

Nom : -----

Prénom : -----

Date de Naissance : -----

Département de Mathématiques

21/06/2018

Faculté des Sciences

Rattrapage Algèbre 1

Université Aboubeker BELKAID-Tlemcen

Durée : 1h-30'

(4pts) EXERCICE 1 : Soient A , B et C trois sous ensembles d'un ensemble E et soit le sous ensemble noté par $\text{non}(A)$ le complémentaire de A dans E .

1- Montrer que $(A \cap B) \cap \text{non}(A \cap C) = (A \cap B) \cap \text{non}(C)$.

2- Dédurre que $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$.

$$1- (A \cap B) \cap \text{non}(A \cap C) = (A \cap B) \cap (\text{non}(A) \cup \text{non}(C)) \quad 0.5$$

$$= (A \cap B \cap \text{non}(A)) \cup (A \cap B \cap \text{non}(C)) \quad 0.5 = A \cap B \cap \text{non}(C)$$

2- Avant tout, il faut remarquer que si on permute B et C dans l'équation de la question 1-, on aura :

$$(A \cap C) \cap \text{non}(A \cap B) = A \cap C \cap \text{non}(B). \quad 0.5$$

D'où :

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B)) \quad 0.5$$

$$= ((A \cap B) \cap \text{non}(A \cap C)) \cup ((A \cap C) \cap \text{non}(A \cap B))$$

$$= (A \cap B \cap \text{non}(C)) \cup (A \cap C \cap \text{non}(B)) \quad 0.5$$

$$= A \cap ((B \cap \text{non}(C)) \cup (C \cap \text{non}(B))) \quad 0.5$$

$$= A \cap ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) = A \cap (B \Delta C). \quad 0.5$$

(6 points) EXERCICE 2: Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x \leq y\}$.

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$.

1- Représenter D dans le plan.

2- a- Montrer que si deux couples de réels (x_1, y_1) et (x_2, y_2) vérifient :

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

alors $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

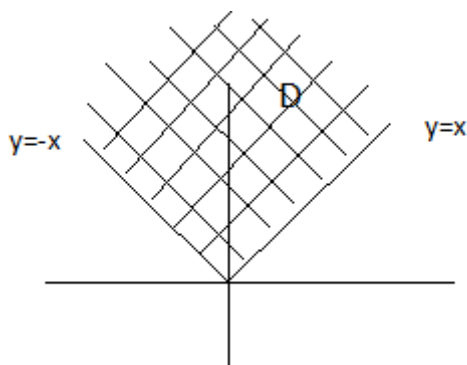
b- Montrer que f est injective.

3- f est-elle surjective ?

1- D est l'intersection des deux parties du plan \mathbb{R}^2 à savoir : **1 pt**

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -x \leq y\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}$.

2- a



$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

La somme des deux équations nous donne facilement : **1 pt**

$x_1 = x_2$ puis $y_1 = y_2$.

Figure sur 0.5

b- f est injective, en effet : $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ ssi

$(x_1^2 + y_1^2, 2x_1y_1) = (x_2^2 + y_2^2, 2x_2y_2)$ ssi $(x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ et $2x_1y_1 = 2x_2y_2)$. **1 pt**

On a : $x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2$, soit

$-(x_1 - y_1)^2 = -(x_2 - y_2)^2$ d'où $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$ **1 pt**

et on a : $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2$, soit

$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, **1 pt**

d'où selon a) on déduit que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

3- f n'est pas surjective, en effet : $(-1, 1)$ est dans \mathbb{R}^2 , mais il n'est l'image d'aucun point (x, y) de l'ensemble D , puisque $x^2 + y^2 > 0$. **0.5 pt**

(4 points) EXERCICE3 : Sur \mathbb{R}^2 on définit la relation binaire \mathcal{R} par :

$(x, y) \mathcal{R} (x', y')$ si et seulement si $x = x'$.

1- \mathcal{R} est-elle une relation d'équivalence ?

2- Que représente, pour \mathcal{R} , l'ensemble des points qui appartiennent à la droite d'équation $x = -2$?

