Université Badji Mokhtar Annaba,
Faculté des Sciences
Département M.I

Année 2019/2020

Examen d'algèbre I

Exercice 1. Parmi les propositions suivantes, déterminer celles qui sont vrais ou fausse tout en justifiant votre réponse.

1. $\exists\, x \in \mathbb{N},\ 2 < x < 4$

2. $\forall\, a,\ b\ \in \mathbb{R}_+$, si: $\frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1} \Rightarrow a = b$

3. Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ est dérivable.

4. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\, p \in \mathbb{N}$ tel que $n\,(n+1) = 2p$.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^2$. On définit sur E une relation binaire notée $\Re$ par:

$$(a, b)\,\Re\,(c, d) \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } (c, d) = (\lambda a, \lambda b)\,.$$

1. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

2. Déterminer la classe d'équivalence de $(1, 2)$.

Exercice 3. Soit $G = \mathbb{R}$. On définit sur G la loi de composition interne notée $*$ par

$$\forall\, a,\ b \in G,\ a * b = a + b + \frac{1}{6}$$

1. Montrer que $*$ est une loi commutative

2. Montrer que $(G,\ *)$ est un groupe.

3. Soit

$$\begin{array}{ccc} f & : & (G,\ *) \longrightarrow (\mathbb{R},\ +) \\ x & \longrightarrow & 3x + \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Montrer que f est un isomorphisme de groupe..

Exercice 4. Calculer le *pgcd* de $A = X^4 - 1$ et $B = X^3 - 1$.

Pr. A. Djebabla

Corrigé

Exercice 1. Parmi les propositions suivantes, déterminons celles qui sont vrais ou fausse tout en justifiant les réponses.

1. $\exists\, x \in \mathbb{N},\ 2 < x < 4.$

Cette proposition est vraie car pour $x = 3 \in \mathbb{N}$, on a $2 < 3 < 4$ → 1pt

2. $\forall\, a,\ b\ \in \mathbb{R}_+$, si: $\frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1} \Rightarrow a = b.$

Cette proposition est vraie, en utilisant le raisonnement par l'absurde. Suppons que $a \neq b$ et $\frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1}$, alors,

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+1} &= \frac{b}{b+1} \Rightarrow a\,(b+1) = b\,(a+1) \\ &\Rightarrow ab + a = ba + b \\ &\Rightarrow a = b \end{aligned}$$

d'où la contradiction avec le fait que $a = b$. → 1,5 pts

3. Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ est dérivable.

Cette proposition est fausse car la fonction $|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$. → 1pt

4. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\, p \in \mathbb{N}$ tel que $n\,(n+1) = 2p.$

Cette proposition est vraie, en utilise le raisonnement par récurrence.

Pour $n = 0$, il existe un $p = 0$ tel que $0.\,(0+1) = 2.0$ (Vraie)
Pour $n = 1$, il existe un $p = 1$ tel que $1.\,(1+1) = 2.1.$(Vraie)

Supposons que la proposition est vraie pour n est on la démontre pour $n+1$. Alors,

$$\begin{aligned} (n+1)\,(n+2) &= n\,(n+1) + 2\,(n+1) \\ &= 2p + +2\,(n+1) \\ &= 2\,(p+n+1) = 2p'. \end{aligned}$$

D'où, il existe un $p' \in \mathbb{N}$ tel que la proposition est vraie pour $n+1$. → 1,5 pts

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^2$. On définit sur E une relation binaire notée $\Re$ par:

$$(a,b)\,\Re\,(c,d) \Leftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } (c,d) = (\lambda a, \lambda b)\,.$$

1. Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence.

a. $\Re$ est réflexive car $(a,b)\,\Re\,(a,b)$ pour $\lambda = 1$. → 1pt

b. $\Re$ est symétrique car si $(a,b)\,\Re\,(c,d)$ alors, $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $(c,d) = (\lambda a, \lambda b)$, d'où $c = \lambda a$ et $d = \lambda b$, donc

$$a = \frac{1}{\lambda}c \text{ et } b = \frac{1}{\lambda}d$$

ainsi il existe un $\lambda' = \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}^*$ tel que $(a,b) = (\lambda' c, \lambda' d)$. D'où $(c,d)\,\Re\,(a,b)$ → 1pt

c. $\Re$ est transitive car si

$$\begin{cases} (a,\ b)\,\Re\,(c,\ d) \Rightarrow\ \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } (c,d) = (\lambda a, \lambda b) \\ (c,\ d)\,\Re\,(e,\ f) \Rightarrow\ \lambda' \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } (e,f) = (\lambda' c, \lambda' d)\,, \end{cases}$$

donc, $(e,f) = (\lambda' c, \lambda' d) = (\lambda'\lambda a,\ \lambda'\lambda b)$. D'où il existe un $\lambda" = \lambda'\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $(a,\ b)\,\Re\,(e,\ f)$. → 1pt

