

Corrigé du Contrôle continu : Algèbre 1

Exercice 1 : (06 points)

Dans une promo à l'université de Tlemcen, il n'y a que deux étudiants Mohamed et Selma qui vont passer le rattrapage des trois matières suivantes : Algèbre, Analyse et Informatique. Les résultats des étudiants sont donnés dans le tableau suivant :

	Algèbre	Analyse	Informatique
Mohamed	12	5	16
Selma	14	15	7

Soit $E = \{Mohamed, Selma\}$ l'ensemble des étudiants.

Notons par $F = \{Algèbre, Analyse, Informatique\}$ l'ensemble des matières.

Pour tout x dans E et tout y dans F , on désigne par $P(x, y)$ l'expression :

” l'étudiant x a la moyenne (10 ou plus) dans la matière y ”.

Dire en justifiant si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\forall x \in E, \forall y \in F : P(x, y)$,
2. $\exists x \in E, \exists y \in F : P(x, y)$,
3. $\exists x \in E, \forall y \in F : P(x, y)$,
4. $\forall y \in F, \exists x \in E : P(x, y)$.
5. $\exists y \in F, \forall x \in E : \overline{P(x, y)}$.
6. $\exists y \in F, \forall x \in E : P(x, y)$.

Solution :

1. $\forall x \in E, \forall y \in F : P(x, y)$, est **fausse** 0.5pt car Mohamed n'a pas la moyenne en Analyse. 0.5pt

2. $\exists x \in E, \exists y \in F : P(x, y)$, est **vraie** 0.5pt car Selma a la moyenne en Algèbre. 0.5pt

3. $\exists x \in E, \forall y \in F : P(x, y)$, est **fausse** 0.5pt car pour les deux étudiants il existe une matière où ils n'ont pas la moyenne. 0.5pt

4. $\forall y \in F, \exists x \in E : P(x, y)$, est **vraie** 0.5pt car d'après le tableau dans toute les matières il existe un étudiant qui a la moyenne. 0.5pt

5. $\exists y \in F, \forall x \in E : \overline{P(x, y)}$, est **fausse** 0.5pt car y'a pas une matière où tout les étudiants n'ont pas la moyenne. 0.5pt

6. $\exists y \in F, \forall x \in E : P(x, y)$, est **vraie** 0.5pt car en Algèbre Mohamed et Selma ont la moyenne. 0.5pt

Exercice 2 : (06 points)

On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

1. Démontrer par l'absurde que si $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = b = 0$.
2. En déduire que si $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$, alors

$$(m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2}) \Rightarrow (m = p \text{ et } n = q).$$

Solution :

1. Par l'absurde : Supposons que pour tout $a, b \in \mathbb{Z} : a + b\sqrt{2} = 0$ 0.5pt et $(a \neq 0 \vee b \neq 0)$ 0.5pt.

– Si $b \neq 0$ 0.5pt alors

$$a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sqrt{2} = -\frac{a}{b}, \text{ 0.5pt}$$

contradiction avec l'hypothèse que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. 0.5pt

– Si $a \neq 0$, et $b = 0$ on trouvera $a = 0$ contradiction car a est supposé nul. 0.5pt

2. Pour $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$:

$$(m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2}) \Rightarrow (m - p) + (n - q)\sqrt{2} = 0. \text{ 0.5pt}$$

Puisque $m - p \in \mathbb{Z}$ 0.5pt, $n - q \in \mathbb{Z}$ 0.5pt et en utilisant la question 1 0.5pt, on obtient

$$(m - p = n - q = 0) \text{ 0.5pt} \Rightarrow (m = p \text{ et } n = q). \text{ 0.5pt}$$

Exercice 3 : (08 points)

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $-x^2 + x = 0$.
2. Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, résoudre dans \mathbb{R} l'équation $-x^2 + x - y = 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(1 - x)$.
 - a. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f .
 - b. Soit $g : \left[\frac{1}{2}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$. Montrer que g est injective.
4. Montrer que $g : \left[\frac{1}{2}; \infty[\rightarrow \right] -\infty; \frac{1}{4}]$ définie par $g(x) = f(x)$ est bijective.

Solution :

1. $-x^2 + x = 0 \Rightarrow x(1 - x) = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee x = 1) \Rightarrow S = \{0, 1\}$. 0.5pt

2. $-x^2 + x - y = 0$: une équation du second ordre. Calculons son discriminant : $\Delta = 1 - 4(-1)(-y) = 1 - 4y$. 0.5pt

- Si $y > \frac{1}{4}$, $\Delta < 0$ donc y'a pas de solutions dans $\mathbb{R} \Rightarrow S = \emptyset$. 0.5pt

- Si $y = \frac{1}{4}$, $\Delta = 0$ donc racine double $x = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \{\frac{1}{2}\}$. 0.5pt

- Si $y < \frac{1}{4}$, $\Delta > 0$ donc deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4y}}{-2} \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4y}}{-2}.$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{1 - 4y}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4y}}{2} \right\}. \text{ 0.5pt}$$

3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(1 - x)$.

a. D'après la question 1, $f(0) = f(1)$ mais $1 \neq 0$ donc f n'est pas injective. 0.5pt Concernant la surjectivité, et d'après la question 2, on peut voir que pour $y > \frac{1}{4}$ l'équation $y = f(x)$ n'admet pas de solutions i.e pour un tel y il n'y a pas d'antécédents donc f n'est pas surjective. 0.5pt

b. Soit $g : \left[\frac{1}{2}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$. Montrer que g est injective.

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{2}, +\infty[: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2. \text{ 0.5pt}$$

Soient x_1 et x_2 dans $\left[\frac{1}{2}, +\infty[:$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1(1 - x_1) = x_2(1 - x_2).$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = x_1^2 - x_2^2.$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2).$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0. \text{ 0.5pt}$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)[1 - x_1 - x_2] = 0.$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2 = 0) \vee (1 - x_1 - x_2 = 0). \text{ 0.5pt}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 + x_2 = 1.$$

$x_1 + x_2 = 1$ est exclu **0.5pt** car $x_2 = 1 - x_1 \leq \frac{1}{2}$. **0.5pt** Donc $x_1 = x_2$ et par conséquent f est injective.

4. Soit $g : \left[\frac{1}{2}; \infty[\rightarrow \right] - \infty; \frac{1}{4}]$ définie par $g(x) = f(x)$.

D'après la question 2, l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution si $y \leq \frac{1}{4}$. **0.5pt**

Pour que g soit bijective, il faut une et une seule solution de l'équation $y = g(x)$ puisque $g(x) = f(x)$.

Les solutions sont

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y}}{2}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4y}}{2}.$$

On peut vérifier que $x_2 - \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4y} - 1}{2} \geq 0 \Rightarrow x_2 \geq \frac{1}{2}$, **0.5pt** et

que $x_1 - \frac{1}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y} - 1}{2} \leq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{1}{2}$ **0.5pt**. Ce dernier est exclu

0.5pt car il n'est pas dans $\left[\frac{1}{2}; \infty[$. Donc g est bijective.