\forall n \in \mathbb{N}^* : n\mathcal{R}n \iff \exists k = 1 \in \mathbb{N}^* : n = 1.n.$  0.5pt
- $\mathcal{R}$  est anti-symétrique. En effet :

$$\begin{cases} m\mathcal{R}n \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^* : n = k_1m \\ n\mathcal{R}m \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}^* : m = k_2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = k_1k_2n \\ n = k_1m \\ m = k_2n \end{cases} \quad \text{0.5pt}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n(1 - k_1k_2) = 0 \\ n = k_1m \\ m = k_2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1k_2 = 1 \text{ car } n \neq 0. \\ n = k_1m \\ m = k_2n \end{cases} \quad \text{0.5pt}$$

Ce qui donne que  $k_1 = k_2 = 1$  et  $n = m.$  0.5pt

- $\mathcal{R}$  est transitive car :

$$\begin{cases} m\mathcal{R}n \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^* : n = k_1m \\ n\mathcal{R}p \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}^* : p = k_2n \end{cases} \Rightarrow p = k_1k_2m. \quad \text{0.5pt}$$

$$\Rightarrow \exists k = k_1k_2 \in \mathbb{N}^* : p = km \Rightarrow m\mathcal{R}p. \quad \text{0.5pt}$$

**Conclusion :**  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre partiel car par exemple 2 n'est pas en relation avec 3 et inversement. 0.5pt

2.  $M$  est un majorant de  $A \Leftrightarrow \forall n \in A : n \mathcal{R} M \quad \boxed{0.25\text{pt}} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : M = kn.$

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 4k_1, k_1 \in \mathbb{N}^* \\ M = 5k_2, k_2 \in \mathbb{N}^* \\ M = 6k_3, k_3 \in \mathbb{N}^* \\ M = 7k_4, k_4 \in \mathbb{N}^* \\ M = 8k_5, k_5 \in \mathbb{N}^* \\ M = 9k_6, k_6 \in \mathbb{N}^* \\ M = 10k_7, k_7 \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$$

Le seul  $M$  qui convient est le plus petit commun multiple de 4,5,6,7,8,9 et 10 i.e  $M = 2520.$   
L'ensemble des majorants  $\mathcal{M} = \{2520p / p \in \mathbb{N}^*\} \quad \boxed{0.25\text{pt}} \Rightarrow \text{Sup}A = 2520. \quad \boxed{0.5\text{pt}}$

$m$  est un minorant de  $A \Leftrightarrow \forall n \in A : m \mathcal{R} n \quad \boxed{0.25\text{pt}} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : n = km.$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 = mk_1, k_1 \in \mathbb{N}^* \\ 5 = mk_2, k_2 \in \mathbb{N}^* \\ 6 = mk_3, k_3 \in \mathbb{N}^* \\ 7 = mk_4, k_4 \in \mathbb{N}^* \\ 8 = mk_5, k_5 \in \mathbb{N}^* \\ 9 = mk_6, k_6 \in \mathbb{N}^* \\ 10 = mk_7, k_7 \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$$

Le seul  $m$  qui convient est le plus grand commun diviseur de 4,5,6,7,8,9 et 10 i.e  $m = 1.$   
L'ensemble des minorants  $\mathcal{N} = \{1\} \quad \boxed{0.25\text{pt}} \Rightarrow \text{inf}A = 1. \quad \boxed{0.5\text{pt}}$

$A$  ne possède ni plus grand élément ni plus petit élément. 0.5pt

### Exercice 2 : (08 points)

Soit  $G = ]-1, +1[$  muni de la loi interne  $*$  où  $a * b = \frac{a+b}{1+ab}.$

1. Montrer que  $(G, *)$  est un groupe abélien.
2. Soit  $x$ , un réel strictement positif fixé. On forme l'ensemble :

$$H_x = \left\{ \frac{x^n - 1}{x^n + 1} / n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Montrer que  $H_x$  est un sous-groupe de  $(G, *)$ .

#### Solution Exercice 2 :

1. Montrons que  $(G, *)$  est un groupe abélien :

a. Montrons que  $*$  est associative i.e  $\forall a, b, c \in G : a * (b * c) = (a * b) * c. \quad \boxed{0.5\text{pt}}$

$$a * (b * c) = a * \left( \frac{b+c}{1+bc} \right) = \frac{a + \frac{b+c}{1+bc}}{1 + a \left( \frac{b+c}{1+bc} \right)} = \frac{a + abc + b + c}{1 + bc + ab + ac}. \quad \boxed{0.25\text{pt}}$$

$$(a * b) * c = \left( \frac{a+b}{1+ab} \right) * c = \frac{\frac{a+b}{1+ab} + c}{1 + c \frac{a+b}{1+ab}} = \frac{a + b + c + abc}{1 + ab + ca + cb}. \quad \boxed{0.25\text{pt}}$$

Donc  $*$  est associative.

b. Montrons qu'il existe un élément neutre  $e$  dans  $G$  tel que

$$\forall a \in G : a * e = e * a = a \quad \boxed{0.5\text{pt}}$$

$$a * e = a \Rightarrow \frac{a + e}{1 + ae} = a \Rightarrow a + e = a + a^2e \Rightarrow e(a^2 - 1) = 0 \quad \boxed{0.25\text{pt}}$$