1- \mathcal{R} est réflexive ; en effet :

Pour (x, y) dans \mathbb{R}^2 , on a $x=x$ ssi $(x, y) \mathcal{R} (x, y)$ 0.75

\mathcal{R} est symétrique ; en effet :

Pour $(x, y), (x', y')$ dans \mathbb{R}^2 $(x, y) \mathcal{R} (x', y')$ implique $(x', y') \mathcal{R} (x, y)$, puisque $x=x'$ et donc $x'=x$. 0.75

\mathcal{R} est transitive ; en effet :

Pour $(x, y), (x', y')$ et (x'', y'') dans \mathbb{R}^2 on a : $(x, y) \mathcal{R} (x', y')$ et $(x', y') \mathcal{R} (x'', y'')$ implique $(x, y) \mathcal{R} (x'', y'')$, puisque $x = x' = x''$. 0.75

2- $\text{Cl}((-2, y)) = \{(x, y) \text{ dans } \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (x, y) \mathcal{R} (-2, y)\}$ 0.75

$= \{(x, y) \text{ dans } \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = -2\}$ 0.5

$=$ droite d'équation $x = -2$. 0.5

EXERCICE4 : On munit \mathbb{R}^2 de la relation notée \mathcal{S} par :

$(x, y) \mathcal{S} (x', y')$ si et seulement si $x \leq x'$ et $y \leq y'$.

1- Montrer que \mathcal{S} est une relation d'ordre sur \mathbb{R}^2 .

2- L'ordre est-il total ?

3- Le disque fermé de centre le point O et de rayon 1 a-t-il des majorants ? un plus grand élément ? une borne supérieure ?

1- \mathcal{S} est réflexive : en effet, pour (x, y) dans \mathbb{R}^2 $(x \leq x$ et $y \leq y)$ ssi $(x, y) \mathcal{S} (x, y)$ 0.75

\mathcal{S} est anti-symétrique : en effet, pour $(x, y), (x', y')$ dans \mathbb{R}^2 $x \leq x' \leq x$ et $y \leq y' \leq y$, d'où $x = x'$ et $y = y'$ 0.75

\mathcal{S} est transitive : en effet, pour $(x, y), (x', y')$ et (x'', y'') dans \mathbb{R}^2 on a $(x, y) \mathcal{S} (x', y')$ et $(x', y') \mathcal{S} (x'', y'')$ implique $x \leq x''$ et $y \leq y''$, d'où $(x, y) \mathcal{S} (x'', y'')$. 0.75

2- L'ordre n'est pas total : en effet, en choisissant $(x, y) = (1, 0)$ et $(x', y') = (0, 1)$, on a ni $(1, 0) \leq (0, 1)$ ni $(0, 1) \leq (1, 0)$. 1.5

3- $\mathcal{D} =$ disque fermé $= \{(x, y) \text{ dans } \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq 1\}$. -----
Soit (x, y) un majorant de \mathcal{D} . Alors $(1, 0) \leq (x, y)$ et donc $1 \leq x$. De même $(0, 1) \leq (x, y)$ et donc $1 \leq y$. réciproquement, si (x, y) dans \mathbb{R}^2 est tel que $1 \leq x$ et $1 \leq y$, alors (x, y) ne peut être qu'un majorant de \mathcal{D} . En effet, si (a, b) est dans \mathcal{D} alors $a^2 + b^2 \leq 1$ et donc $a \leq 1$ et $b \leq 1$. ----- 0.75

L'ensemble des majorants de \mathcal{D} est :
 $\{(x, y) \text{ dans } \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 1 \leq x \text{ et } 1 \leq y\}$. 0.5

\mathcal{D} n'admet pas de plus grand élément puisqu'aucun majorant de \mathcal{D} n'est dans \mathcal{D} . 0.5

De l'ensemble des majorants de \mathcal{D} , on peut déduire le plus petit des majorants = borne supérieure et qui est le point $(1, 1)$. 0.5

FIN