2. Déterminons la classe d'équivalence de $(1,2)$.

La classe d'équivalence de l'élément $(1,2)$ est

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{(1,2)}} &= \left\{(c,d) \in \mathbb{R}^2/\ (1,2)\,\Re\,(c,d)\right\} \\ &= \left\{(c,d) \in \mathbb{R}^2/\ \exists\ \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } (c,d) = (\lambda, 2\lambda)\right\} \end{aligned}$$

donc, $c = \lambda$ et $d = 2\lambda$. D'où

$$\dot{\widehat{(1,2)}} = \{\lambda\,(1,2)\ /\ \lambda \in \mathbb{R}^*\}\,.$$ → 1pt

Exercice 3. Soit $G = \mathbb{R}$. On définit sur G la loi de composition notée $*$ par

$$\forall a,\ b \in G,\ a * b = a + b + \frac{1}{6}$$

1. La commutativité: Soit $a,\ b \in G,$ alors,

$$a * b = a + b + \frac{1}{6} = b + a + \frac{1}{6} = b * a. \longrightarrow 1pt$$

Doù la commutativité.

2. Montrons que $(G,\ *)$ est un groupe.

a. L'associativité:

Soit $a,\ b,\ c \in G,$ alors, d'une part

$$a * (b * c) = a * \left(b + c + \frac{1}{6}\right) = a + b + c + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = a + b + c + \frac{1}{3}. \rightarrow 0{,}75\text{ pts}$$

D'autre part

$$(a * b) * c = \left(a + b + \frac{1}{6}\right) * c = a + b + c + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = a + b + c + \frac{1}{3}. \rightarrow 0{,}75\text{ pts}$$

D'où l'associativité.

b. L'élément neutre. Comme la loi est commutative il suffit de démontrer l'existence de l'élément neutre uniquement à gauche ou à droite.

$$a * e = a \Leftrightarrow a + e + \frac{1}{6} = a \Rightarrow e = -\frac{1}{6} \in G. \longrightarrow 1{,}5\text{ pts}$$

c. L'élément symétrique: Soit $a \in G$, alors il existe un $a' \in G$ tel que $a * a' = e = -\frac{1}{6}$. Alors

$$\begin{aligned} a * a' &= a + a' + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \\ &\Rightarrow a' = -a - \frac{1}{3} \in G. \longrightarrow 1pt \end{aligned}$$

2. Soit

$$\begin{aligned} f &: (G,\ *) \to (\mathbb{R},\ +) \\ x &\to 3x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Montrons que f est un isomorphisme de groupe.

a. f est un homomorphisme

Soit $x,\ y \in G$, alors,

$$\begin{aligned} f(x*y) &= 3(x*y)+\frac{1}{2} \\ &= 3\left(x+y+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}=\left(3x+\frac{1}{2}\right)+\left(3y+\frac{1}{2}\right) \\ &= f(x)+f(y). \end{aligned}$$ → 1pt

b. f est bijective

1. L'injection. Soit $x,\ y \in G$, alors

$$f(x)=f(y) \Leftrightarrow 3x+\frac{1}{2}=3y+\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=y. \text{ d'où l'injection}$$ → 1pt

2. La surjection: Soit $y \in \mathbb{R}$, alors, on démontre qu'il existe un $x \in G$ tel que $f(x)=y$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= y \Leftrightarrow 3x+\frac{1}{2}=y \\ &\Leftrightarrow\ x=\frac{y}{3}-\frac{1}{6} \in G. \end{aligned}$$

D'où la surjection. De 1 et 2 on déduit que f est une bijection. → 1pt

Exercice 4. Calculons le pgcd de $A=X^4-1$ et $B=X^3-1$. En utilisant l'algorithme d'Euclide donné par

$$\begin{cases} R_{n-1}=R_nQ_n+R_{n+1},\ n\geq 1 \\ R_0=A, \quad \text{et } R_1=B. \end{cases}$$ → 0,5 pts.

Alors, pour $n=1$, on a

$$R_0=R_1Q_1+R_2 \Leftrightarrow A=BQ_1+R_2 \Leftrightarrow \underbrace{X^4-1}_{=A}=\underbrace{(X^3-1)}_{=B}.\underbrace{X}_{=Q_1}+\underbrace{X-1}_{=R_2}$$ → 1pt

Comme $R_2\neq 0$, on continu pour $n=2$, c'est à dire

$$R_1=R_2Q_2+R_3 \Leftrightarrow \underbrace{X^3-1}_{=R_1}=\underbrace{(X-1)}_{=R_2}.\underbrace{(X^2+X+1)}_{=Q_2}+\underbrace{0}_{=R_3}$$ → 1pt

.

Comme $R_3=0$, alors le *pgcd* est le denier reste non nul c'est à dire $pgcd\,(A,\ B)=X-1$ → 0,5pt