Ce qui implique que  $e = 0 \in G$  car  $a^2 \neq 1$ .  $\boxed{0.25\text{pt}}$

c. Montrons que pour tout  $a \in G$ , il existe un symétrique  $a'$  (inverse  $a^{-1}$ ) dans  $G$ , i.e

$$a * a' = e \quad \boxed{0.5\text{pt}} \Rightarrow \frac{a + a'}{1 + aa'} = 0 \Rightarrow a + a' = 0 \Rightarrow a' = -a \in G. \quad \boxed{0.5\text{pt}}$$

Notons que  $1 + aa' \neq 0$  (elle est même strictement positive).

d. La loi  $*$  est commuative car :

$$\forall a, b \in G : a * b = \frac{a + b}{1 + ab} = \frac{b + a}{1 + ba} = b * a. \quad \boxed{0.5\text{pt}}$$

**Conclusion :**  $(G, *)$  est un groupe abélien.  $\boxed{0.5\text{pt}}$

2. Montrons que  $H_x = \left\{ \frac{x^n - 1}{x^n + 1} / n \in \mathbb{Z} \right\}$  est un sous-groupe de  $G$  :

On remarque que  $H_x \subset G$ . En effet soit  $a = \frac{x^n - 1}{x^n + 1} \in H_x$ . Pour montrer qu'il est dans  $G$  il suffit de montrer que  $-1 < a < +1$ .

$$a - 1 = \frac{x^n - 1}{x^n + 1} - 1 = \frac{-2}{x^n + 1} < 0 \quad \boxed{0.25\text{pt}}$$

$$a + 1 = \frac{x^n - 1}{x^n + 1} + 1 = \frac{2x^n}{x^n + 1} > 0 \quad \boxed{0.25\text{pt}}$$

a.  $H_x \neq \emptyset$  car  $e = 0 \in H_x$  (pour  $n = 0$  on obtient  $e = 0$ ).  $\boxed{01\text{pt}}$

b. Montrons que  $\forall a, b \in H_x : a * b^{-1} \in H_x$  ( $b^{-1} = b'$ ).

Prenons  $a = \frac{x^n - 1}{x^n + 1}, n \in \mathbb{Z}$   $\boxed{0.5\text{pt}}$  et  $b = \frac{x^p - 1}{x^p + 1}, p \in \mathbb{Z}$   $\boxed{0.5\text{pt}}$ . Calculons  $a * b^{-1}$ .

Calculons d'abord  $b^{-1} = b' = -b = \frac{1 - x^p}{x^p + 1}$ .  $\boxed{0.5\text{pt}}$

$$a * b^{-1} = \frac{\frac{x^n - 1}{x^n + 1} + \frac{1 - x^p}{x^p + 1}}{1 + \left(\frac{x^n - 1}{x^n + 1}\right)\left(\frac{1 - x^p}{x^p + 1}\right)} = \frac{(x^n - 1)(x^p + 1) + (1 - x^p)(x^n + 1)}{(x^n + 1)(x^p + 1) + (x^n - 1)(1 - x^p)} \quad \boxed{0.5\text{pt}}$$

$$\Rightarrow a * b^{-1} = \frac{x^n - x^p}{x^n + x^p} = \frac{x^p}{x^p} \left( \frac{x^{n-p} - 1}{x^{n-p} + 1} \right) = \frac{x^{n-p} - 1}{x^{n-p} + 1} \in H_x. \quad \boxed{0.5\text{pt}}$$

**Exercice 3 : (06 points)**

Soient  $X, X'$  deux ensembles et  $f : X \rightarrow X'$  une application.

1. Rappeler la définition de  $f^{-1}(B)$  (image réciproque) pour une partie  $B \subset X'$ .
2. Montrer que  $\forall C, D \subset X' : f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ .
3. Montrer que  $\forall B \subset X' : f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$ .
4. En déduire que  $\forall C, D \subset X' : f^{-1}(\overline{C \cup D}) = f^{-1}(\overline{C}) \cap f^{-1}(\overline{D})$ .

**Solution Exercice 3 :**

1. Pour  $B \subset X'$ ,  $f^{-1}(B) = \{x \in X / f(x) \in B\}$ . 01pt

2. Montrons que  $\forall C, D \subset X' : f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ .

" $\subset$ " : Soit  $x \in f^{-1}(C \cup D) \Rightarrow f(x) \in C \cup D \Rightarrow f(x) \in C$  ou  $f(x) \in D$ .

$\Rightarrow x \in f^{-1}(C)$  ou  $x \in f^{-1}(D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ . 01pt

" $\supset$ " : De la même manière on démontre l'inclusion inverse. 01pt

3. Montrons que  $\forall B \subset X' : f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$ .

" $\subset$ " : Soit  $x \in f^{-1}(\overline{B}) \Rightarrow f(x) \in \overline{B} \Rightarrow f(x) \notin B \Rightarrow x \notin f^{-1}(B) \Rightarrow x \in \overline{f^{-1}(B)}$ . 01pt

" $\supset$ " : De la même manière on démontre l'inclusion inverse. 01pt

4. D'après ce qui précède, et en remplaçant  $B$  par  $C \cup D$  on obtient :

$$f^{-1}(\overline{C \cup D}) = \overline{f^{-1}(C \cup D)}. \quad \text{0.25pt}$$

$$= \overline{f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)}. \quad \text{0.25pt}$$

$$= \overline{f^{-1}(C)} \cap \overline{f^{-1}(D)}. \quad \text{0.25pt}$$

$$= f^{-1}(\overline{C}) \cap f^{-1}(\overline{D}). \quad \text{0.25pt}$$